UDVASH Calculus Note

অধ্যায়-০৯: অন্তরীকরণ

গুরুত্বপূর্ণ প্রাথমিক আলোচনা

- **লিমিট:**

কোনো বিন্দু $x = a$ তে কোনো ফাংশন $f(x)$ এর লিমিট হল এমন একটি সংখ্যা l যেন x কে a এর 'যথেষ্ট কাছাকাছি' এনে $f(x)$ কে l এর 'যতখুশি তত কাছে' আনা যায়। তখন একে $\lim_{x\to a} f(x) = l$ লিখে প্রকাশ করা হয়।

অর্থাৎ, $\lim_{x\to a} f(x) = l$ এর মানে হল যেকোনো $\epsilon > 0$ এর জন্য এরকম $\delta > 0$ আছে যেন যদি $0 < |x-a| < \delta$ হয়, তাহলে $|f(x) - l| < \epsilon$ হবে।

- **কোন বিন্দুতে লিমিটের অস্তিত্ব থাকার শর্ত:**

কোন বিন্দুতে কোন ফাংশনের লিমিট $\lim_{x\to a} f(x)$ অস্তিত্বশীল হবে যদি $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$ হয় [এর অর্থ ফাংশনের ডান সীমা = ফাংশনের বাম সীমা] $\lim_{x\to a} f(x)$ এর ডান সীমা হল x এর মান ক্রমান্বয়ে a হতে অনেক বড় সংখ্যা হতে a এর কাছাকাছি আসলে [অর্থাৎ x অক্ষের ধনাত্মক অংশ হতে ঋণাত্মক অংশের দিকে অগ্রসর হলে প্রাপ্ত সীমা] যে সীমা পাওয়া যায়। অর্থাৎ $\lim_{h\to 0} f(a+h), h > 0$ এর মান। একে $\lim_{x\to a^+} f(x)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অপরদিকে $\lim_{x\to a^-} f(x)$ এর বাম সীমা হল x এর মান ক্রমান্বয়ে a অপেক্ষা ক্ষুদ্র মান হতে a এর দিকে অগ্রসর হলে যে সীমা পাওয়া যায় [অর্থাৎ x অক্ষের ঋণাত্মক অংশ হতে ধনাত্মক অংশের দিকে অগ্রসর হলে প্রাপ্ত সীমা] অর্থাৎ $\lim_{h\to 0} f(a-h)$ যেখানে $h > 0$। একে $\lim_{x\to a^-} f(x)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এই দুই লিমিট একই হলে কেবল $\lim_{x\to a} f(x)$ এ অস্তিত্ব থাকবে। যেমন $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ অস্তিত্বশীল নয় কেননা $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$ কিন্তু $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = 1$
[$\because x < 0$ হলে $|x| = -x$]

একইভাবে $\lim_{x\to 0} \frac{|\sin x|}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos 2(x-1)}}{x-1}$ ইত্যাদি অস্তিত্বশীল নয় [উল্লেখ্য এক্ষেত্রে একদিকবর্তী সীমা অর্থাৎ $\lim_{x\to a^+} f(x)$ কিংবা $\lim_{x\to a^-} f(x)$ অস্তিত্বশীল]

- যদি $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ হয়, তাহলে $f(x)$ ফাংশনটি $x = a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হবে। সুতরাং $f(x)$ ফাংশনটি $x = a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হবার শর্ত: $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

- $\lim_{x\to a} f(x)$ বিদ্যমান $\Rightarrow \lim_{x\to a^-} f(x)$ এবং $\lim_{x\to a^+} f(x)$ উভয়েই বিদ্যমান এবং এদের মান সমান।

- **লিমিটের সাধারণ ধর্মাবলি:**

যদি $\lim_{x\to a} f(x) = l$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = m$ হয় তবে,

(i) $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = l + m$

(ii) $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = l - m$

(iii) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$ [যদি $m \neq 0$ হয়]

(iv) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$

- $\sin x$, $\cos x$ ইত্যাদি সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের লিমিট নির্ণয় করতে x কে অবশ্যই রেডিয়ানে পরিমাপ করতে হবে।

- **অন্তরীকরণ:**

(i) কোন ফাংশন $f(x)$ এর অন্তরক সহগ $f'(x)$ দ্বারা এরূপ একটি ফাংশন বোঝানো হয় যার মান $y = f(x)$ বক্ররেখার x বিন্দুতে বক্ররেখার ঢালের সমান। তাই $y = f(x)$ বক্ররেখাস্থ দুইটি পরস্পর সন্নিকটস্থ বিন্দু $(x, f(x))$ ও $(x+h, f(x+h)$ হলে, $(x, f(x))$ বিন্দুতে বক্ররেখার ঢাল $= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$

(ii) $\sin x$, $\cos x$ ইত্যাদি ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয় করার সময় x কোনটি রেডিয়ানে পরিমাপিত মনে করা হয়। x কোনটি অন্য কোন একক থাকলে তাকে রেডিয়ানে পরিণত করে নিতে হবে।

(iii) কোন বিন্দুতে অন্তরকের মান নির্ণয়যোগ্য হবে যদি $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ লিমিটটি অস্থিত্বশীল হয়।
অর্থাৎ, $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$]

- **গুরুমান ও লঘুমান:**

$y = f(x)$ ফাংশনের গুরুমান বা লঘুমান পাওয়া যাবে যদি $f'(x) = 0$ হয়। সেক্ষেত্রে $f''(x) < 0$ এর জন্য গুরুমান এবং $f''(x) > 0$ এর জন্য লঘুমানা পাওয়া যাবে।

বিঃদ্রঃ কোন ক্ষেত্রে $f''(x) = 0$ হলে সেক্ষেত্রে $f'''(x)$ নির্ণয় করে তাতে উক্ত মান বসাতে হবে। এটির মানও শূন্য হলে উপরোক্ত পদ্ধতি অনুসারে অগ্রসর হতে হবে যতক্ষণ না $f''(x)$ এর মান অশূন্য কোন সংখ্যা না হয়। এই $f^n(x)$ এর জন্য n এর মান জোড়া হলে সেক্ষেত্রে x এর উক্ত মান $f(x)$ এর গুরু না লঘু মান হয় তা $f''(x)$ এর ক্ষেত্রের মত অর্থাৎ পূর্বের মত নির্ধারিত হবে। কিন্তু n বিজোড় হলে এটি ফাংশনটির গুরু বা লঘু কোন মান হবে না। একটি ফাংশনের লেখচিত্রে x – axis বরাবর অগ্রসর হলে দেখতে পাও এর উপর অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল +ve হতে কমতে কমতে একটি বিন্দুতে এসে –ve হচ্ছে তবে ঐ বিন্দুতে ফাংশনটির একটি গুরুমান থাকবে। এর বিপরীত হলে লঘুমান থাকবে।

দ্রষ্টব্য: মনে রাখবে, লঘু / গুরুমান মানেই ক্ষুদ্রতম / বৃহত্তম মান নয়।

টাইপভিত্তিক সমস্যা ও সমাধান

লিমিটের যেকোন Problem Solve করার আগে দেখে নিবে যে ফাংশনে মান বসালে বাস্তব মান পাওয়া যায় কি না। পাওয়া গেলে simplify না করে সরাসরি মান বসানো যায়।

Type-01: লিমিটের অস্তিত্বশীলতা কেন্দ্রিক

➲ **Concept:** কোন বিন্দুতে লিমিট অস্তিত্বশীল হবে যদি ঐ বিন্দুতে Left Hand Limit (LHL) = Right Hand Limit (RHL) হয়। অর্থাৎ $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$

Example-01: $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}} = ?$

Sol^n: Right hand limit $= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{\sqrt{2}\sin\frac{h}{2}}$ [Let, $x = 0 + h \therefore h \to 0$] $= \sqrt{2}$

Left hand limit $= \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{h\to 0} \frac{0-h}{\sqrt{1-\cos h}} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{\sqrt{2}\sin\frac{h}{2}} = -\sqrt{2}$

$\therefore$ RHL $\neq$ LHL $\therefore$ লিমিটের মান অস্তিত্বশীল নয়।

Example-02: $\lim_{x\to 0} \frac{e^{|x|}-1}{x} = ?$

Sol^n: L. H. L. $= \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{|x|}-1}{x} = -1$; R. H. L. $= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{|x|}-1}{x} = 1$ $\because$ LHL $\neq$ RHL $\therefore$ Limit অস্তিত্বশীল নয়। (Ans.)

Type-02: বিচ্ছিন্নতা ও অবিচ্ছিন্নতা (Continuity & Discontinuity)

➲ **Concept:** কোন বিন্দু $(x = a)$ তে কোনো ফাংশন $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন হবে যদি ঐ বিন্দুতে $LHL = RHL = f(a)$ হয়। অর্থাৎ $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Example-03: শূন্য ব্যতীত **k** এর এমন একটি মান নির্ণয় কর যা উল্লেখিত ফাংশনকে $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন করবে। তোমার উত্তরের যৌক্তিকতা ব্যাখ্যা কর। $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan kx}{x} ; x < 0 \\ 3x + 2k^2 ; x \geq 0 \end{cases}$ **[BUET'14-15]**

Sol^n: দেওয়া আছে, $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan kx}{x} ; x < 0 \\ 3x + 2k^2 ; x \geq 0 \end{cases}$

1st part: $L.H.L = \lim_{x \to 0^-} \frac{\tan kx}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\tan kx}{kx} \times k = k$

$R.H.L = \lim_{x \to 0^+} (3x + 2k^2) = 2k^2$

আবার, $f(0) = 3 \times 0 + 2k^2 = 0 + 2k^2 = 2k^2$

$x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ বা ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন হবে যদি, $2k^2 = k \ \therefore k = 0, \frac{1}{2}$; So, $k = \frac{1}{2}$ $[\because k \neq 0]$

2nd part: যদি $k = \frac{1}{2}$; $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan \frac{x}{2}}{x} ; x < 0 \\ 3x + \frac{1}{2} ; x \geq 0 \end{cases}$

Now, $\lim_{x \to 0^-} \frac{\tan \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \to 0^+} \left(3x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ and, $f(0) = \frac{1}{2}$

$\therefore \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$.

$k = \frac{1}{2}$ হলে ফাংশনটি $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হবে।

Example-04: $f(x) = \begin{cases} -x ; x \leq 0 \\ x ; 0 < x \leq 1 \\ 2 - x ; 1 < x \leq 2 \\ 1 ; x > 2 \end{cases}$ $x = 0$, $x = 1$ & $x = 2$ বিন্দুতে ফাংশনটির বিচ্ছিন্নতা, অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা কর।

Sol^n: $x = 0$ বিন্দুতে

$f(0) = 0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0 - h) = \lim_{h \to 0} (0 - h) = 0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0 + h) = \lim_{h \to 0} (0 + h) = 0$

যেহেতু $f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x)$

সুতরাং, $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন।

$x = 1$ বিন্দুতে

$f(1) = 1$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(1 - h) = \lim_{h \to 0} (1 - h) = 1$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(1 + h) = \lim_{h \to 0} \{2 - (1 + h)\} = 1$

$\because f(1) = L.H.L = R.H.L$

$\therefore$ ফাংশনটি $x = 1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

$x = 2$ বিন্দুতে

$f(2) = 2 - 2 = 0$

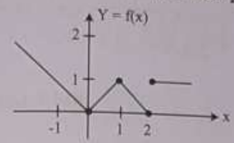
$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(2 - h) = \lim_{h \to 0} [2 - (2 - h)] = 0$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(2 + h) = 2$

$\because f(2) = \lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$

$\therefore x = 2$ বিন্দুতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন।

★ গ্রাফ আঁকতে পারলে আরও সহজে বুঝা যায় উপরিউক্ত ফাংশনের গ্রাফ:



Type-03: বাস্তব মান বসিয়ে সরাসরি লিমিটের মান নির্ণয়

➲ **Concept:** (i) $\underset{x \to a}{Lt} f(x)$; (ii) বীজগাণিতিক Function বা ত্রিকোণমিতিক function

নিয়ম: উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে সরলীকরণ করতে হবে অথবা $x = a + h$ ধরতে হবে, $[a = \text{constant}]$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

Example-05: $\lim_{x \to \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$ এর মান হল- **[BUET'11-12]**

Sol^n: ধরি, $x = h + \frac{\pi}{2}$; $x \to \frac{\pi}{2}$ হলে $h \to 0$

$\lim_{x \to \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{h \to 0} \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + h\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + h\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos h}{-\sin h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{-2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{h}{2}} = \lim_{h \to 0} -\tan\frac{h}{2} = 0$

Example-06: মান নির্ণয় কর **(Evaluate)** : $\lim_{x \to \pi/2} \frac{1 - \sin x}{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}$ **[RUET'05-06,CUET'11-12,13-14]**

Sol^n: $\lim_{x \to \pi/2} \frac{1 - \sin x}{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}$ Let, $\frac{\pi}{2} - x = \theta$ $\because x \to \frac{\pi}{1} \therefore \theta \to 0$

$= \lim_{\theta \to 0} \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\theta^2} = \lim_{\theta \to 0} \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2} = \lim_{\theta \to 0} \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2} = \lim_{\theta \to 0} \times \left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2 \times \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$

Example-07: $\underset{x \to 2}{Lt} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ এর মান কত?

Sol^n: ধরি, $x = 2 + h$

যেহেতু $x \to 2 \ \therefore h \to 0$

$\therefore \underset{h \to 0}{Lt} \frac{(2+h)^3 - 8}{2 + h - 2} = \underset{h \to 0}{Lt} \frac{8 \times 12h + 6h^2 + h^3 - 8}{2 + h - 2} = \underset{h \to 0}{Lt} (12 + 6h + h^2) = 12$ (Ans.)

অথবা, $\underset{x \to a}{Lt} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$ এর ব্যবহার করা যেতে পারে।

<u>Alternate Solution:</u> উৎপাদকে বিশ্লেষণ:

We know, $\underset{x \to a}{Lt} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} = \underset{x \to 2}{Lt} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)} = \underset{x \to 2}{Lt} (x^2 + 2x + 4) = 2^2 + 2.2 + 4 = 12$

Type-04: হরে বর্গমূল সংবলিত পদটির অনুবন্ধী দিয়ে গুণন করে লিমিট নির্ণয়

➲ **Concept:** (i) $\frac{0}{0}$ form (ii) বীজগাণিতিক function (iii) লব বা হর উভয়টিতে Sqrt $(\sqrt{\ })$ থাকবে।

নিয়ম: অনুবন্ধীকরণ করে এমন বানাতে হবে যেন limit বসানো যায়।

Example-08: সীমাস্থ মান নির্ণয় কর: $\underset{x \to 0}{Lt} \frac{2(b - \sqrt{b^2 + x^2})}{x^2}$ **[RUET'12-13]**

Sol^n: $\underset{x \to 0}{Lt} \frac{2(b - \sqrt{b^2 + x^2})}{x^2} = \underset{x \to 0}{Lt} \frac{2(b^2 - b^2 - x^2)}{x^2(b + \sqrt{b^2 + x^2})} = \frac{-2}{(b + \sqrt{b^2 + 0})} = -\frac{1}{b}$

Example-09: $\underset{x \to 0}{Lt} \frac{\sqrt{1 - 4x} - \sqrt{1 - 5x}}{x} = \underset{x \to 0}{Lt} \frac{x}{x\left(\sqrt{1 - 4x} + (\sqrt{1 - 5x})\right)} = \frac{1}{2}$ (Ans.)

[হর ও লবকে $(\sqrt{1 - 4x} + \sqrt{1 - 5x})$ দ্বারা গুণ করে]

Type-05: x এর মান অসীমের দিকে ধাবিত হলে লিমিটের মান নির্ণয়

- **Concept:** (i) $\underset{x\to\infty}{\mathrm{Lt}}\ f(x)$ (ii) বীজগাণিতিক ফাংশন

নিয়ম: চলকের সর্বোচ্চ ঘাত বিশিষ্ট রাশি দ্বারা লব ও হরকে ভাগ করে limit বসাতে হবে।

$|x| < 1$ হলে, $[-1 < x < 1]$

$\lim_{n\to\infty} x^n = 0$

Example-10: $\lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}+7^{n+1}}{5^n-7^n}$ এর মান হল- [BUET'12-13]

Sol^n: $\lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}+7^{n+1}}{5^n-7^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{7^{n+1}\left[\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}+\left(\frac{7}{7}\right)^{n+1}\right]}{7^{n+1}\left[\left(\frac{5}{7}\right)^{n}\frac{1}{7}-\frac{7^n}{7^n}\cdot\frac{1}{7}\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}+1\right]}{\left[\left(\frac{5}{7}\right)^{n}\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\right]}$

$= \frac{0+1}{0.\frac{1}{7}-\frac{1}{7}}$ [$\because |r| < 1$ হলে $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$] $= -7$

Example-11: মান নির্ণয় কর: $\underset{x\to\infty}{\mathrm{Lim}} \frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}$ [RUET'17-18]

Sol^n: $\underset{h\to 0}{\mathrm{Lim}} \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{h}\right)^2+2}}{3\frac{1}{h}-6} = \underset{h\to 0}{\mathrm{Lim}} \frac{\frac{\sqrt{1+2h^2}}{h}}{\frac{3-6h}{h}}$ [ধরি, $h = \frac{1}{x} \therefore x = \frac{1}{h}; x\to\infty$ হলে, $h\to 0$]

$= \underset{h\to 0}{\mathrm{Lim}} \frac{\sqrt{1+2h^2}}{3-6h} = \frac{\sqrt{1+2\times 0}}{3-6\times 0} = \frac{1}{3}$ (Ans.)

Example-12: $\lim_{x\to\infty} 2^x \sin\frac{a}{2^x}$ এর মান কোনটি? [SUST'16-17]

Sol^n: $\lim_{x\to\infty} 2^x \sin\frac{a}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{a}{2^x}\right)}{\frac{a}{2^x}}\cdot a = a$

Example-13: $\underset{x\to\infty}{\mathrm{Lt}} \frac{ax^2+bx+c}{lx^2+mx+n}$ এর মান কত? [DU'17-18]

Sol^n: $\underset{x\to\infty}{\mathrm{Lt}} \frac{\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}{\left(l+\frac{m}{x}+\frac{n}{x^2}\right)} = \frac{a+0+0}{l+0+0} = \frac{a}{l}$ (Ans.)

Example-14: $\lim_{x\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+x^2}{x^3+x^2+x+1}$ এর মান কত?

Sol^n: $\lim_{x\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+x^2}{x^3+x^2+x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(x+1)(2x+1)}{6(x^3+x^2+x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+3x^2+x}{6x^3+6x^2+6x+6} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{6+\frac{6}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{6}{x^3}} = \frac{2+0+0}{6+0+0+0} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Example-15. $\lim_{x\to\infty} \left(\left(\sqrt{a^2x^2+ax+1}\right)-\sqrt{a^2x^2+1}\right)$

Sol^n: $\lim_{x\to\infty} \left(\left(\sqrt{a^2x^2+ax+1}\right)-\sqrt{a^2x^2+1}\right) = \lim_{x\to\infty} \left\{\frac{\sqrt{a^2+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{a^2+\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}}\right\}$ [$\because \frac{0}{0}$ আকারে]

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{a^2+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}}}\cdot\left(-\frac{a}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)-\frac{1}{2\sqrt{a^2+\frac{1}{x^2}}}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)}{\frac{-1}{x^2}} = \frac{1}{2}$ (Ans.)

Example-16. $\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{8}\right)\cdots\cdots\cos\left(\frac{x}{2^n}\right) = ?$

Sol^n: $\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{8}\right)\cdots\cdots\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}.2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cdots\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)\left(\cos\frac{3}{4}x+\cos\frac{x}{4}\right)\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cdots\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}(\cdots\cdots) = 0$ (Ans.)

Type-06: $\underset{x\to a}{\mathrm{Lt}} \frac{x^n-a^n}{x-a}$ আকারের লিমিটের মান নির্ণয়

- **Concept:** (i) $\underset{x\to a}{\mathrm{Lt}} \frac{x^n-a^n}{x-a}$ আকারে থাকবে। সূত্র: $\underset{x\to a}{\mathrm{Lt}} \frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}$

$\lim_{n\to a} \frac{x^m-a^m}{x^n-a^n} = \frac{m}{n}a^{(m-n)}$

Example-17: $\underset{x\to b}{\mathrm{Lt}} \frac{x^{\frac{9}{2}}-b^{\frac{9}{2}}}{x^{\frac{5}{2}}-b^{\frac{5}{2}}} = \underset{x\to b}{\mathrm{Lt}} \frac{\frac{x^{\frac{9}{2}}-b^{\frac{9}{2}}}{x-b}}{\frac{x^{\frac{5}{2}}-b^{\frac{5}{2}}}{x-b}} = \frac{\frac{9}{2}b^{\frac{9}{2}-1}}{\frac{5}{2}b^{\frac{5}{2}-1}} = \frac{9}{5}b^2$ [সূত্র প্রয়োগ করে]

Example-18: $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[p]{x}-1}{\sqrt[q]{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{\sqrt[p]{x}-1}{x-1}}{\frac{\sqrt[q]{x}-1}{x-1}}$ [$\because x\to 1 \therefore x\neq 1$] $= \frac{\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{p}-1}}{\lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{q}-1}}{x-1}} = \frac{\frac{1}{p}(1)^{\frac{1}{p}-1}}{\frac{1}{q}(1)^{\frac{1}{q}-1}} = \frac{q}{p}$

Type-07: সূচক বা লগারিদম

- **Concept:** ধারায় প্রকাশ করে বা সূত্রের সাহায্যে e এর ঘাত হিসেবে প্রকাশ হবে অথবা L'Hospital প্রয়োগ করতে হবে।

$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots\infty$

$e^{-x} = 1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots\infty$

$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots\infty$

$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\cdots\infty$

$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots\infty$

Example-19: $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$ এর মান নির্ণয় কর। [BUET'17-18]

Sol^n: $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}\cdot 2x+\sin x}{2x}$ [$\frac{0}{0}$ আকার, L' Hospital Rule]

$= \lim_{x\to 0}\left\{e^{x^2}\cdot\frac{2x}{2x}+\frac{\sin x}{2x}\right\} = \lim_{x\to 0} e^{x^2}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = e^0+\frac{1}{2}\cdot 1\left[\because \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\right]$

$= 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ (Ans.)

Example-20: প্রমাণ কর যে, $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$ [RUET'08-09, KUET'08-09]

Sol^n: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots\alpha-1\right]$ [e^x কে অসীম ধারায় বিস্তৃত করিয়া]

$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots\infty\right] = \lim_{x\to 0}\left[1+\frac{x}{\underline{|2}}+\frac{x^2}{\underline{|3}}+\cdots\cdots\infty\right] = 1 \therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

Example-21: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\ln(e^x\cos x)}{x\sin x}$ এর মান কোনটি? [KUET'17-18]

Sol^n: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\ln(e^x\cos x)}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\ln e^x-\ln\cos x}{x\sin x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x-\ln(\cos x)}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{\sin x}{\cos x}}{x\cos x+\sin x}$ [L. Hospital] $= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-0+\sec^2 x}{-x\sin x+\cos x+\cos x} = \frac{-0+1}{-0+1+1} = \frac{1}{2}$ [L. Hospital]

Example-22: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{m\tan x}-1}{m(\tan x+\sin x)}$ এর মান কত? [SUST'15-16]

Sol^n: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{m\tan x}-1}{m(\tan x+\sin x)}$ এর লব ও হরে লিমিট প্রয়োগ করলে ∞ আকার আসে,

ফলে L' Hospital's rule প্রয়োগ করে পাই, $\lim_{x\to 0}\frac{me^{m\tan x}.\sec^2 x}{m(\sec^2 x+\cos x)}$

এবার, লব ও হরের লিমিট প্রয়োগ করে অর্থাৎ, $x = 0$ বসিয়ে পাই, $\lim_{x\to 0}\frac{me^{m\tan x}.\sec^2 x}{m(\sec^2 x+\cos x)} = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$

Example-23: $\underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\mathrm{Lt}}\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}} = \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\mathrm{Lt}}\frac{\cos x+\sin x}{1}$ [L. Hospital] $= \cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Type-08: মিশ্র ফাংশন

Concept: এসব ক্ষেত্রে বীজগাণিতিক ও ত্রিকোণমিতিক সূত্রের মাধ্যমে সাজিয়ে ফেলতে হবে। তারপর লিমিট এর সূত্র প্রয়োগ করতে হবে।

Example-24: মান নির্ণয় কর : $\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{x^3}$ [RUET'08-09]

Sol^n: $\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{x^3}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-(3\sin x-4\sin^3 x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}4\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3=4\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3=4.1=4$ [Ans.]

Example-25: মান নির্ণয় করঃ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{3x^2}$ [CUET'15-16, BUTex'07-08,15-16]

Sol^n: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{3x^2}$ [$\frac{0}{0}$ আকৃতি] $=\lim_{x\to 0}\frac{7\sin 7x}{6x}$ [$\frac{0}{0}$ আকৃতি] $=\lim_{x\to 0}\frac{49\cos 7x}{6}=\frac{49}{6}$

Example-26: "a" এর যে মানের জন্য $\lim_{x\to 0}\frac{a\sin x-3x}{5x}$ এর মান 0 হবে তা হলো- [KUET'14-15]

Sol^n: $\lim_{x\to 0}\frac{a\sin x-3x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cos x-3}{5}$; [L'A'haspital rule] $\frac{a\cos 0-3}{5}=0\Rightarrow a=3$

Example-27. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 7x-\cos 9x}{\cos 3x-\cos 5x}$ [RUET'07-08]

Sol^n: $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 7x-\cos 9x}{\cos 3x-\cos 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 8x\sin x}{2\sin 4x\sin x}=\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{8x}.8x}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}.4x}=2$ (Ans.)

Example-28: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x-\sin x}{\sin 6x}=?$ [DU'15-16]

Sol^n: Using L – Hospital's law: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x-\sin x}{\sin 6x}=\lim_{x\to 0}\frac{7\cos 7x-\cos x}{6\cos x\, 6x}=\frac{7-1}{6}=1$

Example-29. যদি α ও β; $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূল হয় তবে, $\lim_{x\to\alpha}\frac{1-\cos(ax^2+bx+c)}{(x-\alpha)^2}=?$

Sol^n: $\lim_{x\to\alpha}\frac{1-\cos(ax^2+bx+c)}{(x-\alpha)^2}=\lim_{x\to\alpha}\frac{2\sin^2\left(\frac{ax^2+bx+c}{2}\right)}{(x-\alpha)^2}=2\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin^2\left(\frac{a(x-\alpha)(x-\beta)}{2}\right)}{(x-\alpha)^2}=2\lim_{x\to\alpha}\frac{\frac{a^2(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{4}}{(x-\alpha)^2}=\frac{a^2}{2}(\alpha-\beta)^2$ (Ans.)

Example-30. n এর মান কত হলে $\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x-5)}{x^n}$ একটি সান্ত বাস্তব অশূন্য সংখ্যা হবে?

Sol^n: $\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x-5)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-6\cos x+5}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x\sin x+6\sin x}{nx^{n-1}}$ [L'Hospital Rule]

$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos^2 x+2\sin^2 x+6\cos x}{n(n-1)x^{n-2}}$ [L'Hospital Rule]

Putting $x=0$ since the numerator is non-zero, the denominator must be devoid of x.

$\therefore n-2=0\Rightarrow n=2$ (Ans.)

Example-31. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\cos^2 x)}{x^2}=?$

Sol^n: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\cos^2 x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\pi\cos^2 x).\,2\pi\cos x(-\sin x)}{2x}$

$=\pi\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\pi\cos^2 x).\cos x(-\sin x)}{x}=\pi$ (Ans.) [L'Hospital Rule]

Type-09: Exponential Form (Admission পরীক্ষার জন্য খুবই গুরুত্বপূর্ণ)

Concept: সূত্র-01: $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$; সূত্র-02: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

Proof-1: ধরি, $P=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\Rightarrow \ln P=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\Rightarrow \ln P=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)\Rightarrow \ln P=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$

$\Rightarrow \ln P=1\left[\because \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1\right]\Rightarrow \ln P=\ln e\ \therefore P=e\ \therefore \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

Proof-2: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[1+x.\frac{1}{x}+\frac{x(x-1)}{2!}\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\left(\frac{1}{x}\right)^3+\cdots\infty\right]$ [দ্বিপদী উপপাদ্য প্রয়োগ করে]

$=\lim_{x\to\infty}\left[1+1+\frac{x^2-x}{2!x^2}+\frac{x^3-3x^2+2x}{3!x^3}+\cdots\infty\right]=\lim_{x\to\infty}\left[1+1+\frac{1-\frac{1}{x}}{2!}+\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{3!}+\cdots\infty\right]$

$=\left[1+1+\frac{1-0}{2!}+\frac{1-0-0}{3!}+\cdots\infty\right]=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\infty=e$

Example-32. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{x+8}$ এর মান কত? [RUET'10-11]

Sol^n: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{x+8}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^x.\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^8=\lim_{4x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{4x}\right]^{\frac{1}{4}}.\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^8=e^{\frac{1}{4}}.1=e^{\frac{1}{4}}$

Example-33. $\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}(1+kx)^{\frac{1}{x}}$ এর মান- [RUET'12-13,BUTex'12-13]

Sol^n: $\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}(1+kx)^{\frac{1}{kx}k}=\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\left\{(1+kx)^{\frac{1}{kx}}\right\}^k=\left\{\underset{kx\to 0}{\mathrm{Lt}}(1+kx)^{\frac{1}{kx}}\right\}=^k e^k$

Example-34. যদি $0<x<\frac{1}{a}$ হয় তাহলে $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{(bx+c)}{x}}$ এর মান কত? [SUST'17-18]

Sol^n: $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{bx+c}{x}}=\lim_{ax\to 0}(1+ax)^{\left(b+\frac{c}{x}\right)}=\lim_{ax\to 0}(1+ax)^b\cdot\lim_{ax\to 0}(1+ax)^{\frac{ca}{ax}}$

$=(1+0)^b\cdot\left\{\lim_{ax\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{ax}}\right\}^{ca}=1\cdot e^{ca}=e^{ac}$

Example-35. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{2x}$ এর মান কত?

Sol^n: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{2x}=\lim_{5x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{5x}\right]^{\frac{2}{5}}=e^{\frac{2}{5}}$ [$\because x\to\infty\ \therefore 5x\to\infty$]

Example-36. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^x$ এর মান কত?

Sol^n: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{a}{x}}{1+\frac{b}{x}}\right)^x=\frac{\lim_{\frac{x}{a}\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}}\right\}^a}{\lim_{\frac{x}{b}\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{x}{b}}\right)^{\frac{x}{b}}\right\}^b}=\frac{e^a}{e^b}=e^{a-b}$

Example-37: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{-x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

Example-38: $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{\sin x\to 0}\left\{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right\}^{\frac{\sin x}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\sin x}{x^2}}$

ডান দিক হতে অগ্রসর হলে, $\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}e^{\frac{0}{0}}=$ অনির্ণেয়

এবং বাম দিক হতে অগ্রসর হলে, $\lim_{x\to 0^-}e^{-\frac{0}{0}}=$ অনির্ণেয়

$\therefore$ উক্ত সীমার কোন অস্তিত্ব নেই

Type-10: Inverse circular function এর লিমিট নির্ণয়

- **Concept:** (i) Inverse circular function থাকবে ; (ii) বীজগাণিতিক বা ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ; (iii) $\lim\limits_{x\to 0}$ থাকবে

Example-39. মান নির্ণয় কর: $\operatorname*{Lt}\limits_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}$ [RUET'09-10]

Solⁿ: ধরি, $\tan^{-1}x=\theta$ বা, $\tan\theta = x$ যেহেতু $x\to 0$ তাই $\theta\to 0$

$\therefore \operatorname*{Lt}\limits_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}=\operatorname*{Lt}\limits_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\tan\theta}=\operatorname*{Lt}\limits_{\theta\to 0}\frac{1}{\frac{\tan\theta}{\theta}}=\frac{1}{1}=1$ (Ans.)

Example-40. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}5x}{4x}=?$

Solⁿ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}5x}{4x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}5x}{5x}\cdot\frac{5}{4}=\frac{5}{4}$ (Ans.)

Type-11: Sandwich Theorem কেন্দ্রিক

- **Concept:** মনে করি, I ব্যবধিতে a একটি লিমিট বিন্দু এবং I ব্যবধিতে (a ব্যতিত) f, g, h ফাংশনগুলি সংজ্ঞায়িত।

ধরি, I ব্যবধিতে প্রত্যেকটি $x(x\neq a)$ এর জন্য $g(x)\le f(x)\le h(x)$ এবং আরও মনে করি,

$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=L$

তাহলে, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$.

মন্তব্য: (i) g এবং h ফাংশনদ্বয়কে যথাক্রমে f এর নিম্নসীমা ও উর্ধ্বসীমা বলা হয়।

(ii) এখানে I এর মধ্যবর্তী মান a হওয়ার প্রয়োজন নেই। বাস্তবে যদি I এর সর্বশেষ মান a হয়, তাহলে, উপরের লিমিট বাম দিকবর্তী অথবা ডান দিকবর্তী লিমিট।

(iii) অসীম ব্যবধির জন্যও একই বর্ণনা প্রযোজ্য। যেমন: যদি $I=(0,\infty)$ হয়, তাহলে একই সিদ্ধান্ত প্রযোজ্য যখন $\to\infty$.

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}f^n(0)+\cdots\cdots\infty$$

Example-41. $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ নির্ণয় কর।

Solⁿ: লিমিটের বিধি $\lim\limits_{x\to a}(f(x).g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x).\lim\limits_{x\to a}g(x)$ এর মাধ্যমে $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ এর মান নির্ণয় করা সম্ভব নয়, কারণ $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ এর মান অনির্ণেয়।

সাইন ফাংশনের সংজ্ঞানুযায়ী, $-1\le\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le 1 \Rightarrow -x^2\le x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le x^2$ [x^2 দ্বারা গুণ করে]

যেহেতু $\lim\limits_{x\to 0}(-x^2)=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$ অতএব Sandwich Theorem অনুযায়ী $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

Type-12: Mean Value Theorem কেন্দ্রিক

- **Concept:**

যদি f(x) একটি ফাংশন হয় যেন,

(i) f(x) ফাংশনটি [a, b] ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং

(ii) (a, b) ব্যবধিতে f'(x) বিদ্যমান, তাহলে (a, b) ব্যবধির মধ্যে কমপক্ষে একটি বিন্দু c পাওয়া যাবে যেন,

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$, যেখানে $a<c<b$.

Example-42. $f(x)=x(x-2)$ ফাংশনের জন্য [1, 2] ব্যবধিতে একটি বিন্দু $x=c$ নির্ণয় কর যেন, $f'(c)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$ হয়।

Solⁿ: দেওয়া আছে, $f(x)=x(x-2)=x^2-2x$

(i) f(x) একটি বহুপদী। সুতরাং [1, 2] ব্যবধিতে f(x) একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন।

(ii) $f'(x)=2x-2$ যা (1, 2) ব্যবধিতে বিদ্যমান।

তাহলে f(x) ফাংশনটি Mean Value Theorem এর শর্ত পূরণ করে।

$\therefore$ আমরা পাই, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$, যেখানে $a<c<b$

এখানে, $a=1,\ b=2\Rightarrow f(a)=f(1)=1-2=-1$,

যেহেতু $f(x)=x^2-2x$

$f(b)=f(2)=4-4=0$ এবং $f'(c)=2c-2$

$\therefore \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\Rightarrow\frac{0-(-1)}{2-1}=2c-2\Rightarrow 1=2c-2\Rightarrow c=\frac{3}{2}$

$\therefore 1<\frac{3}{2}<2$ অর্থাৎ (1, 2) ব্যবধির মধ্যে $\frac{3}{2}$ আছে।

Type-13: মূল নিয়মে অন্তরক সহগ নির্ণয়

- **Concept:** মূল নিয়মে অন্তরকের সংজ্ঞানুসারে, $\frac{d}{dx}(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Example-43. $f(x)=\sin 3x$ হলে $\operatorname*{Lt}\limits_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{3h}$ এর মান নির্ণয় কর। [BUET'16-17]

Solⁿ: $\operatorname*{Lt}\limits_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{3h}=\operatorname*{Lt}\limits_{h\to 0}\frac{\sin 3(x+3h)-\sin 3x}{3h}=\operatorname*{Lt}\limits_{h\to 0}\frac{\sin(3x+9h)-\sin 3x}{3h}=\operatorname*{Lt}\limits_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{6x+9h}{2}\sin\frac{9h}{2}}{3h}$

$=\operatorname*{Lt}\limits_{h\to 0}\frac{3\sin\frac{9h}{2}\cos\frac{6x+9h}{2}}{\frac{9h}{2}}=3.1.\cos\frac{6x+0}{2}=3\cos 3x$

Example-44. $f(x)=\sin x$ হলে, মান নির্ণয় কর: $\operatorname*{Lt}\limits_{h\to 0}\frac{f(x+nh)-f(x)}{nh}$ [RUET'11-11]

Solⁿ: $\operatorname*{Lt}\limits_{h\to 0}\frac{\sin(x+nh)-\sin x}{nh}$ when, $h\to 0$ then $nh\to 0$

$=\operatorname*{Lt}\limits_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{nh}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{nh}=\operatorname*{Lt}\limits_{nh\to 0}\cos\left(x+\frac{nh}{2}\right).\frac{\sin\frac{nh}{2}}{\frac{nh}{2}}=\operatorname*{Lt}\limits_{nh\to 0}\cos\left(x+\frac{nh}{2}\right).\operatorname*{Lt}\limits_{nh\to 0}\frac{\sin\frac{nh}{2}}{\frac{nh}{2}}$

$=\cos x.1=\cos x$

Type-14: একাধিক ফাংশনের সমন্বয়ের অন্তরীকরণ

- **Concept:** এক্ষেত্রে প্রতিটি রাশিকে আলাদা আলাদা ভাবে অন্তরীকরণ করতে হবে।

Example-45. মান নির্ণয় কর: $\frac{dy}{dx}$, যখন $y=\frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x}}$ [RUET'03-04]

Solⁿ: $y=\frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x}}=\frac{x^2-2x+1}{x^{\frac{1}{3}}}=x^{\frac{5}{3}}-2x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$ (Ans.)

Example-46. $y=\sin^2 2x+e^{2\log\cos 2x}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি? [KUET'13-14]

Solⁿ: $y=\sin^2 2x+e^{2\log\cos 2x}=\sin^2 2x+e^{\log\cos^2 2x}=\sin^2 2x+\cos^2 2x=1\therefore\frac{dy}{dx}=0$

Example-47. $\frac{d}{dx}[\tan^{-1}(\cot x)+\cot^{-1}(\tan x)]=?$ [RUET'14-15]

Solⁿ: $\tan^{-1}(\cot x)+\cot^{-1}(\tan x)=\tan^{-1}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}+\cot^{-1}\left\{\cot\left(\frac{x}{2}-x\right)\right\}$

$\therefore\frac{d}{dx}(\pi-2x)=-2$

Example-48. $y = \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$ [DU'15-16]

Solⁿ: $y = \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}} = \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}} = 1 \therefore \frac{dy}{dx} = 0$

Example-49. $\frac{d}{dx}(e^{ax}.\sin^2 x + 2x\cos 3x) = ?$

Solⁿ: $\frac{d}{dx}(e^{ax}.\sin^2 x + 2x\cos 3x) = \frac{d}{dx}(e^{ax}\sin^2 x) + \frac{d}{dx}(2x\cos 3x)$

$= e^{ax}.\frac{d}{dx}(\sin^2 x) + \sin^2 x.\frac{d}{dx}(e^{ax}) + 2x.\frac{d}{dx}(\cos 3x) + 2\cos 3x.\frac{d}{dx}(x)$

$= 2e^{ax}\sin x\cos x + ae^{ax}\sin^2 x - 6x\sin 3x + 2\cos 3x$

Type-15: সংযোজিত ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয় [CHAIN RULE]

Concept: সূত্র: $y = f(z), z = g(x)$ হলে $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx}$ বি.দ্রঃ- সূত্রটিকে অধিক ফাংশনের জন্য সম্প্রসারিত করা যায়।

Example-50. যদি $y = f(x)$ এবং $x = \frac{1}{z}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{d^2f}{dx^2} = z^4\frac{d^2y}{dz^2} + 2z^3\frac{dy}{dz}$. [BUET'16-17]

Solⁿ: $x = \frac{1}{z} \Rightarrow 1 = -\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -z^2$

এখন, $\frac{df}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = -z^2\frac{dy}{dz} \therefore \frac{d^2f}{dx^2} = -z^2\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right) - \frac{dy}{dz}\cdot\frac{d}{dx}(z^2) = -z^2\frac{d^2y}{dz^2}\cdot\frac{dz}{dx} - 2z\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$

$\therefore \frac{d^2f}{dx^2} = z^4\frac{d^2y}{dz^2} + 2z^3\frac{dy}{dz}$ (showed)

Example-51. $\tan^{-1}(\sec x + \tan x)$ ফাংশনটির অন্তরক কত? [BUTex'13-14]

Solⁿ: $y = \tan^{-1}\left(\frac{\sin x+1}{\cos x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}\right)$

$= \tan^{-1}\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) = \tan^{-1}\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right); y = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}; y_1 = \frac{1}{2}$

Example-52. দেখাও যে, x-এর সাপেক্ষে $\ell n\sqrt[3]{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ এর অন্তরক সহগ $\frac{2}{3}\mathrm{cosec}\,x$ [CUET'05-06]

Solⁿ: ধরি, $\ell n\sqrt[3]{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \ell n\sqrt[3]{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}} = \ell n\left(\tan\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

$y = \frac{2}{3}\ell n\tan\frac{x}{2} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}.\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\sec^2\frac{x}{2}.\frac{1}{2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sin x} = \frac{2}{3}\mathrm{cosec}\,x$ (Proved)

Example-53. অন্তরক নির্ণয় কর: $\log(\sin^{-1}x)\cos^{-1}x$. [RUET'04-05]

Solⁿ: Let, $y = \log(\sin^{-1}x)\cos^{-1}x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \log(\sin^{-1}x).\left\{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right\} + \cos^{-1}x\frac{1}{\sin^{-1}x}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left\{\frac{\cos^{-1}x}{\sin^{-1}x} - \log(\sin^{-1}x)\right\}$ (Ans.)

Example-54. $\frac{d}{dx}[\sin\ln(x^3)] = ?$

Solⁿ: $\frac{d}{dx}[\sin\ln(x^3)] = \cos\{\ln(x^3)\}.\frac{d}{dx}[\ln(x^3)] = \cos\{\ln(x^3)\}.\frac{1}{x^3}.3x^2 = \frac{3}{x}\cos\{\ln(x^3)\}$

Type-16: বিপরীত অন্তরক সহগের সাহায্যে অন্তরীকরণ

Concept: যেসব ক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx}$ বের করার চেয়ে $\frac{dx}{dy}$ বের করা সুবিধাজনক সেসব ক্ষেত্রে $\frac{dx}{dy}$ বের করে নিম্নোক্ত সূত্র প্রয়োগ করতে হবে।
সূত্র: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$; [যখন কোনটিই শূন্য নয়]

Example-55. x এর সাপেক্ষে $\sec^{-1}x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় করতে হবে।

Solⁿ: মনে করি, $y = \sec^{-1}x$; $\therefore x = \sec y$

$\frac{dx}{dy} = \sec y\tan y = \sec y\sqrt{\sec^2 y - 1} = x\sqrt{x^2-1} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Example-56. $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

Solⁿ: $y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

let, $x = \tan\theta \therefore y = \tan^{-1}\left(\frac{\sec\theta-1}{\tan\theta}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\tan^{-1}x \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}$ (Ans.)

Type-17: সূচক ফাংশন সমাধানে লগারিদম প্রয়োগ

Concept: ফাংশনের Power অপর কোন ফাংশন হলে উভয় পক্ষে ln নিয়ে সমাধান করতে হবে।
$\frac{d}{dx}(U^V) = U^V\left[\frac{d}{dx}(v)\ln(U) + \frac{V}{u}\left(\frac{dU}{dx}\right)\right]$ অথবা, $\frac{d}{dx}(U^V) = U^V\frac{d}{dx}(V\ln u)$ [ছোট করে মনে রাখ]

Example-57. $(\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। [BUET'05-06, CUET'09-10]

Solⁿ: $y = (\sqrt{x})^{\sqrt{x}} \Rightarrow \ln y = \sqrt{x}.\ln\sqrt{x} \therefore \frac{dy}{dx} = (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}.\left\{\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}.\frac{1}{2\sqrt{x}}.\sqrt{x}\right\}$

$= \frac{(\sqrt{x})^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}(\ln\sqrt{x}+1) = \frac{1}{2}.(\sqrt{x})^{\sqrt{x}-1}(\ln\sqrt{x}+1) = \frac{1}{2}.(\sqrt{x})^{\sqrt{x}-1}\left(\frac{1}{2}\ln x + 1\right)$ (Ans.)

Example-58. অন্তরক নির্ণয় কর: $e^{x^2} + x^{x^2}$ [RUET'12-13,08-09]

Solⁿ: $\frac{d}{dx}\left(e^{x^2} + x^{x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\right) + \frac{d}{dx}\left(x^{x^2}\right) = 2xe^{x^2} + x^{x^2}(2x\ln x + x)$

Let, $y_1 = e^{x^2} \Rightarrow \ln y_1 = x^2 \Rightarrow \frac{1}{y_1}.\frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x.e^{x^2}$

$y_2 = x^{x^2} \Rightarrow \ln y_2 = x^2\ln x \Rightarrow \frac{1}{y_2}.\frac{dy}{dx} = 2x\ln x + x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^{x^2}(2x\ln x + x)$

Example-59. $(\sin x)^{\ln x}$ এর অন্তরক নির্ণয় করতে হবে।

Solⁿ: ধরি, $y = (\sin x)^{\ln x} \Rightarrow \ln y = (\ln x)\ln(\sin x) \therefore \frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = (\ln x).\frac{1}{\sin x}\cdot(\cos x) + \ln(\sin x)\cdot\frac{1}{x}$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \cot x.(\ln x) + \frac{1}{x}\ln(\sin x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y.\left\{\cot x(\ln x) + \frac{1}{x}\ln(\sin x)\right\}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\ln x}\left\{\cot x(\ln x) + \frac{1}{x}\ln(\sin x)\right\}$

For MCQ: $\frac{d}{dx}(u^V) = u^V\left[\frac{dv}{dx}\ln u + \frac{v}{u}\frac{du}{dx}\right]$

Type-18: একাধিক ফাংশনের সমন্বয় সমাধানে লগারিদম

Concept: অনেকগুলি ফাংশনের গুণ বা ভাগ আকারের ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয়ের জন্য উভয় পক্ষে ln নিতে হবে।

Example-60. $(\sin x)(\ln x)(\tan x)(e^x)$ এর অন্তরক সহগ বের করতে হবে।

Solⁿ: ধরি, $y = (\sin x)(\ln x)(\tan x)(e^x) \Rightarrow \ln y = \ln(\sin x) + \ln(\ln x) + \ln(\tan x) + \ln(e^x)$

$\therefore \frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x}.\cos x + \frac{1}{\ln x}.\frac{1}{x} + \frac{1}{\tan x}.\sec^2 x + 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left[\cot x + \frac{1}{x\ln x} + \frac{\sec x}{\sin x} + 1\right]$

$\therefore \frac{dy}{dx} = (\sin x)(\ln x)(\tan x)(e^x)\left[\cot x + \frac{1}{x\ln x} + \frac{\sec x}{\sin x} + 1\right]$

Type-19: ফাংশনের সাপেক্ষে ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয়

➲ **Concept:** কোন ফাংশন $g(x)$ এর সাপেক্ষে অপর কোন ফাংশন $f(x)$ কে অন্তরীকরণ করলে অন্তরক সহগ নিম্নোক্ত উপায়ে নির্ণয় করা যায়।

সূত্র: $\frac{d}{d(g(x))}f(x) = \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{d}{dx}f(x)}{\frac{d}{dx}g(x)}$

Example-61. $\ln x$ এর সাপেক্ষে $\sin x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় করতে হবে।

Sol^n: তাহলে, $\frac{d}{d(\ln x)}(\sin x) = \frac{\frac{d}{dx}\sin x}{\frac{d}{dx}\ln x} = \frac{\cos x}{\frac{1}{x}} = x\cos x$

Example-62. $\frac{d(\sin x)}{d(e^x)}$ বের কর।

Sol^n: $\frac{d(\sin x)}{d(e^x)} = \frac{\frac{d(\sin x)}{dx}}{\frac{d(e^x)}{dx}} = \frac{\cos x}{e^x}$ (Ans.)

Type-20: ত্রিকোণমিতিক প্রতিস্থাপন

➲ **Concept:** বিশেষত: জটিল আকৃতির বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনে এর প্রয়োগ হয়। নিম্নোক্ত প্রতিস্থাপনের ফলে অন্তরক সহগ নির্ণয় সহজতর হয়।

Term –এর আকৃতি	যা ধরতে হবে
$1-x^2$	$x = \sin\theta / \cos\theta$
$1+x^2$	$x = * \tan\theta / \cot\theta$
x^2-1	$x = * \sec\theta / \operatorname{cosec}\theta$
$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ বা, $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$	$x = \cos\theta$
$\frac{2x}{1\pm x^2}$ বা, $\frac{1-x^2}{1+x^2}$	$x = \tan\theta$
$\frac{1-x}{1+x}, \frac{1+x}{1-x}$	$x = \tan\theta$
$\frac{a+x}{1-ax}, \frac{a-x}{1+ax}$	$x = \tan\theta$

বি.দ্র. চলক $[x, t]$ ধরার ক্ষেত্রে '$*$' চিহ্নিত ফাংশন first choice হবে।

Example-63. x-এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর: $\sin^4\left(\cot^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ [BUET'09-10]

Sol^n: ধরি, $x = \cos 2\theta \therefore \frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\cos 2\theta}{1-\cos 2\theta} = \frac{2\cos^2\theta}{2\sin^2\theta} = \cot^2\theta \therefore \theta = \cot^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

$\therefore \sin^4\left(\cot^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \sin^4\theta = (\sin^2\theta)^2 = \left\{\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\right\}^2 = \frac{1}{4}(1-x)^2$

$\therefore \frac{d}{dx}\left\{\sin^4\left(\cot^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)\right\} = \frac{1}{4}.\frac{d}{dx}(1-x)^2 = \frac{1}{4}\times 2(x-1) = \frac{x-1}{2}$ (Ans.)

Example-64. অন্তরক নির্ণয় কর $\tan^{-1}\frac{a+bx}{b-ax}$ [RUET'06-07, KUET'06-07,11-12, CUET'13-14]

Sol^n: $\tan^{-1}\frac{a+bx}{b-ax} = \tan^{-1}\frac{\frac{a}{b}+x}{1-\frac{a}{b}x} = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \tan^{-1}x \therefore \frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\frac{a}{b} + \tan^{-1}x\right\} = \frac{1}{1+x^2}$

Example-65. যদি $y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান বের কর। [CUET'13-14]

Sol^n: Let, $x = \tan\theta \therefore \theta = \tan^{-1}x$

$\therefore y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan\theta} = \tan^{-1}\frac{\sec\theta-1}{\tan\theta} = \tan^{-1}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \tan^{-1}\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}$

$\therefore y = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}x \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1+x^2}$ (Ans.)

Example-66. $y = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$

Sol^n: ধরি, $x = \tan\theta \quad \therefore y = \sin^{-1}\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \sin^{-1}(\sin 2\theta) \quad \therefore y = 2\theta = 2\tan^{-1}x \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$

Type-21: অব্যক্ত ফাংশন

➲ **Concept:** যে ফাংশনের $y = f(x)$ আকারে প্রকাশ করা যায় না তাকে অব্যক্ত ফাংশন (implicit function) বলে। এক্ষেত্রে $f(x, y) = 0$ আকারে প্রকাশ করে সকল পদকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করতে হয় এবং প্রাপ্ত সমীকরণ থেকে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করতে হয়।

Formula: $\frac{d}{dx}(u^v) = u^v\frac{d}{dx}(v\ln u)$ **[Note: Ans. ভিন্ন হতে পারে। প্রমাণ অনুসারে Change করে form তৈরি করতে হবে।]**

Example-67. $(\cos x)^y = (\sin y)^x$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান নির্ণয় কর। [BUET'03-04,13-14]

Sol^n: $(\cos x)^y = (\sin y)^x ; y\ln\cos x = x\ln\sin y$

$\therefore y_1\ln\cos x + y\frac{1}{\cos x}(-\sin x) = x\frac{1}{\sin y}\cos y . y_1 + \ln\sin y$

$\therefore y_1(\ln\cos x - x\cot y) = \ln\sin y + y\tan x$

$\therefore y_1 = \frac{\ln\sin y + y\tan x}{\ln\cos x - x\cot y} \therefore \frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{\ln\sin y + y\tan x}{\ln\cos x - x\cot y}}$

Example-68. $x^y + y^x = 0$ সমীকরণ হতে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। [BUET'10-11, RUET'04-05]

Sol^n: $x^y + y^x = 0 \therefore x^y = -y^x \Rightarrow y\ln x = -x\ln y \Rightarrow y\frac{1}{x} + \ln x\frac{dy}{dx} = -x\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} - \ln y$

$\frac{dy}{dx}\left(\ln x + \frac{x}{y}\right) = -\ln y - \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{-x\ln y - y}{x}}{\frac{y\ln x + x}{y}} = \frac{-y(x\ln y + y)}{x(y\ln x + x)}$ (Ans.)

Example-69. যদি $x^p y^q = (x+y)^{p+q}$ হয় তাহলে $\frac{dy}{dx} = ?$ [RUET'10-11, 11-12 BUTex'15-16]

Sol^n: $x^p y^q = (x+y)^{p+q} \Rightarrow px^{p-1}y^q + qy^{q-1}\frac{dy}{dx}.x^p = (x+y)^{p+q-1}.(p+q).\left(1+\frac{dy}{dx}\right)$

$\Rightarrow p.\frac{x^p y^q}{x} + q.\frac{y^q x^p}{y}.\frac{dy}{dx} = (p+q)\frac{(x+y)^{p+q}}{x+y} + (p+q)\frac{(x+y)^{p+q}}{x+y}.\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{p}{x} + \frac{q}{y}.\frac{dy}{dx} = \frac{p+q}{x+y} + \frac{p+q}{x+y}.\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \left(\frac{q}{y} - \frac{p+q}{x+y}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{p+q}{x+y} - \frac{p}{x} \Rightarrow \frac{qx-py}{y(x+y)}.\frac{dy}{dx} = \frac{qx-py}{x(x+y)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

Example-70. $e^{xy+1} = 5$ হলে (if) $\frac{dy}{dx} = ?$ [DU'14-15]

Sol^n: $e^{xy+1} = 5 \Rightarrow xy + 1 = \ln(5) \Rightarrow xy = \ln(5) - 1 \therefore x\frac{dy}{dx} + y = 0 \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ [Showed]

Example-71. $\ln(xy) = x + y$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

Sol^n: $\ln(xy) = x + y \therefore \frac{1}{xy}\left(x.\frac{dy}{dx} + y\right) = 1 + \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} = 1 + \frac{dy}{dx} \Rightarrow \left(\frac{1}{y} - 1\right)\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}-1} = \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{1-y}{y}} = \frac{y(x-1)}{x(1-y)}$

বিকল্প **[For MCQ]**: $f(x,y) = \ln(xy) - x - y = 0 ; \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{\frac{1}{xy}y - 1}{\frac{1}{xy}x - 1} = \frac{-\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{y}-1} = \frac{y(x-1)}{x(1-y)}$

Example-72. $y = \sin(x+y)$ হলে দেখাও যে, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\sin(x+y)}{[1-\cos(x+y)]^3}$

Sol^n: $y = \sin(x+y) \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \cos(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1-\cos(x+y))(-\sin(x+y))\left(1+\frac{dy}{dx}\right) - \cos\frac{d}{dx}(1-\cos(x+y))}{[1-\cos(x+y)]^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\sin(x+y)}{[1-\cos(x+y)]^3}$ [simplifying] (Ans.)

For MCQ: কোন x ও y চলক বিশিষ্ট ফাংশন $f(x, y) = 0$ হলে $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$ যেখানে f_x হল x এর সাপেক্ষে ফাংশনটির অন্তরক [y কে ধ্রুব ধরে] এবং f_y হল y এর সাপেক্ষে ফাংশনটির অন্তরক [x কে ধ্রুব ধরে]

Type-22: পরামিতিক সমীকরণ

Concept: x এবং y ভিন্ন ভিন্ন সমীকরণের মাধ্যমে একই পরামিতির মাধ্যমে প্রকাশিত হলে নিম্নোক্ত সূত্র প্রয়োগ করতে হবে।

সূত্র: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$; [যেখানে t হচ্ছে পরামিতি]

Example-73. $x = a(t + \sin t), y = a(1 - \cos t)$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2}$ এর মান কোনটি? [KUET'11-12]

Sol^n: $x = a(t + \sin t); \frac{dx}{dt} = a(1 + \cos t) \ldots\ldots\ldots (i)$

$y = a(1 - \cos t) \Rightarrow \cos t = 1 - \frac{y}{a}; \frac{dy}{dt} = a \sin t \ldots\ldots\ldots (ii)$

$(i) \div (ii) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a \sin t}{a(1+\cos t)} = \frac{2 \sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}} = \tan\frac{t}{2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\sec^2\frac{t}{2}\cdot\frac{dt}{dx}$

$= \frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{a(1+\cos t)} = \frac{1}{(1+\cos t)} \cdot \frac{1}{a(1+\cos t)} = \frac{1}{a(1+\cos t)^2} = \frac{1}{a\left(1+1-\frac{y}{a}\right)} = \frac{a}{(2a-y)^2}$

Example-74. পরামিতিক ফাংশনের ক্ষেত্রে দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরক সহগ নির্ণয় (General form) [RUET'09-10]

$x = f(t)$ এবং $y = g(t)$ হলে $\frac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় কর।

Sol^n: $\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_1}{x_1}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y_1}{x_1}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$ [$\because \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$ এবং যেহেতু t হচ্ছে x ও y এর পরামিতি]

$= \frac{x_1y_2 - y_1x_1}{x_1^2}\cdot\frac{1}{x_1}\left[\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right]$ $\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{y_1}{x_1}\right) = \left[\frac{x_1\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dx_1}{dt}}{x_1^2}\right]\right] = \frac{x_1y_2 - y_1x_2}{x_1^3}$ | Note: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y_1}{x_1}$ |

Example-75. $x = p\sin^2\theta,\ y = q\cos^2\theta$, $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করতে হবে।

Sol^n: $\frac{dx}{d\theta} = 2p\sin\theta\cos\theta, \frac{dy}{d\theta} = -2q\cos\theta\sin\theta$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-2q\cos\theta\sin\theta}{2p\sin\theta\cos\theta} = -\frac{q}{p}$

$\therefore$ একইভাবে $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{d\theta}{dx} = \frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$

Type-23: অসীম পর্যন্ত চলতে থাকা ফাংশনের অন্তরীকরণ

Concept: (i) power আকারে থাকলে এখানে ln নিতে হবে। (ii) Root থাকলে বর্গ করে আগাতে হবে।

Example-76. $y = x^{x^{x^{\cdots\infty}}}$

Sol^n: $y = x^{x^{x^{\cdots\infty}}} \Rightarrow \ln y = \ln x^{x^{x^{\cdots\infty}}} \Rightarrow \ln y = x^{x^{x^{\cdots\infty}}}\ln x \Rightarrow \ln y = y\ln x$

Differentiate করে পাই $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = y.\frac{1}{x} + \ln x\frac{dy}{dx}$; $\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{y} - \ln x\right) = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x(1-y\ln x)}$

Example-77. $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \ldots\ldots\ldots\infty}}}$

Sol^n: $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \ldots\ldots\ldots\infty}}}$

$\Rightarrow y^2 = \sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \ldots\ldots\ldots\infty}}} \Rightarrow y^2 = \sin x + y$

$\therefore$ Differentiate করে পাই,

$2y\frac{dy}{dx} = \cos x + \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}(2y - 1) = \cos x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2y-1}$

Type-24: পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে প্রমাণ সংক্রান্ত:

Concept: এই সমস্যাগুলোতে সাধারণত সর্বোচ্চ ২ বার অন্তরীকরণ করতে হয়।

(i) অন্তরীকরণ করে y_1 –এর মান নির্ণয় করতে হবে।

(ii) y_1 –এর মানে '$\sqrt{\ }$' থাকলে বর্গ করে '$\sqrt{\ }$' মুক্ত করতে হবে।

(iii) সমীকরণে ভগ্নাংশ থাকলে বজ্রগুণন করতে হবে।

(iv) এভাবে y_2 এর মান বের করে এবং y বা y_1 এর মান দ্বারা প্রতিস্থাপিত করে সম্পর্ক স্থাপন করতে হবে।

Example-78. যদি $y = \cos(2\sin^{-1}x)$ হয়, তবে দেখাও যে, $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + 4y = 0$ [BUET'05-06,04-05]

Sol^n: $y = \cos(2\sin^{-1}x)$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে

$\frac{dy}{dx} = -\sin(2\sin^{-1}x)\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow (1 - x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4\sin^2(2\sin^{-1}x)$ [বর্গকরে]

$\Rightarrow (1 - x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4\{1 - \cos^2(2\sin^{-1}x)\}$

$\Rightarrow (1 - x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4(1 - y^2)$

$2(1 - x^2)\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2(-2x) = 4(-2y)\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow (1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x.\frac{dy}{dx} = -4y$

[উভয় পক্ষকে $2.\frac{dy}{dx}$ দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow (1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x.\frac{dy}{dx} + -4y = 0$

Example-79. $y = \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^m$ হলে প্রমাণ কর যে, $(1 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - m^2y = 0$। অতঃপর $x = 0$ বিন্দুতে $\frac{d^3y}{dx^3}$ এর মান বের কর। [BUET'17-18]

Sol^n: দেওয়া আছে, $y = \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^m$

$\frac{dy}{dx} = \frac{m\cdot\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}\left\{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right\}$; $\frac{dy}{dx} = m\cdot\frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}\left\{\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right\}$

$\Rightarrow \sqrt{1 + x^2}\cdot\frac{dy}{dx} = m\cdot\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^m \ldots\ldots\ldots (i)$

$\Rightarrow (1 + x^2)\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = m^2y^2$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow (1 + x^2)\cdot 2\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\cdot 2x = m^2\cdot 2y\cdot\frac{dy}{dx}$ [x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]

$\Rightarrow (1 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\cdot\frac{dy}{dx} - m^2y = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$ [$2\frac{dy}{dx}$ দ্বারা উভয়পক্ষ ভাগ করে]

(ii) নং কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$(1 + x^2)\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2}\cdot 2x + x\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - m^2\frac{dy}{dx} = 0 \ldots\ldots\ldots (iii)$

$x = 0$ হলে $y = 1$

(i) নং সমীকরণে $x = 0$ বসিয়ে পাই, $1\cdot\frac{dy}{dx} = m \Rightarrow \frac{dy}{dx} = m$

(ii) নং সমীকরণে $x = 0, \frac{dy}{dx} = m, y = 1$ বসিয়ে পাই,

$(1 + 0)\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + 0\cdot m - m^2\times 1 = 0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = m^2$

(iii) নং সমীকরণে মান বসিয়ে পাই,

$(1 + 0)\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + m^2\times 2\times 0 + 0\times m^2 + m - m^2\times m = 0 \Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = m^3 - m$ (Ans.)

Example-80. যদি $\cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = \ln\left(\frac{x}{n}\right)^n$ হয়, প্রমাণ কর যে, $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0$ [BUET'10-11]

Sol^n: $\cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = \ln\left(\frac{x}{n}\right)^n \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{dy}{dx} = n.\frac{n}{x}.\frac{1}{n}$ [x এর সাপেক্ষে ব্যবকলন]

$\Rightarrow \frac{-b}{\sqrt{b^2-y^2}}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{n}{x} \Rightarrow \frac{-dy}{dx} = \frac{n}{x}\sqrt{b^2 - y^2} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{n^2}{x^2}(b^2 - y^2)$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow x^2.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = n^2(b^2 - y^2) \Rightarrow$ পুনরায় differentiate করে

$\Rightarrow x^2.2.\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.2x = -n^2.2yy_1 \Rightarrow x^2 2y_1.\frac{d^2y}{dx^2} + y_1^2 2x = -n^2.2yy_1$

উভয়পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে, $x^2.y_2 + xy_1 + n^2y = 0 \Rightarrow x^2.\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0$ [Proved]

Example-81. দেখাও যে, $y = \sin(m\sin^{-1}x)$ সমীকরণ $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + m^2y = 0$ কে সিদ্ধ করে। [RUET'07-08,08-09,00-01]

Sol^n: $y = \sin(m\sin^{-1}x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{m\cos(m\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}$ [x এর সাপেক্ষে ব্যবকলন করে]

$\Rightarrow (1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = m^2\cos^2(m\sin^{-1}x) = m^2(1-y^2)$

$\Rightarrow 2\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)(1-x^2) + (-2x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -2y\left(\frac{dy}{dx}\right) \times m^2 \Rightarrow (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + m^2y = 0$

Example-82. If, $y = a\cos\ln(x) + b\sin(\ln x)$, then prove, $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$ [BUTex'06-07, CUET'13-14]

Sol^n: $y_1 = -a\sin\ln x.\frac{1}{x} + b\cos\ln x.\frac{1}{x} \Rightarrow xy_1 = -a\sin\ln x + b\cos\ln x$

$\Rightarrow xy_2 + y_1 = -a\cos\ln x.\frac{1}{x} - b\sin\ln x.\frac{1}{x} \Rightarrow x^2y_2 + xy_1 = -y \Rightarrow x^2y_2 + xy_1 + y = 0$ (Proved)

Example-83. $y = e^{\tan^{-1}x}$ হলে দেখাও যে, $y_2(1+x^2) = (1-2x)y_1$

Sol^n: $y = e^{\tan^{-1}x} \Rightarrow y_1 = e^{\tan^{-1}x}.\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow y_1 = \frac{y}{1+x^2} \Rightarrow y_1(1+x^2) = y$

$\Rightarrow y_2(1+x^2) + 2xy_1 = y_1 \therefore y_2(1+x^2) = (1-2x)y_1$

Note: এই Type –এর problem খুব Important.

Type-25: n–তম অন্তরক সহগ নির্ণয়

➲ **Concept:** $y = f(x)$ থেকে $y_1 = f'(x), y_2 = f''(x)$ ………… বের করে সম্পর্ক স্থাপনের মাধ্যমে y_n নির্ণয় করতে হবে।

Example-84. $y = e^{ax}\sin(bx+c)$ হলে $y_n = ?$

Sol^n: $y = e^{ax}\sin(bx+c) \therefore y_1 = ae^{ax}\sin(bx+c) + e^{ax}.\ b\cos(bx+c)$

$= e^{ax}.\sqrt{a^2+b^2}\left\{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(bx+c) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(bx+c)\right\}$

ধরি, $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\theta \quad \therefore \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta$ এবং $\tan\theta = \frac{b}{a}$

$= \sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\{\cos\theta\sin(bx+c) + \sin\theta\cos(bx+c)\} = \sqrt{a^2+b^2}\,e^{ax}\sin(bx+c+\theta)$

$y_2 = \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{a^2+b^2}\,e^{ax}\left\{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(bx+c+\theta) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(bx+c+\theta)\right\} = (\sqrt{a^2+b^2}\,e^{ax}\sin(bx+c+2\theta)$

$\therefore y_n = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n e^{ax}\sin(bx+c+n\theta)$ বা, $y_n = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin(bx+c+n\theta)$

একইভাবে $y = e^{ax}\cos(bx+c)$ এর জন্য প্রমাণ করা যায়।

Example-85. $e^{3x}\sin^2x$ এর nth derivative নির্ণয় কর। [BUET'01-02]

Sol^n: $y = e^{3x}\sin^2x = \frac{1}{2}e^{3x}2\sin^2x = \frac{1}{2}e^{3x}(1-\cos 2x) = \frac{1}{2}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x$

$p = e^{3x}\cos 2x.\ ; p_1 = 3e^{3x}\cos 2x - 2e^{3x}\sin 2x. = e^{3x}[3\cos 2x - 2\sin 2x]$

ধরি, $r\cos\theta = 3\ ; r\sin\theta = 2$

$\therefore r = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$

$p_1 = e^{3x}[r\cos\theta\cos 2x - r\sin\theta\sin 2x] = re^{3x}\cos(2x+\theta)$

$p_2 = r[3e^{3x}\cos(2x+\theta) - 2e^{3x}\sin(2x+\theta)] = re^{3x}[r\cos\theta\cos(2x+\theta) - r\sin\theta\sin(2x+\theta)]$

$= r^2e^{3x}\cos(2x+2\theta) \therefore P_n = r^ne^{3x}\cos(2x+n\theta)$

$\therefore y = \frac{1}{2}[3^ne^{3x} - r^n e^{3x}\cos(2x+n\theta)]$ এখানে, $r = \sqrt{13}\ \theta = \tan^{-1}\frac{2}{3}$

Example-86. যদি $y = x^2\log x$ তবে y_3 এর মান হলো– [KUET'05-06,06-07,12-13, BUTex'14-15,15-16]

Sol^n: $y = x^2\log x; y_1 = 2x\log x + \frac{x^2}{x} = 2x\log x + x$

$y_2 = 2x.\frac{1}{x} + 2\log x + 1 \Rightarrow y_2 = 2 + 2\log x + 1 \Rightarrow y_3 = \frac{2}{x}$

Example-87. যদি $y = \log(ax+b)$ হয়, তবে y_n এর মান কত? [CUET'11-12]

Sol^n: $y = \log(ax+b)\ ; y_1 = (ax+b)^{-1}.a\ ; y_2 = (ax+b)^{-2}.(-1).1.a^2$

$y_3 = (ax+b)^{-3}.(-1)^2.1.2.a^3 \therefore y_n = (-1)^{n-1}(ax+b)^{-n}(n-1)!.a^n; \frac{(-1)^{n-1}.(n-1)!.a^n}{(ax+b)^n}$

Example-88. $\sin(5x+6)$

Sol^n: $y = \sin(5x+6)$

$y_1 = 5\cos(5x+6) = 5\sin\left(\frac{\pi}{2} + 5x + 6\right)$

$y_2 = 5^2\cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x + 6\right) = 5^2\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2} + 5x + 6\right)$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$y_n = 5^n\sin\left(\frac{n\pi}{2} + 5x + 6\right)$ (Ans.)

➲ **Tips:** ত্রিকোণমিতিক ফাংশনে ঘাত থাকলে প্রথমে ফাংশনটিকে ঘাত ছাড়া সরলীকরণ আকারে প্রকাশ করতে হবে।

Example-89: $y = \sin 3x\cos 2x$ হলে $y_n = ?$

Sol^n: $y = \sin 3x\cos 2x = \frac{1}{2}\times 2\sin 3x\cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin x)$

$\therefore y_n = \frac{1}{2}\left[5^n\sin\left(\frac{n\pi}{2} + 5x\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)\right]$

Example-90: $y = \frac{1}{x}$ হলে $y_n = ?$

Sol^n: $y = \frac{1}{x} \Rightarrow y_1 = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow y_2 = \frac{2}{x^3} \Rightarrow y_3 = \frac{-6}{x^4} \Rightarrow y_4 = \frac{24}{x^5} \therefore y_n = \frac{n!(-1)^n}{x^{n+1}}$

➲ **Tips:** প্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ আকৃতির হলে আংশিক ভগ্নাংশে পরিণত করতে হবে।

Example-91: $y = \frac{2x+1}{x^2-x-6}$ হলে $y_n = ?$

Sol^n: $y = \frac{2x+1}{(x-3)(x+2)} = \frac{\frac{7}{5}}{x-3} + \frac{\frac{3}{5}}{x+2} \quad \therefore y_n = \frac{7}{5}\frac{n!(-1)^n}{(x-3)^{n+1}} + \frac{3}{5}\frac{n!(-1)^n}{(x+2)^{n+1}}$

Example-92. $y = e^{5x+6}$ হলে $y_r = ?$

Sol^n: $y = e^{5x+6}$

$y_1 = 5\,e^{5x+6}$

$y_2 = 5^2\,e^{5x+6}$

$\vdots \qquad \vdots$

$y_r = 5^r\,e^{5x+6}$ (Ans.)

Type-26: ম্যাকলরিনের ধারার সাহায্য বিস্তার

➲ **Concept:** $f(x)$ যদি x-এর এমন একটি ফাংশন হয়, যাকে x-এর ধনাত্মক পূর্ণসাংখিক, ক্রমবর্ধমান শক্তির একটি অসীম ধারায় বিস্তৃত করা যায় এবং যদি ঐ বিস্তৃতির প্রতিটি পদ যেকোন সংখ্যকবার অন্তরীকরণযোগ্য হয়, তাহলে, $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots\dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \dots\dots\dots\dots \infty$

Example-93. দেখাও যে, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\dots\dots$

Sol^n: $f(x) = e^x,\ f(0) = 1$

$f'(x) = e^x,\ f'(0) = 1,\ f''(x) = e^x,\ f''(0) = 1, \dots\dots\dots f^n(x) = e^x$

ম্যাকলরিনের উপপাদ্য থেকে, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\dots\dots$ এই ধারা x-এর সকল মানের জন্য প্রযোজ্য।

Example-94. $\ln(1-x)$ কে x এর ঊর্ধ্বক্রমিক ঘাত বিশিষ্ট অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর, যেখানে $-1 < x < 1$.

Sol^n: মনে করি, $f(x) = \ln(1-x) \therefore f(0) = \ln(1-0) = \ln 1 = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{d}{dx}(1-x) = -\frac{1}{1-x} = -(1-x)^{-1}$

$\therefore f'(0) = -\frac{1}{1-0} = -1$

$\Rightarrow f'(x) = -(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5 \dots\dots\dots) = -1-x-x^2-x^3-x^4-x^5-\dots\dots$

$f''(x) = -1-2x-3x^2-4x^3-5x^4 \dots\dots\dots$

$\therefore f''(0) = -1$

$f'''(x) = -2-(3.2)x-(4.3)x^2-(5.4)x^3-\dots\dots\dots$

$\therefore f'''(0) = -2 = -2!$

……………………………………………………………………………

ম্যাকলরিনের ধারা হতে পাই, $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \dots\dots$

$\therefore \ln(1-x) = 0 + x(-1) + \frac{x^2}{2!}(-1) + \frac{x^3}{3!}(-2!) + \dots\dots = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots\dots$

Example-95. ম্যাকলরিনের উপপাদ্যের সাহায্যে **sin x**-কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর।

Sol^n:

$f(x) = \sin x$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -1$
$f^{iv}(x) = \sin x$	$f^{iv}(0) = 0$
$f^{v}(x) = \cos x$	$f^{v}(0) = 1$

……………………………………………………

$f^n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$

ম্যাকলরিনের উপপাদ্য, $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \dots\dots$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\dots\dots\dots$ এই ধারা x-এর সকল মানের জন্য প্রযোজ্য।

Type-27: স্পর্শক ও অভিলম্ব নির্ণয়

Concept: স্পর্শক:

(i) $y = f(x)$ বক্ররেখার কোন বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $\frac{dy}{dx}$

(ii) (x_1, y_1) ঐ বক্ররেখার উপরস্থ কোন বিন্দু হলে ঐ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল,

$m_{tangent} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,y_1)}$ [অর্থাৎ $\frac{dy}{dx}$ এর x ও y এর পরিবর্তে x_1 ও y_1 এর মান বসাতে হবে]

(iii) (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $y - y_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,y_1)}(x - x_1)$

অভিলম্ব: স্পর্শ বিন্দুতে স্পর্শকের উপর লম্ব সরলরেখাকে অভিলম্ব বলে।

(i) $y = f(x)$ বক্ররেখার কোন বিন্দুতে অভিলম্বের ঢাল $-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ বা $-\frac{dx}{dy}$

(ii) (x_1, y_1) ঐ বক্ররেখার উপরস্থ কোন বিন্দু হলে ঐ বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বের ঢাল,

$m_{mormal} = -\frac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,y_1)}}$ বা $\left.\frac{dx}{dy}\right|_{(x_1,y_1)}$ [অর্থাৎ x ও y এর পরিবর্তে x_1 ও y_1 এর মান বসাতে হবে]

(iii) (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ, $y - y_1 = -\frac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,y_1)}}(x - x_1)$

Tips: (i) স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল হলে ঢাল = 0 (ii) স্পর্শক y অক্ষের সমান্তরাল হলে ঢাল $= \frac{k}{0}$

(iii) স্পর্শক অক্ষদ্বয় এর সাথে সমান সমান কোন উৎপন্ন করলে, ঢাল $= \pm 1$

Example-96. $y = (x+1)(x-1)(x-3)$ বক্ররেখাটি যে সব বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে, ঐ বিন্দুগুলিতে অঙ্কিত স্পর্শকসমূহের ঢাল নির্ণয় কর। [BUET'03-04]

Sol^n: প্রদত্ত রেখাটি x অক্ষকে ছেদ করে। সেক্ষেত্রে $y = 0$ $\therefore$ ছেদবিন্দুসমূহ $(-1,0), (1,0), (3,0)$

প্রদত্ত সমীকরণ হবে, $\ln y = \ln(x+1) + \ln(x-1) + \ln(x-3)$

$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (x-1)(x-3) + (x+1)(x-3) + (x+1)(x-1)$

প্রদত্ত সমীকরণে বিন্দুগুলোর স্থানাংকের মান বসিয়ে পাই, নির্ণেয় ঢাল $= 8, -4, 8$ (Ans.)

Another Process : ছেদবিন্দু $(-1,0), (1,0)(3,0)$

$y = (x+1)(x-1)(x-3) = (x^2-1)(x-3) = x^3 - 3x^2 - x + 3 \therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 1$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x=1)} = -4; \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x=1)} = 8; \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x=3)} = 8$ (Ans.)

Example-97. k এর মান কত হলে $y = k(x-1)(x+2)$ বক্ররেখার $x = 1$ বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করবে? [BUET'13-14, CUET'13-14,11-12]

Sol^n: $k(x^2 + x - 2) = y;\ y_1 = k(2x+1)\tan 60° = k \times 3 \therefore k = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Example-98. C-এর মান কত হলে $y = Cx(1+x)$ বক্ররেখার মূল বিন্দুতে তার স্পর্শক অক্ষের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করবে? [BUET'11-12,CUET'11-12,13-14]

Sol^n: $y = Cx(1+x) = Cx + Cx^2; \frac{dy}{dx} = C + 2Cx$

মূলবিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x=0)} = C \therefore C = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Example-99. $y = x^2 - 3x + 2$ বক্র রেখাটির যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শকগুলো x-অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাংক নির্ণয় কর। [CUET'05-06]

Sol^n: $y = x^2 - 3x + 2 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 2x - 3$

যেহেতু স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল $\therefore \frac{dy}{dx} = 0\ 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

$\therefore y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3.\frac{3}{2} + 2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = \frac{9-18+8}{4} = \frac{-1}{4}$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ *(Ans.)*

Example-100. $x^2 + 2ax + y^2 = 0$ বক্ররেখার উপর স্পর্শকের স্পর্শক বিন্দুগুলো নির্ণয় কর যেখানে স্পর্শকসমূহ x–অক্ষের উপর লম্ব। [RUET'15-16,CUET'09-10, DU'15-16,05-07]

Sol^n: $x^2 + 2ax + y^2 = 0 \Rightarrow 2x + 2a + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y\frac{dy}{dx} = -(x+a) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x+a}{y}$

x-অক্ষের উপর লম্ব রেখার জন্য $\frac{dx}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{y}{x+a} = 0 \Rightarrow y = 0$

$\therefore x^2 + 2ax = 0 \Rightarrow x = 0, -2a$ $\therefore$ বিন্দুসমূহ $(0,0)$ এবং $(-2a, 0)$ (Ans.)

Example-101. x এর কোন মানের জন্য $y = x + \frac{1}{x}$ বক্ররেখাটির ঢাল শূন্য হবে? [DU'13-14]

Sol^n: $y = x + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$; ঢাল শূন্য বলে $1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \therefore x = \pm 1$

Type-28: অন্তরীকরণের ব্যবহারিক প্রয়োগ

Concept: অন্তরক সহগের প্রধান ব্যবহারিক প্রয়োগ হচ্ছে পরিবর্তনের হার হিসেবে। কোন কিছু হ্রাস বা বৃদ্ধির হার হিসেবে যেমন, তেমনি জানা সংজ্ঞাগত রাশির প্রকাশেও $\left(v = \frac{ds}{dt}, a = \frac{d^2s}{dt^2}, a = \frac{dv}{dt}\right)$ অন্তরক সহগ ব্যবহৃত হয়।

Example-102. একটি গোলাকার বুদবুদের ব্যাসার্ধ বৃদ্ধির হার **0.2mm/sec** যখন ব্যাসার্ধ **7mm** তখন ঐ গোলাকার আয়তন বৃদ্ধির হার হলো- [KUET'13-14]

Sol^n: $\frac{dr}{dt} = 0.2, r = 7; V = \frac{4}{2}\pi r^3$

$\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \times 3r^2\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt} = 4\pi \times 7^2 \times 0.2 = 123.15mm^3/sec = 0.123cm^3/s$

Example-103. একটি গোলকের ব্যাসার্ধের বৃদ্ধিহার এবং পৃষ্ঠদেশের ক্ষেত্রফলের বৃদ্ধিহার সংখ্যাসূচক ভাবে সমান হলে, গোলকটির ব্যাসার্ধের মান কত হবে? [BUET'13-14]

Sol^n: $\frac{dA}{dt} = \frac{dr}{dt} \therefore \frac{d}{dt}(4\pi r^2) = \frac{dr}{dt} \Rightarrow 4\pi \times 2r\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt} \therefore 8\pi r = 1 \therefore r = \frac{1}{8\pi}$

Example-104. কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ সমহারে বৃদ্ধি পেলে, দেখাও যে, তার ক্ষেত্রফলের বৃদ্ধির হার ব্যাসার্ধের সমানুপাতিক ক্ষেত্রফল, $A = \pi r^2$; [r = ব্যাসার্ধ]

Sol^n: $\therefore \frac{dA}{dt} = 2\pi r.\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2\pi r.k$; [$\therefore \frac{dr}{dt}$ = ধ্রুবক = k]

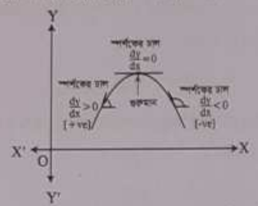
$\therefore \frac{dA}{dt} = (2\pi k).r \therefore \frac{dA}{dt} \propto r$; [$2\pi k$ = ধ্রুবক] [Proved]

Type-29: গুরুমান ও লঘুমান নির্ণয়

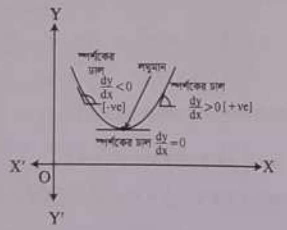
Concept:

গুরুমান (সর্বোচ্চ মান): গুরুমান বলতে ফাংশনের সেই মানকে বোঝায় যার পূর্বে স্পর্শকের ঢাল ধনাত্মক [+ve] এবং পরে স্পর্শকের ঢাল ঋণাত্মক [−ve]।

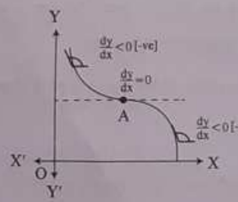
অর্থাৎ, যে বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ [বা স্পর্শকের ঢাল] এর মান ধনাত্মক থেকে ঋণাত্মক মানে রূপান্তরিত হয় সেই বিন্দুর কোটির মানই গুরুমান।

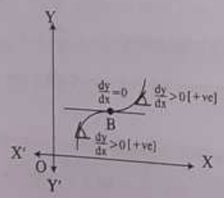


লঘুমান (সর্বনিম্ন মান): লঘুমান বলতে ফাংশনের সেই মানকে বোঝায় যার পূর্বে স্পর্শকের ঢাল ঋণাত্মক [−ve] এবং পরে স্পর্শকের ঢাল ধনাত্মক [+ve]. অর্থাৎ যে বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ [বা স্পর্শকের ঢাল] এর মান ঋণাত্মক থেকে ধনাত্মক মানে রূপান্তরিত হয় সেই বিন্দুর কোটিই লঘুমান।



গুরুমান এবং লঘুমানের জন্য $\frac{dy}{dx} = 0$ [স্পর্শকের ঢাল 0 বা স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল] কিন্তু $\frac{dy}{dx} = 0$ হলেই গুরুমান বা লঘুমান নাও হতে পারে।





চিত্রে A এবং B বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 0$ কিন্তু A বা B এর কোনটিই গুরুমান বা লঘুমান নয়। কারণ A বিন্দুর আগে এবং পরে $\frac{dy}{dx}$ এর মান ঋণাত্মক [অর্থাৎ চিহ্নের কোন পরিবর্তন হয় নি] এবং B বিন্দুর আগে ও পরে $\frac{dy}{dx}$ এর মান ধনাত্মক [অর্থাৎ এখানেও চিহ্নের পরিবর্তন হয় নি]

$\therefore$ A ও B গুরুমান / লঘুমান নয়।

গুরুমানের শর্ত:

গুরুমানের ক্ষেত্রে, (i) $\frac{dy}{dx} = 0$; (ii) $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ [−ve]

লঘুমানের শর্ত:

লঘুমানের ক্ষেত্রে, (i) $\frac{dy}{dx} = 0$; (ii) $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ [+ve]

অন্যান্য তথ্য:

(i) যদি কোন বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} > 0$ [+ve] হয় তাহলে গ্রাফ/ফাংশনটি ঐ বিন্দুতে ক্রমবর্ধমান (Increasing)

(ii) যদি কোন বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} < 0$ [−ve] হয় তাহলে গ্রাফ/ফাংশনটি ঐ বিন্দুতে ক্রম হ্রাসমান (Decreasing)

Example-105. দেখাও যে, $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ এর মান বৃহত্তম হবে যদি $x = e$ হয়। [BUET'12-13]

Sol^n: $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{x}}\right) = x^{\frac{1}{x}}\left[\frac{\frac{1}{x}}{x}.\frac{dx}{dx} + \ln x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\right]$ $\left[\frac{d}{dx}(u^v) = u^v\left(\frac{v}{u}\frac{du}{dx} + \ln u.\frac{dv}{dx}\right)\right]$ $= x^{\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right]$

$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{x}}\right)\left[\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right] + x^{\frac{1}{x}}\left[-\frac{2}{x^3} - \frac{x^2\frac{1}{x^2} - \ln x.2x}{x^4}\right]$

$= \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{x}}\right)\left[\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right] + x^{\frac{1}{x}}\left[-\frac{2}{x^3} - \frac{x - 2x\ln x}{x^4}\right] = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{x}}\right)\left[\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right] + x^{\frac{1}{x}}\left[-\frac{2}{x^3} - \frac{1 - 2\ln x}{x^3}\right]$

গুরুমান, লঘুমানের জন্য $f'(x) = 0 \therefore x^{\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right] = 0 \Rightarrow x^{\frac{1}{x}-2}[1 - \ln x] = 0 \therefore$ হয় $x^{\frac{1}{x}-2} = 0$

অথবা, $1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 = \ln e$

$\Rightarrow x = e$ এবং $f''(x)$ এ $x = e$ হলে [অথবা প্রচলিত পদ্ধতিতে ℓn নিয়ে করা যাবে।]

$f''(e) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{x}}\right)_{(x=e)}\left[\frac{1}{e^2} - \frac{\ln e}{e^2}\right] + e^{\frac{1}{e}}\left[-\frac{2}{e^3} - \frac{1 - 2\ln e}{e^3}\right]$

$= 0 + e^{\frac{1}{e}}\left[\frac{-2-1+2}{e^3}\right]$ $x = e$ হলে $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{x}}\right) = 0$

$= e^{\frac{1}{e}} \times \left(\frac{-1}{e^3}\right)$ যা ঋনাত্মক $\therefore x = e$ হলে f(x) বৃহত্তম হয়।(Showed)

Example-106. x এর কোন মানের জন্য $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ফাংশনটি সর্বোচ্চ মান সম্পন্ন হবে- [BUET'11-12]

Sol^n: $f(x) = x + \frac{1}{x}$; $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$; $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

গুরুমান ও লঘুমান থাকার প্রয়োজনীয় শর্ত,

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow (x+1)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$ or, -1

এখন $x = 1$ হলে, $f''(x) = 2 > 0 \therefore x = 1$ বিন্দুতে লঘুমান থাকবে।

$x = -1$ হলে, $f''(x) = -2 < 0 \therefore x = -1$ বিন্দুতে লঘুমান থাকবে।

$\therefore$ x এর মান −1 হলে ফাংশনটি সর্বোচ্চ মান সম্পন্ন হবে।

Example-107. $f(x) = 2x^3 - 9ax^2 + 12a^2x + 1, (a > 0)$ এর $x = p$ ও $x = q$ বিন্দুতে যথাক্রমে স্থানীয় গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মান আছে। $p^2 = q$ হলে a এর মান কত? [KUET'11-12,SUST'08-09]

Sol^n: $f(x) = 2x^3 - 9ax^2 + 12a^2x + 1$

$f'(x) = 6x^2 - 18ax + 12a^2$

গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মানের জন্য $f'(x) = 0$

$6x^2 - 18ax + 12a^2 = 0$

$x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$

$x = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 8a^2}}{2} = \frac{3a \pm a}{2} = 2a, a$

তাহলে, $q = 2a$ এবং $p = a$ নিয়ে পাই,
[কারণ তা না হলে a এর $p^2 = q$ ভগ্নাংশিক মান আসবে]

$a^2 = 2a$

$a = 2$

Example-108. $x+\frac{1}{x}$ এর গুরু মান কোনটি? [BUTex'16-17]

Solⁿ: $f(x)=x+\frac{1}{x}$; $\frac{df(x)}{dx}=1-\frac{1}{x^2}\Rightarrow x=\pm 1$

$\frac{d^2f(x)}{dx^2}=\frac{2}{x^3}$ $\therefore x=-1$ হলে $\frac{d^2f(x)}{dx^2}<0$ $\therefore f(x)$ এর গুরুমান$=-2$

Example-109. $x^4-4x^3+4x^2+5$ হলে লঘিষ্ঠ মান- [DU'17-18]

Solⁿ: $y=x^4-4x^3+4x^2+5$

$y'=4x^3-12x^2+8x=0$	$y''=12x^2-24x+8$
$\Rightarrow x(4x^2-12x+8)=0$	$y''(0)=8>0$

$\Rightarrow x=0$ এবং $4x^2-12x+8=0$

$\therefore y=0$ এর জন্য লঘিষ্ঠ মান রয়েছে $\therefore f(0)=0^4-4.0^3+4.0^2+5=5$

Example-110. $f(x)=17-15x+9x^2-x^3$ **একটি ফাংশন। (i) ইহার চরমবিন্দু নির্ণয় কর। (ii) ইহা কোন ব্যবধিতে হ্রাস পায় এবং কোন ব্যবধিতে বৃদ্ধি পায় নির্ণয় কর। (iii) ইহার সর্বোচ্চ ও সর্বোনিম্ন মান নির্ণয় কর। (iv) ইহার লেখচিত্র অঙ্কন কর।**

Solⁿ: দেওয়া আছে, $f(x)=17-15x+9x^2-x^3$

$\therefore f'(x)=-15+18x-3x^2=-3(x^2-6x+5)=-3(x-1)(x-5)$ এবং $f''(x)=18-6x$

(i) চরমবিন্দুর জন্য, $f'(x)=0\Rightarrow -3(x-1)(x-5)=0\Rightarrow x=1,5$

$\therefore f(1)=17-15\times 1+9\times 1^2-1^3=10$ এবং $f(5)=17-15\times 5+9\times 5^2-5^3=42$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের চরমবিন্দু $(1,10)$ ও $(5,42)$

(ii) $x=1,5$ মানদ্বয় সকল বাস্তব সংখ্যাকে $x<1$, $1\le x\le 5$ এবং $x>5$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

এখন, $x<1$ এর জন্য $(x-1)<0$ ও $(x-5)<0$, কাজেই $f'(x)<0$.

$\therefore -\infty<x<1$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন হ্রাস পায়।

আবার, $1<x<5$ এর জন্য $(x-1)>0$ ও $(x-5)<0$, কাজেই $f'(x)>0$.

$\therefore 1<x<5$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন বৃদ্ধি পায়।

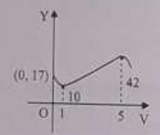
অপরপক্ষে, $x>5$ এর জন্য $(x-1)>0$ ও $(x-5)>0$, কাজেই $f'(x)<0$. $\therefore x>5$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন হ্রাস পায়।

(iii) $f''(1)=18-6\times 1=12>0$

$\therefore x=1$ বিন্দুতে $f(x)$ এর সর্বোনিম্ন মান আছে এবং ইহা $f(1)=10$

আবার, $f''(5)=18-6\times 5=-12<0$

$\therefore x=5$ বিন্দুতে $f(x)$ এর সর্বনিম্ন মান আছে এবং ইহা $f(5)=42$



(iv) ফাংশনটির লেখচিত্র উপরে অঙ্কিত হয়েছে।

Example-111. $f(x)=2x^3-21x^2+36x-20$ **এর সর্বোচ্চ মান ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর।**

Solⁿ: দেওয়া আছে, $f(x)=2x^3-21x^2+36x-20$

$f'(x)=6x^2-42x+36$ এবং $f''(x)=12x-42$

চরম বিন্দুর জন্য, $f'(x)=0\Rightarrow 6x^2-42x+36=0$

$\Rightarrow x^2-7x+6=0\Rightarrow x^2-6x-x+6=0\Rightarrow x(x-6)-1(x-6)=0\Rightarrow (x-1)(x-6)=0\Rightarrow x=1,6$

এখন, $f''(1)=12\times 1-42=-30<0$

$\therefore x=1$ বিন্দুতে $f(x)$ এর সর্বোচ্চ মান আছে এবং ইহা $f(1)=2-21+36-20=38-41=-3$

আবার, $f''(6)=12\times 6-42=72-42=30>0$

$\therefore x=6$ বিন্দুতে $f(x)$ এর সর্বনিম্ন মান আছে এবং ইহা $f(6)=2\times 6^3-21\times 6^2+36\times 6-20$

$=432-756+216-20=648-776=-128$

Example-112. **যদি** $f(x)=x^2+\frac{a}{x}$ **এর** $x=2$ **বিন্দুতে একটি সর্বনিম্ন মান থাকে তবে a এর মান-**

Solⁿ: $f'(x)=2x-\frac{a}{x^2}$ $\therefore 4-\frac{a}{4}=0\Rightarrow a=16$

Example-113. একটি ত্রিমাত্রিক ফাংশনে $x=-3$ বিন্দুতে গরিষ্ঠমান 15 এবং $x=1$ বিন্দুতে লঘিষ্ঠমান -17 হলে, ফাংশনটি নির্ণয় কর।

Solⁿ: ধরি, ফাংশনটি $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$\therefore f'(x)=3ax^2+2bx+c$

যেহেতু $x=-3$ এর জন্য গরিষ্ঠমান $\therefore f'(-3)=0$

$\therefore 27a-6b+c=0$ ....(i)

এবং $x=-3$ এর জন্য গরিষ্ঠমান $=15$ $\therefore f(-3)=15$

$\therefore -27a+9b-3c+d=15$ ....(ii)

আবার, $x=1$ এর জন্য ফাংশনটির লঘিষ্ঠমান $\therefore f'(1)=0$

$3a+2b+c=0$ ....(iii)

এবং $x=1$ এর জন্য লঘিষ্ঠমান $=-17$ ....(iv)

(i), (ii), (iii), (iv) সমাধান করে পাই,

$a=1, b=3, c=-9, d=-12$

$\therefore$ ফাংশনটি $f(x)=x^3+3x^2-9x-12$

Type-30: সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মানের ব্যবহারিক প্রয়োগ

Concept:

(i) প্রথমে যে Function এর সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান বের করতে হবে তা দেওয়া না থাকলে শর্ত অনুসারে ফাংশনটি লিখতে হবে।

(ii) যদি একটি ফাংশনের মধ্যে 2টি (বা তার বেশি) চলক থাকে তাহলে তাদের মধ্যে কোন একটি সম্পর্ক উপস্থাপন করতে হবে।

[যেমন: Example-114 তে $A=2\pi r^2+2\pi rh$ [A এর মধ্যে চলক 2টি (r ও h)] এদের মধ্যে তাই সম্পর্ক স্থাপন করা হয়েছে।

$[V=\pi r^2h=1]$

(iii) ফাংশন আকারে প্রকাশের পর লঘুমান বা গুরুমানের শর্ত আরোপ করে প্রয়োজনীয় অজানা রাশির মানটি নির্ণয় করতে হবে।

Example-114. 1 লিটার (1000 ঘন সে.মি.) তরল ধারণ ক্ষমতা সম্পন্ন দুই প্রান্তে আবদ্ধ একটি খাড়া বৃত্তাকার সিলিন্ডার প্রয়োজন। সিলিন্ডারটির উচ্চতা ও ব্যাসার্ধ কিরূপ হলে সর্বাপেক্ষা কম ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট টিন দিয়ে তা তৈরী করা সম্ভব? [BUET'06-07,14-15]

Solⁿ: ধরি, সিলিন্ডারের উচ্চতা h ডেসিমি. এবং ব্যাসার্ধ r ডেসিমি, তাহলে $\pi r^2h=1\Rightarrow h=\frac{1}{\pi r^2}$

সিলিন্ডারের ক্ষেত্রফল, $A=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r(r+h)=2\pi r\left(r+\frac{1}{\pi r^2}\right)=2\pi r^2+\frac{2}{r}$

$\therefore \frac{dA}{dr}=4\pi r-\frac{2}{r^2}$ $\therefore \frac{d^2A}{dr^2}=4\pi+\frac{4}{r^3}$

A সর্বনিম্ন হলে, $4\pi r-\frac{2}{r^2}=0\Rightarrow 4\pi r-2\pi h=0$

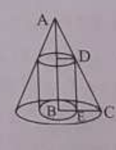
$\Rightarrow 4\pi r-2\pi h=0$
$\Rightarrow 2r-h=0$
$\Rightarrow r=\frac{h}{2}$

$\therefore \pi r^2\times 2r=1\Rightarrow 2\pi r^3=1$

$\therefore r=\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}=0.542\text{dm}=5.42\text{ cm}$ এবং $h=2r=10.84\text{cm}$

Example-115. একটি সমবৃত্তভূমিক কোণকের মধ্যে একটি খাড়া বৃত্তাকার সিলিন্ডার স্থাপন করা আছে। সিলিন্ডারের বক্রতল বৃহত্তম হতে হলে দেখাও যে, সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ কোণকের ভূমির ব্যাসার্ধের অর্ধেক। [BUET'16-17]

Solⁿ: ধরি, সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ x, কোণকের ভূমির ব্যাসার্ধ r এবং উচ্চতা h।



এখন, ΔABC ও ΔDEC সদৃশ। $\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EC}=\frac{DE}{BC-BE}\Rightarrow \frac{h}{r}=\frac{DE}{r-x}$ $\therefore DE=\frac{h}{r}(r-x)$

সিলিন্ডারের বক্রতলের ক্ষেত্রফল $A=2\pi x\cdot DE=2\pi x\cdot\frac{h}{r}(r-x)=2\pi xh-\frac{2\pi hx^2}{r}$

A বৃহত্তম হলে, $\frac{dA}{dx}=0\Rightarrow 2\pi h-\frac{4\pi h}{r}x=0\Rightarrow 1-\frac{2x}{r}=0\Rightarrow \frac{2x}{r}=1$ $\therefore x=\frac{r}{2}$

আবার, $\frac{d^2A}{dx^2}=-\frac{4\pi h}{r}<0$ $\therefore x=\frac{r}{2}$ হলে সিলিন্ডারের বক্রতল বৃহত্তম হবে।

Example-116. $y = \sqrt{x}$ গ্রাফে (x, y) বিন্দুটির মান নির্ণয় কর যা $(4, 0)$ বিন্দুর নিকটতম। [RUET'15-16]

Sol^n: $y = \sqrt{x}$

(x, y) হতে, $(4,0)$ এর দূরত্ব $D = \sqrt{(4-x)^2 + y^2} = \sqrt{(4-x)^2 + x}$

$\therefore \frac{dD}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(4-x)^2+x}} \cdot (2(4-x).(-1) + 1) = \frac{-8+2x+1}{2\sqrt{(4-x)^2+x}} = \frac{2x-7}{2\sqrt{(4-x)^2+x}}$

$\therefore$ সর্বনিম্ন দূরত্বের জন্য, $\frac{dD}{dx} = 0 \Rightarrow 2x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$

এখন, $\frac{d^2D}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{(4-x)^2+x}} + (2x-7).\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)((4-x)^2 + x)^{-\frac{3}{2}}.(2(4-x)(-1)+1)$

$= \frac{1}{\sqrt{(4-x)^2+x}} - \frac{2(x-7)}{4}((4-x)^2 + x)^{-\frac{3}{2}}(2x-7)$

$\therefore x = \frac{7}{2}$ বসিয়ে, $\frac{d^2D}{dx^2} = \frac{2\sqrt{15}}{15} > 0$; অতএব, $x = \frac{7}{2}$ এর জন্য দূরত্ব সর্বনিম্ন। $\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু, $\left(\frac{7}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ (Ans.)

Example-117. দুটি সংখ্যার যোগফল 7 হলে সংখ্যা দুটির গুণফলের সর্বোচ্চ মান হলো- [KUET'15-16]

Sol^n: সংখ্যাদ্বয় x ও $(7-x)$ হলে,

গুণফল $P = x(7-x) = 7x - x^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 2.x.\frac{7}{2} - (x)^2 = \frac{49}{4} - \left(x - \frac{7}{2}\right)^2$

$\therefore P \le \frac{49}{4}$; যেহেতু $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2$ এর সর্বনিম্ন মান 0। $\therefore$ সর্বোচ্চ মান $\frac{49}{4}$।

Example-118. কোন আম বাগানে প্রতি একরে 30 টি গাছ এবং গড়ে প্রতি গাছে 400 টি আম ধরে। প্রতি একরে অতিরিক্ত একটি করে গাছ লাগাতে থাকলে গাছ প্রতি 10 টি আমের ফলন কমতে থাকে। সর্বোচ্চ ফলনের জন্য প্রতি একরে কতটি গাছ দরকার?

Sol^n: ধরি, প্রতি একরে গাছ $= 30 + x$, দরকার। $\therefore$ প্রতি গাছে আম $= 400 - 10x$

আমের ফলন y হলে, $y = (30+x)(400-10x) = 1200 + 100x - 10x^2$

$\frac{dy}{dx} = 100 - 20x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -20 < 0$

$\therefore$ প্রতি একরে গাছ দরকার $(30+5)$ বা 35 টি

সর্বোচ্চ/সর্বনিম্ন ফলনের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore 100 - 20x = 0 \therefore x = 5$

$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ বিধায় ফলন সর্বোচ্চ

Example-119. দেখাও যে বৃত্তস্থ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হবে যদি ত্রিভুজটি সমবাহু হয়।

Sol^n: ধরি, ABC বৃত্তস্থ ত্রিভুজের কেন্দ্র O ও ব্যাসার্ধ R।

$\therefore \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \Delta AOB$ এর ক্ষেত্রফল $+ \Delta BOC$ এর ক্ষেত্রফল $+ \Delta COA$ এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}R^2 \sin \angle AOB + \frac{1}{2}R^2 \sin \angle BOC + \frac{1}{2}R^2 \sin \angle COA$

$\therefore Z = \frac{1}{2}R^2 \sin 2A + \frac{1}{2}R^2 \sin 2B + \frac{1}{2}R^2 \sin 2C$

আবার, $A + B + C = \pi$, $\therefore$ C এর কোন নির্দিষ্ট মানের জন্য $B = \pi - A - C$,

$\therefore \frac{dB}{dA} = -1$

$\therefore \frac{dZ}{dA} = 0$ হলে $R^2 \cos 2A + \frac{dB}{dA} R^2 \cos 2B = 0 \Rightarrow \cos 2A - \cos 2B = 0$

$\therefore 2\sin(A+B)(A-B) = 0$

এখন $\sin(A+B) \neq 0$ কোন তাহলে $A + B = 0$ অথবা π অসম্ভব

$\therefore \sin(A-B) = 0 \quad \therefore A = B$, একইভাবে A এর যে মানের জন্য 2 এর মান সর্বোচ্চ হয় তা নির্দিষ্ট বা ধ্রুব বলে একইভাবে দেখানো যায় $B = C$ অর্থাৎ $A = B = C$ $\therefore$ ত্রিভুজটি সমবাহু।

Example-120. দুইটি সংখ্যার যোগফল 50। সংখ্যা দুইটি কত হলে এদের বর্গের সমষ্টি লঘিষ্ঠ হবে।

Sol^n: ধরি, সংখ্যা দুইটি x ও y।

Given, $x + y = 50$

এখানে, $f(x,y) = x^2 + y^2$ যার লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় করতে হবে।

$\therefore f(x) = x^2 + (50-x)^2$

$\therefore f'(x) = 2x + 2(50-x)(-1) = 2x - 100 + 2x = 4x - 100$

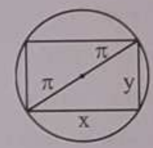
এবং $f''(x) = 4 \therefore x$ এর মানের জন্য ফাংশনটির লঘিষ্ঠ মান পাওয়া যাবে।

$f'(x) = 0 \therefore 4x - 100 = 0$ or, $x = 25$

$x = 25$ হলে $y = 25$ $\therefore$ সংখ্যাদ্বয় 25 ও 25

Example-121. π ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্তে একটি আয়তক্ষেত্র অন্তর্লিখিত আছে। আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত হলে আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সর্বোচ্চ হবে।

Sol^n: এখানে আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, $f(x,y) = xy$ যার সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করতে হবে।



এখানে, $x^2 + y^2 = (2\pi)^2 \therefore y = \sqrt{4\pi^2 - x^2}$

এখানে, $f(x) = x\sqrt{4\pi^2 - x^2} + x.\frac{1}{2\sqrt{4\pi^2 - x^2}}(-2x) = \frac{4\pi^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}$

এখানে, $f'(x) = 0$

$\therefore \frac{4\pi^2 - 2x^2}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}} = 0 \Rightarrow 2x^2 = 4\pi^2 \therefore x = \sqrt{2}\pi$

এবং $y = \sqrt{4\pi^2 - \left(\sqrt{2}\pi\right)^2} = \sqrt{2}\pi$ (Ans.)

একত্রে সব গুরুত্বপূর্ণ সূত্র

- লিমিট:

(i) $\lim\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\lim(x)}{\lim(y)}$ [যেকানে $\lim y \neq 0$]

(ii) $\lim(c) = c$ [c ধ্রুবক]

(iii) $\lim(cx) = c\lim(x)$ [c ধ্রুবক]

(iv) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin x}{x} = 1$

(v) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

(vi) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{\tan x}{x} = 1$

(vii) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{x}{\tan x} = 1$

(viii) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \cos x = 1$

(ix) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{1}{\cos x} = 1$

(x) $\underset{x\to a}{\text{Lt}} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$

(xi) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

(xii) $\underset{x\to\infty}{\text{Lt}} \left(1 + \frac{m}{x}\right)^x = e^m$

(xiii) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

(xiv) $\underset{x\to\infty}{\text{Lt}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ [উল্লেখ্য $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$]

(xv) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

(xvi) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin^{-1}x}{x} = 1$

(xvii) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{x}{\sin^{-1}x} = 1$

(xviii) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \sin x = \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\, x$

(xix) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan^{-1}x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\tan^{-1}x} = 1$

(xx) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{d}{dx}\{f(x)\}$

(xxi) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{m}{x}\right)^{nx} = e^{mn}$

(xxii) $\lim\limits_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{n}{x}} = e^{mn}$

- **L' Hospital's Rule:**

যদি $\underset{x\to a}{\text{Lt}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$ ভগ্নাংশটির একটি অনির্ণেয় আকার আসে তবে লব ও হরকে বারবার Differentiation করতে হবে যতক্ষণ না বাস্তব মান পাওয়া যায়। অর্থাৎ, $\underset{x\to a}{\text{Lt}} \frac{f(x)}{g(x)} = \underset{x\to a}{\text{Lt}} \frac{f'(a)}{g'(a)} = \underset{x\to a}{\text{Lt}} \frac{f''(a)}{g''(a)} = \cdots\cdots\cdots$ [শর্ত প্রযোজ্য]

ব্যাখ্যা: L' Hospital হচ্ছে গাণিতিকভাবে অসুস্থ (অনির্ণেয়) রাশির জন্যে চিকিৎসাকেন্দ্র। আপাদমস্তক একই রোগে আক্রান্ত রোগীর জন্য (অর্থাৎ, $\frac{0}{0}$ এবং $\frac{\infty}{\infty}$) এটি কার্যকর এবং আপাদমস্তক একই ডাক্তার (Differentiation) দিয়ে Operation চালাতে হবে। যতক্ষণ অসুস্থ থাকবে ($\frac{0}{0}$ এবং $\frac{\infty}{\infty}$ আকার) ততক্ষণ Operation চলবে। অন্যান্য রোগীদের ($\pm\infty, \frac{1}{0}, \infty, 0$ ইত্যাদি) নিয়ে বা সুস্থ রাশিকে (বাস্তব) নিয়ে Operation করা চলবে না। প্রয়োজনে Change করে $\frac{0}{0}$ বা $\frac{\infty}{\infty}$ আকারে নিয়ে তারপর L'Hospital প্রয়োগ করা যাবে।

- অন্তরীকরণ:

(i) $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
(ii) $\frac{d}{dx}(\sin nx) = n\cos nx$
(iii) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
(iv) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
(v) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$
(vi) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x.\tan x$
(vii) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x.\cot x$
(viii) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
(ix) $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$
(x) $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$
(xi) $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$
(xii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$
(xiii) $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx}$
(xiv) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(xv) $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(xvi) $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$
(xvii) $\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = \frac{-1}{1+x^2}$
(xviii) $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
(xix) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
(xx) $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
(xxi) $\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$
(xxii) $\frac{d}{dx}(uvw) = uvw\left\{\frac{\frac{d}{dx}(u)}{u} + \frac{\frac{d}{dx}(v)}{v} + \frac{\frac{d}{dx}(w)}{w}\right\}$

- n-তম অন্তরক:

(i) $y = x^n$ হলে $y_n = n!$
(ii) $y = e^{ax+b}$ হলে $y_n = a^n e^{ax+b}$
(iii) $y = a^x$ হলে $y_n = a^x(\ln a)^n$
(iv) $y = \sin(ax+b)$ হলে $y_n = a^n \sin\left[\frac{n\pi}{2} + ax + b\right]$
(v) $y = \cos(ax+b)$ হলে $y_n = a^n \cos\left[\frac{n\pi}{2} + ax + b\right]$
(vi) $y = \ln(x)$ হলে $y_n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$
(vii) $y = e^{ax}T(bx+c)$ হলে $y_n = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} T\left(bx + c + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$ (যেখানে T = sin বা cos)

- স্পর্শক ও অভিলম্ব

(i) (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ: $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$
(ii) (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ: $x - x_1 + f'(x_1)(y - y_1) = 0$

গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাকটিস প্রবলেম

Written

01. $\lim_{n\to\infty} \frac{1-2+3-4\cdots\cdots-2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2-1}} = ?$ [Ans: $-\frac{1}{3}$]
02. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = ?$ [Ans: 0]
03. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{x} = ?$ [Ans: 0]
04. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{2x}{x-1} - \frac{2}{\ln x}\right) = ?$ [Ans: 1]
05. $\lim_{x\to 0} \frac{x-\ln(1+x)}{1+x-e^x} = ?$ [Ans: -1]
06. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+5x)}{\ln(1-5x)} = ?$ [Ans: -1]
07. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan x}-1}{x} = ?$ [Ans: 1]
08. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln x^2}{\ln(\cot^2 x)} = ?$ [Ans: -1]
09. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{\sqrt[3]{8n^3+1}} - \frac{n}{2}\right) = ?$ [Ans: $\frac{2}{3}$]
10. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4} = ?$ [Ans: $\frac{1}{6}$]
11. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x^2+x} = ?$ [Ans: 2]
12. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sec^3\theta-\tan^3\theta}{\tan\theta} = ?$ [Ans: $\frac{3}{2}$]
13. $\lim_{x\to 0} \frac{3\sin\pi x-\sin 3\pi x}{x^3} = ?$ [Ans: $4\pi^3$]
14. $\lim_{x\to a} \frac{a^x-x^a}{x^x-a^a} = ?$ [Ans: $\frac{\ln a-1}{\ln a+1}$]
15. $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x} = ?$ [Ans: $\frac{-1}{3}$]
16. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+5x^2}{1+3x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}} = ?$ [Ans: e^2]
17. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1}(ax)}{\sin^{-1}(bx)} = ?$ [Ans: $\frac{a}{b}$]
18. $\underset{x\to 2}{\text{Lt}} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = ?$ [Ans: -4]
19. $\lim_{x\to 0} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2} = ?$ [Ans: $\frac{1}{2a}$]
20. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1+x}} = ?$ [Ans: 1]
21. $\lim_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{2-x^2}}{2x-\sqrt{2+2x^2}} = ?$ [Ans: 2]
22. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{(1+x)}-\sqrt[3]{(1-x)}}{x} = ?$ [Ans: $\frac{2}{3}$]

23. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\ln(1+x)}{x^2}=?$ [Ans: $\frac{1}{2}$]

24. যদি $f(a)=3, f'(a)=2, g(a)=9, g'(a)=3$ হয়, তবে $\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(a)-g(x)f(a)}{f(x)-f(a)}=?$ [Ans: $\frac{9}{2}$]

25. $\lim_{x\to 0}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right\}^{\frac{1}{x}}=?$ [Ans: e^2]

26. $\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{cosec}(x+h)-\operatorname{cosec}x}{h}=?$ [Ans: $-\operatorname{cosec}x\cot x$]

27. $\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2+\cos x-1}=?$ [Ans: 1]

28. $\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cot x}{1-\cos x}=?$ [Ans: 2]

29. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+9}-3}=?$ [Ans: 3]

30. $\lim_{x\to\infty}\frac{(ax+b)^m(cx+b)^n}{(px+q)^{m+n}}=?$ [Ans: $\frac{a^mc^n}{p^{m+n}}$]

31. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}=?$ [Ans: $-\frac{1}{12}$]

32. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+\sin bx}-\sqrt{a-\sin bx}}{\sqrt[3]{a+\sin bx}-\sqrt[3]{a-\sin bx}}=?$ [Ans: $\frac{3}{2}b\,a^{-\frac{7}{6}}$]

33. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+x}-\sqrt[4]{1-x}}{x}=?$ [Ans: $\frac{1}{2}$]

34. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2a-x}+\sqrt{2a}-\sqrt{x}}{\sqrt{4a^2-x^2}}$ $[a>0]=?$ [Ans: $\sqrt{\frac{2}{a}}$]

35. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{6+x-3x^2}=?$ [Ans: $-\frac{2}{3}$]

36. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-3x^2+1}{6x^4+x^3-3x}=?$ [Ans: $\frac{1}{3}$]

37. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{5x^2-1}{x^2}\right)=?$ [Ans: 5]

38. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1})=?$ [Ans: $\frac{1}{2}$]

- অন্তরক সহগ নির্ণয় করঃ (49-80)

39. $\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ [Ans: $\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(1-\sqrt{x})^2}$]

40. $\frac{x^2}{e^{x+2}}$ [Ans: $\frac{2x-x^2}{e^{x+2}}$]

41. $(x^3+3^x)\operatorname{cosec}x$ [Ans: $\operatorname{cosec}x\{3x^2+3^x\ln 3-(x^3+3^x)\cot x\}$]

42. $\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}$ [Ans: 0]

43. $\frac{x^3}{x+2}$ [Ans: $\frac{x^2(2x+6)}{(x+2)^2}$]

44. $3\sin^3(5x^2+3x+2)$ [Ans: $9\sin^2(5x^2+3x+2).\cos(5x^2+3x+2).(10x+3)$]

45. $\ln\{\sin(7x^2+2)\}$ [Ans: $\cot(7x^2+2).14x$]

46. $e^{mx^2\sin 5x}$ [Ans: $me^{mx^2\sin 5x}(2x\sin 5x+5x^2\cos 5x)$]

47. যদি $f'(x)=\sin(\ln x)$ এবং $y=f\left(\frac{2x+3}{3-2x}\right)$ হয় তবে $\frac{dy}{dx}=?$ [Ans: $\frac{12}{(3-2x)^2}\sin\ln\left(\frac{2x+3}{3-2x}\right)$]

48. $\ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ [Ans: $\operatorname{cosec}x$]

49. $\tan^{-1}(e^x)$ [Ans: $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$]

50. $a^{\ln(\sin x)}$ [Ans: $a^{\ln(\sin x)}\cot x(\ln a)$]

51. $(3x^2+x+6)^{2x}$ [Ans: $2(3x^2+x+6)^{2x}\left[\frac{6x^2+x}{3x^2+x+6}+\ln(3x^2+x+6)\right]$]

52. $(a^x)(\cos x)(x^3)$ [Ans: $(a^x)(\cos x)(x^3)\{\ln a-\tan x+\frac{3}{x}\}$]

53. $(\sin x)(\ln x)(x^3)(\cos x)$ [Ans: $\frac{dy}{dx}=(\sin x)\ln x(x^3)(\cos x)\left[\cot x+\frac{1}{x\ln x}+\frac{3x^2}{x^3}-\tan x\right]$]

54. $\frac{x^3\sin x}{e^x}$ [Ans: $\frac{x^3\sin x}{e^x}\left(\frac{3}{x}+\cot x-1\right)$]

55. $\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)\left(1-x^{\frac{1}{4}}\right)$ [Ans: -1]

56. $y=\tan^{-1}\frac{2t}{1-t^2}$, $x=\sin^{-1}\frac{2t}{1+t^2}$, $\frac{dy}{dx}=?$ [Ans: 1]

57. $x=a(\theta+\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2}=?$ [Ans: $\frac{1}{4a}\sec^4\frac{1}{2}\theta$]

58. $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ [Ans: $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$]

59. $10^{x+1}-3\ln x+\cot\frac{x}{2}$ [Ans: $10^{x+1}\ln 10-\frac{3}{x}-\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}$]

60. $y=e^{x+e^{x+\cdots}}$ হলে, $\frac{dy}{dx}=?$ [Ans: $\frac{y}{1-y}$]

61. $2^x+2^y=2^{x+y}$ হলে, $\frac{dy}{dx}=?$ [Ans: $2^{x-y}\frac{2^y-1}{1-2^x}$]

62. $\sin^{-1}x$ এর সাপেক্ষে $2x$ এর অন্তরক সহগ বের কর। [Ans: $2\sqrt{1-x^2}$]

63. e^{ax} এর সাপেক্ষে $\cos ax$ এর অন্তরক সহগ বের কর। [Ans: $-\frac{\sin ax}{e^{ax}}$]

64. $y^x=e^{x+y}$ হলে, $\frac{dy}{dx}=?$ [Ans: $\frac{(1-\ln y)y}{x-y}$]

65. $x^yy^x=1$ হলে, $\frac{dy}{dx}=?$ [Ans: $-\frac{y(y+x\ln y)}{x(x+y\ln x)}$]

66. $y=\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ হলে, $\frac{dy}{dx}=?$ [Ans: $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$]

- পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ:

67. $y=(\sin^{-1}x)^2+(\cos^{-1}x)^2$ হলে, দেখাও যে, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=4$

68. $y=\left\{x+\sqrt{(1+x^2)}\right\}^m$ হলে, দেখাও যে, $(1+x^2)y_2+xy_1-m^2y=0$

69. $x=\sin t$ এবং $y=\sin pt$ হলে, দেখাও যে, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+p^2y=0$

70. $y=e^x\cos x$ হলে প্রমাণ কর, $\frac{d^2y}{dx^2}-2.\frac{dy}{dx}+2y=0$

71. $\ln y=\tan^{-1}x$ হলে দেখাও, $(1+x^2)y_2+(2x-1)y_1=0$

72. $\cos(5x+6)$ এর n-তম অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। [Ans. $5^n\cos\left(n\frac{\pi}{2}+5x+6\right)$]

73. $\ln(5x+6)$ এর n-তম অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। [Ans. $\frac{(-1)^{n-1}.5^n.(n-1)!}{(5x+6)}$]

- ম্যাকলরিনের ধারার সাহায্যে বিস্তৃত কর: (89-91)

74. $\ln(x+1)$

75. e^{ax}

76. ম্যাকলরিনের ধারার সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ এবং তা থেকে প্রমাণ কর যে, $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ এবং $\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

77. দেখাও যে, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের (x_1,y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণঃ $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$

78. দেখাও যে, গোলাকার বায়ু বুদবুদের আয়তন বৃদ্ধির হার, ব্যাসার্ধের বৃদ্ধি হারের $4\pi r^2$ গুণ।

79. 6' লম্বা ব্যক্তি 15' উচুতে অবস্থিত প্রদীপের দিকে 5ft/sec বেগে অগ্রসর হচ্ছে। ছায়া কীভাবে ছোট হচ্ছে। [Ans: $\frac{10}{3}$ ft/sec]

80. একটি গোল পানি ভর্তি বেলুনে ছিদ্র করে দিলে তা থেকে প্রতি মিনিটে $4cm^3$ হারে পানি বের হয়। যখন ব্যাসার্ধ 8cm তখন কি হারে উপরিতল হ্রাস পায়? [Ans: $1\ cm^2/min$]

81. 1 লিটার আয়তনের টিনের ক্যান তৈরিতে উচ্চতা ও ব্যাসার্ধ কত হলে সবচেয়ে কম টিন লাগবে?
[Ans: $h = 10.84$ cm, $r = 5.42$ cm]

82. a ব্যাসার্ধের গোলকে খাড়া বৃত্তাকার কোণক স্থাপন করা আছে। কোণকের আয়তন বৃহত্তম হলে, উচ্চতা =? [Ans: $\frac{4a}{3}$ একক]

83. তিনটি ধনাত্মক সংখ্যার যোগফল 9 হলে তাদের গুণফল সর্বোচ্চ কত হতে পারে? [Ans: 27]

84. $y = \tan\theta + \sec\theta$ হলে প্রমাণ কর যে, $y_2 = \frac{\cos\theta}{(1-\sin\theta)^2}$

85. $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{(1+x)^n-1}{x}$ এর মান বের কর। [Ans: n]

86. $y = \frac{1}{\sqrt[5]{x^2-4x+7}}$ অথবা $\frac{1}{(x^2-4x+7)^{\frac{1}{5}}}$ এর অন্তরীকরণ কর। [Ans. $-\frac{1}{5}(x^2-4x+7)^{-\frac{6}{5}}.(2x-4)$]

87. $2x^2 - xy + 3y^2 = 18$ বক্ররেখার (3,2) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল বের কর। [Ans: $-\frac{10}{9}$]

88. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 5$ এর গুরুমান ও লঘুমানের অবস্থান ($x =?$) নির্ণয় কর।
[Ans: $x = 1$ (লঘু), $x = 2$ (গুরু), $x = 3$ (লঘু)]

89. দেখাও, $\frac{x}{\ln(x)}$ এর লঘু মান e।

90. $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্তের $(-2, 1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [Ans: $x - y + 3 = 0$]

91. $F(x) = \begin{cases} 1\ ; x < 0 \\ 1 + \sin x\ ; 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ 2 + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 ; x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$x = 0$, & $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে f(x) এর বিচ্ছিন্নতা, অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা কর।

92. $\lim\limits_{x\to\infty} a^x \sin\frac{b}{a^{x-1}}$

MCQ

93. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(a+h)^2\sin(a+h) - a^2\sin a}{h} = ?$
(a) $2a^2\cos a + a\sin a$ (b) $a^2\cos a + 2a\sin a$ (c) $2\alpha^2\cos a + a\sin a$ (d) None

94. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 5x - \cos 9x}{\cos x - \cos 7x} = ?$
(a) $\frac{45}{7}$ (b) $\frac{14}{6}$ (c) $\frac{7}{12}$ (d) $\frac{14}{12}$

95. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^{-1}3x}{\sin^{-1}5x} = ?$
(a) $\frac{5}{3}$ (b) 15 (c) 1 (d) $\frac{3}{5}$

96. $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^{\frac{7}{2}} - a^{\frac{7}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}} = ?$
(a) $6a^6$ (b) $7a^6$ (c) $7a^3$ (d) $6a^3$

97. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = ?$
(a) 3 (b) $3x^2$ (c) e^3 (d) $e^{\frac{1}{3}}$

98. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 10x}{\sin^2 13x} = ?$
(a) $\frac{100}{169}$ (b) $\frac{10}{13}$ (c) 130 (d) কোনটিই নয়

99. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{3x} - e^{4x}}{e^{7x} - e^{9x}} = ?$
(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) $\frac{12}{63}$ (d) $\frac{7}{16}$

100. $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{\frac{1-x^3}{1-x^4}} = ?$
(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $\sqrt{2}$

101. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x^2 - 4} = ?$
(a) $2\sqrt{2}$ (b) $3\sqrt{2}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{1}{8\sqrt{2}}$

102. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-4x}}{x} = ?$
(a) 0 (b) ∞ (c) $\frac{7}{2}$ (d) -1

103. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{a}\left[\frac{1}{\sqrt{x+a}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right] = ?$
(a) $-\frac{1}{2}a^{\frac{3}{2}}$ (b) 2 (c) $-\frac{3}{2}a^{\frac{3}{2}}$ (d) অস্তিত্ব নেই

104. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin 3x} = ?$
(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) 6 (d) $\frac{1}{6}$

105. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(1+x)^n - 3^n}{x-2} = ?$
(a) 3 (b) $n3^{n-1}$ (c) 3n (d) $n^{3^{n-1}} - 3^n \ln^3$

106. $\lim\limits_{x\to\infty} a^x \sin\left(\frac{b}{a^x}\right) (a > 1) = ?$
(a) $b\ln a$ (b) $a\ln b$ (c) b (d) a

107. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}} = ?$
(a) 2 (b) 3 (c) 1 (d) 0

108. $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{\cos x - \cos a}{\cot x - \cot a}\right) = ?$
(a) $\frac{1}{2}\sin^3 a$ (b) $\frac{1}{2}\text{cosec}^3 a$ (c) $\sin^3 a$ (d) $\text{cosec}^3 a$

109. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3^{x+1} - 5^{x+1}}{3^x - 5^x} = ?$
(a) -5 (b) $\frac{1}{5}$ (c) 5 (d) $\frac{3}{5}$

110. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x + \sin x}{x - \cos x}} = ?$
(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) ∞

111. $\lim\limits_{x\to -3} \left(\frac{x+5}{x+3}\right)^{x+3} = ?$
(a) 1 (b) -1 (c) 3 (d) $\frac{5}{3}$

112. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = ?$
(a) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (b) $\sqrt{x}$ (c) $2\sqrt{x}$ (d) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

113. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\cot x - 1} = ?$
(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (d) 1

114. $\frac{d}{dx}\sin\ln(1 - x^2) = ?$
(a) $\frac{\cos\ln(1-x^2)}{(1-x^2)}$ (b) $\frac{2x\cos\ln(1-x^2)}{(1-x^2)}$ (c) $\frac{-2x\cos\ln(1-x^2)}{(1-x^2)}$ (d) কোনটিই নয়

115. $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{1+x}{1-x}\right)=?$
(a) $\frac{(1-x)^2}{-4x}$ (b) $\frac{1}{1+x^2}$ (c) $\frac{2x}{1+x^2}$ (d) $\frac{4x^2}{(1-x)^2}$

116. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)=?$
(a) $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ (b) $\frac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}}$ (c) $\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$ (d) $\frac{2x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

117. $\frac{d}{dx}(2x^0\cos 3x^0)=?$
(a) $-6x\sin 3x+2\cos 3x$
(b) $\frac{\pi}{90}\left\{\cos\frac{\pi x}{60}-\frac{\pi x}{60}\sin\frac{\pi x}{60}\right\}$
(c) $\frac{\pi}{90}\{\cos\frac{\pi x}{60}+\sin\frac{\pi x}{60}$
(d) $\frac{180}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{60}\right)+3x\sin\left(\frac{\pi x}{60}\right)$

118. $y=x\ln x$ হলে $xy_1=?$
(a) $x+y$ (b) $x-y$ (c) y (d) x

119. $x=\ln t,\ y=t^2-1$ বক্ররেখার (0,0) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল কত?
(a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) 3

120. $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)=?$
(a) $\frac{1+\cos x}{2}$ (b) $\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) কোনটিই নয়

121. গোলাকার বুদবুদের আয়তন বৃদ্ধির হার ব্যাসার্ধ বৃদ্ধি হারের কতগুণ?
(a) $8\pi r^2$ (b) $4\pi r$ (c) $4\pi r^2$ (d) $2\pi r$

122. $y=x^2+\frac{1}{x^2}$ হলে $x^2y_2+xy_1=?$
(a) 4y (b) 8y (c) x^3y^2 (d) $\frac{2y}{x}$

123. $y=\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\cdots\cdots\cdots\infty}}}$ হলে $\frac{dy}{dx}=?$
(a) $\frac{\cos x}{y-1}$ (b) $\frac{y^2-1}{\cos x}$ (c) $\frac{\cos x}{2y-1}$ (d) 0

124. $xy=(x+y)^n$ এবং $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$ হলে $n=?$
(a) 1 (b) 2 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 0

125. $x=a(\theta-\sin\theta)$ এবং $y=a(1-\cos\theta)$ হলে $\frac{dy}{dx}=?$
(a) $\cot\frac{\theta}{2}$ (b) $2\cos^2\theta$ (c) $\tan\frac{\theta}{2}$ (d) $\sin\frac{\theta}{2}$

126. $f(x^2)=x^3$ হলে $f'(4)=?$
(a) 6 (b) 12 (c) 3 (d) 0

127. $\frac{d}{dx}\{\ln(ax)^x\}=?$
(a) $1+\ln(ax)$ (b) $\ln(ax)$ (c) $1+\frac{1}{x}$ (d) 1

128. কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ প্রতি সেকেন্ডে 2m হারে বৃদ্ধি পাচ্ছে। ব্যাসার্ধ যখন 5m তখন বৃত্তটির ক্ষেত্রফলের পরিবর্তনের হার কত?
(a) $10\pi\frac{m^2}{s}$ (b) $15\pi\frac{m^2}{s}$ (c) $20\pi\frac{m^2}{s}$ (d) $40\pi\frac{m^2}{s}$

129. সরলরেখায় চলন্ত কোন কণা t সেকেন্ডে s দূরত্ব অতিক্রম করে। $s=t^3+2t^2+2t$ হলে 2 sec পরে ত্বরণ কত হবে?
(a) $18ms^{-1}$ (b) $16ms^{-1}$ (c) $22ms^{-2}$ (d) কোনটিই নয়

130. একটি ট্রেন t sec এ $3t+\frac{1}{8}t^2$ মিটার অতিক্রম করে। 5 মিনিট পর তার বেগ কত?
(a) $4.25\ ms^{-1}$ (b) $5.86\ ms^{-1}$ (c) $66.66\ ms^{-1}$ (d) $78ms^{-1}$

131. $x=at^2$ এবং $y=2at$ হলে, $\frac{dy}{dx}=?$
(a) t (b) at (c) $\frac{1}{t}$ (d) at^2

132. কোন লেখটির স্পর্শকের ঢাল পরিবর্তনশীল নয়—
(a) $y=e^x$ (b) $y=mx^2$ (c) $y=x^e$ (d) $y=e^{\ln x}$

133. $\frac{d}{dx}\{\ln(x+\sqrt{1+x^2})\}=?$
(a) $\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (c) $1+\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ (d) $x+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

134. $\underset{\theta\to 0}{Lt}\frac{\tan\theta-\sin\theta}{\theta^3}=?$
(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{5}$

135. $\underset{x\to 1}{Lt}\frac{x^2-1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{5x-1}}=?$
(a) -4 (b) 4 (c) 2 (d) -2

136. $\underset{x\to 0}{Lt}\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}=?$
(a) $\frac{1}{2a}$ (b) 2a (c) $\frac{a}{2}$ (d) $\frac{2}{a}$

137. $\lim_{\theta\to\alpha}\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\theta-\alpha}=?$
(a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) $\frac{1}{2}$

138. $\underset{x\to 1}{Lt}\frac{\ln x}{x-1}=?$
(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) 2

139. $y=x(x^2-12)$ হলে, $\frac{dy}{dx}=?$
(a) $3x^2-12$ (b) $3x-12$ (c) $3x^2-12x$ (d) None of there

140. $y=\frac{2t-3}{2-3t}$ হলে, $\frac{dy}{dt}=?$
(a) $\frac{1}{(2-3t)^2}$ (b) $\frac{t}{(2-3t)^2}$ (c) $\frac{-5}{(2-3t)^2}$ (d) $\frac{5}{(2-3t)^2}$

141. x^4 এর সাপেক্ষে $\sin x^5$ এর অন্তরীকরণ হবে—
(a) $\frac{5}{4}\cos x^5$ (b) $\frac{5}{4}\cos x^4$ (c) $\frac{5}{4}x\cos x^5$ (d) কোনটি নয়

142. $\sin^{-1}x$ এর সাপেক্ষে $\sqrt{1-x^2}$ এর অন্তরক সহগ কত?
(a) $\frac{2}{1-x^2}$ (b) $\frac{-2}{1-x^2}$ (c) $-x$ (d) 1

143. $y=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ হলে, $\frac{dy}{dx}=?$
(a) $1-\frac{1}{x^2}$ (b) $1-\frac{1}{x}$ (c) $-\frac{1}{x^2}$ (d) $-\frac{1}{x}$

144. $y=\sqrt{(1-x)(1+x)}$ হলে $(1-x^2)\frac{dy}{dx}+xy=?$
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) -1

145. যদি $x=\ln t$ এবং $y=t^2-1$ হয়, তবে $t=2$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}=?$
(a) 2 (b) 4 (c) 8 (d) 16

146. $\frac{d}{dx}\left\{\frac{e^x}{(x+2)}\right\}=?$
(a) $\frac{2e^x}{(x+2)^2}$ (b) $\frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$ (c) $\frac{e^x}{(x+2)^2}$ (d) $\frac{xe^x}{(x+2)^2}$

147. $y = e^{x \sin x^2}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

(a) $y(\sin x^2 + 2x^2 \cos x^2)$
(b) $y(\cot x)^2$
(c) $y \ln(\operatorname{cosec} x \sec x)$
(d) $y(2\cos x + x^2 \sin x^2)$

148. $y = x(a+x)(a-x)$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

(a) $-3x^2$
(b) $a^2 + 3x^2$
(c) $a^2 - 3x^2$
(d) None

149. $y = ax \ln x + be^x \sin x$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

(a) $a(1 + \ln x) + be^x \cos x$
(b) $a(1 + \ln x) + be^x(\cos x + \sin x)$
(c) $a(1 + \ln x) + be^x \sin x$
(d) None

150. $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ এর অন্তরক সহগ কত হবে?

(a) 0
(b) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
(c) $\frac{2}{1+x^2}$
(d) 1

151. $a^2x^4 + b^2y^4 = c^6$ হলে xy এর সর্বোচ্চ মান—

(a) $\frac{c^2}{\sqrt{ab}}$
(b) $\frac{c^3}{\sqrt{2ab}}$
(c) $\frac{c^3}{ab}$
(d) $\frac{c^3}{2ab}$

152. $f(x) = |x|$ হলে $\left(\frac{d|x|}{dx}\right)_{x=0} = ?$

(a) 1
(b) -1
(c) 0
(d) None

153. $y = \tan^{-1}\left(\frac{x^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}}}{1 - x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}}\right)$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

(a) $\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)}$
(b) $\frac{a}{3x^{\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)}$
(c) $\frac{-1}{3x^{\frac{1}{3}}\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)}$
(d) $-\frac{a}{3x^{\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)}$

154. $\cot^{-1}\left(\frac{1-3x^2}{3x-x^2}\right)$ এর সাপেক্ষে $\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ এর অন্তরক সহগ—

(a) 1
(b) $\frac{3}{2}$
(c) $\frac{2}{3}$
(d) $\frac{1}{2}$

155. যদি $y = \log_{10} x + \log_x 10 + \log_x x + \log_{10} 10$ হয় তবে, $\frac{dy}{dx} = ?$

(a) $\frac{\log_{10} e}{x}[1 - (\log_x 10)^2]$
(b) $\frac{1}{x}[1 - (\log_x 10)^2]$
(c) $\frac{1}{\log_{10} e}[1 - (\log_{10} x)^2]$
(d) $\frac{\log_{10} e}{x}[1 + (\log_{10} x)^2]$

156. যদি $\ln(x+y) = \sin(x+y)$ হয় তবে, $\frac{dy}{dx} = ?$

(a) $\frac{\cos(x+y)}{(x+y)}$
(b) -1
(c) 0
(d) $\frac{x+y}{\cos(x+y)}$

157. $y = -x^3 + 3x^2 + 2x - 27$ এর সর্বোচ্চ মান—

(a) 5
(b) -5
(c) $\frac{1}{5}$
(d) None

158. $y = \ln(\ln(\ln x))$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$

(a) $\frac{1}{x \ln(\ln x) \ln x}$
(b) $\frac{1}{x \ln x}$
(c) $\frac{1}{x}$
(d) $\frac{1}{\ln(\ln(\ln x))}$

159. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\ln(1+x)} - 1}{\sin x} = ?$

(a) -1
(b) 1
(c) 0
(d) None

160. $\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{\sqrt{1+x} - 1} = ?$

(a) $\ln 2$
(b) $2 \ln 2$
(c) $\frac{1}{2}\ln 2$
(d) 0

প্র্যাকটিস প্রবলেমের সমাধান

Written

01. **Sol^n:** $\lim_{n\to\infty} \frac{1-2+3-4 \cdots\cdots -2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\{1+3+\cdots\cdots+(2n-1)\}-2(1+2+3+\cdots+n)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{2}\{2+(n-1).2\}-2.\frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{(4n^2-1)}}$
$= \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}} = -\frac{1}{3}$ (Ans.)

02. **Sol^n:** $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ (Ans.) [$\because -1 \le \lim_{x\to\infty} \sin x \le 1$]

03. **Sol^n:** $\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{1} = 0$ (Ans.) [L, Hospital Rule]

04. **Sol^n:** $\lim_{x\to 1} \left(\frac{2x}{x-1} - \frac{2}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{2x\ln x - 2x + 2}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{2+2\ln x-2}{\frac{x-1}{x}+\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{x-(x-1)}{x^2}+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{2x}{1+x} = 1$ (Ans.)

05. **Sol^n:** $\lim_{x\to 0} \frac{x-\ln(1+x)}{1+x-e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{1}{1+x}}{1-e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{-e^x} = -1$ (Ans.)

06. **Sol^n:** $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+5x)}{\ln(1-5x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+5x)}{5x}.5x}{\frac{\ln(1-5x)}{-5x}(-5x)} = -1$ (Ans.)

07. **Sol^n:** $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} e^{\tan x}. \sec^2 x = 1$ (Ans.)

08. **Sol^n:** $\lim_{x\to 0} \frac{\ln x^2}{\ln(\cot^2 x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x}{\frac{1}{\cot^2 x}.(-\operatorname{cosec}^2 x)2\cot x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cdot \frac{1}{\frac{1}{\cot x}(-\operatorname{cose}^2 x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cdot \frac{\cot x}{-\operatorname{cose}^2 x}$
$= \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x}\cdot \frac{\cos x}{\sin x} \times \sin^2 x = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x}\sin x. \cos x = -1$ (Ans.)

09. **Sol^n:** $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{\sqrt[3]{8n^3+1}} - \frac{n}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n - n\sqrt[3]{8n^3+1}}{2\sqrt[3]{8n^3+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\sqrt[3]{8n^3+1}}{2\sqrt[3]{8+\frac{1}{n^3}}} = \frac{2}{3}$ (Ans.)

10. **Sol^n:** $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(\sin x).\cos x+\sin x}{4x^3} = 0$ (Ans.) [Using continuous L'Hospital Rule]

11. **Sol^n:** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x^2+x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}.2x.\frac{1}{x(2x+1)} = 2$ (Ans.)

12. **Sol^n:** $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^3\theta - \tan^3\theta}{\tan\theta} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sec^3\theta}{\cos^2\theta.\sin\theta} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta+\sin^2\theta)}{(1+\sin\theta))1-\sin\theta).\sin\theta} = \frac{3}{2}$ (Ans.)

13. **Sol^n:** $\lim_{x\to 0} \frac{3\sin\pi x - \sin 3\pi x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{4\sin^3\pi x}{x^3} = 4\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right).\pi^3 = 4\pi^3$ (Ans.)

14. **Sol^n:** $\lim_{x\to a} \frac{a^x-x^a}{x^x-a^a} = \lim_{x\to a} \frac{a^x\ln a - ax^{a-1}}{x^x(1+\ln x)} = \frac{a^a\ln a - a^a}{a^a(1+\ln a)} = \frac{\ln a - 1}{\ln a + 1}$ (Ans.)

15. **Sol^n:** $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x\sin x + \cos x - \cos x}{2x\sin x + x^2\cos x}$ [L, Hospital Rule]
$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2\cos x + x\sin x + \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{x\sin x + 3\cos x} = \frac{-1}{3}$ (Ans.)

16. **Sol^n:** let, $y = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1+5x^2}{1+3x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}} \Rightarrow \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}.\ln\left(\frac{1+5x^2}{1+3x^2}\right)$
$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1+3x^2}{1+5x^2}\cdot\frac{(1+3x^2)10x-(1+5x^2)6x}{(1+3x^2)^2}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{4x}{2x(1+3x^2)(1+5x^2)} = 2 \therefore y = e^2$ (Ans.)

17. **Sol^n:** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1}(ax)}{\sin^{-1}(bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin^{-1}ax}{ax}\cdot ax}{\frac{\sin^{-1}bx}{bx}\cdot bx} = \frac{a}{b}$ (Ans.)

18. **Sol^n:** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-3)(x-2)}=-4$ (Ans.)

19. **Sol^n:** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^2-a^2+x^2}{x^2(a+\sqrt{a^2-x^2})}=\frac{1}{2a}$ (Ans.)

20. **Sol^n:** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1+x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\{(\sqrt{1+x^2})^2-(\sqrt{1+x})^2\}(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1+x})}{x^3-x(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x(x+1)(x-1)}=1$ (Ans.)

21. **Sol^n:** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{2-x^2}}{2x-\sqrt{2+2x^2}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{2\sqrt{2-x^2}}(-2x)}{2-\frac{1}{2\sqrt{2+2x^2}}4x}=2$ (Ans.) [L, Hospital Rule]

22. **Sol^n:** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(1+x)}-\sqrt[3]{1-x)}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{3}(1-x)^{-\frac{2}{3}}}{1}=\frac{2}{3}$ (Ans.) [L, Hospital Rule]

23. **Sol^n:** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots\right)-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\cdots\right)}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left\{\frac{x^2}{2}-\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{3}\right)x^3-\frac{x^4}{4}+\left(\frac{1}{5!}+\frac{1}{5}\right)x^5-\cdots\right\}}{x^2}=\frac{1}{2}$ (Ans)

24. **Sol^n:** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)g(a)-g(x)f(a)}{f(x)-f(a)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)g(a)-g'(x)f(a)}{f'(x)}$ [L, HOSPITAL RULE]

$=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{f'(a)}=\frac{2.9-3.3}{2}=\frac{9}{2}$ (Ans.)

25. **Sol^n:** $y=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right\}^{1/x}\ \therefore \ln y=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left\{\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right\}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left\{\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right\}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=2\ \therefore y=e^2$ (Ans.) [L'HOSPITAL RULE]

26. **Sol^n:** $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\operatorname{cosec}(x+h)-\operatorname{cosec}x}{h}=\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}x)=-\text{coscex}.\cot x$ (Ans.)

27. **Sol^n:** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2+\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x-\sin x}$ [L, HOSPITAL RULE]

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{-2}}{2-\cos x}=1$ (Ans.) [L, HOSPITAL RULE]

28. **Sol^n:** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3\cot x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\tan x}}{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=\frac{1}{2}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}}{\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}=2$ (Ans.)

29. **Sol^n:** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+9}-3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+1}}=3$ (Ans.)

30. **Sol^n:** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^m\left(a+\frac{b}{x}\right)^m.x^n\left(c+\frac{b}{x}\right)^{7/n}}{x^{m+n}\left(p+\frac{q}{x}\right)^{m+n}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(a+\frac{b}{x}\right)^m.\left(c+\frac{b}{x}\right)^n}{\left(p+\frac{q}{x}\right)^{m+n}}=\frac{a^mb^n}{p^{m+n}}$ (Ans.)

31. **Sol^n:** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(\cos x)^{-\frac{1}{2}}(-\sin x)+\frac{1}{3}(\cos x)^{-\frac{2}{3}}(\sin x)}{2\sin x\cos x}=-\frac{1}{2}$ (Ans.)

32. **Sol^n:** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+\sin bx}-\sqrt{a-\sin bx}}{\sqrt[3]{a+\sin bx}-\sqrt[3]{a-\sin bx}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{b\cos bx}{2\sqrt{a+\sin bx}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{b\cos bx}{\sqrt{a-\sin bx}}}{\frac{1}{3}(a+\sin bx)^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{3}(a-\sin bx)^{-\frac{2}{3}}}=\frac{\frac{b}{\sqrt{a}}}{\frac{2}{3}a^{-\frac{2}{3}}}=\frac{3}{2}b\,a^{-\frac{7}{6}}$

33. **Sol^n:** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+x}-\sqrt[4]{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{4}}+\frac{1}{4}(1-x)^{-\frac{3}{4}}}{1}=\frac{1}{2}$ (Ans.) [L, Hospital Rule]

34. **Sol^n:** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2a-x}+\sqrt{2a}-\sqrt{x}}{\sqrt{4a^2-x^2}}=\frac{2\sqrt{2a}}{2a}=\frac{2}{\sqrt{2a}}=\sqrt{\frac{2}{a}}$ (Ans.)

35. **Sol^n:** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{6+x-3x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x^2}}{\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x}-3}=-\frac{2}{3}$ (Ans.)

36. **Sol^n:** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4-3x^2+1}{6x^4+x^3-3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{6+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}}=\frac{1}{3}$ (Ans.)

37. **Sol^n:** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{5-\frac{1}{x^2}}{1}\right)=5$ (Ans.)

38. **Sol^n:** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)-\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\left(-\frac{2}{x^3}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$ (Ans.)

39. **Sol^n:** $\frac{d}{dx}\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)=\frac{(1-\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-(1-\sqrt{x})\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1-\sqrt{x})^2}=\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(1-\sqrt{x})^2}$ (Ans.)

40. **Sol^n:** $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{e^{x+2}}\right)=\frac{e^{x+2}.2x-x^2.e^{x+2}}{(e^{x+2})^2}=\frac{2x-x^2}{e^{x+2}}$ (Ans.)

41. **Sol^n:** $\frac{d}{dx}\{(x^3+3^x)\operatorname{cosec}x\}=(3x^2+3x\ln 3)\operatorname{cosec}x-\operatorname{cosec}x\cot x\,(x^3+3x)$

$=\operatorname{cosec}x\,\{3x^2+3^x\ln 3-(x^3+3^x)\cot x\}$ (Ans.)

42. **Sol^n:** $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin^2x+\cos^2x+2\sin x+\cos x}}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}\right)=\frac{d}{dx}(1)=0$ (Ans.)

43. **Sol^n:** $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{x+2}\right)=\frac{(x+2)\cdot 3x^2-x^3}{(x+2)^2}=\frac{x^2(2x+6)}{(x+2)^2}$ (Ans.)

44. **Sol^n:** $\frac{d}{dx}\{3\sin^3(5x^2+3x+2)\}=9\sin^2(5x^2+3x+2).\cos(5x^2+3x+2).(10x+3)$ (Ans.)

45. **Sol^n:** $\frac{d}{dx}[\ln\{\sin(7x^2+2)\}]=\frac{1}{\sin(7x^2+2)}.\cos(7x^2+2).14x=\cot(7x^2+2).14x$ (Ans.)

46. **Sol^n:** $\frac{d}{dx}\left(e^{mx^2\sin 5x}\right)=me^{mx^2\sin 5x}(2x\sin 5x+5x^2\cos 5x)$ (Ans.)

47. **Sol^n:** $\frac{dy}{dx}=f'\left(\frac{2x+3}{3-2x}\right)=\sin\ln\left(\frac{2x+3}{3-2x}\right)\cdot\frac{(3-2x)\cdot 2-(2x+3)(-2)}{(3-2x)^2}=\frac{12}{(3-2x)^2}\sin\ln\left(\frac{2x+3}{3-2x}\right)$ (Ans.)

48. **Sol^n:** $\frac{d}{dx}\left(\ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)=\frac{d}{dx}\left(\ln\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}}\right)=\frac{d}{dx}\left(\ln\tan\frac{x}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}=\operatorname{cosec}x$ (Ans.)

49. **Sol^n:** $y=\tan^{-1}(e^x)\Rightarrow e^x=\tan y$ ……………(i)

Now, differentiating (i) wrt x, we get, $e^x\frac{dx}{dy}=\sec^2 y=+\tan^2 y=1+e^{2x}\ \therefore\frac{dy}{dx}=\frac{e^x}{1+e^{2x}}$ (Ans.)

50. **Sol^n:** $y=a^{\ln(\sin x)}\Rightarrow\ln y=\ln(\sin x).\ln a$

$\therefore\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\ln a\frac{\cos x}{\sin x}=\ln a.\cot x\Rightarrow\frac{dy}{dx}=a^{\ln(\sin x)}\cot x(\ln a)$ (Ans.)

51. **Sol^n:** $y=(3x^2+x+6)^{2x}\Rightarrow\ln y=2x\ln(3x^2+x+6$

$\therefore\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=2\ln(3x^2+x+6)+2x\left(\frac{6x+1}{3x^2+x+6}\right)\Rightarrow\frac{dy}{dx}=2(3x^2+x+6)^{2x}\left[\frac{6x^2+x}{3x^2+x+6}+\ln(3x^2+x+6)\right]$ (Ans.)

52. **Sol^n:** $y=(a^x)(\cos x)(x^3)\Rightarrow\ln y=\ln a^x+\ln\cos x+\ln x^3$

$\therefore\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\ln a-\tan x+\frac{3}{x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=(a^x)\left(\cos x\right)(x^3)\left(\ln a-\tan x+\frac{3}{x}\right)$ (Ans.)

53. **Sol^n:** Let, $y=(\sin x)(\ln x)(x^3)(\cos x)\Rightarrow\ln y=\ln\sin x+\ln(\ln x)+\ln(x^3)+\ln\cos x)$

$\Rightarrow\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}+\frac{3x^2}{x^3}+\frac{-\sin x}{\cos x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=(\sin x)\ln x(x^3)(\cos x)\left[\cot x+\frac{1}{x\ln x}+\frac{3x^2}{x^3}-\tan x\right]$ (Ans.)

54. **Sol^n:** $y=\frac{x^3\sin x}{e^x}\Rightarrow\ln y=3\ln x+\ln\sin x=x\ \therefore\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{3}{x}+\cot x-1\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{x^3\sin x}{e^x}\left(\frac{3}{x}+\cot x-1\right)$ (Ans.)

55. **Sol^n:** $y=\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)\left(1-x^{\frac{1}{4}}\right)=\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)=1-x\ \therefore\frac{dy}{dx}=-1$ (Ans.)

56. **Sol^n:** $y=\tan^{-1}\frac{2t}{1-t^2}\Rightarrow y=2\tan^{-1}t$; $x=\sin^{-1}\frac{2t}{1+t^2}=2\tan^{-1}t\ \therefore\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2}{1+t^2}}=1$ (Ans.)

57. **Sol^n:** $x = a(\theta + \sin\theta) \;\therefore \frac{dx}{d\theta} = a(1+\cos\theta)$

$y = a(1-\cos\theta) \;\therefore \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta \;\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}$

Now, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}\cdot\frac{d\theta}{dx} = \frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}}{a(1+\cos\theta)} = \frac{1}{4a}\cdot\frac{1}{\cos^4\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{4a}\sec^4\frac{1}{2}\theta$ (Ans.)

58. **Sol^n:** $y = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

let, $x = \sin\theta \;\therefore y = \tan^{-1}\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \tan^{-1}\tan\theta = \theta = \sin^{-1}x \;\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (Ans.)

59. **Sol^n:** $\frac{d}{dx}\left(10^{x+1} - 3\ln x + \cot\frac{x}{2}\right) = 10^{x+1}\ln 10 - \frac{3}{x} - \frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}$ (Ans.)

60. **Sol^n:** $y = e^{x+y} \Rightarrow \ln y = x + y \;;\; \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{1-y}$ (Ans.)

61. **Sol^n:** $2^x + 2^y = 2^{x+y} \;\therefore 2^x\ln 2 + 2^y\ln 2\frac{dy}{dx} = 2^{x+y}\ln 2\left(1+\frac{dy}{dx}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2^x - 2^{x-y}}{1-2^x} = 2^{x-y}\frac{2^y-1}{1-2^x}$ (Ans.)

62. **Sol^n:** $\frac{d(2x)}{d(\sin x^{-1})} = \frac{\frac{d}{dx}(2x)}{\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = 2\sqrt{1-x^2}$ (Ans.)

63. **Sol^n:** $\frac{d(\cos ax)}{d(e^{ax})} = \frac{\frac{d}{dx}(\cos ax)}{\frac{d}{dx}(e^{ax})} = \frac{-a\sin ax}{ae^{ax}} = -\frac{\sin ax}{e^{ax}}$ (Ans.)

64. **Sol^n:** $y^x = e^{x+y} \Rightarrow x\ln y = x + y \;\therefore \ln y + \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(1-\ln y)y}{x-y}$ (Ans.)

65. **Sol^n:** $x^y y^x = 1 \Rightarrow y\ln x + x\ln y = \ln 1 = 0 \;\therefore \frac{y}{x} + \ln x\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \ln y = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2+xy\ln y}{x^2+xy\ln x} = -\frac{y(y+x\ln y)}{x(x+y\ln x)}$ (Ans.)

66. **Sol^n:** $y = \cot^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \tan^{-1}.\cot\frac{\theta}{2}$

$= \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cos^{-1}x \;\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ (Ans.)

67. **Sol^n:** $y = (\sin^{-1}x)^2 + (\cos^{-1}x)^2 \;\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \sqrt{1-x^2}\cdot\frac{dy}{dx} = 2\sin^{-1}x - 2\cos^{-1}x$

$\therefore \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{dx} + \sqrt{1-x^2}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 4$ (showed)

68. **Sol^n:** $y = \left\{x + \sqrt{(1+x^2)}\right\}^m \;\therefore y_1 = m\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{m-1}.\left\{1 + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}.2x\right\} = my.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ………… (i)

$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}\,y_1 = my \;\therefore \sqrt{1-x^2}\,y_2 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}y_1 = my_1$

$\Rightarrow (1+x^2)y_2 + xy_1 = my_1\sqrt{1-x^2} \Rightarrow (1+x^2)y_2 + xy_1 - m^2y = 0$ [from (i)] (showed)

69. **Sol^n:** $x = \sin t \;\therefore \frac{dx}{dt} = \cos t$

$y = \sin pt \;\therefore \frac{dy}{dt} = p\cos pt \;\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{p\cos pt}{\cos t}$

Now, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-p^2\cos t\sin pt + p\cos pt\sin t}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{\cos t} = \frac{-p^2y + x\frac{dy}{dx}}{\cos^2 t} \Rightarrow (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + p^2y = 0$ (showed)

70. **Sol^n:** $y = e^x\cos x \;\therefore \frac{dy}{dx} = -e^x\sin x + \cos x e^x = -e^x\sin x + y$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} - e^x\cos x - e^x\sin x \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} - 2.\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ (proved)

71. **Sol^n:** $\ln y = \tan^{-1}x \;\therefore \frac{1}{y}y_1 = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow (1+x^2)y_1 = y \;\therefore (1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0$ (showed)

72. **Sol^n:** $y = \cos(5x+6) \;\therefore y_n = 5^n\cos\left(n\frac{\pi}{2} + 5x + 6\right)$ (Ans.)

73. **Sol^n:** $y = \ln(5x+6)$

$y_1 = \frac{5}{5x+6}$

$y_2 = \frac{5^2(-1)}{(5x+6)^2}$

$y_3 = \frac{(-1)^2\,5^3.1.2}{(5x+6)^3}$

$\vdots \qquad \vdots$

$y_n = \frac{(-1)^{n-1}.5^n.(n-1)!}{(5x+6)}$ (Ans.)

74. **Sol^n:** $f(x)y = \ln(x+1)$ $\qquad \therefore f(0) = 0$

$f^{i}(x) = \frac{1}{1+x}$ $\qquad \therefore f^{i}(0) = 1$

$f^{ii}(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$ $\qquad \therefore f^{ii}(0) = -1$

$f^{iii}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ $\qquad \therefore f^{iii}(0) = 2$

$f^{iv}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}$ $\qquad \therefore f^{iv}(0) = -6$

$\therefore f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\cdots\cdots\infty$

75. **Sol^n:** $f(x) = e^{ax}$ $\qquad \therefore f(0) = 1$

$f^{i}(x) = ae^{ax}$ $\qquad \therefore f^{i}(0) = a$

$f^{ii}(x) = a^2e^{ax}$ $\qquad \therefore f^{ii}(0) = a^2$

$f^{iii}(x) = a^3e^{ax}$ $\qquad \therefore f^{iii}(0) = a^3$

$\therefore f(x) = 1 + ax + \frac{a^2x^2}{2!} + \frac{a^3x^3}{3!} + \cdots\infty$

76. **Sol^n:** $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\cdots\cdots$ [by Maclaurin's series]

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\cdots\cdots$ [by Maclaurin's series]

$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \cdots\cdots\cdots\cdots$

$\therefore e^{ix} = \cos x + i\sin x$

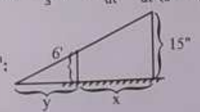
Finding e^{-ix} it can be easily shown that $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ and $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}$

77. **Sol^n:** , $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ………… (i)

$\Rightarrow \frac{2y}{d^2}\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{a^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\cdot\frac{b^2}{a^2} \;\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,y_1)} = -\frac{x_1}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ ………… (ii)

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ, $(y - y_1) = -\frac{x_1}{y^2}\cdot\frac{b^2}{a^2}(x - x_1) \Rightarrow \frac{yy_1}{b^2} + \frac{xx_1}{a^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ [(ii) হতে] $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ (shown)

78. **Sol^n:** $v = \frac{4}{3}\pi r^3 \;\therefore \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^2\right) = 4\pi r^2.\frac{dr}{dt}$ (showed)

79. **Sol^n:** 

$\frac{y}{x+y} = \frac{6}{15} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{6}{9} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x \;\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{2}{3}\frac{dx}{dt} = \frac{10}{3}$ $\left[\because \frac{dx}{dt} = 5\right]$

80. **Sol^n:** $\frac{dv}{dt} = 4$ Now, $v = \frac{4}{3}\pi r^3 \;\therefore \frac{dv}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{4}{4\pi.8^2} = \frac{1}{64\pi}$

Again, $A = 4\pi r^2 \;\therefore \frac{dA}{dt} = 8\pi r\frac{dr}{dt} = 8\pi.\frac{8.1}{64\pi} = 1$ (Ans.)

81. **Solⁿ:** $A = 2\pi r(r+h)$; $v = \pi r^2 h = 1000cm^3 \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$

Now, $\frac{dA}{dr} = \frac{d}{dr}(2\pi r^2 + 2\pi rh) = \frac{d}{dr}\left(2\pi r^2 + \frac{2000}{r}\right) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$

Now, for minimum area, $4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{2000}{4\pi} \Rightarrow r = 5.42$ (Ans.)

$\therefore h = \frac{1000}{Ar^2} = 10.84$ cm (Ans.)

82. **Solⁿ:** 

$v = \frac{1}{3}\pi(a^2 - x^2)(a+x) = \frac{1}{3}\pi(a^3 - ax^2 + a^2x - x^3)$

Now, $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{3}\pi(a^2 - 2ax - 3x^2) = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{3} \therefore h = a + x = \frac{4a}{3}$ (Ans.)

83. **Solⁿ:** $x + y + z = 9 \therefore xy(9 - x - x - y) = f(x,y)$

$\therefore \frac{\delta f}{\delta x} = 9y - 2xy - y^2 = 0 \Rightarrow y + 2x = 9$ ……… (i)

Again $\therefore \frac{\delta f}{\delta y} = 9x - x^2 - 2xy = 0 \Rightarrow 2y + x = 9$ ……… (ii)

Solving (i) & (ii), $x = y = 3 \therefore z = 3 \quad \therefore xyz = 27$ (Ans.)

84. **Solⁿ:** $y = \tan\theta + \sec\theta$

$y_1 = \sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta = \frac{1+\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{1-\sin\theta} \quad \therefore y_2 = \frac{\cos\theta}{(1-\sin\theta)^2}$ (Proved)

85. **Solⁿ:** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^n - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \text{……}\right) - 1}{x} = n$ (Ans.)

86. **Solⁿ:** $\frac{d}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 - 4x + 7)^{-\frac{1}{5}} = -\frac{1}{5}(x^2 - 4x + 7)^{-\frac{6}{5}}.(2x - 4)$ (Ans.)

87. **Solⁿ:** $2x^2 - xy + 3y^2 = 18 \therefore 4x - x\frac{dy}{dx} - y + 6y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y-4x}{6y-x} \quad \therefore \frac{dy}{dx}(3,2) = \frac{2-12}{12-3} = \frac{-10}{9}$ (Ans.)

88. **Solⁿ:** $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 5 \therefore f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 0 \Rightarrow x = 3, 1, 2$

$f'(x) = 12x^2 - 48x + 44$

$f''(3) = 8 > 0$; $\therefore x = 3$ এর জন্য লঘুমান পাওয়া যাবে। (Ans.)

$f''(1) = 8 > 0$; $\therefore x = 1$ এর জন্য লঘুমান পাওয়া যাবে। (Ans.)

$f''(2) = -4 > 0$; $\therefore x = 2$ এর জন্য গুরুমান পাওয়া যাবে। (Ans.)

89. **Solⁿ:** $y = \frac{x}{\ln(x)}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x - x\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{(\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{2}{(\ln x)^3}$

For, $x = e$, $\frac{d^2y}{dx^2} > 0 \therefore x = e$ এর জন্য লঘুমান পাওয়া যাবে। $\therefore y = \frac{e}{\ln e} = e$

90. **Solⁿ:** $x^2 = 4ay$ ……………… (i)

$(-2, 1)$ বিন্দুগামী হলে, $a = 1$

$\therefore x^2 = 4y$ ……… (ii)

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2} \quad \therefore m_{(-2,1)} = -\frac{2}{x} = 1$

$\therefore$ অভিলম্বের সমীকরণ $y - 1 = (x + 2) \Rightarrow x - y + 3 = 0$ (Ans.)

91. **Solⁿ:** $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)^2 = 2$

$L.H.L = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f\left(\frac{\pi}{2} - h\right) = \lim\limits_{h\to 0}\left\{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - h\right)\right\} = \lim\limits_{h\to 0}(1 + \cos h) = 1 + \cos 0 = 1 + 1 = 2$

$R.H.L = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = \lim\limits_{h\to 0} 2 + \left(\frac{\pi}{2} + h - \frac{\pi}{2}\right)^2 = 2$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right) = L.H.L = R.H.L \quad \therefore x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন।

$x = 0$ বিন্দুতে

$f(0) = 1 + \sin 0 = 1$

$L.H.L = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(0 - h) = 1 = 2$

$R.H.L = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(0 + h) = \lim\limits_{h\to 0}[1 + \sin(0 + h)] = 1 + \sin 0 = 1$

$\therefore L.H.L = R.H.L = f(0) \quad \therefore x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন।

92. **Solⁿ:** ধরি, $\frac{b}{a^{x-1}} = \theta \therefore a^{x-1} = \frac{b}{\theta} \quad \therefore a^x = \frac{ab}{\theta}$

$\therefore \lim\limits_{\theta\to 0}\frac{ab\sin\theta}{\theta} = ab.\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = ab.1 = ab$ [যখন $x \to \infty$ তখন $\theta \to 0$]

MCQ

93. **Solⁿ:** (b); $\lim\limits_{n\to 0}\frac{(a+n)^2\sin(a+n) - a^2\sin a}{n} = \frac{d}{da}(a^2\sin a) = a^2\cos a + 2a\sin a$

94. **Solⁿ:** (d); $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 5x - \cos 9x}{\cos x - \cos 7x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-5\sin 5x + 9\sin 9x}{-\sin x + 7\sin 7x}$ [L'HOSPITAL RULE]

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{-5^2\cos 5x + 9^2\cos 9x}{-\cos x + 7^2\cos 7x} = \frac{7}{6}$ [L'HOSPITAL RULE]

95. **Solⁿ:** (d); $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}3x}{\sin^{-1}5x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}}{\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}} = \frac{3}{5}$ [L'HOSPITAL RULE]

96. **Solⁿ:** (c); $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^{7/2} - a^{7/2}}{x^{1/2} - a^{1/2}} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{7}{2}x^{5/2}}{\frac{1}{2}x^{-1/2}} = 7a^3$ [L'HOSPITAL RULE]

97. **Solⁿ:** (c); $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = e^3 \quad \left[\because \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{m}{x}\right)^{nx} = e^{mn}\right]$

98. **Solⁿ:**(a); $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 10x}{\sin^2 13x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - \cos 20x}{1 - \cos 26x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{20\sin 20x}{26\sin 26x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{20^2 - \cos 20x}{26^2\cos 26x} = \frac{100}{169}$ [L'HOSPITAL RULE]

99. **Solⁿ:** (a); $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x} - e^{4x}}{e^{7x} - e^{9x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3e^{3x} - 4e^{4x}}{6e^{7x} - 9e^{9x}} = \frac{1}{2}$ [L'HOSPITAL RULE]

100. **Solⁿ:** (b); $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\frac{1-x^3}{1-x^4}} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)}}{\sqrt{(1+x^2)(1+x)(1-x)}} = \lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\frac{1+x+x^2}{(1+x^2)(1+x)}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

101. **Solⁿ:** (d); $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{2})}{(x+2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})(\sqrt{x} - \sqrt{2})} = \frac{1}{8\sqrt{2}}$

102. **Solⁿ:** (c); $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-4x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1+3x-1+4x}{(\sqrt{1+3x} + \sqrt{1-4x})x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{7}{\sqrt{1+3x} + \sqrt{1-4x}} = \frac{7}{2}$

103. **Solⁿ:** (d); since $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{x+a}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ does not exist, a two sided limit is non-existent.

104. **Sol^n**: (b); $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin 3x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}.2x}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}3x}=\frac{2}{3}$

105. **Sol^n**: (b); $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(1+x)^n-3^n}{x-2}$ $\left[\frac{0}{0}\text{ আকার}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\frac{n(1+x)^{n-1}}{1}=n.3^{n-1}$ [L'HOSPITAL RULE]

106. **Sol^n**: (c); $\lim\limits_{x\to\infty}a^x\sin\frac{b}{a^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{b}{a^x}}{\frac{b}{a^x}}.b=\lim\limits_{\frac{b}{a^x}\to\infty}\frac{\sin\frac{b}{a^x}}{\frac{b}{a^x}}.b=b$

107. **Sol^n**: (c); $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x})(x-3)}{(x-2-4+x)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x})}{2}=1$

108. **Sol^n**: (c); $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{\cot x-\cot a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{-\sin x}{-\operatorname{cosec}^2 x}=\sin^3 a$ [L'HOSPITAL RULE]

109. **Sol^n**: (c); $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^{x+1}-5^{x+1}}{3^x-5^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x 3-5}{\left(\frac{3}{5}\right)^x-1}=5$

110. **Sol^n**: (b); $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x+\sin x}{x-\cos x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\cos x}{x}}}=1$

111. **Sol^n**: (a); $y=\lim\limits_{x\to -3}\left(\frac{x+5}{x+3}\right)^{x+3}\therefore \ln y=\lim\limits_{x\to -3}(x+3)\ln\left(\frac{x+5}{x+3}\right)=\lim\limits_{x\to -3}\frac{\ln\left(\frac{x+5}{x+3}\right)}{\frac{1}{x+3}}$

$=\lim\limits_{x\to -3}\frac{\frac{x+3}{x+5}.\frac{x+3-x-5}{(x+3)^2}}{-\frac{1}{(x+3)^2}}=\lim\limits_{x\to -3}\frac{x+3}{x+5}.2=0\Rightarrow y=1$

112. **Sol^n**: (d); $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{d}{dx}(\sqrt{x})=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

113. **Sol^n**: (b); $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\cot x-1}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\sqrt{2}\sin x}{-\operatorname{cosec}^2 x}=\frac{1}{2}$

114. Ans. (c)

115. **Sol^n**: (b); $\frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right\}=\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{\pi}{4}+\tan^{-1}x\right)=\frac{1}{1+x^2}$

116. Ans. (c)

117. **Sol^n**: (b); $\frac{d}{dx}(2x^\circ\cos 3x^\circ)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi l}{90}\cos\frac{\pi x}{60}\right)=\frac{\pi}{90}\left\{\cos\frac{\pi x}{90}-\frac{\pi x}{60}\sin\frac{\pi x}{60}\right\}$

118. **Sol^n**: (a); $y=x\ln x\quad\therefore y_1=1+\ln x\Rightarrow xy_1=x+y$

119. **Sol^n**: (c); $x=\ln t\quad y=t^2-1$

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}\qquad\frac{dy}{dt}=2t\qquad\therefore\frac{dy}{dx}=2t^2$

when $x=0,\ t=1$; when $y=0,\ t=1\ \therefore\frac{dy}{dx}=2$

120. **Sol^n**: (c); $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)=\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\tan\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}$

121. **Sol^n**: (c); $v=\frac{4}{3}\pi r^3\ \therefore\frac{dv}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt}$

122. **Sol^n**: (a); $y=x^2+\frac{1}{x^2}\therefore y_1=2x-\frac{2}{x^3}$

$\therefore y_2=2+\frac{6}{x^4}\qquad\therefore x^2y_2+xy_1=2x^2+\frac{6}{x^2}+2x^2-\frac{2}{x^2}=4x^2+\frac{4}{x^2}=4y$

123. **Sol^n**: (c); $y=\sqrt{\sin x+y}$; $y^2=\sin x+y\ \therefore 2y\frac{dy}{dx}=\cos x+\frac{dy}{dx}\Rightarrow dy=\frac{\cos x}{2y-1}$

124. **Sol^n**: (d); $xy=(x+y)^n\quad\therefore y+x\frac{dy}{dx}=n(x+y)^{n-1}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{y-n(x+y)^{n-1}}{n(x+y)^{n-1}-x}$

প্রশ্নমতে, $\frac{y-n(x+y)^{n-1}}{n(x+y)^{n-1}}=-\frac{y}{x}\ \Rightarrow n=0$

125. **Sol^n**: (a); $x=a(\theta-\sin\theta)$

$\frac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta)\qquad\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)}=\cot\frac{\theta}{2}$

$y=a(1-\cos\theta)$; $\frac{dy}{d\theta}=a\sin\theta$

126. **Sol^n**: (c); $f(x^2)=x^3\ \therefore f(x)=x^{\frac{3}{2}}$; $f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\ \therefore f'(4)=3$

127. **Sol^n**: (a); $\frac{d}{dx}\{\ln(ax)^x\}=\frac{d}{dx}\{x\ln(ax)\}=\frac{ax}{ax}+\ln ax=1+\ln ax$

128. **Sol^n**: (c); $A=\pi r^2\ \therefore\frac{dA}{dt}=2\pi r\frac{dr}{dt}=2\pi\times 5\times 2=20\pi$

129. **Sol^n**: (b); t^3+2t^2+2t ; $V=\frac{ds}{dt}=3t^1+4t$; $a=\frac{dv}{dt}=6t+4\ \therefore a(2)=16ms^{-1}$

130. **Sol^n**: (d); $s=3t+\frac{1}{8}t^3$; $v=\frac{ds}{dt}=3+\frac{1}{4}t=3+\frac{1}{4}\times 5\times 60=78ms^{-1}$

131. **Sol^n**: (c); $x=at^2$; $\frac{dx}{dt}=2at$; $y=2at$; $\frac{dy}{dt}=2a\ \therefore\frac{dy}{dx}=\frac{1}{t}$

132. **Sol^n**: (d); $y=e^x$ এর ঢাল, $\frac{dy}{dx}=e^x$; $y=mx^2$ এর ঢাল, $\frac{dy}{dx}=2mx$

$y=x^e$ এর ঢাল $\frac{dy}{dx}=ex^{e-1}$; $y=e^{\ln x}=x$ এর ঢাল, $\frac{dy}{dx}=1$

133. **Sol^n**: (b); $\frac{d}{dx}\left\{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right\}=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}.\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}.\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

134. **Sol^n**: (a); $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta-\sin\theta}{\theta^3}=\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta-\sin\theta\cos\theta}{\theta^3\cos\theta}=\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta^3\cos\theta}=\frac{1}{2}\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{0}.\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$

135. **Sol^n**: (a); $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{5x-1}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x-1}\right)}{-2(x-1)}=-4$

136. **Sol^n**: (a); $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a-\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^2-a^2+x^2}{x^2(a+\sqrt{a^2-x^2})}=\frac{1}{2a}$

137. **Sol^n**: (a); $\lim\limits_{\theta\to\alpha}\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\theta-\alpha}=\lim\limits_{h\to\alpha}\frac{\sin h}{h}$ [let, $\theta-\alpha=h$] $=1$

138. **Sol^n**: (c); $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}$ [L'HOSPITAL Rule] $=1$

139. **Sol^n**: (a); $y=x^3-12x\therefore\frac{dy}{dx}=3x^2-12$

140. **Sol^n**: (c); $y=\frac{2t-3}{2-3t}\therefore\frac{dy}{dt}=\frac{(2-3t).2-(2t-3)(-3)}{(2-3t)^2}=-\frac{5}{(2-3t)^2}$

141. **Sol^n**: (c); $\frac{d(\sin x^5)}{d(x^4)}=\frac{\frac{d}{dx}(\sin x^5)}{\frac{d}{dx}(x^4)}=\frac{\cos x^5.5x^4}{4x^3}$

142. **Sol^n**: (c); $\frac{d(\sqrt{1-x^2})}{d(\sin^{-1}x)}=\frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=-x$

143. **Sol^n:** (a); $y = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x + \frac{1}{x} - 2$; $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$

144. **Sol^n:** (a); $y = \sqrt{1 - x^2}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\Rightarrow (1 - x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 0$

145. **Sol^n:** (c); $x = \ln t$; $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$; $y = t^2 - 1$; $\frac{dy}{dt} = 2t$ $\therefore \frac{dy}{dx} = 2t^2 = 8$

146. **Sol^n:** (b); $\frac{d}{dx}\left\{\frac{e^x}{(x+2)}\right\} = \frac{(x+2)e^x - e^x}{(x+2)^2} = \frac{xe^x + e^x}{(x+2)^2} = \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$

147. **Sol^n:** (a); $y = e^{x\sin x^2}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = e^{x\sin x^2}(\sin x^2 + 2x^2\cos x^2) = y(\sin x^2 + 2x^2 \cos x^2)$

148. **Sol^n:** (c); $y = x(a^2 - 1^2) = a^2x - x^3$ $\therefore \frac{dy}{dx} = a^2 - 3x^2$

149. **Sol^n:** (b); $y = ax\ln x + be^x \sin x$ $\therefore \frac{dy}{dx} = a(1 + \ln x) + be^x(\cos x + \sin x)$

150. **Sol^n:** (d); $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = 2\tan^{-1}x$; $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = 2\tan^{-1}x$ $\therefore \frac{d(2\tan^{-1}x)}{d(2\tan^{-1}x)} = 1$

151. **Sol^n:** (b); $y^4 = \frac{c^6 - a^2x^4}{b^2}$; $y = \sqrt[4]{\frac{c^6 - a^2x^4}{b^2}}$

$f(x) = x\sqrt[4]{\frac{c^6 - a^2x^4}{\sqrt{b}}}$ $\therefore f'(x) = \frac{\sqrt[4]{c^6 - a^2x^4}}{\sqrt{b}} + x.\frac{1}{4}.\frac{1}{\sqrt{b}}.(c^6 - a^2x^4)^{-\frac{3}{4}}.(c - 4a^2x^3) = 0$

$\Rightarrow \frac{c^6 - a^2x^4}{\sqrt{b}} - \frac{a^2x^4}{\sqrt{b}} \Rightarrow x^4 = \frac{c^6}{2a^2}$ $\therefore y^4 = \frac{c^6 - a^2\frac{c^6}{2a^2}}{b^2} = \frac{c^6}{2b^2}$ $\therefore xy = \sqrt[4]{\frac{c^{12}}{4a^2b^2}} = \frac{c^3}{\sqrt{2ab}}$

152. **Sol^n:** (d); $f(x) = |x|$; $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন। $\therefore \left(\frac{d|x|}{dx}\right) x = 0$ বিন্দুতে exist করে না।

153. **Sol^n:** (a); $y = \tan^{-1}\left(\frac{x^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}}}{1 - x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}}\right) = \tan^{-1}x^{\frac{1}{3}} + \tan^{-1}a^{\frac{1}{3}}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^{\frac{2}{3}}}.\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)}$

154. **Sol^n:** (c); $\cot^{-1}\left(\frac{1-3x^2}{3x-x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^2}{1-3x^2}\right) = 3\tan^{-1}x$ $\therefore \frac{d(2\tan^{-1}x)}{d(3\tan^{-1}x)} = \frac{2}{3}$

155. **Sol^n:** (a); $y = \log_{10}x + \log_x 10 + \log_x x + \log_{10}10$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\log_{10}e - \frac{(\log_x 10)^2 1}{x}\log^{10}e = \frac{\log_{10}e}{x}[1 - (\log_x 10)^2]$

156. **Sol^n:** (b); $\ln(x + y) = \sin(x + y)$ $\therefore \frac{1}{x+y}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = \cos(x + y)\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$ $\therefore \frac{dy}{dx} = -1$

157. **Sol^n:** (d); $y = -x^3 + 3x^2 + 2x - 27$ $\therefore \frac{dy}{dx} = -3x^2 + 6x + 2 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 2 = 0$

$\therefore x = \frac{6 \pm \sqrt{36+24}}{6} \Rightarrow x = 1 \pm \frac{\sqrt{60}}{6}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -6x + 5 < 0$ for $x = 1 - \frac{\sqrt{60}}{6}$ $\therefore$ maximum value of $y = -x^3 + 3x^2 + 2x - 27$

158. **Sol^n:** (a); $y = \ln(\ln(\ln x))$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln(\ln x)}.\frac{1}{\ln x}.\frac{1}{x}$

159. **Sol^n:** (b); $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\ln(1-x)} - 1}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$

160. **Sol^n:** (c); $y = 1 + 2^{-x} + 3^{-x} + \cdots + n^{-x}$; $\frac{dy}{dx} = 0 - 2^{-x}\ln 2 - 3^{-x}\ln 3 - \cdots - n^{-x}\ln n$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 - \ln 2 - \ln 3 - \cdots - \ln n = \ln(2.3 \ldots\ldots\ldots n) = -\ln(n!)$

অধ্যায়-১০: যোগজীকরণ (অনির্দিষ্ট যোগজ)

গুরুত্বপূর্ণ প্রাথমিক আলোচনা

- **প্রতি অন্তরকের ধারণা:**

ফাংশন F কে f ফাংশনটির Anti derivative বলা যাবে যদি একটি নির্দিষ্ট ব্যবধিতে x এর সকল মানের জন্য $F'(x) = f(x)$ হয়। যেমন: $F(x) = \frac{x^3}{3}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2$ এর anti derivative হবে $(-\infty, +\infty)$ ব্যবধিতে কারণ, এই ব্যবধিতে x সকল মানের জন্য $F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}x^3\right] = x^2 = f(x)$ হয়। যদিও $F(x) = \frac{x^3}{3}$ ফাংশনটির উক্ত ব্যবধিতে $f(x)$ এর একমাত্র anti derivative নয়। যদি $\frac{x^3}{3}$ এর সাথে একটি ধ্রুবক C যোগ করা হয় তবে ফাংশন $G(x) = \frac{x^3}{3} + c$ অপর একটি anti derivative হিসেবে $(-\infty, +\infty)$ ব্যবধিতে গণ্য হবে $f(x)$ ফাংশন এর জন্য।

উপরোক্ত আলোচনা থেকে আমরা বলতে পারি যে, যদি $F(x)$ ফাংশনটি $f(x)$ এর I ব্যবধিতে একটি anti derivative হয় তবে যে কোন ধ্রুবক c এর জন্য $F(x) + c$ ফাংশনটিও একটি anti derivative হিসেবে গণ্য হবে উক্ত ব্যবধিতে।

- **অনির্দিষ্ট যোগজ:**

Anti derivative নির্ণয়ের পদ্ধতিকে বলা হয় anti differentiation (প্রতি অন্তরক) অথবা Integration (সমাকলন)।
$\int f(x)dx = F(x) + c \cdots\cdots\cdots$ (i) যেখানে c ধ্রুবক (i) নং সমীকরণ এর $\int f(x)$ প্রতিকৃতিকে বলা হয় অনির্দিষ্ট সমাকলন।

টাইপভিত্তিক সমস্যা ও সমাধান

Type-01: $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \int \sqrt{ax^2 + bx + c}\,dx$ আকারের যেখানে a, b, c যেকোন ধ্রুবকসংখ্যা

Concept: $ax^2 + bx + c$ কে দুটি বর্গের সমষ্টি বা অন্তররূপে প্রকাশ করতে হবে

$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left\{x^2 + 2.\frac{b}{2a}.x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right\} = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}$

$= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left\{\sqrt{\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2}\right\}^2\right\}$ নিম্নরূপে এবং এরপর $\int\frac{dx}{x^2-a^2}, \int\frac{dx}{x^2+a^2}, \int\frac{dx}{a^2-x^2}, \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}, \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$,
$\int\sqrt{x^2 - a^2}\,dx, \int\sqrt{a^2 - x^2}, \int\sqrt{a^2 + x^2}\,dx$ সূত্রের সাহায্যে বাকিটুকু করতে হবে।

Example-01. মান নির্ণয় কর $\int \frac{\cos x}{9 - \sin^2 x}dx$ [KUET'07-08, RUET'12-13]

Sol^n: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{9-\sin^2 x}dx$ ধরি, $\sin x = z \Rightarrow \cos x dx = dz$

$\therefore I = \int \frac{dz}{9-z^2} = \frac{1}{2\times 3}\ln\frac{3+z}{3-z} + c = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{3+z}{3-z}\right| + c$

Example-02. $\int \frac{dx}{5+4x-x^2}$ ফাংশন এর যোজিত ফল নির্ণয় কর। [KUET'04-05]

Sol^n: $\int\frac{dx}{5+4x-x^2} = \int\frac{-dx}{x^2-4x-5} = \int\frac{-dx}{x^2-5x+x-5} = \int\frac{-dx}{(x-5)(x+1)}$

$= -\int\frac{dx}{(x-5)6} - \int\frac{dx}{(-6)(x+1)} = -\frac{1}{6}\ln(x-5) + \frac{1}{6}\ln(x+1) + c$ (Ans.)

Example-03. মান নির্ণয় কর $\int \frac{\cos x\,dx}{3+\cos^2 x}$ [KUET'05-06]

Sol^n: $\int\frac{\cos x\,dx}{3+\cos^2 x} = \int\frac{\cos x\,dx}{4-\sin^2 x}$; $\int\frac{d(\sin x)dx}{2^2-(\sin x)^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\sin x}{2-\sin x}\right| + C$ (Ans.)

Example-04. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ এর মান হলো– [KUET'12-13]

Sol^n: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{1-(1-2x+x^2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(1-x)^2}}$

| ধরি, $1-x=t$
| $\therefore -dx = dt$

$\therefore \int \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\sin^{-1}t + c$

$= -\sin^{-1}(1-x) + c$

Example-05. মান নির্ণয় কর $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{2-\sin^2 x}}$ [BUTex'06-07]

Sol^n: $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2-\sin^2 x}} dx$

$= \int \frac{dz}{\sqrt{2-z^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{(2)^2-z^2}}$

| let, $\sin x = z$
| $dz = \cos x dx$

$= \sin^{-1}\frac{z}{\sqrt{2}} + c$

$= \sin^{-1}\frac{\sin x}{\sqrt{2}} + c(\text{Ans.})$

Example-06. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = ?$ [DU'08-09]

Sol^n: $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(1-x)^2}} = \sin^{-1}(x-1) + c$ (*Ans.*)

Example-07. $\int \frac{dx}{2x^2+4x+17} = ?$

Sol^n: $\int \frac{dx}{2x^2+4x+17} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+2x+\frac{17}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2+\frac{17}{2}-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2+\left(\sqrt{\frac{15}{2}}\right)^2} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{15}{2}}}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{\frac{15}{2}}}\right) + c$ [Ans]

Example-08. $\int \frac{dx}{x^2+2x-3} = ?$

Sol^n: $\int \frac{dx}{x^2+2x-3} = \int \frac{dx}{(x^2+2x+1)-4} = \int \frac{dx}{(x+1)^2-2^2} = \frac{1}{2\times 2}\ln\left|\frac{(x+1)-2}{(x+1)+2}\right| + c = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + c$ [Ans]

Example-09. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+2x+3}} = ?$

Sol^n: $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+2x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+x+\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2.\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-\frac{1}{4}}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}\right] + c$ (Ans.)

Type-02: $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx, \int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx, \int (px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ আকারের; যেখানে a, b, c, p, q যেকোন ধ্রুবক

➲ **Concept:** $px + q = m\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c) + n$ আকারে লিখতে হবে।

Example-10. $\int \frac{3x+7}{x^2+4x+19}dx = ?$

Sol^n: $\int \frac{3x+7}{x^2+4x+19}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+4)+1}{x^2+4x+19}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+19}dx + \int \frac{dx}{x^2+4x+19}$

$= \frac{3}{2}\int \frac{\frac{d}{dx}(x^2+4x+19)}{x^2+4x+19}dx + \int \frac{dx}{(x+2)^2+(\sqrt{15})^2} = \frac{3}{2}\ln|x^2+4x+19| + \frac{1}{\sqrt{15}}\tan^{-1}\frac{x+2}{\sqrt{15}} + c$ [Ans]

Example-11. যোজিত ফল নির্ণয় কর: $\int \frac{x+1}{3x^2-x-2}dx$ [RUET'07-08]

Sol^n: $\int \frac{x+1}{3x^2-x-2}dx = \int \frac{x+1}{3x^2-3x+2x-2}dx = \int \frac{x+1}{(x-1)(3x+2)}dx$

$= \int\left(\frac{2}{(x-1)5} + \frac{-\frac{2}{3}+1}{\left(-\frac{2}{3}-1\right)(3x+2)}\right)dx = \int\left(\frac{2}{5(x-1)} - \frac{1}{5(3x+2)}\right)dx$

$= \frac{2}{5}\ln(x-1) - \frac{1}{5}\frac{\ln(3x+2)}{3} + c = \frac{2}{5}\ln(x-1) - \frac{1}{15}\ln(3x+2) + c$ (Ans.)

Example-12. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-3x+5}}dx = ?$

Sol^n: $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-3x+5}}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-3)+1+\frac{3}{2}}{\sqrt{x^2-3x+5}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-3)dx}{\sqrt{x^2-3x+5}} + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2.\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}+5-\frac{9}{4}}}$

$= \frac{1}{2}\times 2\sqrt{x^2-3x+5} + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}} + c = \sqrt{x^2-3x+5} + \frac{5}{2}\ln\left|\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}} + \left(x-\frac{3}{2}\right)\right| + c$ [Ans.]

Example-13. $\int (2x+1)\sqrt{x^2-x+1}\,dx = ?$

Sol^n: $\int (2x+1)\sqrt{x^2-x+1}\,dx = \int (2x-1+2)\sqrt{x^2-x+1}\,dx$

$= \int [(2x-1)\sqrt{x^2-x+1}\,dx + 2\sqrt{x^2-x+1}\,dx]$

Now let, $x^2-x+1 = z \Rightarrow (2x-1)dx = dz$

$= \int \sqrt{z}dz + 2\int\sqrt{x^2-2\times\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}\,dx = \int z^{\frac{1}{2}}dz + 2\int\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx$

$= \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}} + 2\times\left\{\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2}\times\sqrt{x^2-x+1} + \frac{3}{8}\ln\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{x^2-x+1}\right|\right\} + c$

$= \frac{2}{3}(x^2-x+1)^{\frac{3}{2}} + 2\left\{\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2}\sqrt{x^2-x+1} + \frac{3}{8}\ln\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{x^2-x+1}\right|\right\} + c$ [Ans.]

Type-03: $\int \frac{ex^2+gx+f}{ax^2+bx+c}dx$ আকারের যেখানে a, b, c, e, f, g যেকোন ধ্রুব সংখ্যা

➲ **Concept:** লবকে $A(ax^2+bx+c) + B\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c) + c$ আকারে লিখে TYPE-01 ও TYPE-02 apply করতে হবে।

Example-14. মান নির্ণয় কর: $\int \frac{x^2-1}{x^2-4}dx$ [KUET'16-17]

Sol^n: $\int \frac{x^2-1}{x^2-4}dx = \int \frac{x^2-4+3}{x^2-4}dx = \int dx + 3\int \frac{dx}{x^2-4} = x + \frac{3}{2.2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c = x + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$

Example-15. $\int \frac{2x^2+3x+1}{x^2+4x+13}dx = ?$

Sol^n: $\int \frac{2x^2+3x+1}{x^2+4x+13}dx = \int \frac{2(x^2+4x+13)-5x-25}{x^2+4x+13}dx = 2\int dx - \int \frac{5(x+5)dx}{x^2+4x+13}$

$= 2\int dx - \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)}{x^2+4x+13}dx - \int \frac{15dx}{x^2+4x+4+9} = 2\int dx - \frac{5}{2}\int \frac{\frac{d}{dx}(x^2+4x+13)}{x^2+4x+13}dx - 15\int \frac{dx}{(x+2)^2+3^2}$

$= 2x - \frac{5}{2}\ln|x^2+4x+13| - \frac{15}{3}\tan^{-1}\frac{x+2}{3} + c$ [Ans.]

Type-04: $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}}$ আকারের, যেখানে α এবং β যেকোন ধ্রুব সংখ্যা

➲ **Concept:** $\sqrt{x-\alpha}+\sqrt{x-\beta}=z$ ধরতে হবে।

Example-16. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-3)}}=?$

Sol^n: ধরি, $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}=z$ $\therefore \left(\frac{1}{2\sqrt{x-2}}+\frac{1}{2\sqrt{x-3}}\right)dx=dz$ বা, $\left(\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}}{2\sqrt{x-2}\sqrt{x-3}}\right)dx=dz$ বা, $\frac{dx}{\sqrt{x-2}\sqrt{x-3}}=2\frac{dz}{z}$

$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-3)}}=2\int\frac{dz}{z}=2\ln z+c=2\ln\left|\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}\right|+c$ (Ans.)

[বিঃ দ্রঃ Type-04 পূর্বে বর্ণিত Type-01এর মাধ্যমেও সহজে করা যায়]

Type-05: $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$ আকারের, যেখানে α এবং β যেকোন ধ্রুব সংখ্যা

➲ **Concept:** $x-\alpha=z^2$ ধরতে হবে। যখন $\alpha<\beta$

Example-17. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(3-x)}}=?$

Sol^n: $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(3-x)}}=2\int\frac{zdz}{z\sqrt{1-z^2}}=2\sin^{-1}z+c=2\sin^{-1}\sqrt{x-2}+c$

ধরি, $x-2=z^2$
$\therefore dx=2zdz$

[বি.দ্র. Type-05 পূর্বে বর্ণিত Type-01এর মাধ্যমেও সহজে করা যায়]

Example-18. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}}$

Sol^n: $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}}=\int\frac{2zdz}{\sqrt{z^2(z^2+\alpha-\beta)}}=2\int\frac{dz}{\sqrt{z^2+(\sqrt{\alpha-\beta})^2}}=2\ln\left|z\sqrt{\{z^2+(\sqrt{\alpha-\beta})\}}+c\right|$

$=2\ln\left|\sqrt{x-\alpha}+\sqrt{x-\alpha+\alpha-\beta}\right|+c=2\ln\left|\sqrt{x-\alpha}+\sqrt{x-\beta}\right|+c$ [Formula হিসেবে মনে রাখা যায়]

Type-06: $\int \frac{dx}{g(x)\sqrt{\phi(x)}}$ আকৃতির [যেখানে, $g(x)$ ও $\phi(x)$ বহুপদী ফাংশন]

➲ **Concept:**

	$g(x)$ এর মাত্রা/ ঘাত	$\phi(x)$ এর মাত্রা/ ঘাত	ধরতে হবে
Case-01	1	1	$\phi(x)=z^2$
Case-02	1	2	$g(x)=\frac{1}{z}$
Case-03	2	1	$\phi(x)=z^2$
Case-04	2	2	$x=\frac{1}{z}$ অথবা $(x^2+d=x^2z^2)$

Case-01: $\int\frac{dx}{(ax+b)\sqrt{cx+d}}$ / $\int(ax+b)\sqrt{cx+d}\,dx$ / $\int\frac{ax+b}{\sqrt{cx+d}}dx$ আকারের যেখানে, a, b, c, d যেকোন ধ্রুব সংখ্যা

➲ **Concept:** $cx+d=z^2$ ধরতে হবে।

Example-19. যোজিত ফল নির্ণয় কর : $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x}}$ **[KUET'03-04, CUET'04-05, RUET'05-06]**

Sol^n: $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x}}=\int\frac{(1-z^2)(-2zdz)}{z}=-2\int(1-z^2)dz=-2\int dz+2\int z^2dz$

$-2z+2\frac{z^3}{3}+c=-2\sqrt{1-x}+\frac{2}{3}\left(\sqrt{1-x}\right)^3+c$ (Ans.)

$1-x=z^2$
$\therefore dx=-2zdz$

Example-20. $\int\frac{dx}{(x-3)\sqrt{x+1}}=?$

Sol^n: Let, $x+1=z^2\Rightarrow dx=2z\,dz$

Now, $x-3=(x+1)-4=z^2-4$

$\therefore\int 2z\frac{dz}{(z^2-4)z}=2\int\frac{dz}{z^2-4}=2\int\frac{dz}{z^2-2^2}=2\times\frac{1}{2\times2}\ln\left|\frac{z-2}{z+2}\right|+c=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+1}+2}\right|+c$ [Ans.]

Example-21. $\int(x-3)\sqrt{x+1}\,dx=?$

Sol^n: Let, $x+1=z^2\Rightarrow dx=2zdz$

Now, $x-3=z^2-4$

$\therefore\int(z^2-4)z\times2zdz=\int2z^2(z^2-4)dz=\int(2z^4-8z^2)dz$

$=2\frac{z^5}{5}-\frac{8z^3}{3}+c=\frac{2}{5}\left(\sqrt{x+1}\right)^5-\frac{8}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3+c$ [Ans.]

Case-02: $\int\frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ আকারের যেখানে a, b, c, p, q যেকোন ধ্রুব সংখ্যা

➲ **Concept:** $px+q=\frac{1}{z}$ ধরতে হবে। এরপর dx এর মান z এবং dz এর মাধ্যমে এবং x এর মান z এর মাধ্যমে বের করে বসাতে হবে।

Example-22. $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$ এর মান নির্ণয় কর : **[BUET'03-04,01-02]**

Sol^n $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$;

$=\int\frac{(x-1)\,dx}{(x^2-2x+1)\sqrt{x^2-2x}}=\int\frac{zdz}{(z^2+1)\sqrt{z^2}}=\int\frac{dz}{z^2+1}=\tan^{-1}z+c=\tan^{-1}(\sqrt{x^2-2x})+c$

Let, $x^2-2x=z^2$
$\therefore 2zdz=(2x-2)dx$
$\therefore zdz=(x-1)dx$

Example-23. মান নির্ণয় কর: $\int\frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}}$ **[BUET'04-05, BUTex'09-10,CUET'07-08]**

Sol^n: $\int\frac{\frac{1}{2}dy}{\frac{y}{2}\sqrt{y^2-1}}$ [Let, $2x=y$ $\therefore x=\frac{y}{2}$ $\therefore dx=\frac{dy}{2}$]

$=\int\frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}}=\sec^{-1}y=\sec^{-1}(2x)+c$ (Ans.)

Example-24. যোগজ নির্ণয় কর: $\int\frac{dx}{x\sqrt{(x^2+1)}}$ **[CUET'10-11]**

Sol^n: ধরি, $x^2+1=z^2\Rightarrow 2xdx=2zdz\therefore xdx=zdz$

$\int\frac{dx}{x\sqrt{(x^2+1)}}=\int\frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{zdz}{(z^2-1)z}=\int\frac{dz}{z^2-1}=\frac{1}{2}\ln\frac{z-1}{z+1}+c=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}+c$

Example-25. $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{3x^2+2x+1}}=?$

Sol^n: Let, $x+1=\frac{1}{z}\Rightarrow dx=-\frac{1}{z^2}dz$ Again, $x=\frac{1}{z}-1$

$\therefore\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{3x^2+2x+1}}=\int\frac{\left(-\frac{1}{z^2}\right)dz}{\left(\frac{1}{z}\right)\sqrt{3\left(\frac{1}{z}-1\right)^2+2\left(\frac{1}{z}-1\right)+1}}=-\int\frac{dz}{z\sqrt{\frac{3(1+z^2-2z)}{z^2}+\frac{2(1-z)}{z}+1}}$

$=-\int\frac{dz}{z\times\frac{1}{z}\sqrt{3(1+z^2-2z)+2z(1-z)+z^2}}=-\int\frac{dz}{\sqrt{2z^2-4z+3}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-2z+1+\left(\frac{3}{2}-1\right)}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dz}{\sqrt{(z-1)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}$

$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|(z-1)+\sqrt{(z-1)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right|+c$

Where $z=\frac{1}{x+1}$ [Ans.]

Special case: উপরোক্ত Type এর আকার যদি $\int \frac{dz}{\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ হয় তবে $ax^2 + bx + c = z^2$ ধরেও করা যায়।

Example-26. $\int \frac{dx}{(2x+3)\sqrt{x^2+3x+1}} = ?$

Sol^n: Let, $x^2 + 3x + 1 = z^2 \Rightarrow (2x + 3)dx = 2zdz = \int \frac{2zdz}{(2x+3)^2 z} = \int \frac{2dz}{(4x^2+12x+9)}$

$= \int \frac{2dz}{4(x^2+3x+1)+5} = \frac{2dz}{4z^2+5} = \frac{1}{4}\int \frac{2dz}{z^2+\frac{5}{4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} \tan^{-1}\frac{z}{\frac{\sqrt{5}}{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{2z}{\sqrt{5}} + c$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{2\sqrt{x^2+3x+1}}{\sqrt{5}} + c$ [Ans.]

Case-03: $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)\sqrt{dx+e}}$ আকারের

➲ **Concept:** $dx + e = z^2$ ধরতে হবে। এরপর dx এবং x এর মান dz এবং z এর মাধ্যমে বসালে $\int \frac{dz}{Az^4+Bz^2+C}$ আকারের রাশি পাওয়া যাবে।

Example-27. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x}} = ?$

Sol^n: $\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x}} = \int 2z \frac{dz}{((z^2)^2+2z^2+3)\times z}$

$= \int \frac{2dz}{z^4+2z^2+3} = \frac{2}{2\sqrt{3}}\int \frac{(z^2+\sqrt{3})-(z^2-\sqrt{3})}{z^2\left(z^2+\frac{3}{z^2}+2\right)} dz$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{z^2}}{\left(z-\frac{\sqrt{3}}{z}\right)^2+(2+2\sqrt{3})} dz - \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{z^2}}{\left(z+\frac{\sqrt{3}}{z}\right)^2-(2\sqrt{3}-2)} dz$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{3}}}\tan^{-1}\left|\frac{z-\frac{\sqrt{3}}{z}}{\sqrt{2+2\sqrt{3}}}\right| - \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2\sqrt{2\sqrt{3}-2}} \ln\left|\frac{z+\frac{\sqrt{3}}{z}-\sqrt{2\sqrt{3}-2}}{z+\frac{\sqrt{3}}{z}+\sqrt{2\sqrt{3}-2}}\right| + c$ Where, $z = \sqrt{x}$ [Ans.]

Let, $x = z^2 \Rightarrow dx = 2z\,dz$
Form of denomarator:
$z^2\left(z^2 + 2 + \frac{3}{z^2}\right) = z^2\left\{\left(z + \frac{\sqrt{3}}{z}\right)^2 - 2\sqrt{3} + 2\right\}$
Or, $= z^2\left\{\left(z - \frac{\sqrt{3}}{z}\right)^2 + 2\sqrt{3} + 2\right\}$
$d\left(z + \frac{\sqrt{3}}{z}\right) = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{z^2}\right)dz = \left(\frac{z^2-\sqrt{3}}{z^2}\right)dz$
$d\left(z - \frac{\sqrt{3}}{z}\right) = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{z^2}\right)dz = \left(\frac{z^2+\sqrt{3}}{z^2}\right)dz$

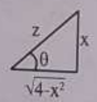
Case-04: $\int \frac{dx}{(ax^2+b)\sqrt{cx^2+d}}$ আকারের যেখানে **a, b, c, d** যেকোন ধ্রুবসংখ্যা

➲ **Concept:** $cx^2 + d = x^2z^2$ ধরতে হবে।

Example-28. যোজিত ফল নির্ণয় কর : $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ **[RUET'04-05,BUTex'02-03]**

Sol^n: $\int \frac{2\cos\theta\, d\theta}{4\sin^2\theta\ 2\cos\theta} = \frac{1}{4}\int \text{cosec}^2\theta\ d\theta$ $x = 2\sin\theta$ $\therefore dx = 2\cos\theta\, d\theta$

$\frac{1}{4}[-\cot\theta] = \frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right) + c = -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + c$ (Ans.)



Example-29. $\int \frac{dx}{(4-3x^2)\sqrt{4x^2+3}} = ?$

Sol^n: $\int \frac{dx}{(4-3x^2)\sqrt{4x^2+3}} = -3\int \frac{zdz}{x(z^2-4)^2\left\{4-\frac{9}{z^2-4}\right\}zx} = -3\int \frac{dz}{x^2(z^2-4)(4z^2-25)}$

$= -\int \frac{dz}{4\left\{z^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2\right\}} = -\frac{1}{20}\ln\left|\frac{z-\frac{5}{2}}{z+\frac{5}{2}}\right| + c = \frac{1}{20}\ln\left|\frac{2z+5}{2z-5}\right| + c$

$= \frac{1}{20}\ln\left|\frac{2(\sqrt{4x^2+3})/x+5}{2(\sqrt{4x^2+3})/x-5}\right| + c = \frac{1}{20}\ln\left|\frac{2\left(\sqrt{4x^2+3}\right)+5x)}{2\left(\sqrt{4x^2+3}\right)-5x)}\right| + c$

ধরি, $4x^2 + 3 = x^2z^2$
বা, $x^2 = \frac{3}{z^2-4}$
বা, $2xdx = \frac{-3.2z.dz}{(z^2-4)^2}$
বা, $dx = \frac{-3z.dz}{x(z^2-4)^2}$

Type-07: $\int \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx$ আকারের সমাকলনের ক্ষেত্রে লবকে $\sqrt{}$ মুক্ত করতে হবে

Example-30. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$ এর মান? **[BUET'11-12, KUET'11-12, SUST'11-12]**

Sol^n: $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{\frac{1}{2}(-2x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + c$ (Ans.)

Example-31. $\int \sqrt{\frac{5-x}{5+x}}dx = ?$

Sol^n: $\int \sqrt{\frac{5-x}{5+x}}dx = \int \frac{5-x}{\sqrt{(5+x)(5-x)}}dx = \int \frac{5-x}{\sqrt{(5)^2-x^2}}dx = \int \frac{5dx}{\sqrt{5^2-x^2}} + \frac{1}{2}\int \frac{(-2x)dx}{\sqrt{5^2-x^2}} = 5\sin^{-1}\frac{x}{5} + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5^2-x^2} + c$ **(Ans.)**

Type-08: $\int \frac{ax+b}{cx+d}dx$ আকার সংক্রান্ত

➲ **Concept:** $cx + d = z$ ধরতে হবে।

Example-32. $\int \frac{1-x}{1+x}dx$ এর মান? **[KUET'14-15]**

Sol^n: $\int \frac{1-x}{1+x}dx = \int \frac{dx}{1+x} - \int \frac{x}{1+x}dx = \ln(1+x) - \int \frac{1+x-1}{1+x}dx$

$= \ln|1+x| - \int dx + \int \frac{1}{1+x}dx = \ln|1+x| - x + \ln|1+x| + c = 2\ln|1+x| - x + c$

Example-33. $\int \frac{3x+5}{4x+7}dx = ?$

Sol^n: $\int \frac{3x+5}{4x+7}dx = \int \frac{\frac{3(z-7)}{4}+5}{z}\left(\frac{dz}{4}\right)$ | Let, $z = 4x + 7$ $\frac{dz}{dx} = 4 \Rightarrow \frac{dz}{4} = dx$

$= \int \frac{3z-21+20}{16z}dz = \int \frac{3z-1}{16z}dz = \frac{3}{16}\int dz - \frac{1}{16}\int \frac{dz}{z} = \frac{3}{16}z - \frac{1}{16}\ln|z| + c$ Where, $[z = 4x + 7]$ [Ans.]

Type-09: $\int \frac{x^m}{(a+bx)^n}dx$ আকারের; এখানে, **m** ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা

➲ **Concept:** $a + bx = z$ ধরতে হবে।

Example-34. $\int \frac{x^3dx}{(2+3x)^2} = ?$

Sol^n: $\int \frac{x^3dx}{(2+3x)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{\left(\frac{z-2}{3}\right)^3 dz}{z^2} = \frac{1}{81}\int \frac{(z-2)^3}{z^2}dz = \frac{1}{81}\int \frac{(z^3-6z^2+12z-8)dz}{z^2}$

$= \frac{1}{81}\int \left(z - 6 + \frac{12}{z} - \frac{8}{z^2}\right)dz = \frac{1}{81}\left\{\frac{z^2}{2} - 6z + 12\ln|z| + \frac{8}{z}\right\} + c$

where, $z = 2 + 3x$ [Ans.]

Let, $2 + 3x = z$
$\Rightarrow 3dx = dz \therefore dx = \frac{dz}{3}$
Again, $x = \frac{z-2}{3}$

Type-10: $\int \frac{dx}{x^m(a+bx)^n}$ আকারের; এখানে, $m + n > 1$ এবং ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা

➲ **Concept:** $a + bx = zx$ ধরতে হবে। dx ও x এর মান বের করতে হবে। পরবর্তীতে dx ও $(ax + b)$ এর মান বসালে x^{m+n} রাশি পাওয়া যাবে যাতে x – এর মান বসাতে হবে।

Example-35. $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(2+x)^{\frac{5}{2}}} = ?$

Sol^n: $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(2+x)^{\frac{5}{2}}} = -2\int \frac{dz}{(z-1)^2 x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}} z^{\frac{5}{2}}} = -2\int \frac{dz}{(z-1)^2 \frac{8}{(z-1)^3} \times z^{\frac{5}{2}}}$

Let, $2 + x = zx$
$\Rightarrow 2 = (z-1)x$
$\Rightarrow x = \frac{2}{z-1}$; $dx = \frac{-2}{(z-1)^2}dz$

$= -\frac{2}{8}\int \frac{z-1}{z^{\frac{5}{2}}}dz = -\frac{2}{8}\int \left(z^{-\frac{3}{2}} - z^{-\frac{5}{2}}\right)dz = -\frac{2}{8}\left(\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \frac{z^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}}\right) + c$ যেখানে, $z = \frac{2+x}{x}$ [Ans.]

Type-11: $\int \frac{dx}{x(a+bx^n)}$ আকারের

➲ **Concept:** $x^n = \frac{1}{z}$ ধরতে হবে। এরপর substitution এর উভয়পক্ষে ln নিয়ে dx এর মান x এবং dz এর মান z এর মাধ্যমে প্রকাশ করে বসালে হরের x মুক্ত হবে।

Example-36. $\int \frac{dx}{x(4+5x^{20})} = ?$

Let, $x^{20} = \frac{1}{z} \Rightarrow 20\ln x = -\ln z$
$\Rightarrow \frac{20}{x}dx = -\frac{1}{z}dz \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{dz}{20z}$

Sol^n: $\int \frac{dx}{x(4+5x^{20})} = \int \frac{-\frac{dz}{20z}}{4+5\times\frac{1}{z}} = -\int \frac{dz}{20z\left(\frac{4z+5}{z}\right)} = -\frac{1}{20}\int \frac{dz}{4z+5}$

$= -\frac{1}{80}\ln|4z+5| + c = -\frac{1}{80}\ln|4x^{-20}+5| + c$ [Ans.]

Type-12: $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx^n}}$ আকারের

➲ **Concept:** $x^n = \frac{1}{z^2}$ ধরতে হবে।

Example-37. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+3\sqrt{x}}} = ?$

Let, $x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{z^2} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln x = -2\ln z$
$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{dx}{x} = \frac{-2}{z}dz \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{-4dz}{z}$
$\frac{1}{z^2} = x^{\frac{1}{2}}; z^2 = x^{-\frac{1}{2}}; z = x^{-\frac{1}{4}}$

Sol^n: $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+3\sqrt{x}}} = \int \frac{-4dz}{z\sqrt{2+\frac{3}{z^2}}} = -\int \frac{4dz}{\frac{z\times 1}{z}\sqrt{2z^2+3}}$

$= -\int \frac{4dz}{\sqrt{2z^2+3}} = -\frac{4}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}$

$= -\frac{4}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{z^2+\frac{3}{2}}+z\right) + c = -\frac{4}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{x^{-\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}}+x^{-\frac{1}{4}}\right) + c$ [Ans.]

Type-13: $\int \frac{x^{2m+1}}{\sqrt{a+bx^2}}dx$ আকারের যেখানে m ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা

➲ **Concept:** $a + bx^2 = z^2$ ধরতে হবে।

Example-38. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = ?$

Let, $1 - x^2 = z^2 \Rightarrow -2xdx = 2zdz$
$\therefore -xdx = zdz; x^3 = x.x^2 = x(1-z^2)$

Sol^n: $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{-(1-z^2)zdz}{z} = \int -(1-z^2)dz$

$= \int (z^2-1)dz = \frac{z^3}{3} - z + c$

$= \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{3}\right)^3 - \sqrt{1-x^2} + c$ [Ans.]

Type-14: $\int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)}+\sqrt{ax+c}}$ আকারের ক্ষেত্রে হরের অনুবন্ধী রাশি দ্বারা লব ও হরকে গুণ করতে হবে

Example-39. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x+5}} = ?$

Sol^n: $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x+5}} = \int \frac{\sqrt{(2x+3)}+\sqrt{2x+5}}{(2x+3)-(2x+5)}dx = \frac{1}{-2}\int(\sqrt{(2x+3)}+\sqrt{2x+5})dx$

$= \frac{1}{-2}\left\{\frac{(2x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\times 2} + \frac{(2x+5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\times 2}\right\} + c = \frac{1}{-6}\left\{(2x+3)^{\frac{3}{2}} + (2x+5)^{\frac{3}{2}}\right\} + c$ [Ans.]

Type-15: $\int \frac{dx}{ax^4+bx^2+c}$ আকারের

➲ **Concept:** $\int \frac{dx}{ax^4+bx^2+c}$ কে $\frac{1}{2\sqrt{c}}\int \frac{(\sqrt{a}x^2+\sqrt{c})-(\sqrt{a}x^2-\sqrt{c})}{ax^4+bx^2+c}dx$ আকারে ভেঙ্গে হর ও লবকে x^2 দ্বারা ভাগ করতে হবে।

Example-40. যোগজ নির্ণয় কর: $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$ [BUET'14-15]

Sol^n: $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+(\sqrt{2})^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right) + c$ (Ans.)

Example-41. $\int \sqrt{\tan x}\,dx = ?$

Let, $\tan x = z^2$
$\Rightarrow \sec^2 x\,dx = 2z\,dz$
$\Rightarrow dx = \frac{2z\,dz}{1+z^4}$
Let, $d\left(z-\frac{1}{z}\right) = \left(1+\frac{1}{z^2}\right)dz$
Again, $d\left(z+\frac{1}{z}\right) = \left(1-\frac{1}{z^2}\right)dz$

Sol^n: $\int \sqrt{\tan x}\,dx = \int \frac{z\times 2zdz}{1+z^4} = \int \frac{2z^2dz}{1+z^4}$

$= \int \frac{(z^2+1)+(z^2-1)}{z^4+1}dz = \int \frac{z^2+1}{z^4+1}dz + \int \frac{z^2-1}{z^4+1}dz$

$= \int \frac{1+\frac{1}{z^2}}{z^2+\frac{1}{z^2}}dz + \int \frac{1-\frac{1}{z^2}}{z^2+\frac{1}{z^2}}dz = \int \frac{1+\frac{1}{z^2}}{\left(z-\frac{1}{z}\right)^2+2}dz + \int \frac{1-\frac{1}{z^2}}{\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2}dz$

$= \int \frac{d\left(z-\frac{1}{z}\right)}{\left(z-\frac{1}{z}\right)^2+2} + \int \frac{d\left(z+\frac{1}{z}\right)}{\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{z-\frac{1}{z}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{z+\frac{1}{z}-\sqrt{2}}{z+\frac{1}{z}+\sqrt{2}}\right) + c$ Where, $z = \sqrt{\tan x}$ [Ans.]

Type-16: $\int \sin(ax+b)dx$, $\int \cos(ax+b)dx$ আকারের

➲ **Concept:** $ax + b = z$ ধরবে।

Example-42. $\int \sin(5x+3)dx = ?$

Sol^n: ধরি $I = \int \sin(5x+3)dx$ | ধরি, $5x + 3 = z$ বা, $5dx = dz$ বা, $dx = \frac{1}{5}dz$

$\therefore I = \frac{1}{5}\int \sin z\,dz = -\frac{1}{5}\cos z + c = -\frac{1}{5}\cos(5x+3) + c$ (Ans.)

Type-17: sine ও cosine এর সংমিশ্রণ

➲ **Concept:** $2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$; $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$
$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$ সূত্রগুলো ব্যবহার করতে হবে।

Example-43. $\int \sin 5x\cos 4x dx = ?$

Sol^n: $\int \sin 5x\cos 4xdx = \frac{1}{2}\int 2\sin 5x\cos 4xdx = \frac{1}{2}\int(\sin 9x + \sin x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos 9x}{9} - \cos x\right) + c$ (Ans.)

Type-18: $\int \sin^2(Ax+b)\,dx$, $\int \cos^2(ax+b)dx$ আকারের

➲ **Concept:** এক্ষেত্রে $2\sin^2 A = 1 - \cos 2A$; $2\cos^2 A = 1 + \cos 2A$ সূত্র ব্যবহার করে ইন্টিগ্রেশন করতে হবে।

Example-44. যোজিত ফল নির্ণয় কর : $\int \sin^2 x\sin 3xdx$ [CUET'08-09,RUET'03-04]

Sol^n: $\frac{1}{2}\int 2\sin^2 x\sin 3xdx = \frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)\sin 3x\,dx$

$= \frac{1}{2}\int \sin 3x\,dx - \frac{1}{2}\int \sin 3x\cos 2x\,dx = \frac{1}{6} - \cos 3x - \frac{1}{4}\int 2\sin 3x\cos 2x\,dx$

$= \frac{1}{6}(-\cos 3x) - \frac{1}{4}\int(\sin 5x + \sin x)\,dx$

$= \frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{5}\cos 5x - \cos x\right] + c$

$= -\frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{20}\cos 5x + \frac{1}{4}\cos x + c$

Example-45. $\int \sin^2(2x+3)dx = ?$

Sol^n: $\int \sin^2(2x+3)dx = \frac{1}{2}\int 2\sin^2(2x+3)dx = \frac{1}{2}\int\{1-\cos(4x+6)\}dx = \frac{1}{2}\left\{x - \frac{\sin(4x+6)}{4}\right\} + c$ (Ans.)

Type-19: $\int \frac{dx}{1+\sin ax}, \int \frac{dx}{1-\sin ax}, \int \frac{dx}{1+\cos ax}, \int \frac{dx}{1-\cos ax}$ আকারের

➲ **Concept:** প্রদত্ত যোগজের হরের বিপরীত রাশি দ্বারা লব ও হরকে গুণ করে সরলীকরণ করতে হবে।

ব্যবহৃত সূত্রঃ $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$, $\int \sec x . \tan x dx = \sec x + c$

$\int \text{cosec}^2 x dx = -\cot x + c$, $\int \text{cosec} x . \cot x dx = -\text{cosec} x + c$

Example-46. যোজিত ফল নির্ণয় কর : $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ [RUET'08-09,BUET'03-04]

Sol^n: $\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{(1-\sin x)dx}{1-\sin^2 x} = \int \frac{(1-\sin x)dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx - \int \tan x \sec x dx = \tan x - \sec x + c$

Type-20: $\int \sin^m x \, dx$ / $\int \cos^m x \, dx$ আকারের

➲ **Concept:**

(i) m জোড় পূর্ণসংখ্যা হলে $2\sin^2 x$ আকারে পরিণত করতে হবে ও $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$ এর সূত্র ব্যবহার করতে হবে।

(ii) m বিজোড় পূর্ণসংখ্যা হলে $\cos x = z$ ধরতে হবে এবং $\sin^m x$ কে $(\sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}} . \sin x$ আকারে প্রকাশ করতে হবে।

[বি. দ্র. (i) ও (ii) নং $\int \sin^m x \, dx$ এর জন্য]

(iii) $\int \cos^m x$ এর ক্ষেত্রে m বিজোড় হলে $\sin x = z$ ধরতে হবে এবং m জোড় হলে $2\cos^2 x$ নিয়ে আসতে হবে।

Example-47. $\int \sin^5 x dx = ?$ [KUET'10-11]

Sol^n: $\int \sin^5 x dx = \int \sin^4 x . \sin x dx = \int (\sin^2 x)^2 \sin x dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x dx$

ধরি, $\cos x = z \therefore -\sin x dx = dz = -\int (1-z^2)^2 dz$

$= -\int (1 - 2z^2 + z^4) dz = -\left(z - \frac{2}{3}z^3 + \frac{z^5}{5}\right) + c = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{\cos^5 x}{5} + c$ (Ans.)

Example-48. $\int \sin^4 x dx = ?$

Sol^n: $\int \sin^4 x \, dx = \frac{1}{4}\int (2\sin^2 x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx$

$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{4}\int \cos^2 x dx = \frac{1}{4}x - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{8}\int (1 + \cos 4x) dx$

$= \frac{1}{4}x - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{8}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right) + c$ (Ans.)

Type-21: $\int \sin^m x . \cos^n x dx$ আকারের

Example-49. $\int \sin^5 \theta \cos \theta \, d\theta$ এর মান- [BUTex'15-16, CUET'10-11]

Sol^n: $\int \sin^5 \theta \cos \theta \, d\theta = \int z^5 \, dz = \frac{z^6}{6} + c = \frac{1}{6}\sin^6 x + c$

ধরি, $\sin \theta = z \therefore \cos \theta \, d\theta = dz$

Case-I: m ও n উভয়ই বিজোড় হলে, যে কোনটি অর্থাৎ $\sin x$ বা $\cos x = z$ ধরতে হবে তবে যার power বড় সেটা = z ধরলে সুবিধাজনক।

Example-50. $\int \sin^5 x . \cos^3 x dx = ?$

Sol^n: $\int \sin^5 x . \cos^3 x dx = \int \sin^5 x . \cos^2 x . \cos x dx = \int \sin^5 x \, (1 - \sin^2 x) \cos x dx$

ধরি, $\sin x = z \therefore \cos x dx = dz$

$\int z^5 . (1 - z^2) dz = \int (z^5 - z^7) dz = \frac{z^6}{6} - \frac{z^8}{8} + c = \frac{1}{6}\sin^6 x - \frac{1}{8}\sin^8 x + c$ (Ans.)

Case-II: m ও n এর যে কোন একটি জোড় এবং অপরটি বিজোড় হলে যার power জোড় সেটা = z ধরতে হবে।

Example-51. $\int \sin^5 x . \cos^4 x dx = ?$

Sol^n: $\int \sin^5 x . \cos^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 . \cos^4 x . \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 . \cos^4 x . \sin x dx$

ধরি, $\cos x = z \therefore -\sin x dx = dz$

$= \int (1-z^2)^2 . z^2 . (-dz) = -\int (1 - 2z^2 + z^4) z^4 dz = -\int (z^4 - 2z^6 + z^8) dz = -\frac{z^5}{5} + \frac{2z^7}{7} - \frac{z^9}{9} + c$

$= \frac{\cos^5 x}{5} + \frac{2\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{9} + c$ (Ans)

Case-III: উভয় ঘাত জোড় হলে $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ এবং $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ সূত্রের সাহায্যে বিজোড় ঘাতবিশিষ্ট বা ঘাতহীন ফাংশনে পরিবর্তিত করতে হবে।

Example-52. $\int \sin^4 \cos^2 x \, dx = ?$

Sol^n: $\int \sin^4 \cos^2 x \, dx = \frac{1}{8}\int (1 - \cos 2x)^2 (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{8}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)(1 + \cos 2x) dx$

$= \frac{1}{8}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + \cos 2x - 2\cos^2 2x + \cos^3 2x) dx = \frac{1}{8}\int (1 - \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x) dx$

$= \frac{1}{8}\int \left\{1 - \cos 2x - \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) + \frac{1}{4}(3\cos 2x + \cos 6x)\right\} dx$

$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{3}{8}\sin 2x + \frac{1}{24}\sin 6x\right) + c$ [Ans.]

Case-IV: $m + n = -(ve)$ জোড় পূর্ণসংখ্যা হলে প্রদত্ত রাশিকে $\sec^2 \theta$ এবং $\tan \theta$ এর ঘাত হিসেবে প্রকাশ করতে হবে। এবং $\tan x = z$ ধরতে হবে।

Example-53. $\int \sin^{\frac{-5}{3}} x . \cos^{\frac{-1}{3}} x \, dx = ?$

Sol^n: $\int \sin^{\frac{-5}{3}} x . \cos^{\frac{-1}{3}} x \, dx = \int \frac{1}{\sin^{\frac{5}{3}} x \cos^{\frac{1}{3}} x} dx$

[ধরি, $\tan x = z, \sec^2 x \, dx = dz$] $= \int \frac{1}{\frac{\sin^{\frac{5}{3}} x}{\cos^{\frac{5}{3}} x} . \cos^{\frac{5}{3}} x . \cos^{\frac{1}{3}} x} dx$

$= \int \frac{1}{\tan^{\frac{5}{3}} x . \cos^2 x} dx = \int \frac{\sec^2 x}{\tan^{\frac{5}{3}} x} dx = \int \frac{dz}{z^{\frac{5}{3}}} = \int z^{\frac{-5}{3}} dz = \int \frac{z^{\frac{-2}{3}}}{\frac{-2}{3}} + c = -\frac{3}{2}(\tan x)^{\frac{-2}{3}} + c$ (Ans.)

Case-V: একটি ঘাত ভগ্নাংশ এবং অন্যটির ঘাত বিজোড় হলে যেটির ঘাত ভগ্নাংশ তাকে z ধরতে হবে।

Example-54. $\sin^{\frac{2}{3}} x \cos^3 x \, dx = ?$

Sol^n: $\sin^{\frac{2}{3}} x \cos^3 x \, dx = \frac{3}{2}\int z(1 - z^3) z^{\frac{1}{2}} dz$

$= \frac{3}{2}\left(z^{\frac{3}{2}} - z^{\frac{9}{2}}\right) dz = \frac{3}{2} \times \frac{2}{5} z^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{11} \times \frac{3}{2} z^{\frac{11}{2}} + c$

$= \frac{3}{5}\left(\sin^{\frac{2}{3}} x\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{11}\left(\sin^{\frac{2}{3}} x\right)^{\frac{11}{2}} + c$ [Ans.]

Let, $\sin^{\frac{2}{3}} x = z \Rightarrow \frac{2}{3}\sin^{\frac{-1}{3}} x \cos x \, dx = dz$

$\Rightarrow \cos x dx = \frac{3}{2}(\sin^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} dz = \frac{3}{2} z^{\frac{1}{2}} dz$

Again, $\left(\sin^{\frac{2}{3}} x\right)^3 = z^3 \Rightarrow \sin^2 x = z^3$

$\Rightarrow \cos^2 x = 1 - z^3$

Example-55. $\int \sec^3 x = ?$

Sol^n: $\int \sec^3 x = \int \sec x . \sec^2 x \, dx = \sec x . \tan x - \int \sec x . \tan^2 x dx + c$

$= \sec x . \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) dx + c = \sec x . \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx + c$

$= \sec x . \tan x + \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| - \int \sec^3 x dx + c$

$\therefore \int \sec^3 x = \frac{1}{2}\left(\sec x . \tan x + \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|\right) + c$ [Ans.]

Type-22 (a): (i) $\int \sec^n x dx$ এবং (ii) $\int \operatorname{cosec}^n x dx$ আকারের

➲ **Concept: (a)** n ধনাত্মক জোড় সংখ্যা হলে

(i) এক্ষেত্রে $\tan x = z$ (ii) এর ক্ষেত্রে $\cot x = z$ ধরতে হবে।

Example-56. $\int \sec^4 x dx = ?$

Sol^n: $\int \sec^4 x dx = \int \sec^2 x . \sec^2 x dx = \int (1 + \tan^2 x) \sec^2 x dx$ ধরি, $\tan x = z$ $\sec^2 x dx = dz$

$= \int (1 + z^2) dz = z + \frac{z^3}{3} + c = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + c$ (Ans.)

(b) n ধনাত্মক বিজোড় সংখ্যা হলে uv এর সূত্র প্রয়োগ করতে হবে।

Example-57. $\int \sec^3 x = ?$

Sol^n: $\int \sec^3 x = \int \sec x . \sec^2 x dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx + c$

$= \sec x . \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) dx + c = \sec x . \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x \, dx + c$

$= \sec x . \tan x + \ln \left| \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \right| - \int \sec^3 x dx + c$

$\therefore \int \sec^3 x = \frac{1}{2}\left(\sec x . \tan x + \ln \left| \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \right| \right) + c$ (Ans.)

Type-22 (b): (i) $\int \tan^n x dx$ এবং (ii) $\int \cot^n x dx$ আকারের

➲ **Concept:** প্রতিক্ষেত্রে $\tan^2 x$ অথবা $\cot^2 x$ আলাদা করে $(\sec^2 x - 1)$ অথবা $(\operatorname{cosec}^2 x - 1)$ বসাতে হয়।

যেমনঃ $\int \tan^n x \, dx = \int \tan^{n-2} x \tan^2 x \, dx = \int \tan^{n-2} x \, (\sec^2 x - 1) dx$

$= \int \tan^{n-2} x \, dx + \int \tan^{n-2} x \sec^2 x \, dx$

প্রথম অংশে $\tan x = z$ হলে $\sec^2 x dx = dz$ বসিয়ে শেষ হয়। পরের অংশে $\int \tan^{n-2} x \, dx$ কে পুনরায় একই নিয়মে করতে হবে।

Example-58. $\int \tan^5 x dx = ?$

Sol^n: $\int \tan^5 x dx = \int \tan^3 x \sec^2 x dx - \int \tan^3 x \, dx$

$= \frac{1}{4} \tan^4 x - \int \tan x \sec^2 x \, dx + \int \tan x \, dx$ $= \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln|\sec x| + c$

Type-23: (a) $\int \tan^m x \sec^n x dx$ এবং (b) $\int \cot^m x \operatorname{cosec}^n x dx$ আকারের

➲ **Concept:**

Case-I: secx এর power জোড় ধনাত্মক সংখ্যা হলে $\tan x = z$ ধরতে হবে।

Example-59. $\int \tan^5 x . \sec^4 x \, dx = ?$

Sol^n: $\int \tan^5 x . \sec^4 x \, dx = \int \tan^5 x . \sec^2 x . \sec^2 x dx = \int \tan^5 x . (1 + \tan^2 x) . \sec^2 x dx$

ধরি, $\tan x = z$ বা, $\sec^2 x dx = dz$

$= \int z^5 (1 + z^2) dz = \int (z^5 + z^7) \, dz = \frac{z^6}{6} + \frac{z^8}{8} + c = \frac{\tan^6 x}{6} + \frac{\tan^8 x}{8} + c$ (Ans.)

Case-II: tanx ও secx উভয় এর power বিজোড় ধনাত্মক হলে $\sec x = z$ ধরতে হবে।

Example-60. $\int \tan^3 x \sec^3 x dx = ?$

Sol^n: ধরি, $\sec x = z \Rightarrow \sec x \tan x \, dx = dz$ $= \int \tan^2 x . \sec^2 x \, \tan x \sec x \, dx$

$= \int (\sec^2 x - 1) \sec^2 x \tan x \sec x \, dx = \int (z^2 - 1) z^2 \, dz$

$= \int (z^4 - z^2) dz = \frac{z^5}{5} - \frac{z^3}{3} + c$ [যেখানে = secx]

Case-III: tanx এর ঘাত জোড় ধনাত্মক ও secx এর ঘাত বিজোড় ঋণাত্মক হলে uv এর সূত্র প্রয়োগ করতে হবে।

Example-61. $\int \tan^2 x \sec x \, dx = ?$

Sol^n: $\int \tan x \; (\tan x \sec x) dx = \tan x \int \tan x \sec x \, dx - \int \left(\frac{d}{dx} \tan x \; \int (\tan x \sec x) dx \right) dx$

$= \tan x \sec x - \int \sec^3 x \, dx = \tan x \; \sec x - \frac{1}{2} \left(\sec x \tan x + \ln \left| \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \right| \right)$

$\left[\because \int \sec^3 x = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln \left| \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \right| \right]$ $= \frac{1}{2} (\sec x \tan x - \ln \left| \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \right| + c$

(b) $\int \cot^m x \; \operatorname{cosec}^m x \, dx$ উপরোক্ত তিনটি case cotx এবং cosecx এর ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য। cotx কে tanx এর সাথে এবং cosecx কে secx এর সাথে তুলনা করে। উপরোক্ত case গুলো এদের ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা যাবে।

Type-24: $\int \frac{dx}{a + b \sin^2 x}, \int \frac{dx}{a + b \cos^2 x}, \int \frac{dx}{a \sin^2 x + b \cos^2 x}, \int \frac{dx}{a \sin^2 x + b \cos^2 x + c}$ আকারের

➲ **Concept:** লব ও হরকে $\cos^2 x$ দ্বারা ভাগ করে হরকে $\tan x$ এর ফাংশন আকারে প্রকাশ করতে হবে এবং $\tan x = z$ ধরতে হবে।

Example-62. মান নির্ণয় করঃ $\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ [RUET'11-12]

Sol^n: $\int \frac{1}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx$

$= \int \frac{\sec^2 x dx}{a^2 + b^2 \tan^2 x}$ [$\cos^2 x$ দিয়ে ভাগ]

ধরি, $\tan x = z \Rightarrow \sec^2 x \, dx = dz$

$\int \frac{dz}{a^2 + b^2 z^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dz}{1 + \frac{b^2 z^2}{a^2}} = \frac{1}{ab} \tan^{-1} \left(\frac{bz}{a} \right) + c = \frac{1}{ab} \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \tan x \right) + c$

Example-63. $\int \frac{dx}{2 + 3 \cos^2 x} = ?$

Sol^n: $\int \frac{dx}{2 + 3 \cos^2 x} = \int \frac{\sec^2 x dx}{2 \sec^2 x + 3} = \int \frac{\sec^2 x dx}{2 + 2 \tan^2 x + 3}$ [ধরি, $\tan x = z$]

$= \int \frac{\sec^2 x dx}{2\left(\frac{5}{2} + \tan^2 x\right)} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 + z^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{5}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{2} z}{\sqrt{5}} + c$

$\Rightarrow dz = \sec^2 x dx = \frac{1}{\sqrt{10}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{2} \tan x}{\sqrt{5}} + c$ (Ans.)

Type-25: $\int \frac{dx}{a + b \sin x}, \int \frac{dx}{a + b \cos x}, \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}, \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$ আকারের

➲ **Concept:** $\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$; $\cos = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$ সূত্র বসিয়ে, $\tan \frac{x}{2} = z$ ধরতে হবে।

Example-64. $\int \frac{dx}{1 + \sin x - \cos x}$ এর মান নির্ণয় কর। [BUET'11-12]

Sol^n: $\int \frac{dx}{1 + \sin x - \cos x} = \int \frac{dx}{1 + \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} - \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}}$

$= \int \frac{\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) dx}{1 + \tan^2 \frac{x}{2} + 2 \tan \frac{x}{2} - 1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{\sec^2 \frac{x}{2} dx}{2 \tan^2 \frac{x}{2} + 2 \tan \frac{x}{2}}$

$= \int \frac{\frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} dx}{\tan \frac{x}{2} \left(\tan \frac{x}{2} + 1 \right)} = \int \frac{dz}{z(z+1)} = \int \frac{dz}{z} - \int \frac{dz}{z+1} = \ln(z) - \ln(z+1) = \ln \frac{z}{z+1} + c$

ধরি, $z = \tan \frac{x}{2}$

$dz = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} dx$

$\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}$

$= \ln \frac{\tan \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2} + 1} + c$

Example-65. যোজিত ফল নির্ণয় কর: $\int \frac{dx}{a\cos x - b\sin x}$. [CUET'09-10]

Sol^n: $\int \frac{dx}{a\cos x - b\sin x}$

$$= \int \frac{dx}{a\left(\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right) - b\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}} = \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}dx}{a\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right) - 2b\tan\frac{x}{2}} \quad \left[\text{Let, } \tan\frac{x}{2} = z \Rightarrow \sec^2\frac{x}{2}dx = 2dz\right]$$

$$= \int \frac{2dz}{a(1-z^2) - 2bz} = -\frac{1}{a}\int \frac{2dz}{z^2 + 2\frac{b}{a}z - 1} = -\frac{1}{a}\int \frac{2dz}{\left(z+\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2}{a^2} - 1} = -\frac{1}{a}\int \frac{2dz}{\left(z+\frac{b}{a}\right) - \left(\frac{b^2+a^2}{a^2}\right)}$$

$$= -\frac{1}{a}\int \frac{2dz}{\left(z+\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\right)^2} = -\frac{1}{a} \times \frac{2}{2\times\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}} \ln\left|\frac{z+\frac{b}{a} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}}{z+\frac{b}{a} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}}\right| + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln\left|\frac{az+b+\sqrt{a^2+b^2}}{az+b-\sqrt{a^2+b^2}}\right| + c = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln\left|\frac{a\tan\frac{x}{2}+b+\sqrt{a^2+b^2}}{a\tan\frac{x}{2}+b-\sqrt{a^2+b^2}}\right| + c$$

Example-66. $\int \frac{dx}{2+3\sin x} = ?$

Sol^n: $\int \frac{dx}{2+3\sin x} = \int \frac{dx}{2+3\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}} = \int \frac{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx}{2\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)+6\tan\frac{x}{2}}$ | ধরি, $\tan\frac{x}{2} = z$; $\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx = dz$

$$= \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}dx}{2\left(\tan^2\frac{x}{2}+3\tan\frac{x}{2}+1\right)} = 2\int \frac{dz}{2(z^2+3z+1)} = \int \frac{dz}{\left(z^2+2.z.\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2+1-\frac{9}{4}\right)}$$

$$= \int \frac{dz}{\left(z+\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\frac{\sqrt{5}}{2}} \ln\left|\frac{z+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{z+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right| + c = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left|\frac{2z+3-\sqrt{5}}{2z+3+\sqrt{5}}\right| + c$$; যেখানে $z = \tan\frac{x}{2}$. [Ans.]

Type-26: $\int \frac{a\sin x + b\cos x}{c\sin x + d\cos x}dx$, $\int \frac{a\sin x + b\cos x + c}{d\sin x + e\cos x + f}dx$ আকারের, যেখানে a, b, c, d, e, f যেকোন ধ্রুবসংখ্যা

- **Concept:** প্রথম সমাকলনের ক্ষেত্রে, লব = M(হর) +N$\frac{d}{dx}$ (হর) ধরে $\sin x$ ও $\cos x$ এর সহগ সমীকৃত করে মান বের করতে হবে। দ্বিতীয় সমাকলনের ক্ষেত্রে, লব = M(হর) +N$\frac{d}{dx}$ (হর)+P ধরে $\sin x$, $\cos x$ এবং ধ্রুবক পদের সহগ সমীকৃত করে মান বের করতে হবে।

Example-67. $\int \frac{a\sin x + b\cos x}{c\sin x + d\cos x}dx = ?$

Sol^n: $\int \frac{a\sin x + b\cos x}{c\sin x + d\cos x}dx = \int \frac{M(c\sin x + d\cos x) + N(c\cos x - d\sin x)}{c\sin x + d\cos x}dx$

$= M\int dx + N\int \frac{c\cos x - d\sin x}{c\sin x + d\cos x}dx = Mx + N\ln|c\sin x + d\cos x| + c$

যেখানে, $Mc - Nd = a$
$Md + Nc = b$
$\therefore M = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}; N = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

Example-68. $\int \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}d\theta$ এর মান- [KUET'15-16]

Sol^n: $\int \frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}d\theta = \int \frac{\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}d\theta = \int \frac{1+\sin 2\theta}{\cos 2\theta}d\theta = \int \sec 2\theta\, d\theta + \int \tan 2\theta\, d\theta$

$$= \frac{1}{2}\ln(\sec 2\theta + \tan 2\theta) - \frac{1}{2}\ln\cos 2\theta + c' = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin 2\theta}{\cos^2 2\theta}\right) + c' = \frac{1}{2}\ln\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2}{(\cos\theta+\sin\theta)^2(\cos\theta-\sin\theta)^2} + c'$$

$$= \ln\left(\frac{1}{\cos\theta-\sin\theta}\right) + c' = \ln\frac{1}{\sqrt{2}\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{4} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)} + c' = \ln\frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} + c'$$

$$= \ln\frac{\sec\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}} + c' = \ln\sec\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) + \ln\frac{1}{\sqrt{2}} + c' = \ln\sec\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) + c$$

Type-27: $\int \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}dx$, $\int \frac{1}{P(\sin x, \cos x)}dx$ আকারের

- **Concept:** প্রদত্ত ফাংশন $\sin x$ ও $\cos x$ এর সাপেক্ষে প্রতিসম হলে অর্থাৎ $f(x) = f(\sin x, \cos x) = f(\cos x, \sin x)$ হলে প্রদত্ত ফাংশনকে $\tan x$ এর ফাংশনে প্রকাশ করতে হবে।

Example-69. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx = ?$ [BUET'08-09]

Sol^n: $\int \frac{2\sin x.\cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx = \int \frac{\frac{2\sin x\cos x}{\cos^4 x}}{\tan^4 x + 1}dx = \int \frac{2\tan x.\sec^2 x}{\tan^4 x + 1}dx$

ধরি, $\tan^2 x = z$

$\therefore 2\tan x.\sec^2 x\, dx = dz$

$\therefore \int \frac{1}{1+z^2}dz = \tan^{-1}z + C = \tan^{-1}(\tan^2 x) + C$ (Ans)

Example-70. $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x\cos x}dx$ এর মান? [KUET'11-12]

Sol^n: $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x\cos x}dx = \int \frac{\sec^2 x\sqrt{\tan x}}{\tan x}dx = \int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sqrt{\tan x}} = 2\sqrt{\tan x} + c$ $\left[\because \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + c\right]$

Example-71. $\int \frac{\sin 4x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx = ?$

Sol^n: ধরি, $\sin^4 x + \cos^4 x = z$

$\therefore 4\sin x\cos x.\cos 2x\, dx = -dz$

$\therefore \int \frac{\sin 4x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx = -\int \frac{dz}{d} = -\ln|z| + c = -\ln|\sin^4 x + \cos^4 x| + c$ (Ans.)

Type-28: $\int \frac{dx}{a+be^{mx}}$, $\int \frac{dx}{ae^{mx}+be^{-mx}}$ আকারের

- **Concept:** উভয় সমাকলনের ক্ষেত্রে e^{-mx} দ্বারা লব ও হরকে গুণ করতে হবে এবং $e^{-mx} = z$ ধরতে হবে। কিন্তু দ্বিতীয় সমাকলনের ক্ষেত্রে লব ও হরকে e^{mx} দ্বারা গুণ করলে সুবিধাজনক হয় এবং এক্ষেত্রে $e^{mx} = z$ ধরতে হবে।

Example-72. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ এর মান কত? [BUTex'12-13,KUET'09-10, DU'09-10]

Sol^n: $I = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \int \frac{e^x dx}{(e^x)^2 + 1}$ | ধরি, $e^x = t \therefore e^x dx = dt$; $\therefore I = \int \frac{dt}{t^2+1} = \tan^{-1}t + c = \tan^{-1}(e^x) + c$

Example-73. মান নির্ণয় কর: $\int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}$ [RUET'09-10]

Sol^n: $\int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}} = \int \frac{-(-e^{-x})dx}{1+e^{-x}} = -\ln(1+e^{-x}) + c$ (Ans.)

Example-74. $\int \frac{dx}{2e^{3x}+5e^{-3x}} = ?$

Sol^n: $\int \frac{dx}{2e^{3x}+5e^{-3x}} = \int \frac{e^{3x}dx}{2(e^{3x})^2+5} = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{2z^2+5}$ | ধরি, $e^{3x} = z$; $\therefore 3e^{3x}.dx = dz$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{dz}{z^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2} = \frac{1}{6}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{z}{\sqrt{\frac{5}{2}}} + c = \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}e^{3x}}{\sqrt{5}} + c \text{ (Ans.)}$$

Example-75. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{5e^{2x} - 12e^{x+4}}} = ?$

Sol^n: ধরি, $e^x = z \Rightarrow dx.e^x = dz$

$$\therefore \int \frac{dz}{\sqrt{5e^2 - 12z + 4}} = \int \frac{dz}{\sqrt{5}\sqrt{z^2 - \frac{12}{5}z + \frac{4}{5}}} = \int \frac{dz}{\sqrt{5}\sqrt{\left(z-\frac{6}{5}\right)^2 + \frac{4}{5} - \frac{36}{25}}} = \int \frac{dz}{\sqrt{5}\sqrt{\left(z-\frac{6}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\sqrt{\left(z^2 - \frac{6}{5}\right) - \left(\frac{9}{5}\right)^2} + \left(z - \frac{6}{5}\right)\right| + c = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\sqrt{\left(e^x - \frac{6}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} + \left(e^x - \frac{6}{5}\right)\right| + c \text{ (Ans.)}$$

Type-29: $\int \frac{e^{px}+e^{qx}\,dx}{e^{mx}+e^{-mx}}$ আকারের ক্ষেত্রে, $p-q=2m$ হলে লব হতে, $e^{\frac{px+qx}{2}}$ common নিতে হবে

Example-76. $\int \frac{e^{9x}+e^{5x}}{e^{2x}+e^{-2x}}dx = ?$

Sol^n: $\int \frac{e^{9x}+e^{5x}}{e^{2x}+e^{-2x}}dx = \int \frac{e^{7x}(e^{2x}+e^{-2x})}{e^{2x}+e^{-2x}}dx = \int e^{7x}dx = \frac{1}{7}e^{7x}+c$ [Ans.]

ধরি, $e^{3x} = z$
$\therefore 3e^{3x}.dx = dz$

Type-30: অংশক্রমে সমাকলন

➲ **Concept:** সূত্র $\int uvdx = u\int vdx - \int\left\{\frac{d}{dx}(u)\int vdx\right\}dx$

উপরের সূত্রটিতে কোনটি u এবং কোনটি v হবে তা নির্ধারণ করতে নিম্নোক্ত পদ্ধতি অবলম্বন করতে পারো। u এবং v এর মাঝে LIATE অনুযায়ী যা প্রথমে আছে তাকে u ধরতে হবে।

যেমন: $\int x\tan^{-1}x\,dx$ এর ক্ষেত্রে LIATE অনুযায়ী $\tan^{-1}x$ inverse function যা আগে / উপরে আছে তাই $\tan^{-1}x$ কে u ধরতে হবে।

LIATE:

L : Logarithm
I : Inverse Trigonometric / Circular
A : Algebraic
T : Trigonometric
E : Exponential

Example-77. যোগজ নির্ণয় কর : $\int x^2(\ln x)^2dx$ [BUET'05-06]

Sol^n: $\int x^2(\ln x)^2dx = (\ln x)^2\frac{x^3}{3} - \int\frac{2\ln x}{x}.\frac{x^3}{3}dx = \frac{x^3}{3}(\ln x)^2 - \frac{2}{3}\int \ln x.x^2dx$

$= \frac{x^3}{3}(\ln x)^2 - \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\ln x - \int\frac{1}{x}\frac{x^3}{3}dx\right] = \frac{x^3}{3}(\ln x)^2 - \frac{2x^3}{9}\ln x + \frac{2}{3}.\frac{1}{3}.\frac{x^3}{3}+c$

$= \frac{x^3}{3}(\ln x)^2 - \frac{2}{9}x^3(\ln x) + \frac{2x^3}{27}+c$ (Ans.)

Example-78. মান নির্ণয় কর : $\int x\cot^{-1}x\,dx$ [BUET'09-10]

Sol^n: $\int x\cot^{-1}x\,dx = \cot^{-1}x\int x\,dx - \int\left(\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x)\int x\,dx\right)dx$

$= \frac{x^2}{2}\cot^{-1}x - \int -\frac{1}{1+x^2}.\frac{x^2}{2}dx + c_1 = \frac{x^2\cot^{-1}x}{2} + \frac{1}{2}\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx + c_1$

$= \frac{x^2\cot^{-1}x}{2} + \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2} + c_1 = \frac{x^2\cot^{-1}x}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$

Example-79. যোজিত ফল নির্ণয় কর : $\int \sin(\ln x)\,dx$ [KUET'04-05]

Sol^n: $\int\sin(\ln x)\,dx = \sin(\ln x).\int dx - \int\left(\frac{d}{dx}(\sin(\ln x))\int dx\right)dx$

$= \sin(\ln x)\,x - \int\frac{\cos(\ln x)}{x}.x\,dx = x\sin(\ln x) - [x\cos(\ln x) + \int\sin(\ln x)\,dx]$

$2\int\sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) \therefore \int\sin(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}\{x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)\}+c$

Example-80. যোজিত ফল নির্ণয় কর : $\int e^x\cos x\,dx$ [RUET'04-05, KUET'06-07]

Sol^n: Let, $I = \int e^x\cos x\,dx = e^x\int\cos x\,dx - \int\left(\frac{d}{dx}e^x\int\cos x\,dx\right)dx$

$= e^x\sin x - \int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x - e^x\int\sin x\,dx + \int\left(\frac{d}{dx}e^x\int\sin x\,dx\right)dx$

$= e^x\sin x + e^x\cos x - \int e^x\cos x\,dx \Rightarrow I = \frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+c$ (Ans.)

Example-81. $\int x\tan^{-1}x\,dx = ?$

Sol^n: $\int x\tan^{-1}x\,dx = \tan^{-1}x\int x\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)\int x\,dx\right\} = \frac{1}{2}x^2\tan^{-1}x - \int\frac{1}{2}\frac{x^2}{x^2+1}dx$

$= \frac{1}{2}x^2\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\left(\int dx - \int\frac{dx}{x^2+1}\right) = \frac{1}{2}x^2\tan^{-1}x - \frac{1}{2}(x-\tan^{-1}x)+c = \frac{1}{2}\{(x^2+1)\tan^{-1}x - x\}+c$

Type-31: $\int e^{ax}\sin(bx+c)\,dx$, $\int e^{ax}\cos(bx+c)\,dx$ আকৃতি [a, b, c ধ্রুবক]

➲ **Concept:**

Written: $I = \int e^{ax}\sin(bx+c)\,dx$ ধরি, $\sin(bx+c)$ কে 'u' এবং e^{ax} কে v ধরে অংশায়ন সূত্রের সাহায্যে যোগজীকরণ করতে হবে। [উদা: দ্রষ্টব্য]

MCQ: Formula:

$\int e^{ax}\sin(bx+c)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin(bx+c) - b\cos(bx+c)]+k$

$\int e^{ax}\cos(bx+c)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos(bx+c) + b\sin(bx+c)]+k$ [যেখানে, K = যোগজীকরণ ধ্রুবক]

Example-82. $\int e^{ax}\sin bx\,dx = ?$

Sol^n: Let, $I = \int e^{ax}\sin bx.dx$

$= \sin bx\int e^{ax}dx - \int\frac{d}{dx}(\sin bx)(\int e^{ax}.dx)dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \int b\cos bx.\frac{1}{a}e^{ax}.dx$

$= \frac{1}{a}e^{ax}.\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}.\cos bx.dx = \frac{1}{a}e^{ax}.\sin bx - \frac{b}{a}.\frac{\cos bx}{a}e^{ax} - \frac{b}{a}\int b.\sin bx.\frac{1}{a}e^{ax}.dx$

$= \frac{1}{a}e^{ax}.\sin bx - \frac{b}{a^2}\cos bx.e^{ax} - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}.\sin bx.dx$

$\Rightarrow I\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right) = \frac{1}{a}e^{ax}.\sin bx - \frac{b}{a^2}e^{ax}.\cos bx \Rightarrow I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}.(a\sin bx - b\cos bx)$

- <u>বিকল্প পদ্ধতি:</u>

অনেকক্ষেত্রে জটিল সংখ্যার ব্যবহার যোগজীকরণ সহজ করে দেয়। বিশেষ করে sin x ও cos x কে exponential form- এ নিলে এটি ঘটে।

$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \int e^{ax}\frac{(e^{ibx}-e^{-ibx})}{2i}dx = \frac{1}{2i}\int(e^{ax}.e^{ibx} - e^{ax}.e^{-ibx})dx$

$= \frac{1}{2i}\int\left[e^{x(a+bi)} - e^{x(a-bi)}\right]dx = \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{x(a+bi)}}{a+bi} - \frac{e^{x(a-bi)}}{a-bi}\right)+C = \frac{1}{2i}\left[\frac{(a-bi)e^{x(a+bi)} - (a+bi)e^{x(a-bi)}}{a^2+b^2}\right]+C$

$= \frac{1}{2i(a^2+b^2)}\left[ae^{x(a+bi)} - bi\,e^{x(a+bi)} - ae^{x(a-bi)} - bi\,e^x\right]+C$

$= \frac{1}{2i(a^2+b^2)}\left[ae^{ax}(e^{bi}-e^{-bi}) - bi.e^{ax}(e^{bi}4e^{-bi})\right]+C$

$= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[a\frac{e^{bi}-e^{-bi}}{2i} - \frac{bi(e^{bi}+e^{-bi})}{2i}\right]+C = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)+C$

Example-83. $\int e^{-2x}\cos 4x\,dx$ এর মান? [KUET'13-14]

Sol^n: ধরি, $I = \int e^{-2x}\cos 4x\,dx = \cos 4x\int e^{-2x}dx - \int\left[\frac{d}{dx}(\cos 4x)\int e^{-2x}dx\right]dx$

$= \frac{e^{-2x}\cos 4x}{-2} - \int\left[-4\sin 4x\times\frac{e^{-2x}}{-2}\right]dx = -\frac{e^{-2x}\cos 4x}{2} - 2\int e^{-2x}\sin 4x\,dx$

$= -\frac{e^{-2x}\cos 4x}{-2} - 2\left[\sin 4x\int e^{-2x}dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\sin 4x)\int e^{-2x}dx\right\}dx\right]$

$= -\frac{e^{-2x}\cos 4x}{-2} - 2\sin 4x\frac{e^{-2x}}{-2} + 2\int 4^2\cos 4x\frac{e^{-2x}}{-2}dx = 5I = e^{-2x}\sin 4x - \frac{e^{-2x}\cos 4x}{2}$

$\therefore I = \frac{e^{-2x}\sin 4x}{5} - \frac{e^{-2x}\cos 4x}{10}+c$

Example-84. যোজিত ফল নির্ণয় কর : $\int e^x\cos x\,dx$ [RUET'04-05, KUET'06-07]

Sol^n: Let, $I = \int e^x\cos x\,dx = e^x\int\cos x\,dx - \int\left(\frac{d}{dx}e^x\int\cos x\,dx\right)dx$

$= e^x\sin x - \int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x - e^x\int\sin x\,dx + \int\left(\frac{d}{dx}e^x\int\sin x\,dx\right)dx$

$= e^x\sin x + e^x\cos x - \int e^x\cos x\,dx \Rightarrow I = \frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C.$ (Ans.)

Type-32: অংশক্রমে সমাকলনের ক্ষেত্রে: $\int e^{ax}\{af(x)+f'(x)\}dx$ আকৃতি

Concept: (i) $\int e^{ax}\{af(x)+f'(x)\}dx = e^{ax}f(x)+c$

(ii) $\int e^{x}\{f(x)+f'(x)\}dx = e^{x}f(x)+c$

Example-85. $\int \frac{e^x}{x}\{1+x\ln x\}dx = ?$

Sol^n: $\int \frac{e^x}{x}\{1+x\ln x\}dx$ | ধরি, $f(x)=\ln x \therefore f'(x)=\frac{1}{x}$

$= \int e^x\left\{\frac{1}{x}+\ln x\right\}dx = \int e^x\{f(x)+f'(x)\}dx = e^x f(x)+c = e^x\ln x + c$ (Ans.)

বুয়েট ভর্তি পরীক্ষার জন্য এই Type এর অংক অনেক বেশি গুরত্বপূর্ণ

Example-86. $\int e^x.\sec x.(1+\tan x)dx = ?$ [BUET'04-05, BUTex' 05-06,CUET'11-12]

Sol^n: $\int e^x.\sec x.(1+\tan x)dx = \int e^x.(\sec x+\sec x.\tan x)dx = \int e^x.\{f(x)+f'(x)\}dx$

$= e^x.f(x)+c = e^x.\sec x + c$ [Ans.]

Example-87. $\int e^x\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx = ?$ [BUET'10-11, 12-13]

Sol^n: $\int e^x\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx = \int e^x\left(\frac{1+\sin x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)dx = \int e^x\left(\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}+\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)dx$

$= \int e^x\left(\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}\right)dx = \int e^x\left\{\tan\frac{x}{2}+\frac{d}{dx}\left(\tan\frac{x}{2}\right)\right\}dx = e^x.\tan\frac{x}{2}+c$ [Ans.]

Example-88. x এর সাপেক্ষে নিম্নের ফাংশনটি ইন্টিগ্রেট কর $\frac{e^x(x^2+1)}{(x+1)^2}$ [BUET'02-03,06-07,RUET'10-11]

Sol^n: $\int \frac{e^x(x^2+1)}{(x+1)^2}dx = \int e^x\frac{x^2-1+2}{(x+1)^2}dx = e^x\left\{\frac{x^2-1}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x+1)^2}\right\}dx = \int e^x\left\{\frac{x-1}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}\right\}dx$

$= \int e^x\left\{\frac{(x-1)}{(x+1)}+\frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right\}dx = e^x\frac{(x-1)}{(x+1)}+c$ $[\because \int e^x\{f(x)+f'(x)\}dx = e^x f(x)+c]$ (Ans.)

Example-89. $\int e^x.\frac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2}dx = ?$

Sol^n: $\int e^x.\frac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2}dx = \int e^x\left\{\frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right\}dx = \int e^x\left\{\frac{1}{(1+x^2)}-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right\}dx$

$= \int e^x\{f(x)+f'(x)\}dx = e^x.f(x)+c = e^x.\frac{1}{1+x^2}+c$ [Ans.]

Shortcut for Type-32: $\int e^{ax}x^n dx = e^{ax}\left[\frac{x^n}{a}-\frac{nx^{n-1}}{a^2}+\frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^3}\right.$ ...... যতক্ষণ পর্যন্ত না constant আসে।$\left.\right] + c$

Type-33: আংশিক ভগ্নাংশের সাহায্যে সমাকলন

Concept:

(a) আংশিক ভগ্নাংশের **Thumb rule:** $\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ ভগ্নাংশটি লক্ষ্য কর। ভগ্নাংশটির হরে x এর একঘাত বিশিষ্ট পুনরাবৃত্তিহীন উৎপাদক বিদ্যমান এবং প্রকৃত ভগ্নাংশ। এক্ষেত্রে হরের প্রতিটি উৎপাদক পৃথক পৃথকভাবে শূন্য ধরে x এর যে মান পাওয়া যাবে তা অন্যান্য যে সকল স্থানে x থাকবে তার স্থলে বসাতে হবে। লক্ষ করঃ

$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1^2+1}{(x-1)(1-2)(1-3)}+\frac{2^2+1}{(2-1)(x-2)(2-3)}+\frac{3^2+1}{(3-1)(3-2)(x-3)}$

$= \frac{1}{x-1}-\frac{5}{x-2}+\frac{5}{x-3} \therefore \int\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx = \int\frac{dx}{x-1}-5\int\frac{dx}{x-2}+5\int\frac{dx}{x-3}$

$= \ln(x-1)-5\ln(x-2)+5\ln(x-3)+c$

(b) আবার ভগ্নাংশটি অপ্রকৃত হলে এবং হরের উৎপাদকগুলো x এর একঘাত বিশিষ্ট পুনরাবৃত্তিহীন হলে, ভগ্নাংশটিকে প্রকৃত ভগ্নাংশে পরিণত করতে হবে তারপর (a) এর নিয়মানুসারে আংশিক ভগ্নাংশ করতে হবে।

Example-90. $\int\frac{2x^2+1}{(x-1)(x-2)}dx = ?$

Sol^n: $\frac{2x^2+1}{(x-1)(x-2)} = 2+\frac{2.1^2+1}{(x-1)(1-2)}+\frac{2.2^2+1}{(2-1)(x-2)} = 2+\frac{-3}{x-1}+\frac{9}{x-2}$

$\therefore \int\frac{2x^2+1}{(x-1)(x-2)}dx = \int\left(2+\frac{-3}{x-1}+\frac{9}{x-2}\right)dx = 2x-3\ln|x-1|+9\ln|x-2|+c$ (Ans.)

(c) ভগ্নাংশ প্রকৃত এবং লবে x এর ঘাত জোড় এবং হরে x এর দ্বিঘাত বিশিষ্ট পুনরাবৃত্তিহীন উৎপাদক থাকলে $x^2=u$ ধরে, (a) এর নিয়মানুসারে করতে হবে।

Example-91. মান নির্ণয় কর $\int\frac{dx}{e^{2x}-3e^x}$ [KUET'04-05]

Sol^n: ধরি, $e^x = z \Rightarrow e^x.dx = dz \Rightarrow dx = \frac{dz}{z}$

$\int\frac{dz}{z(z^2-3z)} = \int\frac{dz}{z^2(z-3)}$ এখানে, $\frac{1}{z^2(z-3)} = \frac{A}{z-3}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{z}$; $A=\frac{1}{9}$; $B=-\frac{1}{3}$; $C=-\frac{1}{9}$

$I = \int\left\{\frac{1}{9(z-3)}-\frac{1}{3z^2}-\frac{1}{9z}\right\}dz = \frac{1}{9}\int\frac{dz}{z-3}-\frac{1}{3}\int\frac{dz}{z^2}-\frac{1}{9}\int\frac{dz}{z} = \frac{1}{9}\ln(z-3)-\frac{1}{9}\ln z+\frac{1}{3z}+c$

$= \frac{1}{9}\ln(e^x-3)-\frac{1}{9}\ln(e^x)+\frac{1}{3e^x}+c = \frac{1}{9}\ln(e^x-3)-\frac{x}{9}+\frac{1}{3e^x}+c$

Example-92. যোজিত ফল নির্ণয় কর $\int\frac{\cos x\,dx}{(1+\sin x)(2+\sin x)}$ [CUET'09-10]

Sol^n: $\int\frac{\cos x}{(1+\sin x)(2+\sin x)}dx$ ধরি, $1+\sin x = z$ বা, $\cos x\,dx = dx$

$\therefore \int\frac{dz}{z(z+1)} = \int\frac{dz}{z}-\int\frac{dz}{z+1} = \ln|z|-\ln|z+1|+c = \ln\left|\frac{z}{z+1}\right|+c = \ln\left|\frac{1+\sin x}{1+\sin x+1}\right|+c = \ln\left|\frac{1+\sin x}{2+\sin x}\right|+c$

Example-93. $\frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = ?$

Sol^n: ধরি, $x^2=u$; $\frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{u^2}{(u+a^2)(u+b^2)} = \frac{-a^2}{(u+a^2)(-a^2+b^2)}+\frac{-b^2}{(-b^2+a^2)(u+b^2)} = \frac{a^2}{(a^2-b^2)(u+a^2)}-\frac{b^2}{(a^2-b^2)(u+b^2)}$

Type-34: $\int\frac{1}{x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{m}}}dx$, $m>n$ এবং m. n এর ল.সা.গু p হলে $x^{\frac{1}{p}}=z$ ধরতে হবে

Example-94. $\int\frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{6}}} = ?$

Sol^n: $\int\frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{6}}} = \int\frac{6z^5dz}{z^2-z} = \int\frac{6z^4dz}{z-1} = 6\int\frac{z^4-1}{z-1}dz+6\int\frac{dz}{z-1} = 6\int(z^2+1)(z+1)dz+6\ln|z-1|+c$

$= 6\int(z^3+z^2+z+1)dz+6\ln|z-1|+c = 6\left[\frac{z^4}{4}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^2}{2}+z+\ln|z-1|\right]+c$ where, $z = x^{\frac{1}{6}}$ (Ans.)

Type-35: $\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$, $\int\frac{dx}{(a^2-x^2)^n}$, $\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^n}$ এর ক্ষেত্রে প্রতিস্থাপন পদ্ধতি

Concept: (a^2+x^2) এর ক্ষেত্রে $x = a\tan\theta$ ধরতে হবে। ; (a^2-x^2) এর ক্ষেত্রে $x = a\sin\theta$ ধরতে হবে। ; (x^2-a^2) এর ক্ষেত্রে $x = a\sec\theta$ ধরতে হবে।

Example-95. যোগজ নির্ণয় কর $\int\frac{dx}{(x^2+9)^2}$ [BUET'00-01]

Sol^n: $\int\frac{dx}{(x^2+9)^2}$ | let, $x = 3\tan\theta \Rightarrow dx = 3\sec^2\theta d\theta$

$= \int\frac{3\sec^2\theta d\theta}{81(\sec^2\theta)^2} = \int\frac{d\theta}{27\sec^2\theta} = \frac{1}{54}\int 2\cos^2\theta d\theta = \frac{1}{54}\int(1+\cos 2\theta)d\theta$

$= \frac{1}{54}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)+c = \frac{1}{54}\left(\tan^{-1}\frac{x}{3}+\frac{1}{2}.\frac{2\frac{x}{3}}{1+\frac{x^2}{9}}\right)+c = \frac{1}{54}\left(\tan^{-1}\frac{x}{3}+\frac{3x}{9+x^2}\right)+c$ (Ans.)

Example-96. যোগজ নির্ণয় কর $\int \frac{a\,dx}{\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)^3}$ [RUET'06-07]

Sol^n: $\int \frac{a\,dx}{\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)^3}$; [let, $x = a\tan\theta \quad \therefore dx = a\sec^2\theta\, d\theta$]

$= \int \frac{a^2\sec^2\theta d\theta}{\{a^2(1+\tan^2\theta)\}^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{a^2\sec^2\theta d\theta}{a^3\sec^3\theta} = \frac{1}{a}\int \cos\theta\, d\theta = \frac{1}{a}\sin\theta + c = \frac{1}{a}\sin\left[\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right] + c$

Example-97. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = ?$

Sol^n: ধরি, $x = a\tan\theta \Rightarrow dx = a\sec^2\theta\ d\theta$

$\int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{(a^2+a^2\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{a^3+\sec^3\theta} = \frac{1}{a^2}\int \cos\theta\, d\theta = \frac{1}{a^2}\sin\theta + c = \frac{1}{a^2}\sin\left(\tan^{-1}\frac{x}{a}\right) + c$

একত্রে সব গুরুত্বপূর্ণ সূত্র

01. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
02. $\int \cos x dx = \sin x + c$
03. $\int \tan x dx = \ln(\sec x) + c$
04. $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \ln(\operatorname{cosec} x - \cot x) + c = -\ln(\operatorname{cosec} x + \cot x) + c = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right) + c$
05. $\int \sec x\, dx = \ln(\sec x + \tan x) + c = \ln\left\{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right\} + c = \ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| + c$
06. $\int \cot x\, dx = \ln(\sin x) + c = -\ln(\operatorname{cosec} x) + c$
07. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c\ (n \neq -1)$
08. $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$
09. $\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cot x + c$
10. $\int \sec x \tan x\ dx = \sec x + c$
11. $\int \operatorname{cosec} x\ \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x + c$
12. $\int e^{mx} dx = \frac{1}{m}e^{mx} + c$
13. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
14. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$
15. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$ [$x = a\tan\theta$ ধরি]
16. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$
17. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$ [$x = a\sin\theta$ ধরি]
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left(\sqrt{x^2+a^2}+x\right) + c$ [$x = a\tan\theta$ ধরি]
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left(\sqrt{x^2-a^2}+x\right) + c$ [$x = a\sec\theta$ ধরি]
21. $\int e^{mx}\{mf(x) + f'(x)\}dx = e^{mx}f(x) + c$
22. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$
23. $\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} + c$
24. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

25. $\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + c$ [$x = a\tan\theta$ ধরি]
26. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + c$
27. $\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c$ [$x = a\sec\theta$ ধরি]
28. $\int \ln x\, dx = x\ln x - x + c$
29. $\int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + c$
30. $\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + c$
31. $\int uv dx = u\int v dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(u)\int v dx\right\}dx$

গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাক্টিস প্রবলেম

Written

01. $\int \frac{dx}{2x^2+4x+1} = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}x+\sqrt{2}+1} + c\right]$
02. $\int \frac{dx}{1+x-x^2} = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{\sqrt{5}+2x-1}{\sqrt{5}-2x+1} + c\right]$
03. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x+4\sin x+3} = ?$ [Ans. $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{3+\sin x} + c$] [Tips: $\sin x = z$ ধরে করতে পারো]
04. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+2e^x+5} = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{1}{2}(e^x+1)\right\} + c\right]$
05. $\int \frac{2+3x}{1+x^2}dx = ?$ $\left[\text{Ans. } 2\tan^{-1}x + \frac{3}{2}\ln(1+x^2) + c\right]$
06. $\int \frac{(3x+2)}{5x^2+2x+3}dx = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{3}{10}\ln(5x^2+2x+3) + \frac{7}{5\sqrt{14}}\tan^{-1}\left(\frac{5x+1}{\sqrt{14}}\right) + c\right]$
07. $\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}dx = ?$ $\left[\text{Ans. } x + \ln(x^2-x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c\right]$
08. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}} = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{8x+3}{\sqrt{41}}\right) + c\right]$
09. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = ?$ $\left[\text{Ans. } \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + c\right]$
10. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{5\sin^2 x-12\sin x+4}} = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\left(\sin x - \frac{6}{5}\right) + \sqrt{\left(\sin x-\frac{6}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}\right| + c\right]$
11. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+4x+7}}dx = ?$ [Ans. $3\sqrt{x^2+4x+7} - 2\ln\left|\sqrt{x^2+4x+7} + (x+2)\right| + c$]
12. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{4-9x^2}}dx = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{1}{3}\sin^{-1}\frac{3x}{2} - \frac{2}{9}\sqrt{4-9x^2} + c\right]$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} = ?$ [Ans. $2\ln\left(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}\right) + c$]
14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}} = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{4+x^2}\right) + c\right]$
15. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}} = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x}\right) + c\right]$
16. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}} = ?$ $\left[\text{Ans. } -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left[\left(z+\frac{1}{2}\right) + \sqrt{z^2+z+\frac{1}{2}}\right] + c \text{ where, } z = \frac{1}{x-1}\right]$
17. $\int \frac{4^{1+x}+2^{1-x}}{2^x}dx = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{2^{2+2x}}{\ln 2} + \left(-\frac{1}{2}\right)2^{1-x}\ln 2 + c\right]$
18. $\int \tan^{-1}\left(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)d\theta = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{\pi}{2}\theta - \frac{\theta^2}{4} + c\right]$
19. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3-x^3}}dx = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{2}{3}\sin^{-1}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}} + c\right]$

20. $\int \cos\left\{2\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right\}dx = ?$ $\left[\text{Ans.} -\int x\,dx = \frac{x^2}{2}+c\right]$

21. $\int \frac{\sqrt{\tan x}\,dx}{\sin x \cos x} = ?$ $[\text{Ans. } 2\sqrt{\tan x}+c]$

22. $\int (3^x e^x + \ln x)\,dx = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{3^x e^x}{\ln(3e)} + x\ln x - x + c\right]$

23. $\int \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)dx = ?$ $\left[\text{Ans. } x\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) - \sqrt{x^2+a^2}+c\right]$

24. $\int \frac{dx}{x^3+x^2+x+1} = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c\right]$

25. $\int \frac{\cos^3 x}{e^{3x}}dx = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{e^{-3x}}{8}\left\{\frac{1}{3}(\sin 3x - \cos 3x) + \frac{3}{5}(\sin x - 3\cos x)\right\}+c\right]$

26. $\int \frac{dx}{x^4-x^2} = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{x}+c\right]$

27. $\int \frac{x^4 dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = ?$ $\left[\text{Ans. } x + \frac{b^3}{a^2-b^2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right) - \frac{a^3}{a^2-b^2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c\right]$

28. $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}} = ?$ $\left[\text{Ans. } 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} + 4\ln\left(\sqrt[4]{x}-1\right)+c\right]$

29. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}} = ?$ $\left[\text{Ans. } \sqrt{2}\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+c\right]$

30. $\int \sqrt{\frac{a+x}{x}}dx = ?$ $\left[\text{Ans. } \sqrt{x(x+a)} + \frac{a}{2}\ln\left|x+\frac{a}{2}+\sqrt{x(x+a)}\right|+c\right]$

31. $\int \frac{x}{4-x}dx = ?$ $[\text{Ans. } -x - 4\ln|4-x| + c]$

32. $\int \frac{dx}{x^{\frac{5}{2}}\sqrt{1-x}} = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{-2}{3}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{\frac{1-x}{x}}+c\right]$

33. $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+4}} = ?$ $\left[\text{Ans.} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x\sqrt{3}}+c\right]$

34. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}} = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{2}{3}\left[(x+3)^{\frac{3}{2}} - (x+2)^{\frac{3}{2}}\right]+c\right.$

35. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right)+c\right]$

36. $(2x+1)\sqrt{x^2+x-3}\,dx = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{2}{3}(x^2+x-3)^{\frac{3}{2}}+c\right]$

37. $\int \frac{\cos 2x - \cos 2a}{\cos x - \cos a}dx = ?$ $[\text{Ans. } 2\sin x + 2x\cos a + c]$

38. $\int \sin(12x+12)dx = ?$ $\left[\text{Ans. } -\frac{1}{12}\cos(12x+12)+c\right]$

39. $\int x\cos(12x^2+9)dx = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{1}{24}\sin(12x^2+9)+c\right]$

40. $\int \sin^2(px+3)dx = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2p}\sin(2px+6)\right)+c\right]$

41. $\int \cos^4 x\,dx = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c\right]$

42. $\int \sin^2 x . \cos^5 x\,dx = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + c\right]$

43. $\int \frac{dx}{\sin^{\frac{1}{2}}x . \cos^{\frac{7}{2}}x} = ?$ $\left[\text{Ans. } 2\tan^{\frac{1}{2}}x + \frac{2}{5}\tan^{\frac{5}{2}}x + c\right]$

44. $\int \text{cosec}^6 x\,dx = ?$ $\left[\text{Ans. } -\cot x - \frac{2}{3}\cot^3 x - \frac{1}{5}\cot^5 x + c\right]$

45. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x}dx = ?$ $\left[\text{Ans. } \sec x + 2\cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x + c\right]$

46. $\int \frac{dx}{4-5\sin^2 x} = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\tan x}{2-\tan x}\right|+c\right]$

47. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+c\right]$

48. $\int \frac{dx}{4\cos^2 x + 9\sin^2 x} = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{3\tan x}{2}\right)+c\right]$

49. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}} = ?$ $\left[\text{Ans. } -3\sqrt{2}\ln\left[x^{-\frac{1}{6}} + \sqrt{x^{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}}\right]+c\right]$

50. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}dx = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{1+x^2}+c\right]$

51. $\int \frac{\cos x\,dx}{2\sin x + 3\cos x} = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{3}{13}x + \frac{2}{13}\ln|2\sin x + 3\cos x| + c\right]$

52. $\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}dx = ?$ $[\text{Ans. } x + 2\ln|1+\sin x - \cos x + c]$

53. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx = ?$ $[\text{Ans. } \tan^{-1}(\tan^2 x) + c]$

54. $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan 2x\right)+c\right]$

55. $\int \frac{e^{5x}+e^{3x}}{e^x+e^{-x}}dx = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{1}{4}e^{4x}+c\right]$

56. $\int \frac{\tan^{-1}x}{x^2}dx = ?$ $\left[\text{Ans. } -\frac{1}{x}\tan^{-1}x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x^2+1}\right|+c\right]$

57. $\int \sin\sqrt{x}\,dx = ?$ $[\text{Ans. } 2\sin\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + c]$

58. $\int e^{5x}\left(5\ln x + \frac{1}{x}\right)dx = ?$ $[\text{Ans. } e^{5x}. \ln x + c]$

59. $\int e^{3x}.x^4 dx = ?$ $\left[\text{Ans. } e^{3x}\left(\frac{x^4}{3} - \frac{4x^3}{3^2} + \frac{12x^2}{3^3} - \frac{24x}{3^4} + \frac{24}{3^5}\right)+c\right]$

60. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin x}}dx = ?$ $\left[\text{Ans. } 2\sin\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\times 2\ln\left|\sec\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|+c\right]$

61. $\int \frac{x.\tan^{-1}x\,dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = ?$ $[\text{Ans. } \sin(\tan^{-1}x) - (\tan^{-1}x)\cos(\tan^{-1}x) + c]$

62. $\int \frac{dx}{\cos\alpha + \cos x} = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{1}{\sin\alpha}\ln\left|\sec\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)\right| - \frac{1}{\sin\alpha}\ln\left|\sec\left(\frac{\alpha-x}{2}\right)\right|+c\right]$

63. $\int \frac{\cos 5x + \cos 4x}{1-2\cos 3x}dx = ?$ $\left[\text{Ans. } -\left(\frac{1}{2}\sin 2x + \sin x\right)+c\right]$

64. $\int \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{x+a}}dx = ?$ $\left[\text{Ans. Where, } z = \tan\theta \text{ and } \theta = \tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}\right]$

65. $\int e^x.\left(\frac{2+\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)dx = ?$ $[\text{Ans. } e^x.\tan x + c]$

66. $\int \sqrt{\frac{\sin(x-a)}{\sin(x+a)}}dx = ?$ $[\text{Ans. Where, } z = \cos x \;\&\; u = \sin x]$

67. $\int\left(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}\right)dx = ?$ $[\text{Ans. } \sqrt{2}\sin^{-1}(\sin x - \cos x) + c]$

68. $\int \sqrt{1+\sec x}\,dx = ?$ $\left[\text{Ans. } 2\sin^{-1}\left(\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\right)+c\right]$

69. $\int \frac{dx}{\sin x + \tan x} = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{1}{2}\left\{\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right) - \frac{\tan^2\frac{x}{2}}{2}\right\}+c\right]$

70. $\int \tan x \tan 2x \tan 3x\,dx = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{1}{3}\ln(\sec 3x) - \frac{1}{2}\ln(\sec 2x) - \ln(\sec x) + c\right]$

71. $\int \frac{x^{e-1}+e^{x-1}}{x^e+e^x}dx = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{1}{e}\ln|x^e+e^x|+c\right]$

MCQ

দ্রষ্টব্য: অপশনগুলোতে যোগজীকরণ ধ্রুবক দেওয়া হয়নি।

72. $\int \frac{x\sqrt{4-x^2}}{x^2+4}dx = ?$

(a) $\sqrt{x^2+4} + \ln\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{2-\sqrt{4-x^2}}$ (b) $\sqrt{4-}x^2 - \sqrt{2}\ln\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{4-x^2}}{2\sqrt{2}-\sqrt{4-x^2}}$ (c) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$ (d) None

73. $\int \frac{dx}{x^2+4x+3} = ?$

(a) $\tan^{-1}\frac{x+1}{x+3}$ (b) $\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|$ (c) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|$ (d) $\ln\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)$

74. $\int \frac{1-x}{1+x} dx = ?$
(a) $\ln(1+x)^2 - x$ (b) $\frac{1}{2}\ln(1+x)$ (c) $x - \tan^{-1}\sqrt{x}$ (d) $2\sqrt{1+x} + x$

75. $\int \frac{a^2-x^2}{(a^2+x^2)^2} dx = ?$
(a) $\frac{1}{a^2}\tan^{-1}\frac{x}{a^2}$ (b) $\ln(\sqrt{a^2+x^2}+x) - x$ (c) $\frac{1}{2a^2}\ln\left|\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\right|$ (d) $\frac{x}{a^2+x^2}$

76. যদি $\int \frac{2\cos x - 3\sin x}{\sin x + \cos x} dx = Ax + B\ln|\sin x + \cos x| + c$ হয় তাহলে A এবং B এর মান কত?
(a) $2, -\frac{5}{3}$ (b) $-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}$ (c) $-\frac{2}{3}, \frac{7}{2}$ (d) $\frac{5}{4}, -\frac{3}{2}$

77. $\int \frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}} dx = ?$
(a) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right|$ (b) $2\ln\left|\sqrt{x-\alpha} + \sqrt{x-\beta}\right|$
(c) $2\sin^{-1}\sqrt{\frac{x-\alpha}{x-\beta}}$ (d) $\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}\right)$

78. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = ?$
(a) $2\ln(x+\sqrt{x})$ (b) $\frac{1}{2}\tan^{-1}(x+\sqrt{x})$ (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{x}{2\sqrt{x}}\right)$ (d) $\ln(1+\sqrt{x})^2$

79. $\int \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x}\left(x^{\frac{3}{4}}+1\right)} dx = ?$
(a) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x^{\frac{3}{4}}}{1-x^{\frac{3}{4}}}\right|$ (b) $\ln\left(1+x^{\frac{3}{4}}\right) + \frac{5x}{2}$ (c) $\frac{4}{3}\ln\left(1+x^{\frac{3}{4}}\right)$ (d) $e^{1+x^{\frac{3}{4}}}$

80. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+3}} = ?$
(a) $\ln\left|\frac{\sqrt{x+3}-1}{\sqrt{x+3}+1}\right|$ (b) $2(x^2+2x) + \ln(x+3)$ (c) $5\ln(x+2) + 2\sqrt{x+3}$ (d) None

81. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1-\sin 2x}} dx = ?$
(a) $\sqrt{\sin 2x}$ (b) $\sqrt{\cos 2x}$ (c) $2\sqrt{\sin x - \cos x}$ (d) $\ln(\sin x - \cos x)$

82. $\int \frac{e^x(x-1)}{(x+1)^3} dx = ?$
(a) $e^x\frac{x-1}{x+1}$ (b) $\frac{e^x}{x+1}$ (c) $\frac{e^x}{(x+1)^2}$ (d) None

83. $\int \frac{dx}{(3\sin x + 4\cos x)^2} = ?$
(a) $\cot(x+\alpha), \alpha = \tan^{-1}\frac{4}{3}$ (b) $\text{cosec}(x+\alpha)$ (c) $-\frac{1}{3}\frac{1}{(3\tan x + 4)}$ (d) $\tan(x+\alpha)$

84. $I = \int \cos 2\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = ?$
(a) $\frac{x^2}{2}$ (b) $\frac{1-x}{1+x^2}$ (c) $\frac{-x^2}{2}$ (d) None

85. $\int e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right) dx$ এর মান —
(a) $e^x \ln x + c$ (b) $\frac{e^x}{x} + c$ (c) $\ln x + \frac{1}{x} + c$ (d) কোনটিই নয়

86. $\int \sin^2 4x dx = ?$
(a) $\frac{1}{16}(8x - \sin 8x)$ (b) $\frac{1}{2}(8x - \sin 8x)$ (c) $\frac{1}{2}(x - \sin x)$ (d) শুদ্ধ উত্তর নেই

87. $\int \frac{e^{a\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ এর মান —
(a) $\frac{e^{a\sin^{-1}x}}{a} + c$ (b) $\frac{1}{a}e^{a\sin^{-1}x} + c$ (c) $ae^{\sin^{\sin^{-1}x}} + c$ (d) কোনটিই নয়

88. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$ এর যোজিত ফল —
(a) $\frac{\sin x}{\log x}$ (b) $\cos(\log x)$ (c) $\sin(\ln x)$ (d) $\frac{\cos x}{\ln x}$

89. $\int \frac{(x^2+\sin^2 x)\sec^2 x}{1+x^2} dx = ?$
(a) $\tan^{-1}(\sec x)$ (b) $\ln\frac{1+x^2}{\tan^2 x}$ (c) $\tan x - \tan^{-1}x$ (d) $\sec x + \tan^{-1}x$

90. $\int \frac{x^4 dx}{4+x^{10}} = ? + c$
(a) $\frac{1}{10}\tan^{-1}\left(\frac{x^5}{2}\right)$ (b) $\frac{1}{10}\tan^{-1}\left(\frac{x^{10}}{2}\right)$ (c) $\tan^{-1}x^{10}$ (d) None

91. $\int \frac{x^2+\sin^2 x}{1+x^2}\sec^2 x dx = ? + c$
(a) $\tan^{-1}x$ (b) $\tan x - \tan^{-1}x$ (c) $\tan x + \tan^{-1}x$ (d) None

92. $\int \frac{3x^2 dx}{\sqrt{x^6-1}} = ? + c$
(a) $\ln\left|x^3 + \sqrt{x^6-1}\right|$ (b) $\ln\left|x^6 + \sqrt{x^6-1}\right|$ (c) both a & b (d) None

93. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+2e^x+5} = ? + c$
(a) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{e^x+1}{2}\right)$ (b) $\tan^{-1}|e^x+1|$ (c) $\tan^{-1}e^x$ (d) $\ln\left|\frac{e^x+1}{e^x-1}\right|$

94. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1+x}} = ? + c$
(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+x}}\right|$ (b) $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{2}}$ (c) $\ln\sqrt{1+x}$ (d) None

95. $\int \frac{\tan x}{\sqrt{2}\cot x} dx = ? + c$
(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\tan x - x)$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan x$ (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\tan x + x)$ (d) None

96. $\int \frac{(x^2+2x)}{(x+1)^2} dx = ? + c$
(a) $\frac{x^2+x+1}{x+1}$ (b) $\frac{x^2+1}{x+1}$ (c) $\frac{x^2-x+1}{x+1}$ (d) None

97. $\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = ? + c$
(a) $\frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{b\tan x}{a}\right)$ (b) $\frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{ab}\right)$ (c) both a & b (d) None

98. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+\cos x}} = ? + c$
(a) $-2\sqrt{1+\cos x}$ (b) $-2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$ (c) $\sqrt{1+\cos x}$ (d) both a & b

99. $\int \frac{x^2+\cos^2 x}{x^2+1}\text{cosec}^2 x dx = ? + c$
(a) $-(\cot x + \tan^{-1}x)$ (b) $-\cot x + \tan^{-1}x$ (c) $\cot^{-1}x + \tan x$ (d) None

100. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx = ?$
(a) $\frac{e^{2x}}{(x+1)}$ (b) $\frac{e^x}{(x+1)^2}$ (c) $\frac{x}{x+1} + \frac{e^x}{(x+1)^3}$ (d) None of these

101. $\int \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2} dx = ? + c$
(a) $\frac{e^x}{x+2}$ (b) $\frac{e^x}{x+1}$ (c) $e^x(x+1)$ (d) $e^x(x+2)$

102. $\int xa^{x^2} dx = ? + c$
(a) $\frac{ax^2}{\ln a}$ (b) $\frac{a^{x^2}}{2\ln a}$ (c) $\frac{e^{x^2}}{2\ln a}$ (d) $\frac{e^x}{\ln a}$

103. $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)} dx = ? + c$
(a) $\cot(xe^x)$ (b) $\tan(xe^x)$ (c) $\sec^2(xe^x)$ (d) None

104. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx = ? + c$
(a) $\sin x + \cos x$ (b) $\cos x + \sin x$ (c) $-\cos x - \sin x$ (d) None

প্র্যাকটিস প্রবলেমের সমাধান

Written

01. **Sol^n:** $\int\frac{dx}{2x^2+4x+1}=\int\frac{dx}{2(x^2+2x+1)-1}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x+1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{x+1+\frac{1}{\sqrt{2}}}+c=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}x+\sqrt{2}+1}+c$ (Ans.)

02. **Sol^n:** $\int\frac{dx}{1+x-x^2}=\int\frac{dx}{\frac{5}{4}-\left(x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)}=\int\frac{dx}{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{\sqrt{5}+2x-1}{\sqrt{5}-2x+1}+c$ (Ans.)

03. **Sol^n:** $\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^2x+4\sin x+3}=\int\frac{dz}{z^2+4z+3}$ | ধরি, $z=\sin x\Rightarrow dz=\cos x\,dx$
$=\int\frac{dz}{(z+2)^2-1}=\frac{1}{2}\ln\frac{z+2-1}{z+2+1}+c=\frac{1}{2}\ln\frac{z+1}{z+3}+c=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{3+\sin x}+c$ (Ans.)

04. **Sol^n:** $\int\frac{e^xdx}{e^{2x}+2e^x+5}=\int\frac{dz}{z^2+2z+5}=\int\frac{dz}{(z+1)^2+4}$ | ধরি, $e^x=z\Rightarrow e^xdx=dz$
$=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{z+1}{2}+c=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{1}{2}(e^x+1)\right\}+c$ (Ans.)

05. **Sol^n:** $\int\frac{2+3x}{1+x^2}dx=\int\frac{\frac{3}{2}\frac{d}{dx}(1+x^2)+2}{1+x^2}dx=\frac{3}{2}\int\frac{\frac{d}{dx}(1+x^2)}{1+x^2}dx+2\int\frac{dx}{1+x^2}=2\tan^{-1}x+\frac{3}{2}\ln(1+x^2)+c$ (Ans.)

06. **Sol^n:** $\int\frac{(3x+2)}{5x^2+2x+3}dx=\int\frac{\frac{3}{10}\frac{d}{dx}(5x^2+2x+3)+2-\frac{3}{5}}{5x^2+2x+3}dx=\frac{3}{10}\int\frac{\frac{d}{dx}(5x^2+2x+3)}{5x^2+2x+3}dx+\frac{7}{5}\int\frac{dx}{5\left(x^2+2\cdot\frac{1}{5}\cdot x+\frac{1}{25}\right)+\frac{14}{5}}$
$=\frac{3}{10}\ln(5x^2+2x+3)+\frac{7}{5\sqrt{14}}\tan^{-1}\left(\frac{5x+1}{\sqrt{14}}\right)+c$ (Ans.)

07. **Sol^n:** $\int\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}dx=\int\frac{(x^2-x+1)+2x}{x^2-x+1}dx=x+\int\frac{\frac{d}{dx}(x^2-x+1)+1}{x^2-x+1}dx$
$=x+\ln(x^2-x+1)+\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=x+\ln(x^2-x+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+c$ (Ans.)

08. **Sol^n:** $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}=\int\frac{dx}{\left\{\frac{41}{16}-4\left(x^2+2x\frac{3}{8}x\,x+\frac{9}{64}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left\{\frac{41}{64}-\left(x+\frac{3}{8}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{x+\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{41}}{8}}+c=\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{8x+3}{\sqrt{41}}\right)+c$ (Ans.)

09. **Sol^n:** $\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=\int\frac{dx}{(a^2-(x^2-2ax+a^2))^{\frac{1}{2}}}=\int\frac{dx}{(a^2-(x-a)^2)^{\frac{1}{2}}}=\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right)+c$ (Ans.)

10. **Sol^n:** $\int\frac{\cos x dx}{\sqrt{5\sin^2x-12\sin x+4}}=\int\frac{dz}{(5z^2-12z+4)^{\frac{1}{2}}}$ | ধরি, $z=\sin x\Rightarrow dz=\cos x\,dx$
$=\int\frac{dz}{\left\{5\left(z^2-\frac{12}{5}z+\frac{36}{25}\right)-\frac{16}{5}\right\}^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dz}{\left\{\left(z-\frac{6}{5}\right)^2-\frac{16}{25}\right\}^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\left(z-\frac{6}{5}\right)+\sqrt{\left(z-\frac{6}{5}\right)^2-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\right|+c$
$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\left(\sin x-\frac{6}{5}\right)+\sqrt{\left(\sin x-\frac{6}{5}\right)^2-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\right|+c$ (Ans.)

11. **Sol^n:** $\int\frac{3x+4}{\sqrt{x^2+4x+7}}dx=\int\frac{\frac{3}{2}\frac{d}{dx}(x^2+4x+7)-2}{(x^2+4x+7)^{\frac{1}{2}}}dx=\frac{3}{2}\int\frac{\frac{d}{dx}(x^2+4x+7)}{(x^2+4x+7)^{\frac{1}{2}}}dx-2\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+3}}$
$=\frac{3}{2}\times2\sqrt{x^2+4x+7}-2\ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+7}\right)+c$
$=3\sqrt{x^2+4x+7}-2\ln\left|\sqrt{x^2+4x+7}+(x+2)\right|+c$ (Ans.)

12. **Sol^n:** $\int\frac{2x+1}{\sqrt{4-9x^2}}dx=\int\frac{-\frac{1}{9}\frac{d}{dx}(4-9x^2)+1}{\sqrt{4-9x^2}}dx=-\frac{1}{9}\int\frac{\frac{d}{dx}(4-9x^2)}{\sqrt{4-9x^2}}dx+\int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}=\frac{1}{3}\sin^{-1}\frac{3x}{2}-\frac{2}{9}\sqrt{4-9x^2}+c$ (Ans.)

13. **Sol^n:** $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$ let, $\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}=z\Rightarrow\frac{dx}{2}\left(\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}\sqrt{x-b}}\right)=dz$
$\Rightarrow\frac{dx}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}=2\frac{dz}{z}\Rightarrow\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}=2\int\frac{dz}{z}=2\ln z+C=2\ln\left|\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}\right|+c$

14. **Sol^n:** $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$ | ধরি, $x=\frac{1}{z}\Rightarrow dx=-\frac{1}{z^2}dz$
$=\int\frac{-\frac{1}{z^2}dz}{\frac{1}{z}\sqrt{\frac{1}{z^2}+4}}=\int\frac{dz}{\sqrt{1+4z^2}}=\frac{-1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{4}+z^2}}=-\frac{1}{2}\ln\left(z+\sqrt{\frac{1}{4}+z^2}\right)+c=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{x^2}}\right)+c$
$=-\frac{1}{2}\ln\left[\frac{1}{2x}+\left(2+\sqrt{x^2+4}\right)\right]+c=\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{4+x^2}\right)+c$ (Ans.)

15. **Sol^n:** $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$ | ধরি, $1+x=\frac{1}{z}\Rightarrow dx=-\frac{1}{z^2}dz$ এবং $x=\frac{1}{z}-1$
$=\int\frac{-\frac{1}{z^2}dz}{\frac{1}{z}\sqrt{1+2\left(\frac{1}{z}-1\right)-\left(\frac{1}{z}-1\right)^2}}=\int\frac{-dz}{\sqrt{z^2+2(z-z^2)-(1-z)^2}}=\int\frac{-dz}{\sqrt{-2z^2+4z-1}}=-\int\frac{dz}{\sqrt{1-2(z-1)^2}}$
$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dz}{\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-(z-1)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\frac{z-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}+c=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{\frac{1}{1+x}-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)+c=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x}\right)+c$ (Ans)

16. **Sol^n:** $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}$ | ধরি, $x-1=\frac{1}{z}\Rightarrow dx=-\frac{1}{z^2}dz$ এবং $x=\frac{1}{z}+1$
$=\int\frac{-\frac{1}{z^2}dz}{\frac{1}{z}\sqrt{\left(\frac{1}{z}+1\right)^2+1}}=-\int\frac{dz}{\sqrt{(1+z)^2+z^2}}=-\int\frac{dz}{\sqrt{2z^2+2z+1}}=-\int\frac{dz}{\sqrt{2}\sqrt{z^2+z+\frac{1}{2}}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}\int\frac{dz}{\sqrt{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}}$
$=\frac{-1}{\sqrt{2}}\int\frac{dz}{\sqrt{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}}==\frac{-1}{\sqrt{2}}\ln\left[z+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\right]+c$
$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left[\left(z+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{z^2+z+\frac{1}{2}}\right]+c$ where, $z=\frac{1}{x-1}$ (Ans.)

17. **Sol^n:** $\int\frac{4^{1+x}+2^{1-x}}{2^x}dx=\int\frac{2^{2+2x}+2^{1-x}}{2^x}dx=\int2^{2+2x}dx+\int2^{1-2x}dx=\frac{2^{2+2x}}{\ln2}+\left(-\frac{1}{2}\right)2^{1-x}\ln2+c$ [Ans.]

18. **Sol^n:** $\int\tan^{-1}\left(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)d\theta=\int\tan^{-1}\left(\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\right)d\theta=\int\tan^{-1}\left(\cot\frac{\theta}{2}\right)d\theta$
$=\int\tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)d\theta=\int\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)d\theta=\frac{\pi}{2}\theta-\frac{\theta^2}{4}+c$ [Ans.]

19. **Sol^n:** $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3-x^3}}dx=\frac{2}{3}\int\frac{dz}{\sqrt{\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^2-z^2}}$ | Let, $x^{\frac{3}{2}}=z\Rightarrow\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}dx=dz$
$=\frac{2}{3}\sin^{-1}\frac{z}{a^{\frac{3}{2}}}+c=\frac{2}{3}\sin^{-1}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}+c$ [Ans.]

20. **Sol^n:** $\int\cos\left\{2\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right\}dx=\int\cos\left\{2\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x}\right\}dx=\int\cos\left\{\cos^{-1}\left(\frac{1-\frac{1+x}{1-x}}{1+\frac{1+x}{1-x}}\right)\right\}dx$
$=\int\cos\left\{\cos^{-1}\left(\frac{1-x-1-x}{1-x+1+x}\right)\right\}dx=\int\cos\{\cos^{-1}(-x)\}dx=-\int x\,dx=\frac{x^e}{2}+c$ [Ans]

21. **Sol^n:** $\int\frac{\sqrt{\tan x}\,dx}{\sin x\cos x}=\int\frac{dx}{(\sin x)^{\frac{1}{2}}(\cos x)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{\sec^2x\,dx}{(\tan x)^{\frac{1}{2}}}=2\sqrt{\tan x}+c$ (Ans.)

22. **Ans.** $\frac{3^xe^x}{\ln(3e)}+x\ln x-x+c$

23. **Sol^n:** $\int\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)dx=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)-\int\frac{x\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)}{x+\sqrt{x^2+a^2}}dx$ [Integration by parts]
$=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)-\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}}=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)-\sqrt{x^2+a^2}+c$ (Ans.)

24. **Sol^n:** $\int\frac{dx}{x^3+x^2+x+1}=\int\frac{dx}{(x^2+1)(x+1)}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-1}{x^2+1}\right)dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$
$=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln|x^2+1|+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+c$ (Ans.)

25. **Sol^n:** $\int\frac{\cos^3x}{e^{3x}}dx=\frac{1}{4}\int e^{-3x}(3\cos x+\cos3x)dx=\frac{3}{4}\int e^{-3x}\cos x\,dx+\frac{1}{4}\int e^{-3x}\cos3x\,dx$
$=\frac{3}{4}\cdot\frac{e^{-3x}}{10}(-3\cos x+\sin x)+\frac{e^{-3x}}{4.18}(-3\cos3x+3\sin3x)$
$=\frac{e^{-3x}}{8}\left\{\frac{1}{3}(\sin3x-\cos3x)+\frac{3}{5}(\sin x-3\cos x)\right\}+c$ (Ans.)

26. **Sol^n:** $\int\frac{dx}{x^4-x^2}=\int\frac{dx}{x^2(x^2-1)}=\int\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{1}{x}+c$ (Ans.)

27. **Sol^n:** $\int\frac{x^4dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=\int\left\{\frac{x^2}{b^2(x^2+a^2)}-\frac{x^2}{a^2(x^2+b^2)}\right\}\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}dx=\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}\int\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}-\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2}+\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{x^2+b^2}\right)dx$
$=x+\frac{b^3}{a^2-b^2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)-\frac{a^3}{a^2-b^2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$ (Ans.)

28. **Solⁿ:** $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}} = 4\int \frac{z^3 dz}{z^2-z} = 4\int \frac{z^2 dz}{z-1} = 4\left\{\int (z+1)dz + \int \frac{dz}{z-1}\right\}$ | ধরি, $x = z^4 \Rightarrow dx = 4z^3 dz$

$= 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} + 4\ln(\sqrt[4]{x}-1) + c$ (Ans.)

29. **Solⁿ:** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}} = ?$ | ধরি, $x - 2 = z^2 \Rightarrow dx = 2zdx$

$= \int \frac{2zdz}{(z^2+2)z} = 2\int \frac{dz}{z^2+2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{z}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-2}{2}} + c$ (Ans.)

30. **Solⁿ:** $\int \sqrt{\frac{a+x}{x}}dx = \int \frac{(a+x)dx}{\sqrt{x(a+x)}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+a}{\sqrt{x^2+ax}}dx + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+ax}} = \frac{1}{2}\times 2\sqrt{x^2+ax} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{\left\{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}\right\}^{\frac{1}{2}}}$

$= \sqrt{x(a+x)} + \frac{a}{2}\ln\left|x + \frac{a}{2} + \sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}}\right| + c = \sqrt{x(a+x)} + \frac{a}{2}\ln\left|x + \frac{a}{2} + \sqrt{x^2+ax}\right| + c$

$= \sqrt{x(a+x)} + \frac{a}{2}\ln\left|x + \frac{a}{2} + \sqrt{x(x+a)}\right| + c$ (Ans.)

31. **Solⁿ:** $\int \frac{x}{4-x}dx$ | ধরি, $4 - x = z \Rightarrow dx = -dz$

$= \int \frac{-4+z}{z}dx = \int\left(\frac{-4}{z}+1\right)dx = -4\ln z + z = -4\ln(4-x) + (4-x) + c' = -x - 4\ln|4-x| + c$ (Ans)

32. **Solⁿ:** $\int \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-x}}$ | ধরি, $1 - x = zx \Rightarrow (z+1)x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{z+1} \Rightarrow dx = \frac{-dz}{(z+1)^2}$

$= \int \frac{-dx}{x^{\frac{3}{2}}(z+1)^2 z^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{-dx}{x^3 z^{\frac{1}{2}}(z+1)^2} = \int \frac{-dx}{\left(\frac{1}{z+1}\right)^3 x z^{\frac{1}{2}}(z+1)^2}$

$= -\int \frac{(z+1)dz}{z^{\frac{1}{2}}} = -\int\left(z^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{-1}{2}}\right)dz = -\left(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}} + 2z^{\frac{1}{2}}\right) + C = \frac{-2}{3}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{\frac{1-x}{x}} + c$ (Ans.)

33. **Solⁿ:** $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{-4zdz}{\left(1+\frac{4}{z^2-1}\right)xzx(z^2-1)^2}$

$= -4\int \frac{dz}{x^2(z^2-1)(z^2+3)} = -\int \frac{dz}{z^2+3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{z}{\sqrt{3}} + c$, where, $z = \sqrt{\frac{4}{x^2}+1}$ (Ans.)

ধরি, $x^2 + 4 = x^2z^2 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{z^2-1} \Rightarrow 2xdx = \frac{4.2zdz}{(z^2-1)^2} \Rightarrow xdx = \frac{4zdz}{(z^2-1)^2} \Rightarrow dx = \frac{4zdz}{x(z^2-1)^2}$

34. **Solⁿ:** $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}} = \int \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}}{x+2-x-3}dx = -\int\sqrt{x+2}\,dx + \int\sqrt{x-3}\,dx = \frac{2}{3}\left[(x-3)^{\frac{3}{2}} - (x+2)^{\frac{3}{2}}\right] + c$

35. **Solⁿ:** $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int \frac{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)dx}{x^2+\frac{1}{x^2}} = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x^2}{\sqrt{2}x} + c$

36. **Solⁿ:** $(2x+1)\sqrt{x^2+x-3}dx$ | ধরি, $x^2 + x - 3 = z \Rightarrow dz = (2x+1)dx$

$= \int z^{\frac{1}{2}}dz = \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(x^2+x-3)^{\frac{3}{2}} + c$

37. **Solⁿ:** $\int \frac{\cos 2x - \cos 2a}{\cos x - \cos a}dx = \int \frac{2(\cos^2 x - \cos^2 a)}{\cos x - \cos a}dx = 2\int \frac{(\cos x + \cos a)(\cos x - \cos a)}{\cos x - \cos a}dx$

$= 2\int \cos x\,dx + 2\cos a\int dx = 2\sin x + 2(\cos a)x + c = 2\sin x + 2x\cos a + c$ [Ans.]

38. **Ans.** $-\frac{1}{12}\cos(12x+12) + c$

39. **Solⁿ:** $\int x\cos(12x^2+9)dx$ | ধরি, $12x^2 + 9 = z \Rightarrow 24xdx = dz \Rightarrow xdx = \frac{dz}{24}$

$= \frac{1}{24}\int \cos z dz = \frac{\sin z}{24} + c = \frac{1}{24}\sin(12x^2+9) + c$ (Ans.)

40. **Solⁿ:** $\frac{1}{2}\int\{1 - \cos(2px+6)\}dx = \frac{1}{2}[x - \frac{1}{2p}\sin(2px+6)] + c$

41. **Solⁿ:** $\int \cos^4 x\,dx = \int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx = \frac{1}{4}(x + \sin 2x) + \frac{1}{8}\int(1+\cos 4x)\,dx$

$= \frac{1}{4}(x+\sin 2x) + \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) = \frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$ (Ans.)

42. **Solⁿ:** $\int \sin^2 x.\cos^5 x\,dx = \int z^2(1-z^2)^2 dz$ | ধরি, $\sin x = z \Rightarrow \cos x\,dx = dz$

$= \int z^2(1 - 2z^2 + z^4)dz = \int(z^2 - 2z^4 + z^6)\,dz = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + c$ (Ans.)

43. **Solⁿ:** $\int \frac{dx}{\sin^{\frac{1}{2}}x.\cos^{\frac{7}{2}}x} = \int \frac{\sec^4 x\,dx}{\sin^{\frac{1}{2}}x.\cos^{\frac{7}{2}}x.\sec^4 x}$ | ধরি, $\tan x = z \Rightarrow dz = \sec^2 x\,dx$

$= \int \frac{\sec^4 x\,dx}{\tan^{\frac{1}{2}}x} = \int \frac{\sec^2 x(1+\tan^2 x)dx}{\tan^{\frac{1}{2}}x} = \int \frac{(1+z^2)dz}{z^{\frac{1}{2}}} = \int\left(z^{-\frac{1}{2}} + z^{\frac{3}{2}}\right) = 2\tan^{\frac{1}{2}}x + \frac{2}{5}\tan^{\frac{5}{2}}x + c$ (Ans.)

44. **Solⁿ:** $\int \mathrm{cosec}^6 x dx = \int(1+\cot^2 x)^2.\mathrm{cosec}^2 x dx$ | ধরি, $\cot x = z \Rightarrow -\mathrm{cosec}^2 x dx = dz$

$= -\int(1+z^2)^2 dz = -\int(1 + 2z^2 + z^4)dz = -\cot x - \frac{2}{3}\cot^3 x - \frac{1}{5}\cot^5 x + c$ (Ans.)

45. **Solⁿ:** $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^2 x}.\sin x\,dx$ | ধরি, $\cos x = z \Rightarrow dz = -\sin x\,dx$

$= -\int \frac{(1-z^2)^2}{z^2}dx = -\int\left(\frac{1}{z^2} - 2 + z^2\right)dx = \frac{1}{z} + 2z - \frac{1}{3}z^3 + c$ where, $z = \cos x$ (Ans.)

46. **Solⁿ:** $\int \frac{dx}{4 - 5\sin^2 x} = \int \frac{\sec^2 x dx}{4\sec^2 x - 5\tan^2 x}$ | ধরি, $\tan x = z \Rightarrow dz = \sec^2 x\,dx = dz$

$= \int \frac{dz}{4(1+z^2) - 5z^2} = \int \frac{dz}{4-z^2} = \frac{1}{2.2}\ln\left|\frac{2+z}{2-z}\right| + c = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\tan x}{2-\tan x}\right| + c$ (Ans.)

47. **Solⁿ:** $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int \frac{\sec^2 x\,dx}{\tan^2 x + 2} = \int \frac{d(\tan x)}{\tan^2 x + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + c$

48. **Solⁿ:** $\int \frac{dx}{4\cos^2 x + 9\sin^2 x} = \int \frac{\sec^2 x dx}{4 + 9\tan^2 x}$ | ধরি, $\tan x = z \Rightarrow dz = \sec^2 x\,dx$

$= \int \frac{dz}{4+9z^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dz}{z^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{9}.\frac{3}{2}\tan^{-1}\frac{z}{\frac{2}{3}} + c = \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{3\tan x}{2}\right) + c$ (Ans.)

49. **Solⁿ:** $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}}$ | ধরি, $x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{z^2} \Rightarrow \frac{1}{3}\ln x = -2\ln z \Rightarrow \frac{1}{3}.\frac{1}{x}dx = -\frac{2}{z}dz \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{6}{z}dz$

$= -6\int \frac{dx}{z\sqrt{2+\frac{1}{z^2}}} = -6\int \frac{dz}{\sqrt{2z^2+1}} = \frac{-6}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+\frac{1}{2}}} = \frac{-6}{\sqrt{2}}\ln\left[z + \sqrt{z^2+\frac{1}{2}}\right] + c = -3\sqrt{2}\ln\left[x^{-\frac{1}{6}} + \sqrt{x^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}}\right] + c$ (Ans.)

50. **Solⁿ:** $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}dx$ | ধরি, $1 + x^2 = z^2 \Rightarrow x^2 = z^2 - 1 \Rightarrow 2xdx = 2zdz \Rightarrow xdx = zdz$ এবং $x^4.x = (z^2-1)^2 x$

$= \int z^4 - 2z^2 + 1)\,dx = \frac{1}{5}z^5 - \frac{2}{3}z^3 + z + c = \frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{1+x^2} + c$ (Ans.)

51. **Solⁿ:** $\int \frac{\cos x\,dx}{2\sin x + 3\cos x} = \frac{3}{13}\int \frac{(2\sin x + 3\cos x) - \frac{2}{3}(3\sin x - 2\cos x)}{2\sin x + 3\cos x}dx = \frac{3}{13}\left[x - \frac{2}{3}\int \frac{(3\sin x - 2\cos x)dx}{2\sin x + 3\cos x}\right]$

$= \frac{3}{13}\left[x - \frac{2}{3}\ln|2\sin x + 3\cos x|\right] + c$ (Ans.)

52. **Solⁿ:** $\int \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 + \sin x - \cos x}dx = \int \frac{(1+\sin x - \cos x) - 2(\sin x - \cos x)}{1 + \sin x - \cos x}dx = x + 2\int \frac{(\cos x - \sin x)dx}{1 + \sin x - \cos x}$

$= x + 2\ln|1 + \sin x - \cos x + c$

53. **Ans.** $\tan^{-1}(\tan^2 x) + c$

54. **Solⁿ:** $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{\sin^4 x dx}{1 + \tan^4 x} = \int \frac{(1+z^2)dx}{1+z^4}$ $[z = \tan x]$

$= \int \frac{\left(1+\frac{1}{z^2}\right)dz}{z^2 + \frac{1}{z^2}} = \int \frac{d\left(z-\frac{1}{z}\right)}{\left(z-\frac{1}{z}\right)^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan 2x\right) + c$ (Ans.)

55. **Solⁿ:** $\int \frac{e^{5x} + e^{3x}}{e^x + e^{-x}}dx = \int e^{4x}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)dx = \frac{1}{4}e^{4x} + c$ (Ans.)

56. **Solⁿ:** $\int \frac{\tan^{-1}x}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\tan^{-1}x + \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = -\frac{1}{x}\tan^{-1}x + \int \frac{x\,dx}{x^2(1+x^2)}$

ধরি, $x^2 = z \Rightarrow dz = 2xdx$

$\therefore -\frac{1}{x}\tan^{-1}x + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z(z+1)} = -\frac{1}{x}\tan^{-1}x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z}{z+1}\right| + c = -\frac{1}{x}\tan^{-1}x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x^2+1}\right| + c$ (Ans.)

57. **Solⁿ:** $\int \sin\sqrt{x}\,dx = 2\int z\sin z dz$ | ধরি, $z^2 = x \Rightarrow 2zdz = dx$

$= 2(-z\cos z + \int \cos z dz) = 2(-z\cos z + \sin z) + c = 2\sin\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + c$ (Ans.)

58. **Ans.** $e^{5x}.\ln x + c$

59. **Ans.** $e^{3x}\left(\frac{x^4}{3}-\frac{4x^3}{3^2}+\frac{12x^2}{3^3}-\frac{24x}{3^4}+\frac{24}{3^5}\right)+c$

60. **Sol^n:** $\int\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin x}}dx=\int\frac{1+\sin x}{\sqrt{1+\sin x}}dx-\int\frac{dx}{\sqrt{1+\sin x}}=\int\sqrt{1+\sin x}\,dx-\int\frac{dx}{\sqrt{1+\sin x}}$

$=\int\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}dx-\int\frac{dx}{\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}}$

$=\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)dx-\int\frac{dx}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}=\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)dx-\int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}dx}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{2}}$

$=2\sin\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{x}{2}}+c=2\sin\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+c$

$=2\sin\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\sec\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)dx+c$

$=2\sin\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2\ln\left|\sec\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|+c$ [Ans]

61. **Sol^n:** $\int\frac{x\tan^{-1}x\,dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{x\tan^{-1}x\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{z\tan z\,dz}{\sec z}$

| Let, $\tan^{-1}x=z$
| $\frac{dx}{1+x^2}=dz$
| $x=\tan z=\sqrt{1+x^2}=\sec z$

$=\int z\sin z\,dz=z\int\sin z-\int\left\{\frac{d}{dz}(z)\int\sin z\,dz\right\}dz$

$=-z.\cos z+\int\cos z\,dz+c=-z\cos z+\sin z+c$

$=\sin(\tan^{-1}x)-(\tan^{-1}x)\cos(\tan^{-1}x)+c$

62. **Sol^n:** $\int\frac{dx}{\cos\alpha+\cos x}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos\frac{\alpha+x}{2}\cos\frac{\alpha-x}{2}}=\frac{1}{2\sin\alpha}\int\frac{\sin\left(\frac{\alpha+x}{2}+\frac{\alpha-x}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha+x}{2}\cos\frac{\alpha-x}{2}}dx=\frac{1}{2\sin\alpha}\int\frac{\sin\frac{\alpha+x}{2}\cos\frac{\alpha-x}{2}+\sin\frac{\alpha-x}{2}\cos\frac{\alpha+x}{2}}{\cos\frac{\alpha+x}{2}\cos\frac{\alpha-x}{2}}dx$

$=\frac{1}{2\sin\alpha}\int\tan\frac{\alpha+x}{2}dx+\frac{1}{2\sin\alpha}\int\tan\frac{\alpha-x}{2}dx=\frac{1}{\sin\alpha}\ln\left|\sec\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)\right|-\frac{1}{\sin\alpha}\ln\left|\sec\left(\frac{\alpha-x}{2}\right)\right|+c.$

63. **Sol^n:** $\int\frac{\cos 5x+\cos 4x}{1-2\cos 3x}dx=\int\frac{2\cos\frac{9x}{2}\cos\frac{x}{2}dx}{1-2\left[2\cos^2\frac{3x}{2}-1\right]}=\int\frac{2\left[4\cos^3\frac{3x}{2}-3\cos\frac{3x}{2}\right]\cos\frac{x}{2}}{3-4\cos^2\frac{3x}{2}}dx$

$=\int\frac{-2\cos\frac{3x}{2}\left[3-4\cos^2\frac{3x}{2}\right].\cos\frac{x}{2}dx}{\left[3-4\cos^2\frac{3x}{2}\right]}=-\int 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}dx=-\int(\cos 2x+\cos x)\,dx=-\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\sin x\right)+c$ [Ans.]

64. **Sol^n:** Let, $x=a\tan^2\theta$

$dx=2a.\tan\theta.\sec^2\theta\,d\theta$

$\int\sin^{-1}\sqrt{\frac{a\tan^2\theta}{a\tan^2\theta+a}}.2a\tan\theta\sec^2\theta\,d\theta$

$=\int\sin^{-1}\frac{\tan\theta}{\sec\theta}2a\tan\theta\sec^2\theta\,d\theta=\int\sin^{-1}\sin\theta.2a\tan\theta\sec^2\theta\,d\theta=\int\theta\,2a\tan\theta\sec^2\theta\,d\theta$

Again let, $\tan\theta=z\ \therefore\sec^2\theta\,d\theta=dz$ $=2a\int z\tan^{-1}z\,dz=2a\left[\tan^{-1}z\int z\,dz-\int\frac{z^2}{2(1+z^2)}dz\right]$

$=2a\left[\frac{z^2}{2}\tan^{-1}z-\frac{1}{2}\int\frac{(z^2+1)-1}{(z^2+1)}dz+c\right.=2a\left[\frac{z^2}{2}\tan^{-1}z-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\tan^{-1}z\right]+c$

Where, $z=\tan\theta$ and $\theta=\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}$ [Ans.]

65. **Sol^n:** $\int e^x.\left(\frac{2+\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)dx=\int e^x.2\frac{(1+\sin x\cos x)}{2\cos^2 x}dx=\int e^x.(\sec^2 x+\tan x)dx$

$=\int e^x\left\{\tan x+\frac{d}{dx}(\tan x)\right\}dx=e^x.\tan x+c$ [Ans.]

66. **Sol^n:** $\int\sqrt{\frac{\sin(x-a)}{\sin(x+a)}}dx=\int\frac{\sin(x-a)dx}{\sqrt{\sin(x-a)\sin(x+a)}}=\sqrt{2}\int\frac{\sin x\cos a-\cos x\sin a}{\sqrt{\cos 2a-\cos 2x}}dx$

$=\sqrt{2}\cos a\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2\cos^2 a-2\cos^2 x}}-\sqrt{2}\sin a\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2\sin^2 x-2\sin^2 a}}$

$=-\cos a\int\frac{dz}{\sqrt{(\cos^2 a)^2-z^2}}-\sin a\int\frac{du}{\sqrt{u^2-(\sin a)^2}}$

$=-\cos a\sin^{-1}\frac{z}{\cos a}-\sin a\ln\left(\sqrt{u^2-\sin^2 a}+u\right)+c$

Where, $z=\cos x$ & $u=\sin x$ [Ans.]

67. **Sol^n:** $\int\left(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}\right)dx=\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\cos x\sin x}}dx$

| Now, let, $\sin x-\cos x=z$
| $\Rightarrow(\sin x+\cos x)dx=dz$

$=\sqrt{2}\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2\sin x\cos x}}dx=\sqrt{2}\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1-(\sin x-\cos x)^2}}dx$

$=\sqrt{2}\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\sqrt{2}\sin^{-1}z+c=\sqrt{2}\sin^{-1}(\sin x-\cos x)+c$ [Ans.]

68. **Sol^n:** $\int\sqrt{1+\sec x}\,dx=\int\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{\cos x}}dx$ | Let, $\sin\frac{x}{2}=z=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx=dz$

$=\int\frac{\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}dx}{\sqrt{1-2\sin^2\frac{x}{2}}}=2\sqrt{2}\int\frac{dz}{\sqrt{1-2z^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}z}{1}+c=2\sin^{-1}\sqrt{2}z+c=2\sin^{-1}\left(\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\right)+c$ [Ans.]

69. **Sol^n:** $\int\frac{dx}{\sin x+\tan x}=\int\frac{dx}{\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}+\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}}$ | Let, $\tan\frac{x}{2}=z\Rightarrow\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx=dz$

$=\int\frac{dx}{\frac{2\tan\frac{x}{2}-2\tan^3\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}+2\tan^3\frac{x}{2}}{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)}}=\int\frac{\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)\sec^2\frac{x}{2}dx}{4\tan\frac{x}{2}}$

$=2\int\frac{(1-z^2)dz}{4z}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{z}-z\right)dz=\frac{1}{2}\left(\ln z-\frac{z^2}{2}\right)+c=\frac{1}{2}\left\{\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)-\frac{\tan^2\frac{x}{2}}{2}\right\}+c$ [Ans.]

70. **Sol^n:** $\int\tan x\tan 2x\tan 3x\,dx$

| $\tan(x+2x)=\tan 3x$
| $\Rightarrow\frac{\tan x+\tan 2x}{1-\tan x\tan 2x}=\tan 3x$
| $\Rightarrow\tan x\tan 2x\tan 3x=\tan 3x-\tan 2x-\tan x$

$=\int(\tan 3x-\tan 2x-\tan x)dx$

$=\frac{1}{3}\ln(\sec 3x)-\frac{1}{2}\ln(\sec 2x)-\ln(\sec x)+c$ [Ans.]

71. **Sol^n:** $\int\frac{x^{e-1}+e^{x-1}}{x^e+e^x}dx=\frac{1}{e}\int\frac{ex^{e-1}+e^x}{x^e+e^x}dx=\frac{1}{e}\ln|x^e+e^x|+c$ [Ans.]

MCQ

72. **Sol^n: (b);** $I=\int\frac{x\sqrt{4-x^2}}{x^2+4}dx$ | Let, $4-x^2=t^2\Rightarrow x^2=4-t^2$

$\Rightarrow 2x\,dx=-2t\,dt\Rightarrow x\,dx=-t\,dt$

$\therefore I=\int\frac{(-t\,dt)t}{4-t^2+4}=-\int\frac{t^2}{8-t^2}dt=-\int\frac{-(8-t^2)+8}{8-t^2}dt=\int dt-8\int\frac{dt}{(2\sqrt{2})^2-t^2}$

$=t-\frac{8}{2.2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{2\sqrt{2}+t}{2\sqrt{2}-t}\right|=\sqrt{4-x^2}-\sqrt{2}\ln\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{4-x^2}}{2\sqrt{2}-\sqrt{4-x^2}}+c$

73. **Sol^n: (c);** $\int\frac{dx}{x^2+4x+3}=\int\frac{dx}{(x+3)(x+1)}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)dx=\frac{1}{2}[\ln(x+1)-\ln(x+3)]+c=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|+c$

74. **Sol^n: (a);** $I=\int\frac{1-x}{1+x}dx=\int\frac{-(1+x)+2}{1+x}dx=-\int dx+2\int\frac{1}{1+x}dx=-x+2\ln(1+x)=\ln(1+x)^2-x+c$

75. **Sol^n: (d);** $I=\int\frac{a^2-x^2}{(a^2+x^2)^2}dx=\int\frac{\frac{a^2}{x^2}-1}{\left(\frac{a^2}{x}+x\right)^2}dx$

Let, $\frac{a^2}{x}+x=u\Rightarrow\left(-\frac{a^2}{x^2}+1\right)dx=du\Rightarrow\left(\frac{a^2}{x^2}-1\right)dx=-du$

$I=\int\frac{-du}{u^2}=\frac{1}{u}+c=\frac{1}{\frac{a^2}{x}+x}+c=\frac{x}{a^2+x^2}+c$

76. **Sol^n: (b);** $I=\int\frac{2\cos x-3\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{\frac{5}{2}(\cos x-\sin x)-\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}dx=\frac{5}{2}\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx-\frac{1}{2}\int dx$

$=-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}\ln|\sin x+\cos x|+c\ \therefore A=-\frac{1}{2},B=\frac{5}{2}$

77. **Sol^n: (b);** Let, $\sqrt{x-\alpha}+\sqrt{x-\beta}=u \Rightarrow \left\{\frac{1}{2\sqrt{x-\alpha}}+\frac{1}{2\sqrt{x-\beta}}\right\}dx = du \Rightarrow \frac{\sqrt{x-\beta}+\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}\sqrt{x-\beta}}dx = 2du$

$\therefore \frac{u\,dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}} = 2du \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}} = \frac{2}{u}du \therefore \int\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}} = \int\frac{2}{u}du = 2\ln\left(\sqrt{x-\alpha}+\sqrt{x-\beta}\right)+c$

78. **Sol^n: (d);** $I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x}}=\int\frac{2u\,du}{u^2+u}=2\int\frac{1}{1+u}du$ $\quad$ | Let, $\sqrt{x}=u \Rightarrow x=u^2 \Rightarrow dx = 2u\,du$

$=2\ln(1+u)=\ln\left(1+\sqrt{x}\right)^2+c$

79. **Sol^n: (c);** $I=\int\frac{x^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x}\left(x^{\frac{3}{4}}+1\right)}dx=\int\frac{x^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}}{\left(1+x^{\frac{3}{4}}\right)}dx \therefore I=\int\frac{4}{3}\frac{du}{u}=\frac{4}{3}\ln(u)+c=\frac{4}{3}\ln\left(1+x^{\frac{3}{4}}\right)+c$ $\quad$ | Let, $1+x^{\frac{3}{4}}=u \Rightarrow \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}dx=du \Rightarrow x^{-\frac{1}{4}}dx=\frac{4}{3}du$

80. **Sol^n: (a);** $I=\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+3}}$ $\quad$ | Let, $x+3=u^2 \therefore x=u^2-3 \Rightarrow dx = 2u\,du$

$\therefore I=\int\frac{2u\,du}{(u^2-3+2)u}=2\int\frac{du}{u^2-1}=2\frac{1}{2}\ln\frac{u-1}{u+1}=\ln\left|\frac{\sqrt{x+3}-1}{\sqrt{x+3}+1}\right|$

81. **Sol^n: (d);** $I=\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1-\sin 2x}}dx=\int\frac{(\sin x+\cos x)dx}{\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x}}=\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}}dx$

$=\int\frac{\cos x+\sin x}{\sin x-\cos x}dx=\ln(\sin x-\cos x)+c.$

82. **Sol^n: (c);** $\int\frac{e^x(x-1)}{(x+1)^3}dx=\int\frac{e^x\{(x+1)-2\}}{(x+1)^3}dx=\int e^x\left\{\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{(x+1)^3}\right\}dx$

$=\int e^x\{f(x)+f'(x)\}dx\left(\text{where } f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}\right)=e^x f(x)+c=\frac{e^x}{(1+x)^2}$

83. **Sol^n: (c);** $I=\int\frac{dx}{(3\sin x+4\cos x)^2}=\int\frac{\sec^2 x\,dx}{(3\tan x+4)^2}$ [dividing by $\cos^2 x$] $\quad$ | Let, $3\tan x+4=u \Rightarrow \sec^2 x\,dx=\frac{1}{3}du$

$\therefore I=\int\frac{\frac{1}{3}du}{u^2}=-\frac{1}{3u}+c=-\frac{1}{3(3\tan x+4)}+c$

84. **Sol^n: (c);** $\int\cos\left(2\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)dx$ $\quad$ | Let, $x=\cos\theta$, $dx=-\sin\theta\,d\theta$

Now, $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\tan\frac{\theta}{2}=\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)$ $\quad$ | Let, $\cos\theta=v \Rightarrow -\sin\theta\,d\theta=dv$

$\therefore I=-\int\cos\left\{2\cot^{-1}\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right\}\sin\theta\,d\theta$

$=-\int\cos 2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\sin\theta\,d\theta=-\int\cos(\pi-\theta)\sin\theta\,d\theta \Rightarrow I=\int\cos\theta\sin\theta\,d\theta$

$\therefore I=\int -v\,dv=\frac{v^2}{2}+c=-\frac{(\cos\theta)^2}{2}+c=-\frac{x^2}{2}+c$

85. **Ans. (a)**

86. **Sol^n: (a);** $\int\sin^2 4x\,dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos 8x)dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{8}\sin 8x\right)+c$

87. **Sol^n: (a) ও (b) উভয়ই;** $\int\frac{e^{a\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{a}\int e^z dz=\frac{1}{a}e^z+c$

ধরি, $a\sin^{-1}x=z \Rightarrow dz=\frac{a\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{a}e^{a\sin^{-1}x}+c$

88. **Sol^n: (c);** Hints: $\ln x = z$ ধরতে হবে।

89. **Sol^n: (c);** $I=\int\frac{(x^2+\sin^2 x)\sec^2 x}{1+x^2}dx=\int\frac{x^2\sec^2 x+\tan^2 x}{1+x^2}dx=\int\frac{x^2(1+\tan^2 x)+\tan^2 x}{1+x^2}dx$

$=\int\frac{x^2+x^2\tan^2 x+\tan^2 x}{1+x^2}dx=\int\frac{x^2}{1+x^2}dx+\int\frac{\tan^2 x(1+x^2)}{1+x^2}dx=\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx+\int\tan^2 x\,dx$

$=\int dx-\int\frac{1}{1+x^2}dx+\int(\sec^2 x-1)dx=\int dx-\tan^{-1}x+\int\sec^2 x\,dx-\int dx$

$=x-\tan^{-1}x+\tan x-x+c=\tan x-\tan^{-1}x+c$

90. **Sol^n: (a);** $\int\frac{x^4\,dx}{4+x^{10}}=\frac{1}{5}\int\frac{dz}{4+z^2}=\frac{1}{10}\tan^{-1}\frac{z}{2}+c=\frac{1}{10}\tan^{-1}\left(\frac{x^5}{2}\right)$ $\quad$ | ধরি, $x^5=z \Rightarrow dz=5x^4dx$

91. **Ans. (b)**

92. **Sol^n: (a);** $\int\frac{3x^2dx}{\sqrt{x^6-1}}=\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}=\ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|+c=\ln\left|x^3+\sqrt{x^6-1}\right|$ | ধরি, $x^3=z \Rightarrow dz=3x^2dx$

93. **Sol^n: (a);** $\int\frac{e^x dx}{e^{2x}+2e^x+5}=\int\frac{dz}{z^2+2z+5}=\int\frac{dz}{(z+1)^2+4}=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{e^x+1}{2}\right)$ $\quad$ | ধরি, $e^x=z \Rightarrow dz=e^x dx$

94. **Sol^n: (a);** $\int\frac{dx}{(1-x)\sqrt{1+x}}=\int\frac{2dz}{(2-z^2)z}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+x}}\right|$

ধরি, $1+x=z^2$ এবং $x=z^2-1 \Rightarrow dz=2zdz$

95. **Sol^n: (a);** $\int\frac{\tan x}{\sqrt{2}\cot x}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\tan^2 x\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int(\sec^2 x-1)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}(\tan x-x)$

96. **Sol^n: (a);** $\int\frac{(x^2+2x)}{(x+1)^2}dx=\int\frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2}dx=x-\int\frac{dx}{(1+x)^2}=x+\frac{1}{1+x}+c=\frac{x^2+x+1}{x+1}+c$

97. **Sol^n: (a);** $\int\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\int\frac{\sec^2 x\,dx}{a^2+b^2\tan^2 x}$ $\quad$ | ধরি, $\tan x=z \Rightarrow dz=\sec^2 x\,dx$

$=\int\frac{dz}{a^2+b^2z^2}=\frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{b\tan x}{a}\right)+c$

98. **Sol^n: (d);** $\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+\cos x}}=\int\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|}dx=\pm2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}+c=\pm2\sqrt{1+\cos x}+c$

99. **Sol^n: (a);** $\int\frac{x^2+\cos^2 x}{x^2+1}\mathrm{cosec}^2x\,dx=\int\frac{x^2\cos^2 x+\cot^2 x}{x^2+1}dx=\int\frac{x^2(1+\cot^2 x)+\cot^2 x}{x^2+1}dx$

$=\int\frac{(x^2+1)\cot^2 x+x^2}{x^2+1}dx=\int\cot^2 x\,dx+\int\frac{x^2}{x^2+1}dx$

$=\int(\mathrm{cosec}^2x-1)\,dx+x-\int\frac{dx}{x^2+1}=-\cot x-\tan^{-1}x+c$

100. **Sol^n: (d);** $\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx=\int e^x\frac{x+1-1}{(x+1)^2}dx=\int e^x\left\{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right\}dx=\frac{e^x}{x+1}+c$

$\left[\text{Here, }\int e^x\{f(x)+f'(x)\}dx\left(\text{when } f(x)=\frac{1}{x+1}\right)=e^x f(x)+c\right]$

101. **Sol^n: (a);** $\int\frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}dx=\int\frac{e^x(x+2-1)}{(x+2)^2}dx=\int e^x\left\{\frac{1}{x+2}-\frac{1}{(x+2)^2}\right\}dx=\frac{e^x}{x+2}+c$

102. **Sol^n: (b);** Hints: $x^2=z$ ধরতে হবে।

103. **Sol^n: (b);** $\int\frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}dx=\int\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\tan\theta+c=\tan(xe^x)+c$ | ধরি, $xe^x=\theta \Rightarrow d\theta=e^x(1+x)dx$

104. **Sol^n: (a);** $\int\frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x+\sin x}dx=\int(\cos x-\sin x)\,dx=\sin x+\cos x+c$

যোগজীকরণ (নির্দিষ্ট যোগজ)

গুরুত্বপূর্ণ প্রাথমিক আলোচনা

- **নির্দিষ্ট যোগজ (The Definite Integral):**

যদি $[a, b]$ বদ্ধ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন সীমাবদ্ধ (Bounded) হয় এবং $[a, b]$ ব্যবধিকে n সংখ্যক উপব্যবধি $\delta_r = [x_{r-1}, x_r], r = 1,2,3 \ldots\ldots\ldots n$ এ এরূপে বিভক্ত করা হয় যে, সর্বাপেক্ষা দীর্ঘ উপব্যবধি $\delta \to 0$ হয় এবং $\xi_r \in \delta_r$ এর জন্য $\lim_{\delta\to 0} \sum f(\xi_r)\delta_r$ এর নির্দিষ্ট একটি মাত্র সসীম মান থাকে, তবে সেই মানকে নিম্নপ্রান্ত a হতে উর্ধ্বপ্রান্ত b পর্যন্ত $f(x)$ এর নির্দিষ্ট যোগজ বলা হয় এবং উহাকে $\int_a^b f(x)dx$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

সুতরাং $\lim_{\delta\to 0} \sum f(\xi_r)\delta_r = \int_a^b f(x)dx$

নির্দিষ্ট যোগজের মান: যদি x কে চলরাশি ধরে $[a, b]$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশনের যোগজ $F(x)$ হয় অর্থাৎ $\int_a^b f(x)dx = F(x)$ হয় তবে $F(b) - F(a)$ কে $f(x)$ ফাংশনের নির্দিষ্ট যোগজের মান বলা হয় এবং একে $\int_a^b f(x)dx$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়। নির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয় করতে নিচের পদক্ষেপগুলো প্রয়োজন।

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(a) - F(b)$, যেখানে $\int f(x)dx = F(x)$

- **নির্দিষ্ট যোগজ সম্পর্কিত মূল উপপাদ্যঃ**

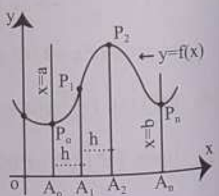
অনির্দিষ্ট যোগজ মূলত নির্দিষ্ট যোগজ $\int_a^b f(x)dx$ যার উর্দ্ধপ্রান্ত চলরাশি। $F(x)$ অবিচ্ছিন্ন ফাংশন হলে $F(x) = \int_a^b f(x)dx$ অন্তরীকরণযোগ্য এবং $F'(x) = f(x)$. $G(x)$ যদি $f(x)$ এর যেকোন প্রতিঅন্তরজ হয়, তবে $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$; এই ফল নির্দিষ্ট যোগজ সম্পর্কিত মূল উপপাদ্য নামে পরিচিত। এর যেকোনো দুইটি প্রতিঅন্তরজের পার্থক্য ধ্রুব ফাংশন বিধায়, একদিকে $G(b) - G(a)$ এর মান প্রতিঅন্তরজের চয়নের উপর নির্ভর করে না; অন্যদিকে $G(x)$ যদি $f(x)$ এর যেকোন প্রতিঅন্তরজ হয় তবে $G(x) = f(x) + c$, যেখানে c ধ্রুবকসংখ্যা। এর ফলে নির্দিষ্ট যোগজ প্রসঙ্গে প্রতিঅন্তরজ এবং নির্দিষ্ট যোগজ সমার্থক বলে বিবেচনা করা যায়। তাই ক্যালকুলাসে অনির্দিষ্ট যোগজ বলতে প্রতিঅন্তরজকেই বুঝানো হয়।

দ্রষ্টব্যঃ নির্দিষ্ট যোগজে যোগজীকরণের ধ্রুবক থাকে না।

$\int_a^b f(x)dx = [F(x) + c]_a^b = \{F(b) + c\} - \{F(a) + c\} = F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a)$

(i) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz$ (ii) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (iii) $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

- **ক্ষেত্রফল হতে নির্দিষ্ট যোগজের ধারণাঃ**



ধরি, চিত্রের বক্ররেখাটির সমীকরণ $y = f(x)$. $x = a$ সরলরেখা, $y = f(x)$ বক্ররেখাকে এবং x-অক্ষকে যথাক্রমে P_0 ও A_0 বিন্দুতে ছেদ করে, এবং $x = b$ সরলরেখা, $y = f(x)$ ও x-অক্ষকে যথাক্রমে P_n ও A_n বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং বক্ররেখা $y = f(x)$ এবং তিনটি সরলরেখা $x = a, x = b$ ও $y = 0$ (x-অক্ষ) একটি ক্ষেত্র $A_0 A_n P_n P_0$ গঠন করে। ধরি, $A_0 A_n P_n P_0$ এর ক্ষেত্রফল $= S. \overline{A_0A_n}$ রেখাংশকে $A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots$ বিন্দুগুলো দ্বারা সমান n ভাগে ভাগ করে যেন $A_0A_n = nh$, অর্থাৎ $b - a = nh, x = a$ এর সমান্তরাল করে A_1, A_2 এর মধ্য দিয়ে অংকিত রেখাগুলো $y = f(x)$ কে যথাক্রমে $P, P_2 \ldots\ldots$ বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন, P_0 এর ভূজ $= a$, $\therefore y = f(x)$, হতে, এর কোটি $= f(a)$. $\therefore P_0A_0 = f(a)$ P_1 এর ভূজ $= a + h$

$\therefore y = f(x)$ হতে, এর কোটি $f(a + h)$. $P_1A_1 = f(a + h)$.

অনুরূপে $P_2A_2 = f(a + 2h), \ldots\ldots$

ধরি, $S_n = P_0A_0.A_0A_1 + P_1A_1.A_1A_2 + \cdots\cdots + P_{n-1}A_{n-1}.A_{n-1}A_n$

$= f(a).h + f(a + h).h + \cdots\cdots + f\{a + \overline{(n-1)}h\}h$

$= h[f(a) + f(a + h) + f(a + 2h) + \cdots\cdots + f\{a + \overline{(n-1)}.h\}]$

h খুব ছোট হলে, $P_0A_0A_1P_1, P_1A_1A_2P_2 \cdots\cdots$ ক্ষেত্রগুলো আয়তক্ষেত্রের আকার ধারণ করে।

$\therefore n \to \infty$ হলে, $h \to 0$ এবং এক্ষেত্রে $A_0A_nP_nP_0$ এর ক্ষেত্রফল $= \lim_{n\to\infty} S_n$

এ সীমাকে নির্দিষ্ট যোগজ বলে এবং এটাকে $\int_a^b f(x)dx$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

$\therefore \int_a^b f(x) = \lim_{n\to\infty} h[f(a) + f(a + h) + f(a + 2h) + \cdots\cdots + f(a + \overline{n-1}h)]$

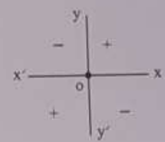
- **নির্দিষ্ট যোগজ (Definite integral):**

সংজ্ঞাঃ $nh = b - a$ হলে, $\lim_{n\to\infty} h[f(a) + f(a + h) + f(a + 2h) + \cdots\cdots + f(a + \overline{n-1}h)]$ কে নির্দিষ্ট যোগজ বলে এবং এটাকে $\int_a^d f(x)dx$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$\int_a^d f(x)dx = \lim_{n\to\infty} h[f(a) + f(a + h) + f(a + 2h) + \cdots\cdots + f(a + \overline{n-1}.h)]$

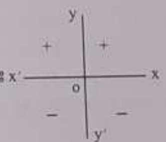
- নিদির্ষ্ট যোগজের প্রয়োগ:
- **ফাংশন দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রফলের চিহ্নঃ**

মূল বিন্দু $O(0,0)$ – এর সাপেক্ষেঃ

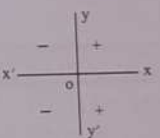


- **অক্ষের সাপেক্ষেঃ**

xx′– অক্ষের সাপেক্ষেঃ



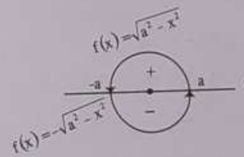
; yy′– এর সাপেক্ষেঃ



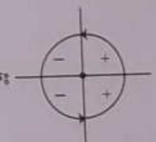
- বৃত্ত ও উপবৃত্তের ক্ষেত্রেঃ (মূলবিন্দু ও যেকোন অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম ফাংশন)

বৃত্তের ক্ষেত্রে –

xx′– অক্ষের সাপেক্ষেঃ

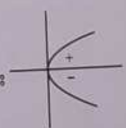


; yy′– এর সাপেক্ষেঃ



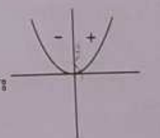
- **পরাবৃত্ত ও অধিবৃত্তের ক্ষেত্রেঃ**

xx′– অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসমঃ



civeŸt $y^2 = 4ax$

; yy′– এর সাপেক্ষে প্রতিসমঃ



civeŸt $x^2 = 4ay$

এক্ষেত্রে অক্ষের সাপেক্ষে $-a \to +a$ ব্যবধিতে ক্ষেত্রফল শূন্য হয় যেখানে $a \in \mathbb{R}$। সেজন্য প্রথম চতুর্ভাগে ক্ষেত্রফল বের করে 4 দ্বারা গুণ করে মোট ক্ষেত্রফল নির্ণয় করাই শ্রেয়।

টাইপভিত্তিক সমস্যা ও সমাধান

Type-01: নির্দিষ্ট যোগজ সম্পর্কিত মূল উপপাদ্য এর প্রয়োগ

Concept: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Example-01. $\int_0^a \frac{a^2-x^2}{(a^2+x^2)^2}\,dx = ?$ [BUET'00-01]

Sol^n: ধরি, $u = \frac{x}{a^2+x^2} \Rightarrow du = \frac{a^2-x^2}{(a^2+x^2)^2}dx$; যখন, $x = 0,\ u = 0,\ x = a,\ u = \frac{1}{2a}$

$\int_0^a \frac{a^2-x^2}{(a^2+x^2)^2}dx = \int_0^{\frac{1}{2a}} du = [u]_0^{\frac{1}{2a}} = \frac{1}{2a}$ (Ans.)

Example-02. মান নির্ণয় কর $\int_0^1 x^3\sqrt{1+3x^4}\,dx$ [RUET'03-04]

Sol^n: let, $1 + 3x^4 = z \Rightarrow x^3dx = \frac{1}{12}dz$; $x = 1, z = 4$ $x = 0, z = 1$

$\therefore I = \frac{1}{12}\int_1^4 \sqrt{z}\,dz = \frac{1}{12}.\frac{2}{3}\left[z^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{1}{18}\left[4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{7}{18}$ (Ans.)

Example-03. $\int_0^1 \frac{(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}dx = ?$

Sol^n: ধরি, $z = \tan^{-1}x$; $dz = \frac{dx}{1+x^2}$

$x = 1$ হলে $z = \frac{\pi}{4}$; $x = 0$ হলে $z = 0$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} z^2dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^3}{192}$ (Ans.)

Type-02: $\int_0^a f(x) = \int_0^a f(a-x)\,dx$ ধর্মের ব্যবহার

Concept: সমাকলনের ক্ষেত্রে $\int_0^a f(x) = \int_0^a f(a-x)\,dx$ ধর্ম ব্যবহার করে অনেক জটিল সমস্যা খুব সহজেই করা যায়। এক্ষেত্রে lower limit অবশ্যই '0' (শূন্য) হতে হবে।

Example-04. মান নির্ণয় কর $\int_0^1 y\sqrt{(1-y)dy}$ [BUTex'07-08]

Sol^n: $\int_0^1 y\sqrt{1-y}\,dy$

$= \int_0^1 (1-y)\sqrt{1-(1-y)}dy$ $\quad [\because \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)\,dx]$

$= \int_0^1 (1-y)\sqrt{y}\,dy = \int_0^1\left(\sqrt{y} - y^{\frac{3}{2}}\right)dy = \left[\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{10-6}{15} = \frac{4}{15}$

Example-05. প্রমাণ কর যে, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx = \frac{\pi}{4}$

Sol^n: ধরি, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx \cdots\cdots\cdots (i)$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}}{\sqrt{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}+\sqrt{\cos(\frac{\pi}{2}-x)}}dx$

$\therefore I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx \cdots\cdots\cdots (ii)$

(i) + (ii) হতে পাই, $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$ $\therefore I = \frac{\pi}{4}$ $\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx = \frac{\pi}{4}$ (Proved)

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx = \frac{\pi}{4}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^n x}{\tan^n x+\cot^n x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot^n x}{\tan^n x+\cot^n x}dx = \frac{\pi}{4}$

Type-03: $\int_a^b f(x) = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$ ধর্মের ব্যবহার

Concept: সমাকলনের ক্ষেত্রে $\int_a^b f(x) = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$ ধর্ম ব্যবহার করে অনেক জটিল সমস্যা খুব সহজেই করা যায়।

Example-06. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx = ?$

Sol^n: $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx \cdots\cdots\cdots (i)$

$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x)}}{\sqrt{\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x)}+\sqrt{\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x)}}dx$

$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}} \cdots\cdots\cdots (ii)$ $\quad [\because \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}]$

$(i) + (ii) \rightarrow 2I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} dx = [x]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \Rightarrow 2I = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow I = \frac{-\pi}{12}$

$\therefore \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} = \frac{-\pi}{12}$ [Ans.]

Type-04: যুগ্ম ও অযুগ্ম ফাংশনের ক্ষেত্রে

Concept:

(i) যদি কোন ফাংশনের ক্ষেত্রে $f(-x) = f(x)$ হয় তবে তাকে যুগ্ম ফাংশন বলে। আবার যদি কোন ফাংশনের ক্ষেত্রে $f(-x) = -f(x)$ হয় তবে তাকে অযুগ্ম ফাংশন বলে। যেমন, $x^2, \cos x, x\sin x$ যুগ্ম ফাংশন এবং $x^3, \sin x, x\cos x$ অযুগ্ম ফাংশন।

(ii) $f(x)$ যুগ্ম ফাংশন হলে, $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, $f(x)$ অযুগ্ম ফাংশন হলে, $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

যেমন, $\int_{-a}^a x.\cos x dx = 0$

উপরোক্ত Type MCQ এর জন্য খুবই গুরুত্বপূর্ণ।

Example-07. মান নির্ণয় করঃ $\int_0^\pi \frac{dx}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}$ [RUET'11-12]

Sol^n: $\int_0^\pi \frac{1}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}dx$

এটি একটি জোড় ফাংশন। এর ক্ষেত্রে π থেকে $\frac{\pi}{2}$ এবং $\frac{\pi}{2}$ থেকে 0 লিমিটের মধ্যে একই ক্ষেত্রফল হবে।

$I = \int_0^\pi \frac{1}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2x\,dx}{a^2+b^2\tan^2x}$

ধরি, $\tan x = z \Rightarrow \sec^2x\,dx = dz$; $x = \frac{\pi}{2}$ হলে, $z = \propto$, $x = 0$ হলে, $z = 0$

$2\int_0^\infty \frac{dz}{a^2+b^2z^2} = \frac{2}{a^2}\int_0^\infty \frac{dz}{1+\frac{b^2z^2}{a^2}} = 2\frac{1}{ab}\left[\tan^{-1}\left(\frac{bz}{a}\right)\right]_0^\infty = \frac{2}{ab}\left[\tan^{-1}\left(\frac{b\infty}{a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{b.0}{a}\right)\right]$

$= \frac{2}{ab}[\tan^{-1}\infty - 0] = \frac{2}{ab}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{ab}$

Example-08. $\int_{-1}^1 \frac{x^3\sin^2x}{\cos^3x} = dx = ?$

Sol^n: Let, $f(x) = \frac{x^3.\sin^2x}{\cos^3x}$

$\therefore f(-x) = \frac{(-x)^3.\sin^2(-x)}{\cos^3(-x)} = \frac{-x^3.\sin^2x}{\cos^3x} = -f(x)$

$\therefore f(x)$ একটি অযুগ্ম ফাংশন। $\therefore \int_{-1}^1 \frac{x^3.\sin^2x}{\cos^3x}dx = 0$ [Ans.]

Type-05: কয়েকটি পরমমান ফাংশনের সমাকলন

➲ **Concept:** পরমমানের সংজ্ঞানুসারে, $|x| = \begin{cases} x; x \geq 0 \\ -x; x < 0 \end{cases}$

Example-09. $\int_{-1}^{1}|x|dx = ?$ [SUST'14-15, BUTex'15-16]

Sol^n: $\because |x| = \begin{cases} x; \text{ if } x \geq 0 \\ -x; \text{ if } x < 0 \end{cases}$

$\therefore \int_{-1}^{1}|x|dx = \int_{-1}^{0} -xdx + \int_{0}^{1} xdx = -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = -\frac{0-1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (Ans.)

Example-10. $\int_{2}^{8}|x-5|dz = ?$ [DU'15-16]

Sol^n: $\because |x-5| = \begin{cases} x-5; \text{ if } x \geq 5 \\ -x+5; \text{ if } x \leq 5 \end{cases}$

$\therefore \int_{2}^{8}|x-5|dx = \int_{2}^{5}(-x+5)dx + \int_{5}^{8}(x-5)dx$

$= \left[\frac{-x^2}{2} + 5x\right]_{2}^{5} + \left[\frac{x^2}{2} - 5x\right]_{5}^{8} = 9$ (Ans.)

Example-11. $\int_{-5}^{5}|x+2|dx = ?$

Sol^n: $\because |x+2| = \begin{cases} x+2; \text{ if } x \geq -2 \\ -x-2; \text{ if } x \leq -2 \end{cases}$

$\therefore \int_{-5}^{5}|x+2|dx = \int_{-5}^{-2}(-x-2)dx + \int_{-2}^{5}(x+2)dx$

$= \left[\frac{-x^2}{2} - 2x\right]_{-5}^{-2} + \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{5}$

$= \left[\left(\frac{-4}{2} + 4\right) - \left(\frac{-25}{2} + 10\right)\right] + \left[\left(\frac{25}{2} + 10\right) - \left(\frac{4}{2} - 4\right)\right] = \frac{9}{2} + \frac{49}{2} = 29$ (Ans.]

Example-12. $\int_{-1}^{2}\frac{|x|}{x}dx = ?$

Sol^n: $\because \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1; \text{ if } x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1; \text{ if } x < 0 \end{cases}$

$\therefore \int_{-1}^{2}\frac{|x|}{x}dx = \int_{-1}^{0}(-1)dx + \int_{0}^{2}(1)dx = -[x]_{-1}^{0} + [x]_{0}^{2}$

$= -[0-(-1)] + [2-0] = -1 + 2 = 1$(Ans.)

Example-13. $\int_{-2}^{2}|1-x^2|dx = ?$

Sol^n: $\because |1-x^2| = |(1+x)(1-x)| = \begin{cases} -(1-x^2); \text{ if } x \leq -1 \\ 1-x^2, \text{ if } -1 \leq x \leq 1 \\ -(1-x^2); \text{ if } x > 1 \end{cases}$

$\therefore \int_{-2}^{2}|1-x^2|dx = \int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx + \int_{-1}^{1}(1-x^2)dx + \int_{1}^{2}(x^2-1)dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-2}^{-1} + \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{2}$

$= \frac{-1}{3} + 1 + \frac{8}{3} - 2 + 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1 = 4$ (Ans)

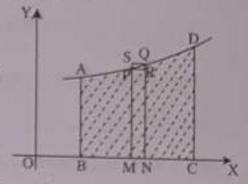
Type-06: নির্দিষ্ট যোগজের প্রয়োগ

➲ **Concept:**

❖ নির্দিষ্ট যোগজ ব্যবহার করে ক্ষেত্রফলঃ

(a, b) ব্যবধিতে $y = f(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন হলে $Y = f(x)$, x –অক্ষ এবং $x = a$ ও $x = b$ কোটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \int_{b}^{a} f(x)dx$.

মনে করি, $x = a$ ও $x = b$ বিন্দুর কোটি যথাক্রমে AB ও DC, $y = f(x)$ বক্ররেখাকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। ABCD দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।



ধরি, AD বক্ররেখার উপর $P(x, y)$ এবং $Q(x+\delta x, y+\delta y)$ দুইটি নিকটবর্তী বিন্দু। অর্থাৎ $\delta x \to 0$ হলে, $\delta y \to 0$. x –অক্ষের উপর PM ও QN লম্ব টানি। QN এর উপর PR এবং MP এর বর্ধিতাংশের উপর QS লম্ব টানি।

$\therefore OM = x, ON = x + \delta x, PM = y, QN = y + \delta y$

সুতরাং, $MN = (x + \delta x) - x = \delta x$

চিত্র হতে পাই, MNRP আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= y\delta x$ এবং MNQS আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= (y+\delta y)\delta x$ ABMP এবং ABNQ এর ক্ষেত্রফল যথাক্রমে A এবং $A + \delta A$ হলে, PMNQ এর ক্ষেত্রফল $= \delta A$. স্পষ্টত, ক্ষেত্র δA ক্ষেত্র $y\delta x$ এর অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু ক্ষেত্র $(y+\delta y)\delta x$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

অর্থাৎ, $y\delta x < \delta A < (y+\delta y)\delta x$.

$\Rightarrow y < \frac{\delta A}{\delta x} < y + \delta y \; \therefore \lim_{\delta \to 0} y < \lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta A}{\delta x} < \lim_{\delta y \to 0}(y+\delta y) \Rightarrow y < \frac{dA}{dx} < y$

$\therefore \frac{dA}{dx} = y \Rightarrow dA = ydx$

যোগজীকরণ করে পাই, $A = \int y\,dx = F(x) + c$ (ধরি)

$x = a$ হলে, $A = 0 \quad \therefore 0 = F(a) + c \Rightarrow c = -F(a)$

$x = b$ হলে, $A =$ ABCD দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

$\therefore$ ABCD দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= F(b) + c = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} y\,dx$

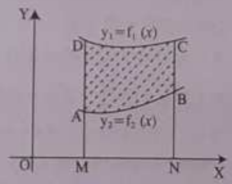
অতএব, নির্দিষ্ট যোগজ $\int_{a}^{b} y\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx, y = f(x)$ বক্ররেখা, x –অক্ষ এবং $x = a$ ও $x = b$ দুইটি নির্দিষ্ট কোটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্দেশ করে।

অনুরূপভাবে দেখানো যায়, $\int_{a}^{b} x\,dy$ নির্দিষ্ট যোগজটি একটি বক্ররেখা, y –অক্ষ এবং দুইটি ভুজ $y = c$ ও $y = d$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্দেশ করে।

দুইটি বক্ররেখা এবং দুইটি কোটি দ্বারা আবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$y_1 = f(x_1)$ ও $y_2 = f(x_2)$ বক্ররেখা এবং $x = a$ ও $x = b$ কোটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \int_{a}^{b}(y_1 - y_2)\,dx = \int_{a}^{b}\{f_1(x) - f_2(x)\}dx$



চিত্র হতে এটা স্পষ্ট যে, ABCD এর ক্ষেত্রফল = DMNC এর ক্ষেত্রফল –AMNB এর ক্ষেত্রফল $= \int_{a}^{b} f_1(x)dx - \int_{a}^{b} f_2(x)\,dx$,

যেখানে DC ও AB বক্ররেখা দুইটির সমীকরণ যথাক্রমে $y_1 = f(x_1)$ ও $y_2 = f(x_2)$ এবং $OM = a$ ও $ON = b$.

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_{a}^{b}(y_1 - y_2)\,dx = \int_{a}^{b}\{f_1(x) - f_2(x)\}\,dx$

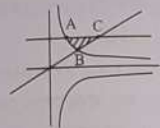
প্রয়োজনীয় তথ্যাবলী অংশে নির্দিষ্ট যোগজের প্রয়োগ সংক্রান্ত বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে। এখানে তার প্রয়োগ দেখানো হলো।

সাবধানতাঃ ক্ষেত্রফল শূন্য হতে পারে।

Example-14. $x = \frac{1}{y^2}$, $x = y$ এবং $y = 2$ রেখাগুলির দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ক্ষেত্রটির চিত্র অংকন কর। [BUET'17-18]

Sol^n: $x = \frac{1}{y^2} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{x}}$

আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ADEFC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল - ADEB ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল - BEFC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

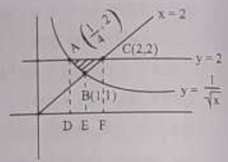


$= \int_{\frac{1}{4}}^{2} 2\cdot dx - \int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot dx - \int_{1}^{2} x\cdot dx = 2\cdot[x]_{\frac{1}{4}}^{2} - 2\cdot[\sqrt{x}]_{\frac{1}{4}}^{1} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2$

$= 2\cdot\left(2-\frac{1}{4}\right) - 2\cdot\left(\sqrt{1}-\sqrt{\frac{1}{4}}\right) - \frac{1}{2}\cdot(2^2-1^2)$

$= 2\cdot\frac{7}{4} - 2\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot 3 = 1$ বর্গের একক (Ans.)

বিকল্প পদ্ধতিঃ $x = \frac{1}{y^2}$ । $x = y$ এর ছেদবিন্দু, $\frac{1}{y^2} = y \Rightarrow y^3 = 1 \Rightarrow y = 1$

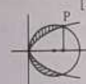


$\therefore x = \frac{1}{y^2} = 1$

সুতরাং, আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \int_1^2\left(y - \frac{1}{y^2}\right)dy = \left[\frac{y^2}{2} + \frac{1}{y}\right]_1^2$

$= \left(2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1\right)$ বর্গ একক $= 1$ বর্গ একক।

Example-15. $y^2 = ax$ এবং $x^2 + y^2 = 4ax$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্বর্তী এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [BUET'16-17]



Sol^n: ছেদবিন্দু নির্ণয়: $x^2 + ax = 4ax \Rightarrow x = 0, 3a \therefore y = 0, \pm\sqrt{3}a \therefore P \equiv (3a, \sqrt{3}a)$

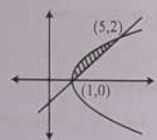
$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= 2\times\int_0^{3a}\left(\sqrt{4ax - x^2} - \sqrt{ax}\right)dx = 2\times\int_0^{3a}\left(\sqrt{4a^2-(x-2a)^2} - \sqrt{ax}\right)dx$

$= 2\times\left[\left(\frac{x-2a}{x}\right)\sqrt{4ax-x^2} + 2q^2\sin^{-1}\left(\frac{x-2a}{2a}\right) - \frac{2}{3}\sqrt{a}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{3a} = 2\times\left(\frac{a}{2}\times\sqrt{3}a + 2a^2\times\frac{\pi}{6} - 2\sqrt{3}a^2 + \pi a^2\right)$

$= \left(\frac{2}{3}\pi - 3\sqrt{3} + 2\pi\right)a^2 = \left(\frac{8}{3}\pi - 3\sqrt{3}\right)a^2$

Example-16. $y^2 = x - 1$ পরাবৃত্ত এবং $2y = x - 1$ সরলরেখা দিয়ে আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [BUET'14-15]

Sol^n: $y^2 = x - 1; 2y = x - 1 \Rightarrow y^2 = 2y \Rightarrow y = 0,2 \therefore x = 1,5$



$\therefore$ ছেদবিন্দুদ্বয় $(1,0)$ ও $(5,2)$

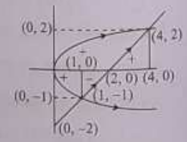
$\therefore \Delta = \int_1^5 (y_1 - y_2)dx = \int_1^5 \sqrt{x-1} - \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)dx$

$= \left[\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}\right]_1^5 = \frac{19}{12} - \frac{1}{4} = \frac{4}{3}$ বর্গ একক (Ans.)

Example-17. x অক্ষের সাপেক্ষে $x = y^2$ এবং $y = x - 2$ রেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত? **[BUET'12-13,10-11]**

Sol^n: রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $(4,2)$ ও $(1,-1)$ আবার $y = x - 2$ রেখাটি x অক্ষকে $(0,-2)$ বিন্দুতে ছেদ করে। x অক্ষের সাপেক্ষে ক্ষেত্রফলঃ $y = \sqrt{x}$ পরাবৃত্তের জন্য ব্যবধি $0 \to 4$ এবং $0 \to 1$ এবং $y = x - 2$ রেখার জন্য ব্যবধি: $2 \to 1$ এবং $2 \to 4$

[ক্রম অনুযায়ী ব্যবধি নিয়ে]



$A = \int_0^4\sqrt{x}dx + \int_0^1\sqrt{x}dx + \int_2^1(x-2)\,dx - \int_2^4(x-2)\,dx$

$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 + \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \int_1^4(x-2)\,dx = \frac{16}{3} + \frac{2}{3} - \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^4$

$= 6 - 8 + 8 + \frac{1}{2} - 2 = 4 + \frac{1}{2} = 4.5$ sq. unit

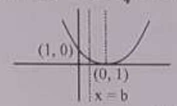
y অক্ষের সাপেক্ষে ক্ষেত্রফল: $x = y^2$ এর জন্য ব্যবধি: $-1 \to 2$ এবং $x = y + 2$ এর জন্য ব্যবধি: $-1 \to 2$

[y অক্ষের উপর ছেদ বিন্দুগুলোর অভিক্ষেপসমূহ: $(1,1)$ এর জন্য $(0,-1)$ এবং $(4,2)$ এর জন্য $(0,2)$]

$\therefore A = \int_{-1}^{2} y^2\,dy - \int_{-1}^{2}(y+2)\,dy = \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} - 2y\right]_{-1}^{2} = 4.5$ sq. unit

Example-18. $\mathbf{x = b}$ রেখাটি $\mathbf{y = (1-x)^2, y = 0}$ এবং $\mathbf{x = 0}$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রকে $\mathbf{R_1(0 \le x \le b)}$ এবং $\mathbf{R_2(b \le x \le 1)}$ অংশদ্বয়ে বিভক্ত করে যেখানে $\mathbf{R_1 - R_2 = \frac{1}{4}}$ । b এর মান নির্ণয় কর। [RUET'15-16]

Sol^n: $y = (1-x)^2$



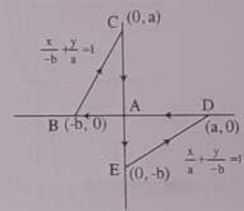
$R_1 = \int_0^b ydx = \int_0^b (1-x)^2dx = \left[-\frac{(1-x)^3}{3}\right]_0^b = -\frac{(1-b)^3}{3} + \frac{1}{3}$

$R_2 = \int_b^1 ydx = \int_b^1 (1-x)^2dx = \left[-\frac{(1-x)^3}{3}\right]_b^1 = \frac{(1-b)^3}{3}$

$\therefore R_1 - R_2 = -\frac{2(1-b)^3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{2}{3}(1-b)^3 = -\frac{1}{12} \Rightarrow (1-b)^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow 1 - b = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$ (Ans.)

Example-19. একটি চতুর্ভূজের চারটি কৌণিক বিন্দুর ক্রম যথাক্রমে $(-b,0),(0,a),(a,0)$ এবং $(0,-b)$। দেখাও যে, এদের দ্বারা গঠিত চতুর্ভূজের ক্ষেত্রফল শূন্য।

Sol^n: ক্রম y অক্ষের সাপেক্ষে $-b \to 0 \to a$ এবং x অক্ষের সাপেক্ষে $a \to 0 \to -b$



চিত্র অনুযায়ী x অক্ষের সাপেক্ষে

$\Delta BCA = \int_{-b}^{0} a\left(1 + \frac{x}{b}\right)dx = \left[ax + \frac{ax^2}{2b}\right]_{-b}^{0}$

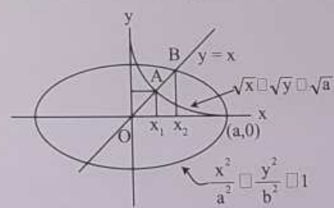
$= +ab - \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ab$ [anticlockwise]

$\Delta AED = \int_0^a b\left(\frac{x}{a} - 1\right)dx = \left[b\frac{x^2}{2a} - bx\right]_0^a = -\frac{1}{2}ab$ [clock wise]

$\therefore \square BCAED = \Delta BCA + \Delta AED = 0$ [Showed]

[**Note:** The area of the quadrilateral formed by the four points may be zero but they may not be collinear. The statement is not true in case of three points which are not collinear. It is not widely used in mathematics.]

Example-20.



(a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ পরাবৃত্ত এবং অক্ষদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?

(b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ পরাবৃত্ত, উহার অক্ষ এবং x অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?

Sol^n: (a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ – এ $y = 0$ হলে $x = a$

আবার $\left(\sqrt{y}\right)^2 = \left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow y = a + x - 2\sqrt{ax}$

ব্যাবধি: $x = 0$ থেকে $x = a$ $\therefore$ ক্ষেত্রফল, $A = \int_0^a\left(a + x - 2\sqrt{a}.\sqrt{x}\right)dx = \left[ax + \frac{x^2}{2} - 2\sqrt{a}.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$

$= a^2 + \frac{a^2}{2} - 2\sqrt{a}.\frac{2}{3}.a^{\frac{3}{2}} = \frac{3a^2}{2} - \frac{4}{3}a^2 = \frac{1}{6}a^2$ sq. unit

(b) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}\Rightarrow\sqrt{y}=\sqrt{a}-\sqrt{x}\Rightarrow y=a+x-2\sqrt{ax}$

$\Rightarrow a+x-y=2\sqrt{ax}\Rightarrow a^2+x^2+y^2+2ax-2xy-2ay=4ax$

$\Rightarrow x^2+y^2-2xy=2ax+2ay-a^2\Rightarrow(x-y)^2=a(2x+2y-a)$

পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ অনুযায়ী, অক্ষরেখা: $x-y=0\Rightarrow y=x$

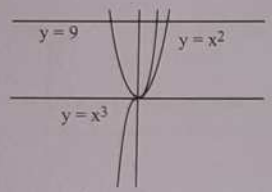
শীর্ষে স্পর্শক, $\frac{2x}{a}+\frac{2y}{a}=1$ এবং $y=x$ এর ছেদবিন্দু $\left(\frac{a}{4},\frac{a}{4}\right)$

এখানে, ব্যবধি: $y=x$ এর জন্য $x=0$ হতে $x_1=\frac{a}{4}$ এবং $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ এর জন্য $x_1=\frac{a}{4}$ হতে $x=a$

$\therefore A=A_1+A_2=\int_0^{\frac{a}{4}}x.dx+\int_{\frac{a}{4}}^{a}(a+x-2\sqrt{a}\sqrt{x})\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{a}{4}}+\left[ax+\frac{x^2}{2}-2\sqrt{a}.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{a}{4}}^{a}$

$=\frac{a^2}{32}+\frac{a^2}{6}-\left\{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{32}-\frac{4}{3}.\sqrt{a}\left(\frac{a}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}=\frac{a^2}{32}+\frac{a^2}{6}-\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{32}+\frac{4a^2}{24}=a^2\left(\frac{4-6+4}{24}\right)=\frac{a^2}{12}$ sq. unit

Example-21.

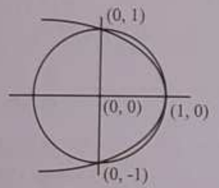


চিত্রে প্রদর্শিত বক্ররেখা দুটি $y=x^2$ এবং $y=x^3$ এবং $y=9$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?

Sol^n: $\int_0^9(\sqrt{y}-\sqrt[3]{y})\,dy=\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}}\right]_0^9=18-\frac{3}{4}\times9\times\sqrt[3]{9}=18-\frac{27}{4}\times\sqrt[3]{9}=3.96$ sq. unit (Ans.)

Example-22. $x^2+y^2=1$ এবং $y^2=1-x$ বক্ররেখা দুটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?

Sol^n:



বক্ররেখা দুটির ছেদবিন্দু সমূহ $(0,1),(1,0),(0,-1)$

বক্ররেখা দুটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল =বৃত্তদ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্র – পরাবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্র।

$\therefore A=2\int_0^1\{\sqrt{1-x^2}-(\sqrt{1-x})\}\,dx$

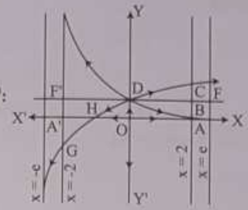
$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}.\cos\theta.d\theta-2\int_0^1\sqrt{1-x}\,dx$ $\qquad$ [$x=\sin\theta$ ধরে]

$=2\int_0^1\frac{1}{2}(1+\cos2\theta)d\theta+\frac{4}{3}\left[(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$=\left[\theta+\frac{\sin2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{4}{3}=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}\right)$ sq. unit.

Example-23. $y=\ln(x+e),x=\ln\left(\frac{1}{y}\right)$ বক্ররেখা দুটি এবং $|x|=2$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রফল কত?

Sol^n:



x অক্ষের উপর প্রয়োজনীয় বিন্দু: $x=-2,x=1-e,x=2$ এবং মূলবিন্দু $(0,0)$

প্রথম চর্তুভাগে ক্ষেত্রফলঃ $x=\ln\left(\frac{1}{y}\right)$ বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রে,

$A_1=\int_0^2e^{-x}\,dx=-e^{-2}+1=0.865$sq. unit

$y=\ln(x+e)$ বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রে,

$A_2=\int_0^2\ln(x+e)\,dx=[x\ln(x+e)-x+e\ln(x+e)]_0^2=2.6$ sq. unit

$A'=A_2-A_1=1.735$sq. unit

দ্বিতীয় চর্তুভাগে ক্ষেত্রফলঃ $A_3=\int_0^{-2}e^{-x}\,dx=[-e^{-x}]_0^{-2}=e^2+1$

$A_4=\int_0^{1-e}\ln(x+e)=[x\ln(x+e)-x+e\ln(x+e)]_0^{1-e}=-1+e-e=1$

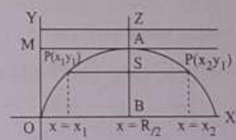
$A''=A_3-A_4=-e^2+2$

তৃতীয় চর্তুভাগে ক্ষেত্রফলঃ $A'''=\int_{1-e}^{-2}\ln(x+e)\,dx=[x\ln(x+e)-x+e\ln(x+e)]_{1-e}^{-2}=0.044$sq. unit

মোট আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, $A=A'+|A''|+A'''=7.17$ sq. unit

Example-24. $x=u\cos\alpha t$ এবং $y=u\sin\alpha t-\frac{1}{2}gt^2$ পরাবৃত্ত ও উহার উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?

Sol^n: পরাবৃত্তের সমীকরণ: $y=x\tan\alpha-\frac{g}{2u^2\cos^2\alpha}x^2$;



শীর্ষ, $A\equiv\left(\frac{R}{2},H\right)=\left(\frac{u^2\sin2\alpha}{2g},\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}\right)$

উপকেন্দ্র, $s\equiv\left(\frac{R}{2},H-a\right)\equiv\left(\frac{u^2\sin2\alpha}{2g},\frac{-u^2\cos2\alpha}{2g}\right)$

$x_2=\frac{R}{2}+2a=\frac{u^2}{g}\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)$

$x_1=\frac{R}{2}-2a=\frac{u^2}{g}\cos\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha)=\frac{u^2\cos^2\alpha}{2}\left[x=\frac{R}{2},y=\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}\right]$ $\qquad$ $AS=a=\frac{x^2}{4y}=AZ$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $y=\frac{-u^2\cos2\alpha}{2g}$

$x_1\to x_2$ ব্যবধিতে পরাবৃত্ত ও x অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলঃ

$A_1=\int_{x_1}^{x_2}\left(x\tan\alpha-\frac{g}{2u^2\cos^2\alpha}x^2\right)dx=\tan\alpha.\frac{x^2}{2}-\frac{g}{2u^2\cos^2\alpha}\frac{x^3}{3}\Big]_{x_1}^{x_2}$

$=\frac{1}{2}\tan\alpha(x_2^2-x_1^2)-\frac{g}{6u^2\cos^2\alpha}(x_2^3-x_1^3)$

$=\frac{1}{2}\tan\alpha.\frac{2u^4}{g^2}\cos^2\alpha.\sin2\alpha-\frac{2g}{6u^2\cos^2\alpha}\frac{u^4}{g^3}\cos^3\alpha.\cos\alpha=\frac{u^4}{3g^2}\cos^2\alpha(6\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)$

এবং $x_1\to x_2$ ব্যবধিতে উপকেন্দ্র ও x অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলঃ

$A_2=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{-u^2\cos2\alpha}{2g}\right)dx=-\frac{u^2\cos2\alpha}{g}[x_2-x_1]=-\frac{u^4}{g^2}\cos2\alpha.\cos^2\alpha=\frac{u^4}{g^2}\cos^2\alpha(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)$

পর্যবেক্ষণ: $\alpha = 0°$ হলে, $y = \frac{u^2}{2g}[\sin 0° - \cos 0°] = -\frac{u^2}{2g}$

$A_1 = (-)ve, A_2 = (-)ve$

$\alpha = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{6}}$ এর জন্য, $A_1 = 0, A_2 = (-)ve$

$\alpha = 45°$ এর জন্য, $A_1 = (+)ve, A_2 = 0$

$\alpha = 90°$ এর জন্য, $A_1 = (+)ve, A_2 = (+)ve$

সিদ্ধান্ত: $\alpha = 0°$ হতে $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{6}}$ এর জন্যঃ $A = -(A_1 + A_2) = -\frac{u^4}{3g^2}\cos^2\alpha(9\sin^2\alpha - 4\cos^2\alpha)$

$\alpha = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{6}}$ হতে $45°$ এর জন্যঃ $A = A_1 + A_2 = \frac{u^4}{3g^2}\cos^2\alpha(9\sin^2\alpha - 4\cos^2\alpha)$

$\alpha = 45°$ হতে $90°$ এর জন্যঃ $A = A_1 - A_2 = \frac{u^4}{3g^2}\cos^2\alpha(3\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha)$

শর্তঃ u বেগে α কোণে নিক্ষিপ্ত বস্তু কণাটি 2a ব্যবধানে a উচ্চতা বিশিষ্ট দুটি দেয়াল পার হওয়ার ক্ষেত্রেঃ

$R = 2a\cot\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} = 2.\frac{-u^2\cos 2\alpha}{2g}.\cot\frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \tan 2\alpha = -\cot\frac{\alpha}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) \text{ or } \tan\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)$

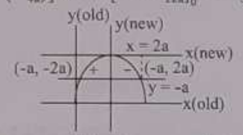
$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$ or, π

$\alpha = \frac{\pi}{3}$ এর জন্য, $a = \frac{1}{4}\frac{u^2}{g}, A = \frac{11}{3}a^2$sq. unit and $\alpha = \pi$ এর জন্য, $a = \frac{-u^2}{2g}, A = \frac{8}{3}a^2$sq. unit

$X^2 = 4aY$ আকারের জন্য: [x ও y অক্ষকে সমান্তরালে $A\left(\frac{R}{2}, H\right)$ বিন্দুতে অপসরণ করে,

$x = X + \frac{R}{2}$ এবং $y = Y + H$ হতে $X^2 = -4aY$]

X – অক্ষের সাপেক্ষেঃ $A = 2\int_0^{2a}\left[-a - \left(-\frac{x^2}{4a}\right)\right]dx = 2\left[-ax + \frac{x^3}{12a}\right]_0^{2a} = -\frac{8}{3}a^2$sq. unit.



Y – অক্ষের সাপেক্ষেঃ (180° কোণে ঘুরিয়ে): $A = 2\int_0^a\sqrt{4ay}.dy \Rightarrow A = \frac{8}{3}a^2$sq. unit.

$X^2 + Y^2$ আকারের জন্যঃ $x = u\cos\alpha t,\ y + \frac{1}{2}gt^2 = u\sin\alpha t$

$\therefore x^2 + \left(y + \frac{1}{2}gt^2\right)^2 = u^2t^2$ যা একটি বৃত্তের সমীকরণ। যার কেন্দ্র $\left(0, -\frac{1}{2}gt^2\right)$ এবং ব্যাসার্ধ = ut

$\therefore A = 2\int_0^{ut} -\frac{1}{2}gt^2dx - \int_0^{ut}\left[-\sqrt{u^2t^2 - x^2} - \frac{1}{2}gt^2\right]dx = 2\left[-\frac{1}{2}gut^3 + \frac{1}{4}\pi u^2t^2 + \frac{1}{2}gut^3\right] = \frac{1}{2}\pi u^2t^2$

ক্যালকুলেটরের সাহায্যে নির্দিষ্ট যোগজের মান নির্ণয়

➲ **Concept:**

Definite Integral এর প্রায় সকল সমস্যাই calculator ব্যবহার করে সমাধান করা যায়। প্রথমে প্রদত্ত যোগজটির মান calculator এর সাহায্যে নির্ণয় করতে হবে। এরপর প্রাপ্ত মান অপশনগুলোর মানের সাথে মিলিয়ে দেখতে হবে, প্রাপ্ত মানটি যে অপশনের সমান বা কাছাকাছি সেই মানটিই হবে Ans. কয়েকটি উদাহরণ আলোচনা করা যাক —

Example-25. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx$

Sol^n: ES series ক্যালকুলেটরে এধরনের নির্দিষ্ট যোগজের সরাসরি উত্তর পাওয়া যায়।

$\int_{\square}^{\square}\square$ dx press করার পর ফাংশনটি লিখতে হবে (এক্ষেত্রে $\sin^2 x$)। এরপর upper limit এ $\frac{\pi}{2}$ এবং lower limit এ 0 দিয়ে press করলে $\frac{\pi}{4}$ উত্তর পাওয়া যাবে। MS series এ একই উত্তর পাওয়া যাবে।

For MS series: $\int$dx (sin AlPHA))
x^2 , 0 , π $^{ab}/_c$ 2)

উত্তর আসবে $0.785398163 \approx \frac{\pi}{4}$

একত্রে সব গুরুত্বপূর্ণ সূত্র

01. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

02. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz$

03. $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

04. $\int_b^a f(x)dx = \int_b^a f(a+b-x)dx$

05. $\int_b^a f(x)dx = \int_{b-c}^{a-c} f(x+c)dx$

06. $\int_b^a f(x)dx = \int_{b+c}^{a+c} f(x-c)dx$

Special Tips: Walli's theorem: [MCQ এর জন্য খুবই গুরুত্বপূর্ণ]

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx = \frac{n-1}{n}.\frac{n-3}{n-2}.\frac{n-5}{n-4}\cdots\cdots\frac{3.1}{4.2}.\frac{\pi}{2}$ (**n** = জোড় পূর্ণসংখ্যা হবে)

যেমনঃ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx = \frac{3.1}{4.2}.\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}$

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx = \frac{n-1}{n}.\frac{n-3}{n-2}.\frac{n-5}{n-4}\cdots\cdots.\frac{2}{3}$ [**n** = বিজোড় পূর্ণসংখ্যা হবে]

যেমনঃ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x dx = \frac{5-1}{5}.\frac{5-3}{5-2} = \frac{8}{15}$

গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাক্টিস প্রবলেম

Written

01. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\, x^2 dx = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{\pi^2}{4} - 2\right]$

02. $\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}dx = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\ln 2\right]$

03. $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = ?$ $\left[\text{Ans. } 1 - \frac{\pi}{4}\right]$

04. $\int_2^0 \left\{\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}\right\}dx = ?$ $\left[\text{Ans. } e - \frac{2}{\ln 2}\right]$

05. $\int_2^e \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}\right]dx = ?$ $\left[\text{Ans. } e - \frac{2}{\ln 2}\right]$

06. $\int_0^1 \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}dx = ?$ $\left[\text{Ans. } 1 - \ln 3 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right]$

07. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}dx$ এর মান নির্ণয় কর। [Ans. $2 - \sqrt{2}$]

08. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\sqrt{\sin x}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। $\left[\text{Ans. } \frac{8}{21}\right]$

09. $\int_0^1 \frac{(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}dx$ এর মান নির্ণয় কর। $\left[\text{Ans. } \frac{\pi^3}{192}\right]$

10. $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+\ln x)^2}$ এর মান নির্ণয় কর। $\left[\text{Ans. } \frac{2}{3}\right]$

11. $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। [Ans. 4π]

12. $\int_{-1}^1 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। $\left[\text{Ans. } \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x}dx = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{\pi}{4}\right]$

14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{\sin x}+\sqrt[3]{\cos x}}dx = ?$ [Ans. $\frac{\pi}{4}$]

15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^n}{(\sin x)^n+(\cos x)^n} = ?$ [Ans. $\frac{\pi}{4}$]

16. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}} = ?$ [Ans. $\frac{\pi}{12}$]

17. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x dx}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)} = ?$ $\left[\text{Ans. } \frac{1}{a^2b^2}\right]$

18. $\int_{-1}^{1} |x^2+x|dx = ?$ [Ans. 1]

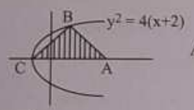
19. $\int_{-5}^{5} |x| . xdx = ?$ [Ans. 0]

20. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x).(\cos x).|x|dx = ?$ [Ans. 0]

21. $y^2 = 4x$ ও $y = x$ দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। $\left[\text{Ans. } \frac{8}{3} \text{ sq unit}\right]$

22. $y = 2x - x^2$ বক্ররেখা ও x অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। $\left[\text{Ans. } \frac{4}{3} \text{ sq unit}\right]$

23. চিত্রে ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [Ans. 45 sq unit]



AB রেখার ঢাল $= -1$ এর কোটি 6

MCQ

24. $\int_3^5 f(x)x = 5$ হলে $\int_1^3 f(x+2)dx = ?$
(a) 5 (b) 3 (c) $x+2$ (d) 0

25. $\int_{6-c}^{9-c} f(x+3)dx = \int_6^9 f(x)dx$ হলে $c = ?$
(a) 3 (b) -3 (c) 0 (d) 4

26. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx = ?$
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

27. $\int_0^1 \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ এর মান —
(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi^2}{8}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi^2}{4}$

28. $\int_1^0 \cos^2 x.dx$ এর মান —
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\sin 2$ (c) $\frac{3\pi}{7}$ (d) $-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sin 2}{2}\right)$

29. $\int_a^b Adx$ এর মান – (A ধ্রুবক)
(a) $A(b-a)+c$ (b) $(b-a)$ (c) $A(b-a)$ (d) $(b-a)+c$

30. $\int_q^p f(t)dt$ জ্যামিতিকভাবে বুঝায় —
(a) ফাংশন (b) আয়তন (c) দৈর্ঘ্য (d) ক্ষেত্রফল

31. $y = \sin x, y = \cos x$ এবং $x = \frac{\pi}{4}$ দ্বারা প্রথম চর্তুভাগে আবদ্ধ ক্ষেত্রফল কত?
(a) $\sqrt{2}-1$ (b) $2\sqrt{2}-1$ (c) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) বের করা সম্ভব নয়

32. $\int_1^p \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \ln 5$ হলে $p = ?$
(a) 3 (b) 2 (c) 12 (d) 7

ইঞ্জিনিয়ারিং কনসেপ্ট বুক
উচ্চতর গণিত ১ম পত্র : অধ্যায়-১০

33. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cot x} = ?$
(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) None

34. $\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{1}{a^2-x^2}dx$ এর মান কত?
(a) $\frac{3}{2}\ln 5$ (b) $\frac{3}{2a}\ln 3$ (c) $\frac{1}{2a}\ln 3$ (d) $\frac{1}{2a}\ln 5$

35. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta + \cos\theta)dx = ?$
(a) $\frac{\pi}{2}(\sin\theta+\cos\theta)$ (b) $-\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

36. $\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}dx = ?$
(a) 4 (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) 6 (d) 2

37. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2\theta}{\cos^2\theta}dx = ?$
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $-\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{2}-1$ (d) $\frac{\pi}{2}-3$

38. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta\, d\theta = ?$
(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{4}-1$ (d) $\frac{\pi}{4}$

39. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x\, dx = ?$
(a) $\frac{1}{7}$ (b) $-\frac{1}{8}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $-\frac{1}{6}$

40. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}dx = ?$
(a) $1\frac{3}{2}$ (b) $2\frac{5}{8}$ (c) $1\frac{3}{5}$ (d) $-1\frac{3}{5}$

41. $\int_0^1 \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx = ?$
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi^2}{8}$ (c) $-\frac{\pi^2}{8}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

42. $\int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{9-2x^2}} = ?$
(a) 4 (b) 1 (c) 6 (d) 2

43. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^3 x + \tan x)dx = ?$
(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $-\frac{1}{2}$

44. $\int_1^{\sqrt{3}} x\tan^{-1}x\, dx = ?$
(a) $e^{\frac{\pi}{1}}$ (b) $\frac{1}{12}(6-6\sqrt{3}+5\pi)$ (c) $e^{\frac{\pi}{3}}$ (d) $e^{-\frac{\pi}{2}}$

45. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx = ?$
(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\ln 2$ (d) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$

46. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{9-\sin^2 x}dx = ?$
(a) $\frac{1}{4}\ln 2$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{6}\ln 2$ (d) $\frac{1}{8}\ln 2$

47. $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = ?$
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi^2}{4}$ (c) $-\frac{\pi^2}{4}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

48. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx = ?$
(a) $\frac{1}{4}\pi a^3$ (b) $\frac{1}{4}\pi a^2$ (c) $\frac{1}{4}\pi a^4$ (d) $-\frac{1}{4}\pi a^2$

প্র্যাকটিস প্রবলেমের সমাধান

Written

01. **Solⁿ:** $\int x^2\cos x dx = x^2\int \cos x dx - \int\left(\frac{d}{dx}x^2\int \cos x dx\right)dx$
$= x^2\sin x - 2\int x\sin x dx = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$
$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, x dx = [x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - 2$ (Ans.)

02. **Solⁿ:** $\int_0^1\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2}\right)dx\ \left[\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$ (Ans.)

03. **Solⁿ:** ধরি, $x = 2\sin\theta,\ dx = 2\cos\theta\, d\theta$
$x = 0$ হলে, $\theta = 0, x = \sqrt{2}, \theta = \frac{\pi}{4}$
$\therefore I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\sin^2\theta\, 2\cos\theta\, d\theta}{[4(1-\sin^2\theta)]^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8\sin^2\theta\cos\theta}{8\cos^3\theta}d\theta = [\tan\theta - \theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$ (Ans.)

04. **Solⁿ:** let, $y = \ln x \Rightarrow x = e^y; dx = e^y dy$
$\int\left\{\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}\right\}dx = \int\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}\right)e^y dy = \frac{e^y}{y} + c = \frac{x}{\ln x}\ \therefore \left[\frac{x}{\ln x}\right]_2^e = e - \frac{2}{\ln 2}$ (Ans.)

05. **Solⁿ:** ধরি, $\ln x = z \Rightarrow x = e^z \Rightarrow dx = e^z dz$ যখন, $x = e, z = 1;\ x = 2,\ z = \ln 2$
$\therefore \int_{\ln 2}^1 e^z\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}\right)dz = \int_{\ln 2}^1 e^z\{f(z)+f'(z)\}dz = [e^z f(z)]_{\ln 2}^1 = e.1 - e^{\ln 2}.\frac{1}{\ln 2} = e - \frac{2}{\ln 2}$ (Ans.)

06. **Ans.** $1 - \ln 3 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

07. **Solⁿ:** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$
$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 x - \sec x\tan x)dx = [\tan x - \sec x]_0^{\frac{\pi}{4}}$
$= \left(\tan\frac{\pi}{4} - \sec\frac{\pi}{4}\right) - (\tan 0 - \sec 0) = (1-\sqrt{2}) - (0-1) = 2-\sqrt{2}$ (Ans.)

08. **Solⁿ:** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\sqrt{\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cos x\sqrt{\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sqrt{\sin x}\cos x\,dx$
মনে করি, $\sin x = z\ \therefore \cos x\, dx = dz$. $x = 0$ হলে, $z = \sin 0 = 1$; $x = \frac{\pi}{2}$ হলে, $z = \sin\frac{\pi}{2} = 1$
$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\sqrt{\sin x}\,dx = \int_0^1(1-z^2)\sqrt{z}\,dz = \int_0^1\left(\sqrt{z} - z^{\frac{5}{2}}\right)\sqrt{z}\,dz = \left[\frac{(z)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{(z)^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}\right]_0^1$
$= \frac{2}{3}\left\{(1)^{\frac{3}{2}} - (0)^{\frac{3}{2}}\right\} - \frac{2}{7}\left\{(1)^{\frac{7}{2}} - (0)^{\frac{7}{2}}\right\} = \frac{2}{3} - \frac{2}{7} = \frac{14-6}{21} = \frac{8}{21}$ (Ans.)

09. **Solⁿ:** $\int_0^1\frac{(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}dx = \int_0^1(\tan^{-1}x)^2 d(\tan^{-1}x) = \left[\frac{1}{3}(\tan^{-1}x)^3\right]_0^1$
$= \frac{1}{3}\{(\tan^{-1}1)^3 - (\tan^{-1}0)^3\} = \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 - (0)^3\right\} = \frac{\pi^3}{192}$ (Ans.)

10. **Solⁿ:** $\int_1^{e^2}\frac{dx}{x(1+\ln x)^2} = \int_1^{e^2}\frac{1}{(1+\ln x)^2}.\frac{1}{x}dx = \int_1^{e^2}\frac{1}{(1+\ln x)^2}d(1+\ln x) = \left[\frac{1}{(1-2)(1+\ln x)^{2-1}}\right]_1^{e^2}$
$= -\left[\frac{1}{1+\ln x}\right]_1^{e^2} = -\left(\frac{1}{1+\ln e^2} - \frac{1}{1+\ln 1}\right) = -\left(\frac{1}{1+2} - \frac{1}{1+0}\right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (Ans.)

11. **Solⁿ:** $\int_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx = \int_0^4\sqrt{4^2-x^2}\,dx = \left[\frac{x\sqrt{4^2-x^2}}{2} + \frac{4^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{4}\right]_0^4$
$= \left(\frac{4\sqrt{4^2-4^2}}{2} + 8\sin^{-1}\frac{4}{4}\right) - \left(\frac{0\sqrt{4^2-0^2}}{2} + 8\sin^{-1}\frac{0}{4}\right)$
$= (0 + 8.\sin^{-1}1) - (0 + 8.\sin^{-1}0) = 8.\frac{\pi}{2} - 8.0 = 4\pi$ (Ans.)

12. **Solⁿ:** ধরি, $I = \int_{-1}^1 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \int_{-1}^1 x^2\sqrt{2^2-x^2}\,dx$ এবং $x = 2\sin\theta\ \therefore dx = 2\cos\theta\, d\theta$
$x = -1$ হলে, $\theta = \sin^{-1}\frac{-1}{2} = -\frac{\pi}{6}$ এবং $x = 1$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{6}$
$\therefore I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(2\sin\theta)^2\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}.2\cos\theta\, d\theta$
$= 8\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\sin^2\theta.2\cos\theta.\cos\theta\, d\theta = 16\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta$
এখন, $\sin^2\theta\cos^2\theta = \frac{1}{4}(2\sin x\cos x)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{4}.\frac{1}{2}(1-\cos 4\theta)$
$\therefore I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{8}(1-\cos 4\theta)d\theta = 2\left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 2\left[\left\{\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\} - \frac{1}{4}\left\{\sin\left(4.\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(4.-\frac{\pi}{6}\right)\right\}\right]$
$= 2\left[\frac{2\pi}{6} - \frac{1}{4}\left\{\sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}\right\}\right] = 2\left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{4}\left(2.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

13. **Solⁿ:** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2 - \frac{1}{2}(2\sin x\cos x)^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x\, dx}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin 2x\, dx}{1+\cos^2 2x}$
$= 2\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(\cos 2x)}{1+(\cos 2x)^2} = -[\tan^{-1}(\cos 2x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$ (Ans.)

14. **Solⁿ:** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{\sin x}+\sqrt[3]{\cos x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[3]{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{\sqrt[3]{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\sqrt[3]{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[3]{\cos x}\,dx}{\sqrt[3]{\sin x}+\sqrt[3]{\cos x}}$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[3]{\sin x}\,dx}{\sqrt[3]{\sin x}+\sqrt[3]{\cos x}} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx = \frac{1}{2}[x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$ (Ans.)

15. **Ans.** $\frac{\pi}{4}$

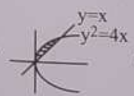
16. **Ans.** $\frac{\pi}{12}$

17. **Solⁿ:** Let, $a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x = z \Rightarrow (a^2-b^2)\sin 2x\, dx = dz$
When, $x = 0,\ z = b^2;\ x = \frac{\pi}{2},\ z = a^2$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x dx}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)} = \frac{1}{a^2-b^2}\int_{b^2}^{a^2}\frac{a^2 dz}{z^2} = \frac{-1}{a^2-b^2}\left[\frac{1}{z}\right]_{b^2}^{a^2} = \frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right) = \frac{1}{a^2b^2}$ [Ans.]

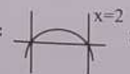
18. **Solⁿ:** $\int_{-1}^1|x^2+x|dx$ |এখানে, $|x^2+x| = |x(x+1)| = \begin{cases} x(x+1); \text{ if, } x\le -1 \text{ or } x\ge 0 \\ -x(x+1); \text{ if, } -1\le x\le 0\end{cases}$
$= \int_{-1}^0 -x(x+1)dx + \int_0^1 x(x+1)dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2} = 1$ (Ans.)

19. **Solⁿ:** $f(x) = |x|.x\ \therefore f(-x) = -|x|.x\ \therefore$ অযুগ্ম ফাংশন। $\int_{-5}^5|x|\,x\,dx = 0$

20. **Solⁿ:** $f(x) = \sin x\cos x\,|x|\ \therefore f(-x) = (-\sin x)\cos x\ |-x| = -\sin x\cos x\,|x| = -f(x)$
$\therefore$ অযুগ্ম ফাংশন। $\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x).(\cos x).|x|dx = 0$ (Ans.

21. **Solⁿ:** 

; $\Delta = \int_0^4(2\sqrt{x}-x)dx = \frac{8}{3}$ sq unit (Ans.)

22. **Solⁿ:** 

; $\Delta = \int_0^2(2x-x^2)dx = \frac{4}{3}$ sq unit (Ans.)

23. **Solⁿ:** Try your self

MCQ

24. **Sol^n:** $\int_b^a f(x)dx = \int_{b-c}^{a-c} f(x+c)dx$

25. **Ans. (a)**

26. **Sol^n: (c);** $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx \cdots\cdots\cdots (i)$

or, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}dx$ [Property, $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$]

$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx \cdots\cdots\cdots (ii)$

এখন, (i) নং এবং (ii) নং যোগ করে পাই, $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = (x)_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow 2I = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$

27. **Sol^n: (b);** $\int_0^1 \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ ধরি, $\sin^{-1}x = z \Rightarrow dz = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

যখন, $x = 0,\ z = 0;\ x = 1,\ z = \frac{\pi}{2}$ $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} z\,dz = \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$

28. **Sol^n: (d);** $\int_1^0 \cos^2 x\,.\,dx = \frac{1}{2}\int_1^0 (1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_1^0 = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sin 2}{2}\right)$

29. **Ans. (c)**

30. **Sol^n: (a);** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,dx = [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}-1$

31. **Sol^n: (a);** $\ln[p^2+1] - \ln 2 = \ln 5 \Rightarrow p^2 = 9 \Rightarrow p = 3$

32. **Sol^n: (c);** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cot x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{\sin x+\cos x} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x+\cos x)+(\sin x-\cos x)}{\sin x+\cos x}dx$

$= \left[\frac{1}{2}\{x - \ln(\sin x+\cos x)\}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$

33. **Ans. (a)**

34. **Sol^n: (c);** $\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\left[\ln\frac{a+x}{a-x}\right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{1}{2a}\left[\ln\frac{\frac{3a}{2}}{\frac{a}{2}}\right] = \frac{1}{2a}\ln 3$

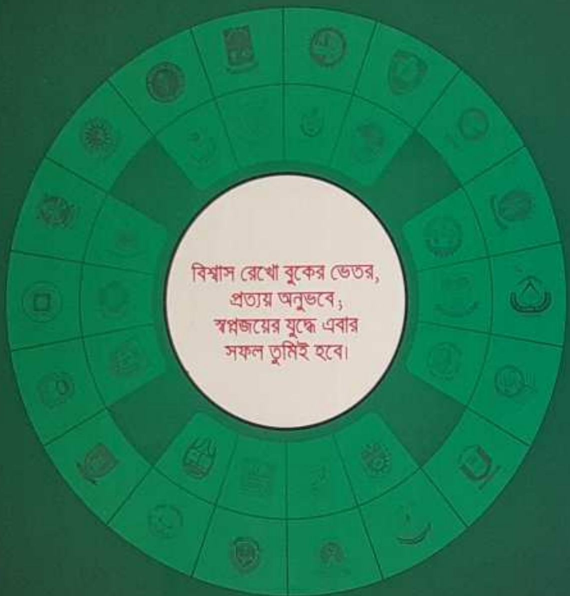
35. **Ans. (a)**
36. **Ans. (b)**
37. **Ans. (c)**
38. **Ans. (d)**
39. **Ans. (c)**
40. **Ans. (c)**
41. **Ans. (b)**
42. **Ans. (b)**
43. **Ans. (a)**
44. **Ans. (b)**
45. **Ans. (a)**
46. **Ans. (c)**
47. **Ans. (a)**
48. **Ans. (b)**

ঢাকার শাখাসমূহ

শাখা	ফোন নং	ঠিকানা
মিরপুর	০১৭১৩২৩৬৭০৪	বাড়ি নং-২৬ (৪র্থ তলা), ১০ নং গোল চত্বর, মিরপুর (মুসলিম বিরিয়ানী হাউজ-এর পেছনে)।
	০১৭১৩২৩৬৭০৫	প্লট-৪ (৪র্থ তলা), ব্লক-বি, সেকশন-৬ (শেরেবাংলা স্টেডিয়ামের ৫নং গেটের বিপরীতে)।
রূপনগর	০১৭১৩২৩৬৭৩৪	বাড়ী নং-২০ (৪র্থ তলা), রোড নং-১২, রূপনগর, মিরপুর।
ক্যান্টনমেন্ট	০১৭১৩২৩৬৭২৪	সিবি ২১১/৪, কচুক্ষেত মেইন রোড, ঢাকা ক্যান্টনমেন্ট (বেসিক ব্যাংক-এর ৪র্থ তলা)।
উত্তরা	০১৭১৩২৩৬৭০৭	সেক্টর নং-৬, রোড নং-১২, হাউজ নং-৭ (৫ম তলা), হাউজ বিল্ডিং, উত্তরা।
ফার্মগেট	০১৭১৩২৩৬৭১০	৭৮ গ্রীন রোড (৪র্থ তলা), ফার্মগেট (হোটেল গ্রীন প্যালেস-এর পাশের বিল্ডিং)।
	০১৭১৩২৩৬৭১১	মালেক টাওয়ার (৬ষ্ঠ তলা, ২য় লিফটের ৫), ফার্মগেট (ফার্মগেট পুলিশ বক্সের বিপরীতে)।
মোহাম্মদপুর	০১৭১৩২৩৬৭০১	বাড়ী নং-১৪/১৭ (২য় তলা), ইকবাল রোড, মোহাম্মদপুর (পোস্ট অফিসের গলি)।
সাইন্স ল্যাব.	০১৭১৩২৩৬৭০৬	৪৭, প্রিয়াঙ্গন শপিং সেন্টার (৪র্থ তলা), সাইন্স ল্যাব., মিরপুর রোড।
আজিমপুর	০১৭১৩২৩৬৭২৫	১৫২ (২য় তলা), আজিমপুর (চায়না বিল্ডিং-এর গলি)।
শান্তিনগর	০১৭১৩২৩৬৭০৩	আল-মদীনা প্যালেস (৪র্থ তলা), শান্তিনগর মোড় (বাটা শো-রুম বিল্ডিং)।
মালিবাগ	০১৭১৩২৩৬৭০২	হোসাফ শপিং কমপ্লেক্স (৪র্থ তলা), মালিবাগ মোড় (মেডিনোভা ডায়াগনস্টিক সেন্টার বিল্ডিং)।
মতিঝিল	০১৭১৩২৩৬৭০৮	১৬৭, ইডেন বিল্ডিং (২য় তলা), মতিঝিল (নটর ডেম কলেজের বিপরীতে)।
বাসাবো	০১৭১৩২৩৬৭২২	১১৪/এ (২য় তলা), সবুজবাগ, বাসাবো (বৌদ্ধ মন্দির-এর বিপরীতে)।
বনশ্রী	০১৭১৩২৩৬৭২৩	বাড়ী নং-১৩, ব্লক-বি (৪র্থ তলা), রামপুরা (মেইন রোড, বনশ্রী প্রজেক্ট)।
পুরান ঢাকা	০১৭১৩২৩৬৭২০	৫ নং ইংলিশ রোড (২য় তলা), রায় সাহেব বাজার (পপুলার ডায়াগনস্টিক সেন্টারের পশ্চিমে)।
যাত্রাবাড়ী	০১৭১৩২৩৬৭১৯	১০১, শহীদ ফারুক সড়ক (৩য় তলা), যাত্রাবাড়ী (অগ্রণী ব্যাংকের পাশের বিল্ডিং)।
দনিয়া	০১৭১৩২৩৬৭১৮	৫৯৪ (২য় তলা), দনিয়া বাজার রোড, দনিয়া (দনিয়া মাজার-এর পাশের বিল্ডিং)।
[illegible]	০১৭১৩২৩৬৭১৭	এলাহী ভিলা, ৩৯/এ (২য় তলা), আল্লামা ইকবাল রোড (জামে মসজিদের দক্ষিণে), চাষাড়া।
[illegible]	০১৭১৩২৩৬৭২১	বাড়ী নং-৮/৩ (নিচতলা), এ-ব্লক, জালেশ্বর, সাভার (রেডিও কলোনী বাসস্ট্যান্ড সংলগ্ন)।
[illegible]	০১৭১৩২৩৬৭৪৬	ও কে টাওয়ার (৩য় তলা), স্বপ্ন শপিং (সরকারি মহিলা কলেজের উত্তর পার্শ্বে), জয়দেবপুর।

ঢাকার বাইরের শাখাসমূহ

[illegible]	০১৭১৩২৩৬৭৩৯	বুলবুল ভিলা (৩য় তলা), বকুলতলা মোড়, খরমপট্টি, কিশোরগঞ্জ।
[illegible]	০১৭১৩২৩৬৭৪৩	বাড়ী নং-৯৬৩, খালেক মঞ্জিল (২য় তলা), মৌলভীপাড়া, ব্রাহ্মণবাড়িয়া।
জামালপুর	০১৭১৩২৩৬৭৪০	বাড়ী নং-৪৮ (৩য় তলা), আমলাপাড়া (জিলা স্কুল-এর বিপরীতে), জামালপুর।
টাঙ্গাইল	০১৭১৩২৩৬৭৩৭	২৮৭, জেলা সদর রোড, আকুরটাকুর পাড়া, টাঙ্গাইল (ধলেশ্বরী হাসপাতাল-এর ৪র্থ তলা)।
পাবনা	০১৭১৩২৩৬৭৩৬	আলিয়া মাদ্রাসা মার্কেট (২য় তলা), রাধানগর, পাবনা।
কুষ্টিয়া	০১৭১৩২৩৬৭৩৫	৩/১ (২য় তলা), বিচারপতি মাহবুব মোর্শেদ সড়ক, পেয়ারাতলা, কুষ্টিয়া।
সিরাজগঞ্জ	০১৭১৩২৩৬৭৪২	বাড়ী নং-৪, এস কে ভবন (৪র্থ তলা), বিএ কলেজ রোড (কাগজ বিতান সংলগ্ন), সিরাজগঞ্জ।
রাজশাহী	০১৭১৩২৩৬৭১৩	বাড়ী নং-১৫৪/২ (৩য় তলা), কাদিরগঞ্জ (নগর ভবনের পশ্চিম পাশে), রাজশাহী।
রংপুর	০১৭১৩২৩৬৭২৬	বাড়ী নং-৩৭ (৪র্থ তলা), মেডিকেল মোড় (রংপুর ক্যান্ট. পাবলিক কলেজ গেটের বিপরীতে)।
বগুড়া	০১৭১৩২৩৬৭২৭	বাড়ী নং-২৯২/৩০৪, ফজল কটেজ (২য় তলা), জলেশ্বরীতলা (কালী মন্দির সংলগ্ন), বগুড়া।
সৈয়দপুর	০১৭১৩২৩৬৭৪১	বাড়ী নং-২০২ (৩য় তলা), দিনাজপুর রোড, নতুন বাবু পাড়া (সিঙ্গার শো-রুমের উপরে)।
দিনাজপুর	০১৭১৩২৩৬৭৩৩	মাহমুদ টাওয়ার (২য় তলা), চারুবাবুর মোড়, দিনাজপুর।
যশোর	০১৭১৩২৩৬৭৩১	জজ কোর্ট মোড়, মতি শপিং কমপ্লেক্স (৩য় তলা), যশোর (প্রেস ক্লাবের পাশের বিল্ডিং)।
খুলনা	০১৭১৩২৩৬৭১৫	বাড়ী নং-৪৬/১ (৫ম তলা), মশিউর রহমান রোড, শান্তিধাম মোড়, খুলনা।
ফরিদপুর	০১৭১৩২৩৬৭৩২	বাড়ী নং-৫৫ (২য় তলা), সারদা সুন্দরী মহিলা, কলেজ রোড (অম্বিকা সড়ক), ঝিলটুলি।
বরিশাল	০১৭১৩২৩৬৭৩০	বাড়ী নং-৩১/৩২, রোজ-বে (নিচ তলা), উত্তর আলেকান্দা, বগুড়া রোড, বটতলা, বরিশাল।
সিলেট	০১৭১৩২৩৬৭২৯	জুবায়ের বাণিজ্যিক ভবন (৪র্থ তলা), চৌহাট্টা (সিভিল সার্জন কার্যালয়-এর বিপরীতে)।
নরসিংদী	০১৭১৩২৩৬৭৩৮	২০৫/০৪, নুসরাত ভিলা (২য় তলা), বালুর মাঠ, পশ্চিম ব্রাহ্মন্দী, নরসিংদী।
ফেনী	০১৭১৩২৩৬৭৪৪	শাহজাহান টাওয়ার (২য় তলা), ট্রাংক রোড (সোনালী ব্যাংকের বিপরীতে), মুক্ত বাজার।
নোয়াখালী	০১৭১৩২৩৬৭৪৫	বাড়ী নং-২০৮, আলিফ প্লাজা (৩য় তলা), প্রধান সড়ক (কৃষি ব্যাংকের উপরে), মাইজদী কোর্ট।
কুমিল্লা	০১৭১৩২৩৬৭২৮	বাড়ী নং-৬৮৬/৬১৮ 'ক' (২য় তলা), ঝাউতলা (সনি-র‍্যাংগস শো-রুমের উপরে)।
চট্টগ্রাম	০১৭১৩২৩৬৭১৪	গুলজার টাওয়ার (৪র্থ তলা), গুলজার মোড়, চকবাজার, চট্টগ্রাম।
ময়মনসিংহ	০১৭১৩২৩৬৭১৬	বাড়ী নং-১৯/এ (২য় তলা), সাহেব আলী রোড, নতুন বাজার, ময়মনসিংহ।

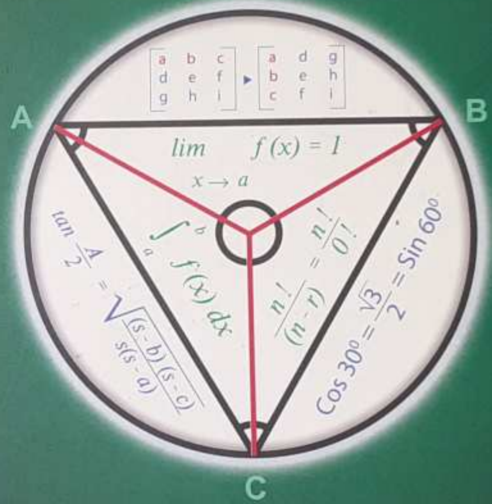


ইঞ্জিনিয়ারিং কনসেপ্ট বুক উচ্চতর গণিত ১ম পত্র

উদ্ভাস

ইঞ্জিনিয়ারিং
কনসেপ্ট বুক

উচ্চতর গণিত
১ম পত্র



উদ্ভাস

একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার