

বিডিনিয়োগ.কম

প্রশ্নমালা 1.1

1. মান নির্ণয় কর :

(i) $|-3 - 5|, ||-2| - |-6||$. (ii) $|-1 - 8| + |3 - 1|; ||2 - 6| - |1 - 9||$. [ব. '০৫]

(iii) $||5 - 6| - |15 - 18||$. (iv) $13 + |-1 - 4| - 3 - |-8|$. [কু. '১০; রা. '১৩]

2. দেখাও যে, যেকোনো বিজোড় সংখ্যার বর্গ বিজোড় সংখ্যা।
3. দেখাও যে, $\sqrt{3}$ অমূলদ সংখ্যা। [রা. '১২; কু. '১৩, য. '১৩, ১৬; সি.চ.তা. '১১; ব. '১২; চ. '১৪]
4. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ মূলদ হতে পারে না।
5. দেখাও যে, দুইটি অসমান মূলদ সংখ্যার মধ্যে অন্য মূলদ সংখ্যা আছে।
6. একটি আবৃত দশমিক নিয়ে প্রমাণ কর যে, আবৃত দশমিককে মূলদ সংখ্যায় প্রকাশ করা যায়।
7. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ সেটের গরিষ্ঠ নিম্নসীমা ও লঘিষ্ঠ উর্ধ্বসীমা নির্ণয় কর।
8. দেখাও যে, $B = \{x \in \mathbf{R} : 0 < x < 2\}$ হলে,
 - (i) B এর একটি উর্ধ্বসীমা 2;
 - (ii) B এর একটি নিম্নসীমা 0;
 - (iii) B এর একটি উর্ধ্বসীমা -1 নয়;
 - (iv) কোনো ঋণাত্মক সংখ্যাই B এর উর্ধ্বসীমা নয়।
9. দেখাও যে, $A = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x \leq 5\}$ হলে,
 - (i) A এর গরিষ্ঠ নিম্নসীমা 0;
 - (ii) যে কোনো ঋণাত্মক সংখ্যাই A এর একটি নিম্নসীমা;
 - (iii) A এর লঘিষ্ঠ উর্ধ্বসীমা 5;
 - (iv) 5 এর চেয়ে বড় যে কোনো সংখ্যাই A এর উর্ধ্বসীমা।
10. প্রমাণ কর যে, $S = \{x \in \mathbf{R} : -3 \leq x < 1\}$ এর লঘিষ্ঠ উর্ধ্বসীমা 1, যা সেটের বৃহত্তম মান নয়।
11. (i) বাস্তব সংখ্যার সেট $S = \{x : 2x^2 - 7x + 3 \leq 0\}$ এর $Sup S$ এবং $Inf S$ নির্ণয় কর।

- (ii) বাস্তব সংখ্যা R এর উপসেট $S = \{x : 5x^2 - 16x + 3 < 0\}$ এর বৃহত্তম নিম্নসীমা ($\text{Inf } S$) এবং ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা ($\text{sup } S$) নির্ণয় কর। [কুয়েট '০৪-'০৫]
12. পরম মান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর :
- (i) $2 \leq x \leq 8$ [য. '০৭] (ii) $-5 < x < 7$ [রা. '১৩] (iii) $3 < x < 7$ (iv) $-7 < x < -1$. [চ. '০৯]
- (v) $-2 < x < 6$ (vi) $8 \leq x \leq 2$ (vii) $-2 < 3 - x < 8$.
 (viii) $-1 < 2x - 3 < 5$. [য. '১০, '১৪; ব. '১১; সি. দি. '১৪; কুয়েট '১০-'১১] [য. '১২]
13. যদি $x < y$ এবং $y < z$ হয়, তবে দেখাও যে $x < z$. [য. '১২]
14. (i) যদি $a < b$ হয়, তবে দেখাও যে, $a + c < b + c$.
 (ii) যদি $a > b$ হয়, তবে দেখাও যে, $a + c > b + c$. যেখানে a, b, c বাস্তব সংখ্যা [রা. '০৮; চ. '১২]
 (iii) যদি $a, b, c \in R$ এবং $a + b = a + c$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $b = c$. [য. রা. '১১; চা. '১২]
 (iv) যদি $a, b, c \in R$, $ac = bc$ এবং $c \neq 0$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a = b$
 [দি.চ. '১০; দি.ব. '১৩; কু. '১৪, '১৬]
 (v) যদি $a, b \in R$ হয়, তবে দেখাও যে, $(-a)(-b) = ab$ [সি. '১১, '১৬]
 (vi) প্রমাণ কর যে, যদি $a \in R$ হয়, তবে $a \cdot 0 = 0$ [দি. '১৬; চা. '০৯; রা. '১৪]
15. পরম মান চিহ্ন ব্যবহার না করে অসমতাগুলি প্রকাশ কর :
- (i) $|x| < 3$. [চা. '০৩] (ii) $|x - 2| < 5$. [দি. '১১] (iii) $|x - 3| < 7$. [কু. '০৫]
 (iv) $|3 - x| > 7$
16. পরম মান চিহ্ন ব্যবহার না করে অসমতাটি প্রকাশ কর : $|2x + 3| < 7$. [চা. '০৯; চ. '১২; রা. '১৬]
17. (i) $\frac{1}{|1 - 5x|} \leq 3$ (যেখানে $x \neq \frac{1}{5}$) সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।
 (ii) পরম মান চিহ্ন ছাড়া প্রকাশ কর : $2 \leq \frac{1}{|x - 1|}$, যখন $x \neq 1$ [রা. '১৫; কুয়েট '০৫-'০৬]
18. পরম মান চিহ্ন ব্যতীত প্রকাশ কর : $\frac{1}{|3x + 1|} \geq 5$. (এখানে $x \neq -\frac{1}{3}$)
 [য. '০৮; চ. '১৩; কুয়েট '১০-'১১]
19. সমাধান কর : (ক) $|5x - 3| < 4$ (খ) $|3x + 2| < 7$. [চ. ব. '০১; সি. '১২]
20. সমাধান কর : (ক) $|2x - 3| > 8$ (খ) $|x - 5| > 4$. [চা. '০২; ব. সি. '১৪]
21. সমাধান কর :
- (ক) $|x + 1| < 3$. (খ) $\frac{1}{|3x - 5|} > 2$. (এখানে $x \neq \frac{5}{3}$) [কু. '১৩]
 (গ) $|2x + 1| < 3$. (ঘ) $|3x - 4| < 2$ [রা. '০৮; দি. '১৩]
22. বাস্তব রেখার সাহায্যে সমাধান কর : $|x| \leq 4$.
23. $|2x - 5| < 3$ কে সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও। [চা. '১৩; কু. '০৮; চ. '১৪]
24. $|2x + 4| < 6$ কে সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।
25. (ক) $|2x + 5| < 1$ কে সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও। [য. '০৯, '১২]
 (খ) $|2 - 8x| \leq 6$ অসমতাটি সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও। [রা. '১৪]
 (গ) $\frac{1}{x + 1} > \frac{2}{x - 1}$ অসমতাটি সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও। [দি. '১৬]

26. x এর বাস্তব মান নির্ণয় কর যার জন্য $\frac{x-1}{|x|}$ বাস্তব সংখ্যা।
27. $|x^2 - 1| \leq 3$ সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।
28. $|x - 1| < \frac{1}{10}$ হলে, দেখাও যে $|x^2 - 1| < \frac{21}{100}$ । [ব. '১৩; রা. দি. '১২; য. ঢা. '১৪; চ. '১২, '১৬]
29. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{a^2} = |a|$ ।
30. প্রমাণ কর যে, $|a|^2 = a^2$ ।
31. প্রমাণ কর যে, $|a - b| \leq |a| + |b|$ । [য. '১০; দি. '১৪; ঢা. '১৬]
32. a এবং b বাস্তব সংখ্যা হলে, প্রমাণ কর যে, $|a - b| \geq ||a| - |b||$ । [ঢা. '১১]
33. প্রমাণ কর যে, $|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$ ।

উত্তরমালা

1. (i) 8, 4 (ii) 11, 4 (iii) 2 (iv) 7. 7. গরিষ্ঠ নিম্নসীমা = 1, লঘিষ্ঠ উর্ধ্বসীমা = 6.
11. (i) $\text{Sup } S = 5, \text{Inf } S = \frac{1}{2}$; (ii) $\text{Inf } S = \frac{1}{5}, \text{Sup } S = 3$.
12. (i) $|x - 5| \leq 3$ (ii) $|x - 1| < 6$ (iii) $|x - 5| < 2$ (iv) $|x + 4| < 3$ (v) $|x - 2| < 4$
 (vi) $|x + 3| \leq 5$. (vii) $|x| < 5$. (viii) $|2x - 5| < 3$. 15. (i) $-3 < x < 3$. (ii) $-3 < x < 7$.
 (iii) $-4 < x < 10$. (iv) $\{x \in \mathbf{R} : x < -4\} \cup \{x \in \mathbf{R} : x > 10\}$ 16. $-5 < x < 2$.
17. (i) $\{x \in \mathbf{R} : x \leq \frac{2}{5}\} \cup \{x \in \mathbf{R} : x \geq \frac{4}{15}\}$, যেখানে $x \neq \frac{1}{5}$
 (ii) $\{x \in \mathbf{R} : \frac{1}{2} \leq x < 1\} \cup \{x \in \mathbf{R} : 1 < x \leq \frac{3}{2}\}$
18. $\frac{-2}{5} \leq x \leq \frac{-4}{15}$, যখন $x \neq \frac{-1}{3}$.
19. (ক) $-\frac{1}{5} < x < \frac{7}{5}$. (খ) $-3 < x < \frac{5}{3}$. 20. (ক) $\{x \in \mathbf{R} : x > \frac{11}{2}\} \cup \{x \in \mathbf{R} : x < \frac{-5}{2}\}$
 (খ) $\{x \in \mathbf{R} : x > 9\} \cup \{x \in \mathbf{R} : x < 1\}$.
21. (ক) $-4 < x < 2$. (খ) $\frac{9}{6} < x < \frac{11}{6}$, যখন $x \neq \frac{5}{3}$.
- (গ) $-2 < x < 1$. (ঘ) $\frac{2}{3} < x < 2$. 22. $-4 \leq x \leq 4$. 23. $1 < x < 4$. 24. $-5 < x < 1$.
25. (ক) $-3 < x < -2$; (খ) $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. (গ) $x < -3$. 26. $\mathbf{R} - \{0\}$. 27. $-2 < x < 2$.

প্রশ্নমালা 1.2

নিচের অসমতাবলি সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যা রেখায় দেখাও :

1. $5x - 16 < 2x + 5.$

2. $\frac{1}{x-5} < 2,$ যেখানে $x \neq 5.$

3. $(2x + 3)(x - 2) \leq 0$

4. $(x + 4)(3x - 2) \geq 0.$

5. $\frac{x+2}{x+1} > \frac{x-3}{x-4}$

6. $\frac{x(x-2)}{x-3} < 0$

7. $\frac{2x+1}{3x-1} < \frac{3x+1}{2x-1}$

8. $\frac{x-4}{x-2} > \frac{x-6}{x-3}$

নিচের যোগাশ্রয়ী অসমতা যুগলের লেখচিত্র অঙ্কন করে সমাধান সেট এলাকা চিহ্নিত কর:

9. $2x - 3y - 2 \geq 0$ এবং $2x + 3y + 4 \leq 0$

10. $x + y - 5 \leq 0$ এবং $2x + y - 6 \geq 0$

11. $3x - 3y - 5 \geq 0$ এবং $3x + y \leq 6$

উত্তরমালা

1. $S = \{x \in \mathbf{R} : x < 7\}$

2. $S = \{x \in \mathbf{R} : x > \frac{11}{2}, x \neq 5\}$

3. $S = \{x \in \mathbf{R} : \frac{-3}{2} \leq x \leq 2\}.$

4. $S = \{x \in \mathbf{R} : x \leq -4\} \cup \{x \in \mathbf{R} : x \geq \frac{2}{3}\}$

5. $S = \{x \in \mathbf{R} : -1 < x < 4\}$

6. $S = \{x \in \mathbf{R} : x < 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} : 2 < x < 3\}$

7. $S = \{x \in \mathbf{R} : x < \frac{1}{3}\} \cup \{x : x \in \mathbf{R} > \frac{1}{2}\}$

8. $S = \{x \in \mathbf{R} : 0 < x < 2\} \cup \{x \in \mathbf{R} : x > 3\}$

প্রশ্নমালা 2.1

1. (i) যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামিং কাকে বলে? যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামিং এর শর্ত এবং সুবিধাগুলি কি কি?
[সি. ০৩, ঢা. ব. ০৪, ঢা. চ. ০৬, ব. ১০; য. চ. ১১, চ. সি. ১৩, মা. বো. রা. চ. কু. ১৪]
- (ii) "আধুনিক উৎপাদন ও বণ্টন ব্যবস্থায় যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামিং একটি অপরিহার্য হাতিয়ার" ব্যাখ্যাসহ বৃষ্টিয়ে লেখ।
2. (i) নিচের যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামকে লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করে
সর্বনিম্ন কর $z = 2x - y$
শর্তগুলি $x + 2y \leq 8, 4x + 3y \geq 12, x + y \leq 5, x \geq 0, y \geq 0.$
[ঢা. ০৫, য. ০৯, কু. ১০, ১৬, মা. বো., ১৪, দি. ১৬]
- (ii) x ও y এর মান নির্ণয় কর যেন $z = 3x + y$ এর মান সর্বোচ্চ হয়।
যখন $2x + y \leq 8, 2x + 3y \leq 12, x \geq 0, y \geq 0$ [মা. বো., রা. ২০১৩]
3. (i) লেখচিত্রের সাহায্যে $Z = 3x + 2y$ এর সর্বোচ্চ মান বের কর।
সীমাবদ্ধতা $x + y \geq 1, y - 5x \leq 0, 5y - x \geq 0, x - y \geq -1$
 $x + y \leq 6, x \leq 3, x, y \geq 0$
- (ii) নিচের যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামকে লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করে সর্বাধিক কর $Z = 3x + 4y$
সীমাবদ্ধতাগুলি $x + y \leq 450$
 $2x + y \leq 600, x \geq 0, y \geq 0$ [চ. ০৫, কু. ০৯, য. ২০১৪]
4. (i) সর্বোচ্চকরণ কর $Z = 2x + 3y,$
যার সীমাবদ্ধতা $x + 2y \leq 10, x + y \leq 6,$
 $x \leq 4, x, y \geq 0.$ [ঢা. কু., রা. চ. ১১, সি. ১৩, দি. ১৪, ঢা. চ. '১৬]
- (ii) নিচের যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামকে লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর এবং সম্ভাব্য এলাকার কৌণিক বিন্দুগুলি নির্ণয় কর।
সর্বনিম্ন কর $Z = 4x + 6y$
শর্তগুলি $x + y \leq 5$
 $x \geq 2, y \leq 4, x, y \geq 0$ [ব. ০২, ০৭, ১০, য. ১১, ঢা. ১৪]
5. লেখচিত্রের সাহায্যে $Z = 2y - x$ এর সর্বনিম্ন মান বের কর।
সীমাবদ্ধতা $3y - x \leq 10, x + y \leq 6, x - y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0$
[চ. ০৫, ব. ০৮, ঢা. রা. য. ০৭, ঢা. ১০, কু. য. ১৩; ব. সি. চ. ১৪]
6. (i) নিম্নের যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামকে লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর $z = 2x + y$
সর্বোচ্চকরণ কর $x + 2y \leq 10, x + y \leq 6, x - y \leq 2$
যেখানে $x - 2y \leq 10, x, y \geq 0.$

(ii) লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করে সর্বোচ্চকরণ কর : $z = 2x + y$.

[সি. ২০১৬]

শর্তসমূহ : $x + 2y \leq 10, x + y \leq 6, 2x + y \geq 8, x \geq 0, y \geq 0$.

7. (i) লেখচিত্রের সাহায্যে $Z = 3x + 5y$ এর সর্ব নিম্নমান নির্ণয় কর :

সীমাবদ্ধতাগুলি : $x \leq 2y + 2, x \geq 6 - 2y, y \leq x, x \leq 6, x, y \geq 0$

(ii) লেখচিত্রের সাহায্যে $Z = 5x + 7y$ এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর :

সীমাবদ্ধতাগুলি : $x + y \leq 4, 3x + 8y \leq 24,$

$10x + 7y \leq 35, x \geq 0, y \geq 0$. রা. ০৫, মা. বো. ১০, ব. সি. ২০১১

8. (i) নিম্নলিখিত শর্তানুসারে $Z = 2x - y$ এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর :

শর্তসমূহ $x + y \leq 5, x + 2y \geq 8, x, y \geq 0$.

মা. বো. ০৬, কু. চ. ০৮, সি. ২০১০, ঢা. ১৩

(ii) নিম্নলিখিত যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামটি লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর :

সর্বোচ্চকরণ : $F = 12x + 10y$

সীমাবদ্ধতা : $2x + y \leq 90, x + 2y \leq 80, x + y \leq 50, x \geq 0, y \geq 0$

[কু. ০৭, ব. ০৯; দি. ১০, রা. ১৬]

যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম গঠন করে লৈখিক পদ্ধতিতে সমাধান কর : (প্রশ্ন 9—21)

9. একজন লোক সর্বাধিক 500 টাকা ব্যয় করে কয়েকটি চায়ের কাপ ও নাস্তার প্লেট কিনতে চান। প্রতিটি চায়ের কাপ 30 টাকা ও প্লেটের দাম 20 টাকা। অন্ততঃ 3টি নাস্তার প্লেট ও 6টির বেশি চায়ের কাপ তিনি কিনবেন না। উপরোক্ত টাকায় তিনি কোন প্রকারের কতগুলি জিনিস কিনলে একত্রে সর্বাধিক জিনিস কিনতে পারবেন?

[কু. ০৪, ঢা. ১৪]

10. একজন ফল বিক্রেতা আম ও পেয়ারা বিক্রি করেন। প্রতি ঝুড়ি আম ও পেয়ারার মূল্য যথাক্রমে 50 টাকা ও 25 টাকা। ঐ বিক্রেতা তার দোকানে 12টির বেশি ঝুড়ি রাখতে পারেন না। প্রতি ঝুড়ি আম ও পেয়ারা বিক্রয়ে লাভ যথাক্রমে 10 টাকা ও 6 টাকা। 500 টাকা মূলধন বিনিয়োগে কত ঝুড়ি আম ও পেয়ারা ক্রয় করলে ঐ বিক্রেতা সর্বোচ্চ লাভ করতে পারবেন?

সি. ০৪, ০৭, কু. ০৬, রা. ১০, ১৩

11. জনৈক ভদ্রলোক সর্বোচ্চ 100 টাকা ব্যয় করে কিছু সংখ্যক কলম ও পেন্সিল কিনতে চান। প্রতিটি কলম ও পেন্সিলের মূল্য যথাক্রমে 12 ও 8 টাকা। তিনি অন্ততঃ একটি কলম কিনবেন কিন্তু 8 টির অধিক পেন্সিল কিনবেন না। ঐ ভদ্রলোক কোনো প্রকারের কতগুলি জিনিস কিনলে একত্রে সর্বাধিক সংখ্যক জিনিস কিনতে পারবেন?

য. ০৭, কু. রা. '০৮; সি. ০৮, ১১, ১৬

12. এক ব্যক্তি 1,200 টাকা দিয়ে মাছের পোনা কিনতে চায়। 100 রুই মাছের পোনার দাম 60 টাকা এবং 100 কাতল মাছের পোনার দাম 30 টাকা হলে, তিনি কোন মাছের কত পোনা কিনতে পারবেন যার মোট সংখ্যা সর্বাধিক 3000 হবে।

ঢা. ০৫; রা. সি. ২০০৬

13. একজন ব্যবসায়ী তার দোকানের জন্য রেডিও এবং টেলিভিশন মিলে 100 সেট কিনতে পারেন। রেডিও সেট ও টেলিভিশন সেট প্রতিটির ক্রয়মূল্য যথাক্রমে 40 ও 120 ডলার। প্রতি রেডিও এবং টেলিভিশন সেটে লাভ যথাক্রমে 16 এবং 32 ডলার। সর্বোচ্চ 10,400 ডলার বিনিয়োগ করে তিনি সর্বোচ্চ কত লাভ করতে পারবেন।

[চ্যুয়েট ০৭-০৮, কুয়েট ০৮-০৯, কু. চ. ১০, ব. ১১, ঢা. ১৩, দি. ১৪, কু. ১৬]

14. এক ব্যক্তি X ও Y দুই রকমের খাদ্য গ্রহণ করেন। তিন ধরনের পুষ্টি N_1, N_2, N_3 এর পরিমাণ, খাদ্যের মূল্য ও পুষ্টির দৈনিক সর্বনিম্ন প্রয়োজন নিম্নরূপ :

মূল্য	X	Y	দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন
	1.00 টাকা	3.00 টাকা	
N_1	30	12	60
N_2	15	15	60
N_3	6	18	36

যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সাহায্যে খাদ্যের এমন একটি সমন্বয় নির্ণয় কর, যা সর্বনিম্ন খরচে ঐ ব্যক্তির দৈনিক প্রয়োজন মেটাবে।

[চ. ২০০৪, সি. ০৫]

15. নিম্নের প্রদত্ত তালিকা থেকে সমাধান বের কর এবং সর্বনিম্ন ব্যয়ে প্রয়োজনীয় পুষ্টি সমন্বিত খাদ্যের সর্বোৎকৃষ্ট সমন্বয় কর। [কু. ২০০১]

প্রতি এককের মূল্য	খাদ্য-A 1.00 টাকা	খাদ্য-B 2.00 টাকা	ন্যূনতম প্রয়োজন
পুষ্টি - I	20	8	40
পুষ্টি - II	10	10	40
পুষ্টি - III	4	12	24

16. A এবং B দুই প্রকার খাদ্যের প্রতি কেজিতে প্রোটিন ও শ্বেতসার এবং পরিমাণ ও তার মূল্য নিম্নের চার্টে দেওয়া হল। সবচেয়ে কম খরচে কিরূপে দৈনিক ন্যূনতম খাদ্যের প্রয়োজন মেটানো সম্ভব? [চ. ২০০০]

খাদ্যের নাম	প্রোটিন	শ্বেতসার	প্রতি কেজির মূল্য
A	8	16	30 টাকা
B	12	6	40 টাকা
দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন	32	22	-

17. X ও Y প্রকারের খাদ্যের প্রতি কেজিতে প্রোটিন ও শ্বেতসার এর পরিমাণ ও তার মূল্য নিম্নরূপ :

খাদ্যের নাম	প্রোটিন	শ্বেতসার	প্রতি কেজির মূল্য
X	8	10	70
Y	12	6	90
দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন	32	22	-

দৈনিক প্রয়োজন সবচেয়ে কম খরচে কিভাবে মিটানো যাবে তা নির্ণয় কর। [কু. ২০০৩]

18. A এবং B দুই ধরনের খাবার আছে, যেগুলির প্রতি কিলোতে নিম্নলিখিত অনুযায়ী প্রোটিন ও ফ্যাট আছে :

খাবার	প্রোটিন	ফ্যাট	কিলোপ্রতি মূল্য
A	1	3	2 টাকা
B	3	2	3 টাকা
দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন	9	12	-

সবচেয়ে কম খরচে প্রত্যহের প্রয়োজন কিভাবে মিটানো যাবে তা নির্ণয় কর। সমস্যাটিকে যোগাশ্রমী প্রোগ্রাম সমস্যায় প্রকাশ কর ও লেখচিত্র পদ্ধতিতে এর সমাধান কর। [য. ২০১৬]

19. একব্যক্তি অনধিক 500 টাকা ব্যয় করে কিছু মুরগি ও হাঁসের বাচ্চা কিনতে চায়। প্রতিটি মুরগি ও হাঁসের বাচ্চার মূল্য যথাক্রমে 20 টাকা ও 25 টাকা। লোকটি কোন প্রকারের কতগুলি বাচ্চা কিনলে মোট বাচ্চার সংখ্যা সর্বাধিক 22 হবে?

20. এক ব্যক্তি তার বাগানে কমপক্ষে 12 টি নারকেলের চারা এবং 8 টি আমের চারা লাগাতে চান। প্রতিটি নারকেলের চারা ও আমের চারার মূল্য যথাক্রমে 20 টাকা এবং 30 টাকা। ঐ ব্যক্তি 600 টাকার বেশির ব্যয় না করে প্রত্যেক প্রকারের কতগুলি চারা কিনতে পারেন যাতে মোট চারার সংখ্যা সর্বাধিক হয়? [দি. ১০]

21. এক পোলট্রির মালিক 800 টাকায় কিছু হাঁস-মুরগির বাচ্চা কিনতে চান। প্রতিটি মুরগির বাচ্চার দাম 40 টাকা এবং প্রতিটি হাঁসের বাচ্চার দাম 20 টাকা। তিনি কোন প্রকারের কতগুলি বাচ্চা কিনতে পারবেন, যাতে তাঁর হাঁস ও মুরগির মোট বাচ্চার সংখ্যা সর্বাধিক 25 হয়। [ব. ২০১৩]

22. আত্মকর্মসংস্থানের লক্ষ্যে এক যুবক তার 2500 বর্গ মিটার জমিতে সর্বাধিক সংখ্যক লিচু ও কাঁঠালের চারা লাগাতে চায়। একটি লিচু ও একটি কাঁঠালের চারার জন্য যথাক্রমে 50 এবং 30 বর্গ মিটার জায়গা প্রয়োজন। প্রতিটি লিচু ও কাঁঠালের চারার ক্রয়মূল্য যথাক্রমে 10 ও 5 টাকা এবং যুবকটি অনধিক 450 টাকা ব্যয় করে মোট কতগুলি চারা লাগাতে পারবে?

উত্তরমালা-২

2. (i) (2, 3), (0, 4), (3, 0), (5, 0), $Z_{\min} = -4$, (ii) $x = 4$, $y = 0$ এবং $Z_{\max} = 12$; 3. (i) $Z_{\max} = 15$; (ii) $Z_{\max} = 1800$ 4. (i) $Z_{\max} = 16$, (ii) $Z_{\min} = 8$; 5. $Z_{\min} = -2$; 6. (i) $Z_{\max} = 10$; (ii) $Z_{\max} = 12$. 7. (i) সর্বনিম্ন = 16; (ii) $Z_{\max} = 24.8$ 8. (i) সর্বনিম্নমান = -5; (ii) $F_{\max} = 580$ 9. প্লেট 22, কাপ 2; 10. 8 ঝড়ি আম এবং 4 ঝড়ি পেয়ারা। 11. 3টি কলম এবং 8টি পেন্সিল। 12. রুই মাছের পোনা 1000 এবং কাতল মাছের পোনা 2000; 13. 2880 ডলার 14. X প্রকারের 3 একক এবং Y প্রকারের 1 একক। 15. A প্রকারের 3 একক এবং B প্রকারের 1 একক। 16. $Z_{\min} = 108\frac{1}{3}$ টাকা, A খাবার $\frac{1}{2}$ কেজি, B খাবার $\frac{7}{3}$ কেজি। 17. $Z_{\min} = 250$; X খাবার 1 কেজি, Y খাবার 2 কেজি। 18. $Z_{\min} = 81/7$ টাকা, A খাবার $18/7$ কেজি B খাবার $15/7$ কেজি। 19. মুরগির বাচ্চা 10টি, হাঁসের বাচ্চা 12টি 20. নারকেলের চারা 18টি আমের চারা 8টি। 21. 15টি মুরগির বাচ্চা এবং 10টি হাঁসের বাচ্চা। 22. লিচুর চারা 20, কাঠালের 50

প্রশ্নমালা ৩

1. আর্গন্ড চিত্রে নিচের সংখ্যাগুলি দেখাও : (ক) $5 + 3i$ (খ) $-8 + 5i$ (গ) $-3 - 2i$ (ঘ) $-8i$.
2. $A + iB$ আকারে প্রকাশ কর : (ক) $\frac{7 + 2i}{5 - 2i}$ (খ) $\frac{3 - \sqrt{2}i}{2 + \sqrt{3}i}$
(গ) $(2 + i)(5 + 3i)(8 + 5i)$.
3. (i) বর্গমূল নির্ণয় কর :
(ক) $-7 + 24i$ [ঢা. '১২] (খ) $7 - 30\sqrt{-2}$ [ব. '১২] (গ) $2i$ [ঢা. '০৯; সি. '১৪]
(ঘ) $-2i$ [ব. '০৫] (ঙ) $-8 - 6i$ [য. দি. '০১; সি. '১১; রা. '১৩; য. চ. '১৪] (চ) $1 + i$
(ছ) $2x + i(x^2 - 1)$ (জ) $2 + \sqrt{x^2 - 4}; |x| > 2$.
(ঝ) $\frac{5 + 12i}{3 - 4i}$. [ব্লুয়েট '০৯-'১০]
(ঞ) প্রমাণ কর যে, $\sqrt{-i} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$. [দি. '০৯]
(ii) ঘনমূলগুলি নির্ণয় কর : (ক) 1 [চ. '১১] (খ) i [ব. '১০, '১৬; কু. '১২; চ. '১৩, দি. সি. '১৬]
(গ) $-i$. [সি. '০৮; ব. য. '১৩; ঢা. '১৪]
(iii) মান নির্ণয় কর : (ক) $\sqrt[6]{-64}$. [দি. '১১; রা. '১৪] (খ) $\sqrt[4]{-81}$. [ঢা. '১০; রা. '১১; কু. '১৬]
4. নিচের জটিল সংখ্যাগুলির মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর :
(ক) $4 + 3i$ (খ) $5 + 6i$ (গ) $3 - 5i$ (ঘ) $1 + \sqrt{3}i$ (ঙ) $a + ai$ (চ) $-1 + \sqrt{3}i$
5. পোলার আকারে প্রকাশ কর :
(ক) $c + id$ (খ) $9 - 5i$ (গ) $2 + 3i$ (ঘ) $9 + i$.
6. (i) $\frac{5 - i}{2 - 3i}$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর ; (ii) দেখাও যে, $\left| \frac{x - iy}{x + iy} \right| = 1$. [য. '০৭]
(iii) $(-\sqrt{3} + i)$ সংখ্যাটির মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর এবং এটিকে পোলার আকারে প্রকাশ কর।
[ব্লুয়েট '১১-'১২]
7. $(a + ib)(c + id) = x + iy$ হলে, দেখাও যে, $(a - ib)(c - id) = (x - iy)$. [চ. '০৬]
8. $z_1 \equiv 9 + 5i$ এবং $z_2 \equiv 3 - 2i$ হলে, প্রমাণ কর, $|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 z_2|$.
9. যদি এককের ঘনমূলের একটি জটিল মূল a হয়, তবে দেখাও যে, $x^3 - 1 = (x - 1)(x - a)(x - a^2)$.
10. a ও b বাস্তব সংখ্যা এবং $a^2 + b^2 = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, x এর একটি বাস্তব মান $\frac{1 - ix}{1 + ix} = a - ib$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে।
[ঢা. '১৪, '১৬; কু. '১৪; রা. '১২, '১৬, সি. চ. দি. '১২]
11. (i) $z = x + iy$ এবং $3|z - 1| = 2|z - 2|$ হলে, প্রমাণ কর যে, $5(x^2 + y^2) = 2x + 7$.
[চ. '১১; '১৩]
(ii) $z = x + iy$ হলে, $|z - 5| = 3$ সমীকরণ দ্বারা নির্দেশিত বৃত্তের ব্যাসার্ধ ও কেন্দ্র নির্ণয় কর। [কু. '০৬]
(iii) যদি $z = x + iy$ হয়, তবে $|z + 8| + |z - 8| = 20$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারণথের সমীকরণ নির্ণয় কর।
[রা. '১০; ব. '১৪]
(iv) $x = 3 + 2i, y = 3 - 2i$ হলে, দেখাও যে, $x^2 + xy + y^2 = 23$. [য. '০৫]
12. এককের একটি ঘনমূল (জটিল) ω হলে, প্রমাণ কর যে,
(ক) $(\omega p + \omega^2 q)(\omega^2 p + \omega q) = p^2 - pq + q^2$;

- (খ) $(p + q + r)(p + q\omega + r\omega^2)(p + q\omega^2 + r\omega) = p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr.$
13. $(x+iy)^{\frac{1}{3}} = p + iq$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(x-iy)^{\frac{1}{3}} = p - iq.$
[দি.সি.'১০; কু. রা. '১১; ঢা. '১৩; বুয়েট '০৩-'০৪; বুয়েট '০৭-'০৮]
14. এককের ঘনমূলগুলির জটিল ঘনমূলদ্বয় যথাক্রমে a ও b হলে, প্রমাণ কর যে,
(ক) $a^3 + a^{-3} = 2$ (খ) $a^2 + ab + b^2 = 0$ (গ) $(1-a)(1-b) = 3.$
15. (i) প্রমাণ কর যে, $\sqrt{i} + \sqrt{-i} = \sqrt{2}.$ [য. '১২; বুয়েট '০৮-'০৯, বুয়েট '১২-'১৩]
- (ii) দেখাও যে, $\sqrt[3]{i} + \sqrt[3]{-i} = 0.$ [বুয়েট '০৫-'০৬]
16. এককের একটি জটিল ঘনমূল ω হলে, প্রমাণ কর :
- (ক) $(1-\omega + \omega^2)^2 + (1 + \omega - \omega^2)^2 = -4.$
- (খ) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8) = 9.$
- (গ) $(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)(1-\omega^{16}) = 9.$ [দি. '১১]
- (ঘ) $(1 + \omega - \omega^5)(\omega + \omega^2 - 1)(\omega^5 + 1 - \omega) = -8.$ [ব. '০৯]
- (ঙ) $(1-\omega + \omega^2)(1-\omega^2 + \omega^4)(1-\omega^4 + \omega^8)(1-\omega^8 + \omega^{16}) = 16.$ [ব. '১১]
- (চ) $(1 + \omega^4 - \omega^2)^3 - (1 - \omega^4 + \omega^2)^3 = 0.$
- (ছ) $(a + b)^2 + (a\omega + b\omega^2)^2 + (a\omega^2 + b\omega)^2 = 6ab.$
[ঢা. '১০, '১৩; য. সি. '১১; চ. '১২; সি. '১৩]
- (জ) $(-1 + \sqrt{-3})^4 + (-1 - \sqrt{-3})^4 = -16.$
[ঢা. '০৯; চ. '১০; সি. রা. '১২; কু. '১০, '১৩, '১৬; য. '১৩; দি. সি. '১৪]
17. $\sqrt[3]{a+ib} = x + iy$ হলে, দেখাও যে, $-2(x^2 + y^2) = \frac{a}{x} - \frac{b}{y}.$ [য. চ. '১৬]
18. (ক) ω এককের একটি জটিল ঘনমূল এবং $(a+b\omega + c\omega^2)^2 + (a\omega + b+c\omega^2)^2 + (a\omega + b\omega^2+c)^2 = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, হয় $a = c$, অথবা $b = \frac{1}{2}(a + c).$ [কু. '১১]
- (খ) $(p\omega^2 + q + r\omega)^3 + (p\omega + q + r\omega^2)^3 = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে,
 $p = \frac{1}{2}(q+r)$ অথবা $q = \frac{1}{2}(r+p)$ অথবা $r = \frac{1}{2}(p+q).$
19. যদি $a + b + c = 0$ এবং এককের একটি কাল্পনিক মূল ω হয়, তবে দেখাও যে,
 $(a + b\omega + c\omega^2)^3 + (a + b\omega^2 + c\omega)^3 = 27abc.$ [সি. র. '১০; ব. '১৩; চ. ঢা. '১৬]
20. $x = 2 + i$ হলে, $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$ এর মান নির্ণয় কর।
21. $a = -1 + i\sqrt{2}$ হলে, দেখাও যে $a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 9 = 12.$
22. $p = \frac{1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $p^6 + p^4 + p^2 + 1 = 0.$ [ঢা. '০৫; চ. '১০; ব. '১১]
23. -1 এর ঘনমূলগুলি নির্ণয় কর।
24. $x^4 + 81 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি নির্ণয় কর।
25. যদি x_1 ও $x_2 = (a + ib)$ ও $(c + id)$ হয়, তবে
প্রমাণ কর যে, $(c^2 + d^2)x_1^2 - 2(ac + bd)x_1x_2 + (a^2 + b^2)x_2^2 = 0.$
[য. '১০; দি. '১২; দি. ব. কু. '১৪]
26. (i) $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ হলে, প্রমাণ কর যে,
 $(a_0 - a_2 + a_4 - \dots)^2 + (a_1 - a_3 + a_5 - \dots)^2 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2^n.$
[কু. '১২; রা. '১৩]

(ii) $(1+x+x^2)^n = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_{2n}x^{2n}$ হলে, প্রমাণ কর যে,
 $p_0 + p_3 + p_6 + \dots = 3^{n-1}$.

[চ. '০৮]

27. প্রমাণ কর যে, $\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right)^n = 2$ বা -1 , যখন n এর মান যথাক্রমে 3 দ্বারা বিভাজ্য বা n এর মান অপূর্ণ যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা হয়।
28. যদি $9 + i, 4 + 13i, -8 + 8i$ এবং $-3 - 4i$ সংখ্যাগুলি আর্গন্ড চিত্রে যথাক্রমে A, B, C, D বিন্দু সূচিত করে, তবে প্রমাণ কর যে, $ABCD$ একটি বর্গ।
29. যদি z এবং a জটিল সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
 $|z + a|^2 + |z - a|^2 = 2(|z|^2 + |a|^2)$.

উত্তরমালা

2. (ক) $\frac{31}{29} + i\frac{24}{29}$, (খ) $\frac{6-\sqrt{6}}{7} - i\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{7}$, (গ) $1 + i123$.
3. (i) (ক) $\pm(3 + 4i)$, (খ) $\pm(5 - 2\sqrt{2}i)$, (গ) $\pm(1 + i)$, (ঘ) $\pm(1 - i)$, (ঙ) $\pm(1 - 3i)$
 (চ) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}} + i(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}\}$, (ছ) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\{(x+1) + (x-1)i\}$.
 (জ) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{x+2} + i\sqrt{x-2})$, (ঝ) $\pm\left(\frac{4}{5} + \frac{7i}{5}\right)$. (ii) (ক) $1, \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3}i)$
 (খ) $-i, \frac{1}{2}(\pm\sqrt{3} + i)$, (গ) $i, \frac{1}{2}(\pm\sqrt{3} - i)$. (iii) (ক) $\pm 2i, \pm\sqrt{3} \pm i$; (খ) $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$
4. (ক) $5, \tan^{-1}\frac{3}{4}$; (খ) $\sqrt{61}, \tan^{-1}\frac{6}{5}$; (গ) $\sqrt{34}, \tan^{-1}\left(\frac{-5}{3}\right)$; (ঘ) $2, \frac{\pi}{3}$; (ঙ) $\sqrt{2}a, \frac{\pi}{4}$.
 (চ) $2, \frac{2\pi}{3}$. 5. (ক) $\sqrt{c^2 + d^2}(\cos \theta + i \sin \theta)$, যখন $\tan \theta = \frac{d}{c}$;
 (খ) $\sqrt{106}(\cos \theta + i \sin \theta)$, যখন $\tan \theta = -\frac{5}{9}$; (গ) $\sqrt{13}(\cos \theta + i \sin \theta)$, যখন $\tan \theta = \frac{3}{2}$;
 (ঘ) $\sqrt{82}(\cos \theta + i \sin \theta)$, যখন $\tan \theta = \frac{1}{9}$. 6. (i) $\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}$.
 (iii) $2, \frac{5\pi}{6}, 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$ 11. (ii) বৃত্তের কেন্দ্র $(5, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= 3$;
 (iii) $9x^2 + 25y^2 = 900$. 20. 0. 23. $-1, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3}), \frac{1}{2}(1 - \sqrt{-3})$.
 24. $\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$.

প্রশ্নমালা 4

1. ক. নিচের সমীকরণগুলির সমাধান কর : (উৎপাদকের সাহায্যে)

(i) $x^2 - 3x - 28 = 0$; (ii) $10x^2 - 31x + 15 = 0$;

(iii) $x^2 - 10x + 23 = 0$; (iv) $x^2 - 6x + 34 = 0$

খ. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-c} = 0$ সমীকরণের মূলগুলি বাস্তব সংখ্যা হবে, যদি c বাস্তব সংখ্যা হয়।

2. p এবং q পূর্ণসংখ্যা হলে, প্রমাণ কর যে, $x^2 + 2x = (2p + 2q + 1)(2p + 2q - 1)$ সমীকরণটির উভয় মূল পূর্ণ সংখ্যা হবে।

3. $2x^2 - 2(a + d)x + a^2 + d^2 = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব সংখ্যা হলে, প্রমাণ কর যে, $a = d$.

4. (i) m এর মান কত হলে, $x^2 - (3m - 1)x + (5m + 1) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হবে?

(ii) k এর মান কত হলে, $(4 - k)x^2 + (2k + 4)x + (8k + 1) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হবে ?

(iii) k এর মান কত হলে, $(k - 1)x^2 - (k + 2)x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি বাস্তব এবং সমান হবে ?

রা. '০৮; য. '১২; দি. তা. ২০১৩।

(iv) k এর মান কত হলে, $(3k + 1)x^2 - (k + 11)x + 9 = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি জটিল হবে?

বুয়েট '১১-'১২।

5. (i) a, b, c বাস্তব সংখ্যা হলে, প্রমাণ কর যে, $x^2 - 2(a + b)x + (a + b)^2 + c^2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল সংখ্যা হবে।
- (ii) p এবং q মূলদ হলে, প্রমাণ কর যে, $(p^2 - q^2)x^2 + 2(p^2 + q^2)x + (p^2 - q^2) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সব সময় মূলদ হবে। [ঢা. '০৫; কু. '১৬]
- (iii) প্রমাণ কর যে, $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সর্বদাই বাস্তব হবে। [ব. '১৩]
- (iv) যদি a, b, c মূলদ এবং $a + b + c = 0$ হয়, তবে দেখাও যে,
 $(b + c - a)x^2 + (c + a - b)x + (a + b - c) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় মূলদ হবে। [ঢা. '১২; '১৪; কু. '১৩]
- (v) যদি a, b, c বাস্তব হয়, তাহলে $x^2 - (a + b)x + ab - c^2 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি বাস্তব হবে। যদি মূল দুইটি সমান হয়, তবে a, b, c এর মান সম্পর্কে কি সিদ্ধান্ত গ্রহণ করা যাবে? [কু. '১৪]
6. (i) $ax^2 + 2bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব সংখ্যা ও অসমান হলে, প্রমাণ কর যে,
 $x^2 + 2(a + c)x + (a^2 + c^2 + 2b^2) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল সংখ্যা হবে।
- (ii) $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি বাস্তব ও অসমান হলে, দেখাও যে,
 $2x^2 - 4(1 + c)x + (b^2 + 2c^2 + 2) = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি জটিল হবে। [কুয়েট '০৫-'০৬]
7. (i) $(a^2 + b^2)x^2 - 2(ap + bq)x + p^2 + q^2 = 0$ এর মূলদ্বয় পরস্পর সমান হলে,
 প্রমাণ কর যে, $\frac{a}{b} = \frac{q}{p}$.
- (ii) $(a^2 - bc)x^2 + 2(b^2 - ac)x + (c^2 - ab) = 0$ এর মূলদ্বয় পরস্পর সমান হলে, প্রমাণ কর যে,
 $b = 0$ অথবা $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.
8. প্রমাণ কর যে, কেবল $p = q$ হলে, $2x^2 - 2(p + q)x + (p^2 + q^2) = 0$ এর মূলদ্বয় বাস্তব হতে পারে। [য. '১০]
9. $(a^2 + b^2)x^2 + 2(ac + bd)x + (c^2 + d^2) = 0$ এর মূলদ্বয় বাস্তব হলে, প্রমাণ কর যে, তারা পরস্পর সমান হবে। পরস্পর সমান মূলদ্বয় নির্ণয় কর।
10. যদি $p^2x^2 + 6pqx + pr + 8q^2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
 $pr(x + 1)^2 = 4q^2x$ সমীকরণটির মূলদ্বয়ও সমান হবে। [য. '০৯; রা. '১৬]
11. (i) দেখাও যে, $(h^2 - a^2)x^2 - 2hcx + (k^2 - b^2)$ একটি পূর্ণ বর্গ হবে, যদি $\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = 1$ হয়। [সি. '১০]
- (ii) $x^2 + ax + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় অসমান বাস্তব সংখ্যা হলে, প্রমাণ কর যে, k এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য $x^2 + ax + b + k(2x + a) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ও বাস্তব সংখ্যা এবং অসমান হবে।
- (iii) k এর মান কত হলে, $x^2 - (k + 7)x + 27 = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির তিন গুণ হবে?
- (iv) $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয়ের অনুপাত $3 : 4$ হলে, প্রমাণ কর যে, $12b^2 = 49ac$ । [ঢা. '১১]
- (v) $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয়ের অনুপাত $4 : 5$ হলে, প্রমাণ কর যে, $20b^2 = 81ac$.

(vi) $ax^2 + bx + b = 0$ এর মূলদ্বয়ের অনুপাত $m : n$ হলে, প্রমাণ কর যে,

$$\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = 0.$$

[কু. '১০; রা. '১২, '১৪; ব. সি. '১২; কু. য. '১৪, বুয়েট '০৮-'০৯]

12. (i) k এর মান কত হলে, $(k+1)x^2 + 2(k+3)x + 2k+3$ রাশিটি পূর্ণ বর্গ হবে? [কু. '০৬; বুয়েট '১১-১২]

(ii) k এর মান কত হলে $(k^2-3)x^2 + 3kx + (3k+1) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় পরস্পর উল্টা হবে। [কু. '১০]

13. (i) যদি $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের পার্থক্য 1 হয়, তবে প্রমাণ কর যে, [ঢা. '০৭; ব. ০৮; রা. '১৩]

$$p^2 + 4q^2 = (1 + 2q)^2.$$

(ii) $2bx^2 + 2(a+b)x + 3a = 2b$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির দ্বিগুণ হলে, প্রমাণ কর যে, [চ. '০১, '১৬; সি. '১৪, '১৬]

$$a = 2b \text{ অথবা } 4a = 11b.$$

(iii) $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা সংখ্যা হলে, প্রমাণ কর যে, [ব. '১০; য. '১১; ঢা. '১৩]

$$p^2 - 4q - 1 = 0.$$

(iv) যদি $x^2 - bx + c = 0$ এবং $x^2 - cx + b = 0$ এর মূলদ্বয়ের পার্থক্য একটি ধ্রুব রাশি হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $b + c + 4 = 0$. [ঢা. '১০, '১৬; সি. কু. '১২; য. '১৩; টেক্সটাইল '০৩-'০৪]

(v) যদি $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এর মূলদ্বয়ের অনুপাত $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ এর মূলদ্বয়ের অনুপাতের সমান হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{b_1^2}{a_1c_1} = \frac{b_2^2}{a_2c_2}$. [য. '০৩]

14. (i) k এর মান কত হলে, $(k^2-3)x^2 + 3kx + (3k+1) = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির উল্টো হবে? অতঃপর সমীকরণের মূলদ্বয়ের ধর্ম নির্ণয় কর। [বুয়েট '০৪-'০৫]

(ii) $mx^2 + nx + l = 0$ সমীকরণের মূল দুইটির অনুপাত r হলে, দেখাও যে,

$$\frac{(r+1)^2}{r} = \frac{n^2}{ml}.$$

[কু. '০৮; বুয়েট '১০-'১১]

15. (i) যদি $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$p^3 - q(3p-1) + q^2 = 0.$$

[ব. '০৫]

(ii) যদি $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$c(a-b)^3 = a(c-b)^3.$$

[ব. '০৭]

16. যদি $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$a^2c + ac^2 + b^3 = 3abc.$$

[য. '১৬; ঢা. '০৯]

17. $27x^2 + 6x - (p+2) = 0$ এর একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হলে, p এর মান নির্ণয় কর।

[ঢা. '০৬; য. '১৩; সি. ১১; রা. চ. ১২; বুয়েট '০৩-'০৪]

18. $\frac{1}{x} + \frac{1}{p-x} = \frac{1}{q}$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অন্তর r হলে, p কে q ও r এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

[য. দি. '১৪, '১৬]

19. $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূল α, β হলে, নিচের প্রতিসম রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

ক. $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ খ. $\frac{1}{\alpha - 4\beta} + \frac{1}{\beta - 4\alpha}$ গ. $\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2}$

ঘ. $(a\alpha + b)^{-2} + (a\beta + b)^{-2}$ [চ. '১২, সি. '১৩, '১৬, বুয়েট '০৭-'০৮]

ঙ. $(a\alpha + b)^{-3} + (a\beta + b)^{-3}$.

20. (i) $4x^2 - 5x + 1 = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি α ও β হলে, $\alpha + \frac{1}{\beta}$ এবং $\beta + \frac{1}{\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর। [ঢা. '০৮; রা. '১০; কু. '১১, '১৩; ব. সি. '১৪]

(ii) $5x^2 - 13x + 2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে, $(\alpha + \beta)$ এবং $\frac{1}{2}\alpha\beta$ মূলদ্বয় দ্বারা গঠিত সমীকরণটি নির্ণয় কর। [চ. '১৬]

(iii) একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূল দুইটি যথাক্রমে $17x^2 - 3x + 14 = 0$ এর মূলদ্বয়ের যোগফল ও গুণফলের সমান হবে।

(iv) $5x^2 - 13x + 7 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে, $\frac{\alpha^2}{\beta}$ এবং $\frac{\beta^2}{\alpha}$ দ্বারা গঠিত সমীকরণটি নির্ণয় কর।

(v) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে, $\alpha^2 + \beta$ এবং $\beta^2 + \alpha$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর।

(vi) এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূল দুইটি যথাক্রমে $x^2 - 2bx + b^2 - a^2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের সমষ্টি এবং অন্তরফলের যোগবোধক মান হবে। [রা. দি. '১৪; য. '১২; কু. '০৯]

21. (i) $ax^2 + bx - a = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $a\alpha + b$ এবং $a\beta + b$ মূলদ্বয় দ্বারা গঠিত সমীকরণটি নির্ণয় কর। [ঢা. '০৫]

(ii) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, এরূপ সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় $\alpha + \frac{1}{\beta}$ এবং $\beta + \frac{1}{\alpha}$ । [কু. '০৮]

22. $px^2 + qx - p = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $p\alpha + q$ এবং $p\beta + q$ মূলদ্বয় দ্বারা গঠিত সমীকরণটি নির্ণয় কর এবং প্রমাণ কর যে, $(p\alpha + q)(p\beta + q) = -p^2$ । [য. '১০]

23. (i) যদি $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি α ও β হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$qx^2 - (p^2 - 2q)x + q = 0 \text{ সমীকরণের একটি মূল } \frac{\alpha}{\beta} \text{ হবে।}$$

(ii) $x^2 + ax + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $(\alpha - \beta)^2$ এবং $(\alpha + \beta)^2$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর। [ব. য. '০৫]

(iii) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β । এমন একটি সমীকরণ গঠন কর যার মূলদ্বয় $\alpha + \beta$ এবং $\alpha - \beta$ ($\alpha > \beta$)। [ঢা. '১০]

(iv) $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + \sqrt{\beta}$ এবং $\alpha - \sqrt{\beta}$ হলে, প্রমাণ কর যে,

$$(p^2 - 4q)(p^2x^2 + 4px) - 16q = 0 \text{ সমীকরণের মূলদ্বয় } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \text{ এবং } \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \text{ হবে।}$$

[ছয়েট, '০৭-'০৮]

24. মূলদ সহগবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন কর যার একটি মূল

ক. $\frac{1}{3 + \sqrt{2}i}$ খ. $\frac{1}{2 - \sqrt{5}}$



প্রতিদিনের চাকুরীর মার্কুলার পেতে [এখানে ক্লিক করুন](#)

প্রতি মাসের কারেন্ট অ্যাফেয়ার্স পিডিএফ [এখানে ক্লিক করুন](#)

চাকুরীর প্রয়োজনীয় সকল পিডিএফ বই [এখানে ক্লিক করুন](#)

বিসিএম এর প্রয়োজনীয় পিডিএফ বই [এখানে ক্লিক করুন](#)

প্রতি সপ্তাহের চাকুরী পত্রিকা ডাউনলোড [এখানে ক্লিক করুন](#)

সকল নিয়োগ পরীক্ষার প্রশ্ন সমাধান [এখানে ক্লিক করুন](#)

বিডিনিয়োগ.কম দেশের মেরা পিডিএফ কালেকশন

SSC এর প্রয়োজনীয় সকল পিডিএফ বই [এখানে ক্লিক করুন](#)

HSC এর প্রয়োজনীয় সকল পিডিএফ বই [এখানে ক্লিক করুন](#)

বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তির সকল পিডিএফ বই [এখানে ক্লিক করুন](#)

সকল ধরনের **মাজেশন** ডাউনলোড [এখানে ক্লিক করুন](#)



25. যদি $px^2 + 8(q-p)x + 4(4p-8q+r) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $(4-2\alpha)$ এবং $(4-2\beta)$ হয়, তাহলে α ও β মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর।
26. (i) $x^2 - 6x + p = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β এবং $8x^2 + 10x + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ ও $\frac{1-\beta}{\beta}$ হলে, p এবং q এর মান নির্ণয় কর।
- (ii) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $cx^2 - 2bx + 4a = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি α এবং β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [দি. '১০; রা. '১১]
- (iii) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে, $a c(x^2 + 1) - (b^2 - 2ac)x = 0$ এর মূলদ্বয়কে α ও β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [চ. '০৯, '১৩; বুয়েট '১২-'১৩]
- (iv) $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত এবং $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত পরস্পর সমান হলে, প্রমাণ কর যে, $b^2q = p^2c$ ।
- (v) $x^2 + px + q = 0$ এর মূলদ্বয় α ও β এবং $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় γ ও δ হলে, $(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta) + (\beta - \gamma)(\beta - \delta)$ এর মান p, p_1, q, q_1 এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।
27. $bx^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β ($\alpha \neq \beta$) হলে, প্রমাণ কর যে, $\alpha^2 + \alpha$ এবং $\beta^2 + \beta$ মূলদ্বয়বিশিষ্ট সমীকরণটি $b^2x^2 + 2bcx + c^2 = 0$ হবে। যদি D_1 এবং D_2 যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় সমীকরণের পৃথায়কের সমান হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{D_2}{D_1} = 0$ ।
28. $ax^2 + 2bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β এবং $Ax^2 + 2Bx + C = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $(\alpha + \delta)$ ও $(\beta + \delta)$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{b^2 - ac}{a^2} = \frac{B^2 - AC}{A^2}$ ।
29. প্রমাণ কর যে, $2p^2x^2 + 2pqx + q^2 - 3p^2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের বর্গের সমষ্টি একটি স্বাভাবিক সংখ্যা হবে।
30. $x^2 + px + \frac{1}{4}(p^2 - q^2) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে, প্রমাণ কর যে, $x^2 + (p \pm q)x \pm pq = 0$ সমীকরণগুলির যে কোনটির মূল দুইটি হবে $\alpha + \beta$ ও $\alpha - \beta$ । [রা. '০২]
31. $x^2 + kx - 6k = 0$ এবং $x^2 - 2x - k = 0$ সমীকরণ দুইটির একটিমাত্র সাধারণ মূল থাকলে k এর মানগুলি নির্ণয় কর। [রা. '০৭, '১৬; ব. '০৭; তা. '১২; সি. '১৩]
32. (i) যদি $px^2 + qx + 1 = 0$ এবং $qx^2 + px + 1 = 0$ সমীকরণ দুইটির একটিমাত্র সাধারণ মূল থাকে, তবে প্রমাণ কর যে, $p + q + 1 = 0$ । [য. '১৬; দি. '১০; রা. সি. '১১]
- (ii) যদি $ax^2 + 2cx + b = 0$ এবং $ax^2 + 2bx + c = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকে, তবে $a + 4b + 4c$ এর মান নির্ণয় কর। [বুয়েট, '০৯-'১০]
- (iii) যদি $x^2 + px + q = 0$ এবং $x^2 + qx + p = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকে, তবে $2x^2 + (p + q - 2)x = (p + q - 2)^2$ সমীকরণের মূলদ্বয় নির্ণয় কর। [বুয়েট '০২-'০৩]
33. $x^2 + px + q = 0$ এবং $x^2 + qx + p = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটিমাত্র সাধারণ মূল থাকলে, প্রমাণ কর যে, এদের অপর মূল দুইটি $x^2 + x + pq = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয় হবে। [দি. '১২]
34. $ax^2 + bx + c = 0$ এর একটি মূল $cx^2 + bx + a = 0$ সমীকরণের একটি মূলের দ্বিগুণ হলে, প্রমাণ কর যে, $2a = c$ অথবা $(2a + c)^2 = 2b^2$ । [য. ব. '১১; তা. '১১, '১৪]
35. (i) যদি $x^2 + bx + c = 0$ এবং $x^2 + mx + n = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকে, তাহলে প্রমাণ কর যে, সাধারণ মূলটি $\frac{bn - cm}{m - b}$ এর বর্গমূল হবে।

- (ii) $ax^2 + bx + c = 0$ এর একটি মূল $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এর একটি মূলের উল্টা (Reciprocal) হলে, প্রমাণ কর যে, $(a a_1 - c c_1)^2 = (b c_1 - a b_1) (b_1 c - a_1 b)$.
- (iii) $x^2 - px + q = 0$ এর একটি মূল $x^2 - p_1x + q_1 = 0$ এর একটি মূলের অর্ধেক হলে, প্রমাণ কর যে, $(4q - q_1)^2 = 2(2p_1q - pq_1) (2p - p_1)$.
36. $p + q + r = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^2 + px + qr = 0$, $x^2 + px + rp = 0$ এবং $x^2 + rx + pq = 0$ সমীকরণগুলির প্রতি জোড়ায় একটি করে সাধারণ মূল আছে।
37. $ax^2 + bx + c$ এবং $cx^2 + bx + a$ দ্বিঘাত রাশিদ্বয়ের কেবল একটি সাধারণ উৎপাদক থাকার শর্তের সম্পর্কটি নির্ণয় কর।
38. যদি x এর মান বাস্তব হয়, তাহলে a এর কোন মানের জন্য $4x^2 - 3ax + 1 - a^2$ রাশিটির মান সব সময় ধনাত্মক হবে?
39. x এর মান বাস্তব হলে, $-9x^2 + 6px + q^2$ এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর।
40. প্রমাণ কর যে, x বাস্তব সংখ্যা হলে, $\frac{2x^2 + 4x + 1}{x^2 + 4x + 2}$ এর মান যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে।
41. x বাস্তব সংখ্যা হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x + 1}$ এর মান 2 এবং $\frac{2}{3}$ এর মধ্যে থাকে।

ত্রিঘাত সমীকরণ সম্পর্কিত প্রশ্ন

42. (i) $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলগুলি α, β, γ হলে, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ এর মান নির্ণয় কর।
(ii) যদি $x^3 + px + q = 0$ এর মূলগুলি α, β, γ হয়, তবে $\sum \alpha^2 \beta^2$ এর মান নির্ণয় কর।
[ছুরেট '১২-'১৩]
43. (i) $3x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি α, β, γ হলে, $\sum \alpha^2 \beta$ এর মান নির্ণয় কর। [য.'০৫]
(ii) $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলগুলি α, β, γ হলে, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ এর মান নির্ণয় কর।
[রা. '১০, ১৩]
- (iii) $x^3 + px + r = 0$ সমীকরণের মূলগুলি a, b, c হলে, $(b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2$ এর মান নির্ণয় কর।
[চ. '০৫]
44. যদি $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ সমীকরণের মূলগুলি a, b, c হয়, তবে মান নির্ণয় কর :
(i) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ [দি. '০৯] (ii) $\frac{1}{b^2 c^2} + \frac{1}{c^2 a^2} + \frac{1}{a^2 b^2}$. [সি. '০৯' চ. '১৪]
45. $x^3 - px + q = 0$ সমীকরণের মূলগুলি α, β, γ হলে, মান নির্ণয় কর :
(i) $(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)(\alpha + \beta)$ (ii) $(\beta + \gamma - \alpha)(\gamma + \alpha - \beta)(\alpha + \beta - \gamma)$.
46. যদি α, β, γ ত্রিঘাত সমীকরণ $2x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$ এর মূল হয়, তবে ঐ ত্রিঘাত সমীকরণ গঠন কর যার মূলগুলি $\frac{1}{2\alpha}, \frac{1}{2\beta}, \frac{1}{2\gamma}$.
47. $x^3 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলগুলি α, β, γ হলে, ঐ ত্রিঘাত সমীকরণটি গঠন কর যার মূলগুলি $\frac{\alpha + \beta}{\gamma^2}, \frac{\beta + \gamma}{\alpha^2}, \frac{\alpha + \gamma}{\beta^2}$.
48. মূলদ সহগবিশিষ্ট ত্রিঘাত সমীকরণ গঠন কর যার দুইটি মূল -3 এবং $2 + 3i$.
49. সমাধান কর :
(ক) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$, যদি একটি মূল 3 হয়।

- (খ) $x^3 - 7x^2 + 8x + 10 = 0$, যদি একটি মূল $1 + \sqrt{3}$ হয়।
- (গ) $x^3 - 9x^2 + 24x - 20 = 0$, যদি দুইটি মূল পরস্পর সমান হয়।
- (ঘ) $5x^3 - 31x^2 + 31x - 5 = 0$, যদি দুইটি মূলের গুণফল 1 হয়।
- (ঙ) $x^4 + 3x^3 - 19x^2 - 3x + 18 = 0$, যদি দুইটি মূল 1 এবং -1 হয়।
- (চ) $x^4 - 10x^3 + 21x^2 + 10x - 22 = 0$, যদি একটি মূল $5 + \sqrt{3}$ হয়।
- (ছ) $4x^3 + 16x^2 - 9x - 36 = 0$, যদি দুইটি মূলের যোগফল 0 হয়। [চ. '১৪]
- (জ) $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$, যদি একটি, মূল অপর একটি মূলের দ্বিগুণ হয়;
- (ঝ) তবে $3x^3 - 13x^2 - x + 6 = 0$, যদি দুইটি মূলের যোগফল 5 হয়। [কু. '১১]
- (ঞ) $x^3 - 9x^2 + 14x + 24 = 0$, যদি দুইটি মূলের অনুপাত 3 : 2 হয়।
- (ট) $2x^3 - x^2 - 22x - 24 = 0$ এর দুইটি মূলের অনুপাত 3 : 4 হয়। [সি. '১০; দি. '১১; চ. '১৩]
50. $x^3 - 5x^2 + 17x - 13 = 0$ সমীকরণটির একটি মূল 1 হলে, অপর মূল দুইটি নির্ণয় কর। [চা. '০৪; য. ০৭; ব. '১২]
51. একটি মূল $1 + i$ হলে $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর। [চ. '০৩]
52. 'a' এর বাস্তব মান কত হলে, $x^3 + 3ax^2 + x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি সমান্তর প্রগমণে থাকবে? সমীকরণটির মূলগুলিও নির্ণয় কর। [বুয়েট '১৪-'১৫]

উত্তরমালা

1. ক. (i) 7, -4; (ii) $\frac{5}{2}, \frac{3}{5}$; (iii) $5 + \sqrt{2}, 5 - \sqrt{2}$; (iv) $3 + 5i, 3 - 5i$. 4. (i) $3, -\frac{1}{9}$.
- (ii) 0, 3. (iii) 2, 10. (iv) $1 < k < 85$. 5. (v) $a = b$ এবং $c = 0$. 9. $\frac{ac + bd}{a^2 + b^2}$
11. (iii) 5, -19. 12. (i) 3, -2; (ii) 4, -1. 14. (i) 4, -1, 17. 6, -1. 18. $2q \pm \sqrt{4q^2 + r^2}$
19. ক. $\frac{b^2 - 2ac}{c^2}$ খ. $\frac{3ab}{25ac - 4b^2}$ গ. $\frac{-b(b^2 - 3ac)}{ac^2}$ ঘ. $\frac{b^2 - 2ac}{a^2c^2}$ (ঙ) $\frac{b(b^2 - 3ac)}{a^3c^3}$
20. (i) $4x^2 - 25x + 25 = 0$; (ii) $25x^2 - 70x + 13 = 0$. (iii) $289x^2 - 289x + 42 = 0$.
(iv) $175x^2 - 832x + 245 = 0$
- (v) $a^3x^2 + a(ab - b^2 + 2ac)x + c^2a - b^3 + 3abc + a^2c = 0$. (vi) $x^2 - 2(a+b)x + 4ab = 0$.
21. (i) $x^2 - bx - a^2 = 0$; (ii) $cax^2 + b(c+a)x + (c+a)^2 = 0$.
22. $x^2 - qx - p^2 = 0$. 23. (ii) $x^2 - 2(a^2 - 2b)x + a^4 - 4a^2b = 0$. (iii) $x^2 - 2(a+b)x + 4ab = 0$.
24. ক. $11x^2 - 6x + 1 = 0$, খ. $x^2 + 4x - 1 = 0$. 25. $px^2 - 4qx + r = 0$.
26. (i) $p = 8, q = 3$. (ii) $-\frac{2}{\alpha} - \frac{2}{\beta}$. (iii) $\frac{\beta}{\alpha} \frac{\alpha}{\beta}$ (iv) $p^2 - 2(q - q_1) - pp_1$.

31. 0, 3, 8. 32. (ii) 0, (iii) $\frac{-3}{2}$, 3. 32. (ii) 0, (iii) $\frac{-3}{2}$, 3.

37. $c + a = \pm b$. 38. $\left(\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5}\right)$ ব্যবধিতে। 39. $p^2 + q^2$. 42. (i) $p^2 - 2q$. (ii) p^2 43. (i) 1;

(ii) $3ab - a^3 - 3c$; (iii) $-6q$. 44. (i) $\frac{q^2 - 2pr}{r^2}$ (ii) $\frac{p^2 - 2q}{r^2}$. 45. (i) q (ii) $8q$.

46. $4x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0$. 47. $qx^3 - px^2 - 1 = 0$. 48. $x^3 - x^2 + x + 39 = 0$. 49. ক. 1, 3, 5;

খ. 5, $1 + \sqrt{3}$, $1 - \sqrt{3}$; গ. 2, 2, 5; ঘ. 1, 5, $\frac{1}{5}$; (ঙ) -1, 1, -6, 3;

(চ) -1, 1, $5 + \sqrt{3}$, $5 - \sqrt{3}$; (ছ) $\frac{3}{2}$, $\frac{-3}{2}$, -4; (জ) 2, 4, -1; (ঝ) $-\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{13})$.

(ঞ) 6, 4, -1. (ট) $-\frac{3}{2}$, -2, 4. 50. $1 + 3i$, $1 - 3i$, 51. $1 + i$, $1 - i$, 1, 2.

52. $a = -1$, মূলগুলি : 1, $1 \pm \sqrt{2}$.

প্রশ্নমালা 5.1

1. প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে বিস্তৃত করঃ
(i) $(x + a)^8$ (ii) $(x - y)^7$ (iii) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^6$ (iv) $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^6$.
2. (i) $(x^2 - 2x)^{10}$ এর বিস্তৃতি থেকে x^{16} এর সহগ নির্ণয় কর।
(ii) $\left(x^2 + \frac{3a}{x}\right)^{15}$ এর বিস্তৃতি থেকে x^{18} এর সহগ নির্ণয় কর।
3. $\left(2a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{3}}\right)^{20}$ এর বিস্তৃতি থেকে 19 তম পদটি নির্ণয় কর।
4. $\left(2x - \frac{1}{4x^2}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদটি নির্ণয় কর।
[ঢা. '০৭, '১৪; সি. '১১; দি. '১২, '১৬; ব. '১২]
[রা. '১৬; দি. '১০]
5. $\left(2x^3 - \frac{1}{x}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতি থেকে x বর্জিত পদের মান নির্ণয় কর।
6. $\left(2x + \frac{1}{6x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতি থেকে x বর্জিত পদটি বের করে এর মান নির্ণয় কর।
[ব. '১০; য. হ. '১৪]
[ঢা. '০৩]
7. (i) $\left(\frac{1}{x^2} - x\right)^{18}$ এর বিস্তৃতি থেকে x বর্জিত পদের মান নির্ণয় কর।
(ii) $\left(2x^2 - \frac{1}{2x^3}\right)^{10}$ বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদটি বের করে এর মান নির্ণয় কর।
[ঢা. '০৯; ব. '১৪; চুয়েট '০৮-'০৯]
8. (i) $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^{11}$ এর বিস্তৃতিতে x^{10} এর সহগ নির্ণয় কর।
(ii) $\left(x^2 + \frac{2y}{x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতি থেকে x^8 এর সহগ নির্ণয় কর।
[দি. '১১; রা. '১৩]
[চ. '০১]
9. $\left(\frac{y^4}{x^3} + \frac{x^2}{2y}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদটি বের কর এবং এর মান নির্ণয় কর।
[য. '০৩]
10. (i) $\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ এবং তার মান নির্ণয় কর।
(ii) প্রমাণ কর যে, $n \in N$ হলে, $\left(x^p + \frac{1}{x^{2p}}\right)^{3n}$ এর বিস্তৃতিতে সব সময় একটি x বর্জিত পদ থাকবে।
 $n = 4$ হলে, এ পদটির মান নির্ণয় কর।
(iii) p, q ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে, $(1+4x)^p \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^q$ এর বিস্তৃতির কোন পদটি সর্বদা x মুক্ত থাকবে?
[য. '০৭, কু. '১৩]
[রা. '০৩, ঢা. '১২]
11. $\left(x^2 + \frac{3a}{x}\right)^{15}$ এর বিস্তৃতি থেকে সাধারণ পদটি নির্ণয় করে x^{21} এর সহগ বের কর।
12. $(1 + x)^{24}$ এর বিস্তৃতি থেকে দুইটি ক্রমিক পদ নির্ণয় কর যাদের সহগের অনুপাত 4 : 1 হবে।
13. $(1 + y)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম ও $(r + 3)$ তম পদ দুইটির সহগ পরস্পর সমান হলে,

- প্রমাণ কর যে, $2r = n - 2$. (যেখানে $n \in N$). [চ. '১৬, কু. '০৬]
14. a এর মান কত হলে $(1 + ax)^7$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এবং x^4 এর সহগ পরস্পর সমান হবে ?
15. $(1-x)^8 (1+x)^7$ এর বিস্তৃতি থেকে x^7 এর সহগ নির্ণয় কর। [কু. '১১]
16. (i) $(a + 3x)^n$ এর বিস্তৃতিতে প্রথম তিনটি পদ যথাক্রমে $b, \frac{21}{2}bx$ ও $\frac{189}{4}bx^2$ হলে, a, b এবং n এর মান নির্ণয় কর। [রা. '১২, য. '১১; কু. '১২; সি. '১৩]
- (ii) $(x + a)^n$ এর বিস্তৃতিতে প্রথম তিনটি পদ যথাক্রমে 729, 7290 এবং 30375 হলে, a এর মান নির্ণয় কর। [বুয়েট '১২-'১৩]
17. নিচের বিস্তৃতি থেকে মধ্যপদ (মধ্যপদদ্বয়) এর মান নির্ণয় কর :
- (i) $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^{15}$ (ii) $\left(x^3 - \frac{b}{x^4}\right)^{16}$ (iii) $\left(5x - \frac{7}{x^2}\right)^{10}$ (iv) $\left(3x^2 - \frac{1}{2x}\right)^{10}$.
18. $n \in N$ হলে, $\left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a}\right)^{2n+1}$ এর বিস্তৃতি থেকে মধ্যপদ (পদগুলি) নির্ণয় কর। [সি. '০৯]
19. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{17}$ এর বিস্তৃতি থেকে মধ্যপদদ্বয় নির্ণয় কর।
20. প্রমাণ কর যে, $\left(x + \frac{2}{x}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদটি x বর্জিত। মধ্যপদের মান নির্ণয় কর।
21. $n \in N$ হলে, $\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right)^n$ এর বিস্তৃতি থেকে মধ্যপদ (পদদ্বয়) নির্ণয় কর।
22. (i) প্রমাণ কর যে, $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদটি $\frac{1.3.5.....(2n-1)}{n!} \cdot (-2)^n$. [যেখানে $n \in N$]
- [য. '১৬; চ. রা. '১০; চ. '১৩; কু. দি. '১৪]
- (ii) $n \in N$ হলে, $(1 + 2x + x^2)^n$ এর বিস্তৃতির মধ্যপদটি নির্ণয় কর।
23. $p \in N, q \in N$ হলে, $(1+x)^p \left(1 + \frac{1}{x}\right)^q$ এর বিস্তৃতি থেকে সাধারণ পদ বের করে x বর্জিত পদটির মান নির্ণয় কর। [সি. '১০; চ. রা. '১১]
24. (i) $(1+x)^{44}$ এর বিস্তৃতিতে 21 তম ও 22 তম পদ দুইটি পরস্পর সমান হলে, x এর মান নির্ণয় কর। [কু. '১৬; টা. '১০, '১৩; ব. '১১; চ. '১২; '১৪; সি. '১৪]
- (ii) $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে যদি a, b, c, d যথাক্রমে ষষ্ঠ, সপ্তম, অষ্টম, নবম পদ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{b^2 - ac}{c^2 - db} = \frac{4a}{3c}$. [টা. '০৪]
25. প্রমাণ কর যে, $(1+x)^{n+1}$ এর বিস্তৃতিতে $(m+1)$ তম পদের সহগ এবং $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে m তম ও $(m+1)$ তম পদের সহগদ্বয়ের যোগফল পরস্পর সমান।
26. $n \in N$ হলে, $\left(x^q - \frac{1}{x^q}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতির শেষ পদ থেকে $(n+1)$ তম পদ নির্ণয় কর।
27. $(1+x+x^3)^{10}$ এর বিস্তৃতি থেকে x^7 এর সহগ নির্ণয় কর।

28. (i) $\left(3 + \frac{x}{2}\right)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এবং x^8 এর সহগদ্বয় পরস্পর সমান হলে, n এর মান নির্ণয় কর।

(এখানে $n \in N$). [য. '১০; ঢা. '১১, '১৬, সি. '১২]

(ii) r এর কোন মানের জন্য $(2x^2 + \frac{3}{x})^{19}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম এবং $(r+2)$ তম পদের সহগ পরস্পর সমান হবে?

[বুয়েট '০৮-'০৯]

29. (a) $(1+x)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ, x^{r-1} এর সহগের দ্বিগুণ হলে, r ($r \in N$) এর মান নির্ণয় কর।

(b) $(1+x)^{14}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম সহগের মান $(r-1)$ তম পদের সহগের মান সমান হলে r এর মান নির্ণয় কর।

[ঢ. '০৩]

(c) $(2x^2 + \frac{3}{x})^{19}$ এর বিস্তৃতিতে x^{38-3r} এবং x^{35-3r} এর সহগ দুইটি পরস্পর সমান হলে, r এর মান নির্ণয় কর।

(d) যদি $(2x^2 + \frac{k}{x^3})^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এবং x^{15} এর সহগ দুইটি সমান হয়, তাহলে k এর মান নির্ণয় কর।

[বুয়েট '০০-'০১; টেক্সটাইল '০১-'০২; কুয়েট '১০-'১১]

30. $(b+2x)^5$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 320 হলে, b এর মান নির্ণয় কর। [ঢা. '০৫, কুয়েট '০৯-'১০]

31. $n \in N$ এবং $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে তিনটি ক্রমিক পদের সহগের অনুপাত $1:7:42$ হলে, n এর মান নির্ণয় কর।

[ব. '০৩; রা. '১৪]

32. $(1+x)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে r তম পদের সহগ ও $(r+4)$ তম পদের সহগ পরস্পর সমান হলে, r এর মান নির্ণয় কর।

33. y এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে $(2y+1)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে y^{r-1} এর সহগ C_r এবং $C_{r+2} = 4C_r$ হলে, r এর মান নির্ণয় কর।

34. (a) যদি $(1+x)(a-bx)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে x^8 এর সহগ শূন্য হয়, তবে $\frac{a}{b}$ এর অনুপাতের মান নির্ণয় কর।

[কুয়েট '০৫-'০৬]

(b) n এর মান কত হলে $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে x , x^2 এবং x^3 এর সহগগুলি একটি সমান্তর ধারা গঠন করবে?

(c) $n \in N$ এবং x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে $(1+x^2)(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ x এর সহগের ছয়গুণ হলে, n এর মান নির্ণয় কর এবং এই মানের জন্য x^4 এর সহগের মান নির্ণয় কর।

35. $(1+x)^n$ এর দ্বিপদী বিস্তৃতিতে (যেখানে $n \in N$) বিজোড় স্থানের এবং জোড় স্থানের পদগুলির সমষ্টি যথাক্রমে S_1 এবং S_2 হলে দেখাও যে, $(1-x^2)^n = S_1^2 - S_2^2$.

36. $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^{r-1} , x^r এবং x^{r+1} এর সহগগুলি একটি সমান্তর ধারা গঠন করলে প্রমাণ কর যে, $n^2 - n(4r+1) + 4r^2 - 2 = 0$.

37. $n \in N$ এবং $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_n x^n$ হলে, প্রমাণ কর যে,

(i) $C_0 + C_2 + C_4 + \dots = C_1 + C_3 + C_5 + \dots = 2^{n-1}$.

দ্বিপদী বিস্তৃতি

$$(ii) C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \dots + nC_n = n \cdot 2^{n-1}.$$

$$(iii) C_0 + 2C_1 + 3C_2 + \dots + (n+1)C_n = 2^n + n \cdot 2^{n-1}.$$

$$(iv) \frac{C_0}{1} + \frac{C_2}{3} + \frac{C_4}{5} + \dots = \frac{2^n}{n+1}.$$

$$(v) C_0 - \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} \dots + (-1)^n \frac{C_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

$$(vi) C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + \dots + C_n C_0 = \frac{(2n)!}{n! n!}$$

প্রশ্নমালা 5.2

1. নিচের রাশিগুলির বিস্তৃতি চতুর্থ পদ পর্যন্ত নির্ণয় কর :

(i) $(1 - 2x)^{-\frac{1}{3}}$ (ii) $(5 - 3x)^{\frac{1}{2}}$ (iii) $(a - 2y)^{-\frac{3}{2}}$ (iv) $(5 - x)^{\frac{-3}{4}}$ (v) $3b(b^3 - x)^{\frac{-1}{3}}$.

2. প্রমাণ কর যে, $(1 + x + x^2 + \dots + \infty)^3 = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \dots$

3. প্রমাণ কর যে, $(1 + x + x^2 + \dots) (1 + 2x + 3x^2 + \dots)$
 $= \frac{1}{2}(1.2 + 2.3x + 3.4x^2 + 4.5x^3 + \dots)$

4. (i) দেখাও যে, $(1 - 4x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ $\frac{(2r)!}{(r!)^2}$ [যেখানে $|4x| < 1$. [ষ. '০৭]

[ঢা. '১০; য. রা. কু. '১১; দি. '১৩]

(ii) প্রমাণ কর যে, $(1 - 2x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদের সহগ $\frac{(2r)!}{(r!)^2 \cdot 2^r}$,

যেখানে $|2x| < 1$.

[ঢা. '১৪; সি. '১০; চ. ব. '১১; কু. '১৩. সি. '১২, '১৬]

5. $(1 - x)^{-3}$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদটি সরলতম আকারে নির্ণয় কর, যখন $|x| < 1$.

6. (i) $x > 1$ হলে, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ এর বিস্তৃতির চতুর্থ পদ পর্যন্ত নির্ণয় কর।

(ii) $|x| < \frac{8}{3}$ হলে, $\frac{1}{(8 - 3x)^3}$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ নির্ণয় কর।

[বুয়েট '০৪-'০৫]

7. (a) $\frac{1}{(1 - x)(3 - x)}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় কর।

(b) $\frac{1}{(1 - x)(1 - 2x)}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় কর।

[দি. কু. '১০; চ. '১৩]

8. $\frac{x}{(1-3x)(1-4x)}$ এর বিস্তৃতি থেকে x^m এর সহগ নির্ণয় কর। [ব. '১৩; রা. কু. '১৪]
9. $\frac{1}{(1-ax)(1-bx)}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় কর।
10. $\frac{1+x}{1-x}$ এর বিস্তৃতি থেকে x^9 এর সহগ নির্ণয় কর।
11. $(1+x+x^2+\dots)^{-14}$ এর বিস্তৃতি থেকে x^8 এবং x^9 এর সহগ নির্ণয় কর।
12. $(1-x+x^2-x^3+\dots)^3$ বিস্তৃতি থেকে x^m এর সহগ নির্ণয় কর।
13. $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ এর বিস্তৃতি থেকে x^{10} এর সহগ নির্ণয় কর।
14. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{1-5x+6x^2}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ $3^{n+1}-2^{n+1}$.
[দি. '১২; ঢা. '১২, '১৬, য. '১০, '১৩; সি. '১১, '১৪; রা. '১৩; কু. '১৬]
15. (i) $n \in N$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{(1+x)^n}{1-x}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ 2^n . [কু. '১২]
- (ii) দেখাও যে, $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ $4n$. [বুয়েট '১১-১২]
16. (i) $y = x + x^2 + x^3 + \dots$ হলে, দেখাও যে, $x = y - y^2 + y^3 - y^4 + \dots$
[ঢা. '১১; রা. ব. চ. '১২]
- (ii) $y = x - x^2 + x^3 - x^4 + \dots$ হলে, দেখাও যে $x = y + y^2 + y^3 + y^4 + \dots$
[দি. '০৯, '১৪; রা. '১০; য. '১২, '১৪]
- (iii) $y = 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{8}y^2 + \frac{5}{16}y^3 - \dots$
[ব. '১০; দি. '১১, সি. '১৩; বুয়েট, ছুয়েট '০১-'০২]
- (iv) $y = 3x + 6x^2 + 10x^3 \dots \infty$ হলে দেখাও যে, $x = \frac{1}{3}y - \frac{1.4}{3 \cdot 2!}y^2 + \frac{1.4.7}{3 \cdot 3!}y^3 \dots \infty$

17. $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots)^{\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় কর।

18. $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{18} - \dots$ দ্বিপদী ধারাটির সমষ্টি নির্ণয় কর।

19. যদি $|x| < 1$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, নিচের অসীম ধারাটি অভিসৃত :

$$1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2^2.2!}x^2 + \frac{1.3.5}{2^3.3!}x^3 + \frac{1.3.5.7}{2^4.4!}x^4 + \dots$$

নিচের ধারাগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর : (প্রশ্ন 20 - 27)

20. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1.3}{2! \cdot 2^4} + \frac{1.3.5}{3! \cdot 2^6} + \dots$

21. $1 + \frac{1}{10} + \frac{1.4}{10.20} + \frac{1.4.7}{10.20.30} + \dots$

22. $1 + \frac{3}{4} + \frac{3.5}{4.8} + \frac{3.5.7}{4.8.12} + \dots$

23. $1 - \frac{1}{5} + \frac{1.4}{5.10} - \frac{1.4.7}{5.10.15} + \dots$

24. $1 + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{3^4} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{3^6} + \dots$ [টেস্টটাইল '১১-১২]

25. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 8} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 8 \cdot 12} + \dots$

26. প্রমাণ কর যে, $1 + \frac{n}{3} + \frac{n(n+1)}{3 \cdot 6} + \frac{n(n+1)(n+2)}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \dots$ ধারাটি অভিসৃত।

27. $|x| < 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, নিচের ধারাটি অভিসৃত :

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{x^2}{3\sqrt{2}} + \frac{x^4}{4\sqrt{3}} + \frac{x^6}{5\sqrt{4}} + \dots$$

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 5.1

1. (i) $x^8 + 8x^7a + 28x^6a^2 + 56x^5a^3 + 70x^4a^4 + 56x^3a^5 + 28x^2a^6 + 8xa^7 + a^8$;

(ii) $x^7 - 7x^6y + 21x^5y^2 - 35x^4y^3 + 35x^3y^4 - 21x^2y^5 + 7xy^6 - y^7$;

(iii) $x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + \frac{15}{x^2} - \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}$.

(iv) $x^{10} + 5x^6 + 10x^2 + \frac{10}{x^2} + \frac{5}{x^6} + \frac{1}{x^{10}}$.

2. (i) 3360. (ii) $110565a^4$ 3. $760ab^6$. 4. 495 5. -1760. 6. 6 তম পদ, $\frac{28}{27}$.

7. (i) 18564; (ii) 5 তম, 840. 8. (i) $330 \times 27 \times 3^4$, $3360y^4$. 9. $\frac{105}{32}y^{10}$.

10. (i) 7 তম পদ, 924. (ii) 495, (iii) $(q+1)$ তম পদ। 11. $15C_r \cdot 3^r a^r x^{30-3r}$, $12285a^3$.

12. 6 তম ও 5 তম; অথবা 20 তম ও 21 তম। 14. 1. 15. 35. 16. (i) 2, 2^7 , 7, 56.

(ii) 5. 17. (i) $6435a^7x^9$, $6435a^8x^6$ (ii) $\frac{12870b^8}{x^8}$ (iii) $-\frac{252 \times 5^5 \times 7^5}{x^5}$

(iv) $-\frac{15309}{8}x^5$ 18. ${}^{2n+1}C_n \frac{a}{x}$, ${}^{2n+1}C_{n+1} \frac{x}{a}$. 19. $\frac{17!}{8!9!}x$, $-\frac{17!}{9!8!} \cdot \frac{1}{x}$.

20. 1120. 21. $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$. 22. (ii) $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{n!} \cdot (2x)^n$. 23. $\frac{(p+q)!}{p!q!}$.

24. $\frac{7}{8}$. 26. $(-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2}$. 27. 1740. 28. (i) 55. (ii) 11. 29. (a) 7, (b) 8. (c) $r = 11$;

(d) $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. 30. ± 2 . 31. 55. 32. 9. 33. 5. 34. (a) $\frac{5}{8}$, (b) $n = 7$ (c) $n = 7, 56$.

প্রশ্নমালা 5.2

1. (i) $1 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{9}x^2 + \frac{112}{81}x^3 + \dots$ (ii) $\sqrt{5} \left\{ 1 - \frac{3}{10}x - \frac{9}{200}x^2 - \frac{27}{1000}x^3 - \dots \right\}$

$$(iii) a^{\frac{-3}{2}} \left\{ 1 + \frac{3y}{a} + \frac{15y^2}{2a^2} + \frac{35y^3}{2a^3} + \dots \right\}$$

$$(iv) 5^{\frac{-3}{4}} \left\{ 1 + \frac{3}{20}x + \frac{21}{800}x^2 + \frac{77}{16000}x^3 \dots \right\} \quad (v) 3 + \frac{x}{b^3} + \frac{2x^2}{3b^6} + \frac{14x^3}{27b^9} + \dots$$

$$5. \frac{1}{2}(r+1)(r+2)x^r. \quad 6. (i) \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{x^5} - \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{x^7} + \dots \quad (ii) \frac{7}{1536}$$

$$7. (a) \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right) \quad (b) 2^{n+1} - 1. \quad 8. 4^m - 3^m. \quad 9. \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

$$10. 2. \quad 11. 3003, -2002. \quad 12. (-1)^m \cdot \frac{1}{2}(m+1)(m+2). \quad 13. 121. \quad 17. 1. \quad 18. \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$20. \sqrt{2}. \quad 21. \left(\frac{10}{7} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad 22. 2\sqrt{2}. \quad 23. \frac{1}{2} \sqrt[3]{5}. \quad 24. \left(\frac{9}{4} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad 25. \sqrt{\frac{2}{3}}$$

প্রশ্নমালা ৬.১

১. নিচের পরাবৃত্তগুলির শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(i) $y^2 = 9x$

উত্তর : $(0, 0); \left(\frac{9}{4}, 0\right); 9; 4x + 9 = 0$

(ii) $x^2 = -12y$

উত্তর : $(0, 0); (0, -3); 12; y - 3 = 0$

(iii) $x^2 + 4x + 2y = 0$

ব. ০৪, বুয়েট ০৪-০৫, সি. ১৬

উত্তর : $(-2, 2); \left(-2, \frac{3}{2}\right); 2; 2y - 5 = 0$

(iv) $y^2 + 8x - 2y - 23 = 0$

উত্তর : $(3, 1); (1, 1); 8; x - 5 = 0$

(v) $y^2 = 8x - 8y$

দি. ১১, সি. ১৬ উত্তর : $(-2, -4), (0, -4), 8, x + 4 = 0$

(vi) $y^2 = 4y + 4x - 8$

রা. ১০, ১২, ব. ১১ উত্তর : $(1, 2); (2, 2); 4; x = 0$

(vii) $x^2 + 4y - 4 = 0$

উত্তর : $(0, 1), (0, 0), 4, y - 2 = 0$

(viii) $y^2 = 4y + 4x - 16$

উত্তর : $(3, 2); (4, 2); 4; x = 2$

২. (i) $(-1, 1)$ উপকেন্দ্র এবং $(2, -3)$ শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট পরাবৃত্তটির অক্ষ ও নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
রা. চ. ১৩; ঢা. ১৪, বুয়েট ০৫-০৬ উত্তর : $4x + 3y + 1 = 0, 3x - 4y - 43 = 0$

- (ii) $(3, 4)$ উপকেন্দ্র ও $(0, 0)$ শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট পরাবৃত্তের নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
ঢা. দি. ১১; কু. চ. ১৩, বুয়েট ০৬-০৭ উত্তর : $3x + 4y + 25 = 0$

- (iii) একটি পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র $(0, 0)$, শীর্ষবিন্দু $(-2, -1)$ । তার নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
সি. ১১, রা. ০৮, ব. ০৯, চ. ১০, উত্তর : $2x + y + 10 = 0$

৩. (i) $5x^2 + 30x + 2y + 59 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, ফোকাস, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং এর অক্ষরেখা ও নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
ঢা. ১০, য. সি. ১১; কু. ১২; দি. ১৩, কু. রা. ব. ১৪, য. ১৬

উত্তর : $(-3, -7), \left(-3, -\frac{71}{10}\right); \frac{2}{5}, x + 3 = 0, 10y + 69 = 0$

- (ii) $x^2 - 2y - 8x + 6 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষ বিন্দু, ফোকাস এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

উত্তর : $(4, -5), (4, -\frac{9}{2}), 2$

- (iii) $3x^2 - 4y + 6x - 5 = 0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র, অক্ষ এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
সি. ০৬; চ. ২০১৪ উত্তর : $(-1, -5/3), x + 1 = 0, 3y + 7 = 0$

- (iv) $x^2 - 8x + 2y + 7 = 0$ প্যারাবোলাটির উপকেন্দ্র ও শীর্ষবিন্দু এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
ঢা. ০৮, বা. ০৭, কু. ০৪, ১১, সি. ০৯, ১৩ উত্তর : $(4, 4), (4, 9/2), y = 5$

- (v) $(y - 1)^2 = 4(x - 2)$ পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র এবং উপকেন্দ্রিক লম্ব অক্ষরেখা ও নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। দি. ১০, উত্তর : $(2, 1), (3, 1), 4$, অক্ষরেখা $y = 1$, নিয়ামকরেখা $x = 1$

- (vi) $5x^2 + 15x - 10y - 4 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষ, অক্ষরেখা ও নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
রা. ০৭, ঢা. ০৮, সি. ০৯; কু. ১১, বুয়েট ০৬-০৭

উত্তর : $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{61}{40}\right); 2x + 3 = 0; 40y + 81 = 0$

- (vii) $y^2 = 4(x - 2)$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু এবং উপকেন্দ্র নির্ণয় কর। রা. ২০০২ উত্তর : $(2, 0), (3, 0)$

- (viii) $3y^2 - 10x - 12y - 18 = 0$ পরাবৃত্তটির শীর্ষ, উপকেন্দ্র, অক্ষরেখা ও নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। চ. ০৩, ১৩, কু. ১৬ উত্তর : $(-3, 2), (-13/6, 2), y - 2 = 0, 6x + 23 = 0$

4. (i) এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার উপকেন্দ্র $(-8, -2)$ এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ $2x - y = 9$.
 বুয়েট ০৮-০৯. ঢা. ব. রা. ১০; ঢা. দি. ২০১২; ঢা. ব. ২০১৪
 উত্তর : $(x + 2y)^2 + 116x + 2y + 259 = 0$
- (ii) $(1, 1)$ উপকেন্দ্র ও $3x + 4y = 1$ নিয়ামকরেখা বিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। এর অক্ষেরও সমীকরণ নির্ণয় কর।
 য. ১০, ব. ১১; দি. ১৪; চ. ১২, ১৪
 উত্তর : $(4x - 3y)^2 - 44x - 42y + 49 = 0, 3y - 4x + 1 = 0$
- (iii) $(-1, 1)$ উপকেন্দ্র এবং $x + y + 1 = 0$ নিয়ামকরেখা বিশিষ্ট পরাবৃত্তের (Parabola) সমীকরণ নির্ণয় কর। উক্ত পরাবৃত্তটির অক্ষের সমীকরণ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। রা. ২০১২
 উত্তর : $(x - y)^2 + 2x - 6y + 3 = 0; x - y + 2 = 0, \sqrt{2}$
- (iv) একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত এবং $x - y + 1 = 0$ রেখাটি পরাবৃত্তকে এর শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শ করে। বুয়েট ০৫-০৬, কুয়েট ১১-১২, উঃ $(x + y)^2 - 4x + 4y - 4 = 0$
- (v) একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র $(2, 5)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং $x = 4$ রেখাটি পরাবৃত্তের শীর্ষ বিন্দুতে অক্ষের উপর লম্ব।
 কু. ১২; সি. ১৩ উত্তর : $y^2 - 10y + 8x - 7 = 0$
- (vi) এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার শীর্ষবিন্দু $(2, 3)$ এবং নিয়ামকরেখা $y = 6$; এর উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্যও নির্ণয় কর।
 রা. ০৯, য. ১২, উত্তর : $x^2 - 4x + 12y - 32 = 0; 12$
- (vii) একটি প্যারাবোলার নিয়ামকরেখা $2x + y = 0$ এবং শীর্ষ $(3, -1)$ । প্যারাবোলাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।
 উত্তর : $x^2 + 4y^2 - 4xy - 50x + 125 = 0$
- (viii) একটি পরাবৃত্তের নিয়ামকরেখার সমীকরণ $x - c = 0$ এবং উপকেন্দ্র $(a, 0)$ বিন্দুতে অবস্থিত। পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।
 উত্তর : $y^2 = (a - c)(2x - a - c)$
- (ix) একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র $(2, 0)$ এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ $x + 2 = 0$.
 কু. ০৪, ব. ০৭ উত্তর : $y^2 = 8x$.
- (x) একটি পরাবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ $4x + 3y - 5 = 0$ এবং শীর্ষবিন্দু $(3, 1)$ হলে, পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। রা. ০২, মা. বো. ০৩, উত্তর : $(3x - 4y)^2 - 190x - 80y + 625 = 0$.
5. (i) একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার শীর্ষ $(4, -3)$ বিন্দুতে অবস্থিত, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 4 একক এবং অক্ষটি x -অক্ষের সমান্তরাল। কু. ০৮, সি. ০৪, ১৪, বুয়েট ০৫-০৬, বুয়েট ১৩-১৪
 উত্তর : $(y + 3)^2 = \pm 4(x - 4)$
- (ii) একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষ $(4, -3)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং নিয়ামকরেখা x -অক্ষের সমান্তরাল এবং যা $(-4, -7)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। সি. ০৫, ১২, উত্তর : $(x - 4)^2 = -16(y + 3)$
- (iii) একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষবিন্দু $(0, 2)$, অক্ষরেখা y -অক্ষের সমান্তরাল এবং যা $(2, 5)$ বিন্দু দিয়ে গমন করে।
 [SUST. 12-13] উত্তর : $3x^2 = 4(y - 2)$
- (iv) এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্ত বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক $(3, 5)$ ও $(3, -3)$.
 উত্তর : $y^2 - 2y - 8x + 9 = 0, y^2 - 2y + 8x - 39 = 0$.
- (v) এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্ত বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক $L(6, 4)$ এবং $L'(-2, 4)$
 উত্তর : $x^2 - 4x - 8y + 20 = 0, x^2 - 4x + 8y - 44 = 0$.
6. (i) $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তের উপরস্থ কোনো বিন্দুর ফোকাস দূরত্ব 6; ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ঢা. ০৫
 উত্তর : $(4, \pm 4\sqrt{2})$
- (ii) $y^2 = 16x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত কোনো বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 6; ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
 রা. ০৭, ঢা. ০৯; কু. দি. ২০১০; ঢা. সি. ১২; ব. ১৩, কুয়েট ০৫-০৬ উত্তর : $(2, \pm 4\sqrt{2})$.
- (iii) $y^2 = 4px$ পরাবৃত্তটি $(3, -2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে তার উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
 ব. ১২; য. দি. ১৪; মা. বো. ১৩, দি. ১৬ উত্তর : $4/3, (1/3, 0), 3x + 1 = 0$

7. (i) যদি $r = 3x + 1$ রেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করে, তবে উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য উপকেন্দ্র, স্পর্শবিন্দু এবং নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।
উঃ 12, (3, 0), $\left(\frac{1}{3}, 2\right), x + 3 = 0$
[ছয়েট ০৪-০৫, কুয়েট ১০-১১]
- (ii) $y^2 = 4x$ পরাবৃত্তের (1, -2) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তরঃ $x + y + 1 = 0$
- (iii) দেখাও যে $lx + my + n = 0$ সরলরেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $ln = am^2$ হয়।
[বুয়েট ৯৯-০০, কু. রা. ০৫, চ. ১৬]
- (iv) $y^2 = 12x$ পরাবৃত্তের একটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x + 2y - 1 = 0$ রেখার উপর লম্ব।
উত্তরঃ $2y - 4x - 3 = 0$
8. (i) $y^2 = 12x$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের ঋণাত্মক দিকের প্রান্ত বিন্দু এবং নিয়ামক ও অক্ষের ছেদ বিন্দুর সংযোজক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
ছয়েট ০৩-০৪ উত্তরঃ $x + y + 3 = 0$
- (ii) $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয় ও শীর্ষবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
উঃ $y \pm 2x = 0$
9. (i) $y = ax^2 + bx + c$ প্যারাবোলটির শীর্ষ (-2, 3) বিন্দুতে অবস্থিত এবং তা (0, 5) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে, a, b, c এর মান নির্ণয় কর।
রা. ১১; ১৪ চ. ব. দি. ১২; ঢা. কু. ১৩, য. সি. ১৪, ঢা. ১৬, উত্তরঃ $a = \frac{1}{2}, b = 2, c = 5$
- (ii) পরাবৃত্তের প্রমিত (Standard Equation) সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি. ২০০৩]
10. (i) $y^2 = 8x + 5$ প্যারাবোলাটির শীর্ষ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
চ. ০৪ উত্তরঃ $(-5/8, 0); 8$
- (ii) $y^2 = 2(x + 3)$ পরাবৃত্তটির শীর্ষ; উপকেন্দ্র (Focus) এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
ঢা. ২০১৩ উত্তরঃ $(-3, 0), (-5/2, 0), 2x + 7 = 0$
- (iii) $x^2 = 4(1 - y)$ পরাবৃত্তটির শীর্ষ; উপকেন্দ্র (Focus) -এর স্থানাঙ্ক এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
ঢা. চ. ২০১১ উত্তরঃ $(0, 1), (0, 0), y = 2$
11. (i) একটি প্যারাবোলার সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র (-6, -3) এবং শীর্ষ (-2, 1) বিন্দুতে অবস্থিত।
উত্তরঃ $(x - y)^2 + 38x + 26y + 41 = 0$
- (ii) (-1, 1) উপকেন্দ্র এবং (2, -3) শীর্ষ বিশিষ্ট পরাবৃত্তের অক্ষ ও নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
রা. চ. ১৩, ঢা. ১৪ উত্তরঃ $4x + 3y + 1 = 0, 3x - 4y - 43 = 0$
12. $y^2 = 9x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত P বিন্দুর কোটি 12 হলে, ঐ বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব নির্ণয় কর।
বুয়েট ০৩-০৪, বুয়েট ১২-১৩, ব. ০২, কু. ১৪, উত্তরঃ $18\frac{1}{4}$ একক।

প্রশ্নমালা 6.2

1. উপবৃত্তের অক্ষদ্বয়কে x ও y -অক্ষরেখা ধরে নিম্নের শর্তানুসারে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর :
- (i) যার উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\pm 3, 0)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{3}$. য. ০৫; উত্তরঃ $8x^2 + 9y^2 = 648$;
- (ii) যার উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, \pm 8)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $= \frac{8}{9}$. উত্তর : $\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{81} = 1$
- (iii) যার ফোকাস $(3, 0)$, নিয়ামকরেখা $x = 5$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $= \frac{1}{2}$. উঃ $3x^2 + 4y^2 - 14x + 11 = 0$
- (iv) যার উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{2}{3}$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 5$

চ. ০২, চুয়েট ০৫-০৬, উত্তর : $20x^2 + 36y^2 = 405$

2. (i) একটি উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় $(1, -1)$, $(5, -1)$ এবং বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য 8 হলে এর সমীকরণ নির্ণয় কর।
- উত্তর : $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{12} = 1$

- (ii) উপবৃত্তের প্রধান অক্ষদ্বয়কে x ও y অক্ষরেখা বিবেচনা করে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\pm 2, 0)$ এবং বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য 8 একক। দি. ২০১১ উত্তর : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

3. (i) p এর মান কত হলে, $4x^2 + py^2 = 80$ উপবৃত্তটি $(0, \pm 4)$ বিন্দু দিয়ে যাবে? উপবৃত্তটির উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক ও অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। রা. ১০ উত্তর : $p = 5, (\pm 2, 0); 4\sqrt{5}, 8$
- (ii) p এর মান কত হলে, $px^2 + 4y^2 = 1$ উপবৃত্তটি $(\pm 1, 0)$ বিন্দু দিয়ে যাবে ? উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা ও অক্ষ দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

ব. চ. ১২; মা. বো. ২০১৪ উত্তর : $p = 1$, উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. 2, 1.

- (iii) $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ উপবৃত্তটি $(6, 4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। p -এর মান, উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

রুয়েট ০৪-০৫, ঢা. রা. সি. ১২; য. ১৩,
উঃ $100, \sqrt{3}/2, (\pm 5\sqrt{3}, 0)$

4. (i) একটি উপবৃত্তের অক্ষদ্বয়কে x এবং y -অক্ষ ধরে $(1, \sqrt{6})$ এবং $(3, 0)$ বিন্দু দিয়ে গমনকারী উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।
সি. ২০০৯; উত্তর : $3x^2 + 4y^2 = 27$.
- (ii) কোনো উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব উপবৃত্তটির বৃহৎ অক্ষের অর্ধেক। তার উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।
ব. ২০১১, বুয়েট ০৮-০৯, ১১-১২ উত্তর : $e = 1/\sqrt{2}$
5. (i) উপবৃত্তের অক্ষদ্বয়কে x ও y -অক্ষরেখা ধরে উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর, যার উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{3}$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ৪। রা. ০৬; ঢা. রা. য. ১১; দি. চ. ২০১৩ উত্তর : $\frac{4x^2}{81} + \frac{y^2}{18} = 1$
- (ii) উপবৃত্তের প্রধান অক্ষ দুইটিকে x ও y -অক্ষ বিবেচনা করে, উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার বৃহৎ অক্ষ ১২ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{3}$ ।
য. ০৭, কু. ২০১৩ উত্তর : $8x^2 + 9y^2 = 288$.
- (iii) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়ের উপর অবস্থিত, উপকেন্দ্রিক লম্ব ৪ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ।
ব. ২০০১ উত্তর : $x^2 + 2y^2 = 64$.
- (iv) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রদ্বয় $(\pm 1, 0)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং যার উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ৩।
কু. ২০১১ উত্তর : $3x^2 + 4y^2 = 12$.
- (v) একটি উপবৃত্তের বৃহৎ ও ক্ষুদ্র অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে x ও y অক্ষরেখা ধরে উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2/5}$ এবং যা $(-3, 1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।
উত্তর : $3x^2 + 5y^2 = 32$.
6. (i) $\frac{4}{5}$ উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট এবং $(\frac{10}{3}, \sqrt{5})$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী উপবৃত্তের অক্ষ দুইটি স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটির উপর অবস্থিত। উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $(\frac{10}{3}, \sqrt{5})$ বিন্দুটির উৎকেন্দ্রিক কোণ প্রায় $48^\circ 11'$ ।
চ. ০৭, য. ০৮, ১০; ঢা. ০৮, ১৩, য. দি. ১৬
উত্তর : $9x^2 + 25y^2 = 225$.
- (ii) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার ফোকাসদ্বয় $S(0, 4)$, $S'(0, -4)$ এবং যা $(3, 0)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।
[বুয়েট ০৩-০৪] উত্তর : $5x^2 + 9y^2 = 225$.
- (iii) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার ফোকাসদ্বয় যথাক্রমে $S(2, 0)$ ও $S'(-2, 0)$ এবং যা $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2})$ বিন্দু দিয়ে যায়।
[বুয়েট ৯৫-৯৬, বুয়েট ০৫-০৬] উঃ $5x^2 + 9y^2 = 45$.
7. (i) $16x^2 + 9y^2 - 32x - 128 = 0$ উপবৃত্তটির অক্ষ দুইটির দৈর্ঘ্য এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
উঃ ৩, ৪, 12π বর্গ একক। [চুয়েট ১৩-১৪]
- (ii) দেখাও যে, $5x^2 + 9y^2 - 30x = 0$ সমীকরণটি একটি উপবৃত্ত নির্দেশ করে; এর উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
য. ২০০৯; ২০১২, বুয়েট ৯৮-৯৯ উত্তর : $(5, 0)$, $(1, 0)$
- (iii) দেখাও যে, $2x^2 + y^2 - 8x - 2y + 1 = 0$ সমীকরণটি একটি উপবৃত্ত নির্দেশ করে। ইহার উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
মা. বো. ০২, কু. ১২; সি. ১৩, দি ১৪, ঢা. ১৬, উঃ $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $(2, 3)$, $(2, -1)$
8. (i) একটি উপবৃত্ত $\frac{x}{9} + \frac{y}{4} = 1$ রেখাকে x -অক্ষের উপর এবং $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ রেখাকে y -অক্ষের উপর ছেদ করে। এর সমীকরণ নির্ণয় কর।
বুয়েট ১১-১২, উত্তর : $x^2/81 + y^2/9 = 1$,
- (ii) প্রমাণ কর যে, $y = x - 5$ সরলরেখাটি $9x^2 + 16y^2 = 144$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করে। স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
উত্তর : $(16/5, -9/5)$

(iii) $y = 2x + c$ রেখাটি $3x^2 + 4y^2 = 12$ উপবৃত্তের স্পর্শক হলে, c এর মান কত?

বুয়েট ০৯-১০ উঃ $\pm \sqrt{19}$.

৭. (i) কোনো উপবৃত্তের একটি ফোকাস ও এর অনুরূপ নিয়ামকরেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব 16 (একক) এবং এর উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{5}{3}$. উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় ও উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
ব. '১১, বুয়েট ০৯-১০, উত্তর : 30 (একক), 24 (একক), 19.2 (একক)

(ii) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 8 এবং নিয়ামকরেখা দুইটি 18 একক দূরত্বে অবস্থিত। বুয়েট ৯৭-৯৮, কুয়েট ১০-১১ রা. ১০, কু. ১৬ উঃ $5x^2 + 9y^2 = 180$.

(iii) কোনো উপবৃত্তের ক্ষুদ্রঅক্ষের দৈর্ঘ্য তার উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যকার দূরত্বের সমান এবং উপকেন্দ্রিক লম্ব 10. উপবৃত্তটি উৎকেন্দ্রিকতা ও সমীকরণ নির্ণয় কর।

চ. ১০, বুয়েট ০৯-১০ উঃ $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x^2 + 2y^2 = 100$.

(iv) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক (3, -1) ও (1, -1) এবং যেকোনো উপকেন্দ্র হতে শীর্ষদ্বয়ের দূরত্বের গুণফল 4 একক।
উত্তরঃ $\frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$.

10. (i) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার একটি ফোকাস (-2, 3), নিয়ামকরেখার সমীকরণ

$x - y + 7 = 0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{3}}$. উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্যও নির্ণয় কর। [ব. ২০০৭]

উত্তর : $5x^2 + 5y^2 + 2xy + 10x - 22y + 29 = 0$; $4/\sqrt{6}$

(ii) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার উপকেন্দ্র (2, 1) উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{3}}$ এবং নিয়ামক রেখার

সমীকরণ $2x + y = 3$. [চ. ২০০১] উত্তর : $11x^2 + 14y^2 - 4xy - 48x - 24y + 66 = 0$;

(iii) (1, 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার একটি উপকেন্দ্র (1, -1) এবং অনুরূপ নিয়ামকরেখার সমীকরণ $x - y - 4 = 0$. বুয়েট ০৩-০৪, উঃ $3x^2 + 3y^2 + 2xy - 8 = 0$;

(iv) উপকেন্দ্র (-1, 1), উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{2}$ এবং নিয়ামকরেখা $x - y + 3 = 0$ হলে, উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। চা. ০৩, য. চ. ০৮; মা. বো. ১৩ উত্তর : $7(x^2 + y^2) + 2xy + 10x - 10y + 7 = 0$

(v) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার নিয়ামকরেখা y -অক্ষ, ফোকাস (c, 0) বিন্দুতে অবস্থিত এবং উৎকেন্দ্রিকতা e.
ব. ০৮, চা. কু. ০৯, দি. ১২ উত্তর : $(x - c)^2 + y^2 = e^2 x^2$

(vi) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (0, 2), উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{2}$ এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ $y + 4 = 0$. তার উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্যও নির্ণয় কর।
কু. ০৮, ১৪, উত্তর : $4x^2 + 3y^2 - 24y = 0$; 6.

(vii) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র (3, 4) নিয়ামকরেখা $x + y - 2 = 0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{3}$.
উত্তর : $17(x^2 + y^2) - 2xy - 104x - 140y + 446 = 0$.

(viii) এমন একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার একটি উপকেন্দ্র (-2, 3), নিয়ামক রেখার সমীকরণ $2x + y - 3 = 0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
মা. বো. ১০, ১২, চা. কু. ১০, য. ১১; ২০১৩

উঃ $11x^2 + 14y^2 - 4xy + 72x - 84y + 186 = 0$.

(ix) মূলবিন্দু উপকেন্দ্র, উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{4}{5}$ এবং $x = 2$ নিয়ামক বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।
চ. ২০০৪, উত্তরঃ $9x^2 + 25y^2 + 64x - 64 = 0$.

[সি. ০৫]

11. (i) $25x^2 + 16y^2 = 400$ উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা, ফোকাসের স্থানাঙ্ক, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। কু. ০৯ দি. ১২, য. ১৪, উত্তর : $\frac{3}{5}$, $(0, \pm 3)$, $\frac{32}{5}$, $3y = \pm 25$
- (ii) $16x^2 + 25y^2 = 400$ উপবৃত্তটির উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। কু. রা. ০৫, মা. বো. ১০, ১৪, কুয়েট ০৬-০৭ উঃ $(3, 0)$, $(-3, 0)$, $\frac{32}{5}$, $3x = \pm 25$.
- (iii) $9x^2 + 25y^2 = 225$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
সি. ২০০৭, মা. ২০১২
- উত্তর : $\frac{4}{5}$, $(\pm 4, 0)$, $\frac{18}{5}$, $x = \pm 4$, $4x = \pm 25$.
12. (i) $3x^2 + 4y^2 = 12$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
ঢা. কু. ২০০৩, চ. ১৬ উত্তর : $\frac{1}{2}$, $(\pm 1, 0)$, 3 , $x = \pm 4$.
- (ii) $5x^2 + 4y^2 = 1$ উপবৃত্তের নিয়ামকরেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।
কু. ২০১০, চ. ২০১৪, বুয়েট ০৪-০৫, ছুয়েট ১৩-১৪ উত্তর : $2y = \pm \sqrt{5}$
- (iii) $2x^2 + 3y^2 = 1$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
সি. ২০১১, ঢা. ০৬, ২০১৪, উত্তর : $\frac{2}{3}\sqrt{2}$, $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)$.
- (iv) $4x^2 + 5y^2 = 1$ উপবৃত্তের একটি ফোকাস এবং এর অনুরূপ নিয়ামকের মধ্যকার দূরত্ব নির্ণয় কর।
[ছুয়েট ১১-১২] উঃ $2\sqrt{5}$.
13. উপবৃত্তের অক্ষ দুইটিকে x ও y অক্ষ বিবেচনা করে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র $(\pm 4, 0)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $= \frac{4}{5}$ । উপবৃত্তটির উপরস্থ $(3, 2.4)$ বিন্দুর পরামিতিক স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
উত্তর : $9x^2 + 25y^2 = 225$, $(5 \cos \theta, 3 \sin \theta)$, যখন $\theta = 53^\circ$ (প্রায়)
14. দুইটি উপবৃত্তের উপরস্থ নির্দিষ্ট দুইটি বিন্দুর পরামিতিক স্থানাঙ্ক (i) $(\sqrt{2} \cos \theta, \sqrt{5} \sin \theta)$ এবং (ii) $(4 \cos \theta, 3 \sin \theta)$ হলে, উপবৃত্ত দুইটির প্রমিত সমীকরণ নির্ণয় কর।
উত্তর : (i) $5x^2 + 4y^2 = 20$, (ii) $9x^2 + 16y^2 = 144$.

প্রশ্নমালা 6.3

1. নিম্নের অধিবৃত্তগুলির কেন্দ্র, শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $16x^2 - 25y^2 = 400.$

উত্তর : (0, 0), শীর্ষ $(\pm 5, 0)$, $(\pm \sqrt{41}, 0)$, $\sqrt{41} x = \pm 25,$

(ii) $y^2 - x^2 = 4$

উত্তর : (0, 0), (0, ± 2), (0, $\pm 2\sqrt{2}$), $y = \pm \sqrt{2}$

(iii) $9x^2 - 4y^2 + 36 = 0$

উত্তর : (0, 0), (0, ± 3), (0, $\pm \sqrt{13}$), $\sqrt{13}y = \pm 9$

(iv) $3x^2 - y^2 - 12x + 9 = 0.$

উত্তর : (2, 0), (3, 0), (1, 0) (4, 0), (0, 0), $2x = 5, 2x = 3$

2. (i) দেখাও যে, $x^2 - 8y^2 = 2$ অধিবৃত্তের নিয়ামকরেখার সমীকরণ $3x = \pm 4$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের

দৈর্ঘ্য $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

ব, ০৪, কু. ১০, ঢা. চ. সি. ১২; য. ০৭, ২০১৩, ঢা. ২০১৪, য. সি. ১৬

(ii) উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক (4, 2) ও (8, 2) এবং উৎকেন্দ্রিকতা 2. হলে, অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়

কর।

সি. ২০১১ উত্তর : $\frac{(x-6)^2}{1} - \frac{(y-2)^2}{3} = 1.$

(iii) অধিবৃত্তের অক্ষ দুইটিকে স্থানাঙ্কের অক্ষ ধরে এমন একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার

অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য 24 এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (0, ± 13). কু. ০৭; ১৪ উত্তর : $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$

3. (i) $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$ অধিবৃত্তের কেন্দ্র, শীর্ষবিন্দু এবং উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।
কু. ২০১১, ২০১৩ উত্তর : $(1, -2), (5, -2), (-3, -2), \frac{5}{4}$
- (ii) $25x^2 - 16y^2 = 400$ অধিবৃত্তের কেন্দ্র ও উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক এবং উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।
সি. ০৬, উত্তর : $(0, 0), (\pm\sqrt{41}, 0), \sqrt{41}/4$
- (iii) $16y^2 - 25x^2 = 400$ অধিবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
মা. বো. ১২, সি. ২০১৪, উত্তর : $(0, \pm 5), (0, \pm\sqrt{14})$
- (iv) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্রের অবস্থান নির্ণয় কর।
রা. ২০০৩, চ. ২০০৫, য. ২০১২ উত্তর : $\frac{13}{12}, (\pm 13, 0)$
- (v) $9x^2 - 7y^2 + 63 = 0$ অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রের অবস্থান ও নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
উত্তর : $(0, \pm 4), 4y = \pm 9$
- (vi) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
সি. ০৯, য. ১০, চা. ০৭, ১১; রা. দি. ২০১২ উত্তর : $(\pm 5, 0), 5x = \pm 9$
- (vii) $9x^2 - 16y^2 = 144$ অধিবৃত্তের শীর্ষ, উপকেন্দ্র এবং উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।
সি. ০৫, মা. বো. ২০১৩ উত্তর : $(\pm 4, 0), (\pm 5, 0), 5/4$
- (viii) $x^2 - 3y^2 - 2x = 8$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, অক্ষের দৈর্ঘ্য এবং কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
চা. ০৫, চ. ০৮, সি. ১০, ব. ১২; রা. সি. ১৩ উঃ $e = \frac{2}{\sqrt{3}}, 2a = 6, 2b = 2\sqrt{3}$, কেন্দ্র $(1, 0)$
- (ix) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ কনিকটি সনাক্ত কর এবং এর শীর্ষ বিন্দু, উপকেন্দ্র এবং অসীমতটের সমীকরণ নির্ণয় কর।
দি. ২০১৬ উঃ অধিবৃত্ত, $(\pm 3, 0), (\pm\sqrt{13}, 0), 3y = \pm 2x$
4. (i) অধিবৃত্তের অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষ বরাবর অবস্থিত। এর অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য ৬ এবং উপকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব ১০ হলে, অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।
উত্তর : $9x^2 - 16y^2 = 144$
- (ii) একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$ ও নিয়ামকরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব ৪ এবং অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়ের উপর অবস্থিত।
উত্তর : $x^2 - y^2 = 8$
- (iii) এমন একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার আড়া অক্ষ y -অক্ষ বরাবর, অনুবন্ধী অক্ষ x -অক্ষ বরাবর, শীর্ষ বিন্দু দুইটির দূরত্ব ২ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$ ।
চ. ২০১০ উত্তর : $y^2 - x^2 = 1$
- (iv) একটি অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটির দূরত্ব ১৬ এবং উপকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$; অধিবৃত্তটির অক্ষ দুইটি স্থানাঙ্কের দুই অক্ষ বরাবর হলে এর সমীকরণ নির্ণয় কর।
কু. ১২; ব. দি. চ. ১৩, বুয়েট ১২-১৩
উত্তর : $x^2 - y^2 = 32$
5. (i) একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{5}$; উপকেন্দ্র $(1, -8)$ এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ $3x - 4y = 10$ ।
কু. য. চ. ০৬, সি. ০৭; চা. কু. ১০, রা. ১১, য. মা. বো. ১৪,
চা. চ. ১৬ উত্তর : $4x^2 + 11y^2 - 24xy - 50x - 225 = 0$
- (ii) উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(2, 2)$, উৎকেন্দ্রিকতা ২ এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ $x + y = 9$ হলে, অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।
রা. ২০১৪, উত্তর : $x^2 + y^2 + 4xy - 32x - 32y + 154 = 0$
- (iii) অধিবৃত্তের একটি উপকেন্দ্র $(2, 3)$ এবং অনুরূপ নিয়ামকরেখা $x + 2y = 1$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{3}$ হলে, অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।
উত্তর : $2x^2 - 7y^2 - 12xy - 14x - 18y + 62 = 0$

- (iv) একটি অধিবৃত্তের ফোকাস $(1, -1)$ এবং অনুরূপ নিয়ামক $2x + y + 1 = 0$; অধিবৃত্তটি $(0, 1)$ বিন্দুগামী হলে এর সমীকরণ নির্ণয় কর।
উত্তর : $16x^2 + y^2 + 20xy + 28x + 2y - 3 = 0$.
- (v) যে অধিবৃত্তের নিয়ামকরেখার সমীকরণ $2x + y = 1$, উপকেন্দ্র $(1, 1)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{3}$ তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. ০১, য. ০৩, ঢা. কু. ০৪] উঃ $7x^2 - 2y^2 + 12xy - 2x + 4y - 7 = 0$.
6. (i) অধিবৃত্তের অক্ষদ্বয়কে x ও y -অক্ষ ধরে $(2, 1)$ এবং $(3, -2)$ বিন্দুগামী অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।
ব, ২০০৯, কু. ১৬ উত্তর : $3x^2 - 5y^2 = 7$
- (ii) একটি অধিবৃত্ত $(6, 4)$ ও $(-3, 1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। এর কেন্দ্র মূলবিন্দু এবং আড় অক্ষ x -অক্ষ বরাবর হলে, অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।
ব. ০৬, চ. ০৯; য. ১১, বুয়েট ১১ - ১২
উত্তর : $\frac{5x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$
7. (i) কোনো অধিবৃত্তের একটি উপকেন্দ্র $(3, 0)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{3}{2}$ হলে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। অধিবৃত্তটির উপরস্থ $(3, 2.5)$ বিন্দুটির উৎকেন্দ্রিক কোণ নির্ণয় কর।
উত্তর : $5x^2 - 4y^2 = 20, \theta = 48^\circ 23'$.
- (ii) $y^2 - 2x^2 = 2$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। [বুয়েট ১২-১৩] উঃ $\sqrt{3}/2$.
8. $16x^2 - 9y^2 = 144$ অধিবৃত্তের উপরস্থ $(-3, 0)$ এবং $(3.75, 3)$ বিন্দু দুইটির পরামিতিক স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
উত্তর : $(3\sec\theta, 4\tan\theta)$ যখন θ এর মান যথাক্রমে 180° এবং $36^\circ 86'$ (প্রায়)।
9. একটি কণিকের আড় অক্ষ $x - 2y + 1 = 0$ উপকেন্দ্র $(1, 1)$ উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$ এবং নিয়ামকের উপর একটি বিন্দু $(2, -3)$, তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [বুয়েট ১৪-১৫]
উত্তর : $3(x^2 - y^2) + 8xy + 2x + 6y - 8 = 0$
10. $9x^2 - 16y^2 + 72x - 32y - 16 = 0$ বক্ররেখাটির প্রকৃতি, তার কেন্দ্র ও উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, নিয়ামকরেখার সমীকরণ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [বুয়েট ১০-১১]
উত্তর : কেন্দ্র $(-4, -1)$, উপকেন্দ্র $(1, -1)$, $(-9, -1)$ নিয়ামক $x + 4 = \pm 16/5$. $LL' = 9/2$.

প্রশ্নমালা 7.1

প্রমাণ কর : (প্রশ্ন 1 - 19)

1. (i) $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

(ii) $\tan^{-1} \frac{1}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{7} + \tan^{-1} \frac{11}{23} = \frac{\pi}{4}$.

(iii) $\tan^{-1} \frac{1}{3} - \tan^{-1} \frac{1}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{7} = \tan^{-1} \frac{3}{11}$.

2. (i) $2 \tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$ [রা. '০৫]

(ii) $\tan^{-1} \frac{1}{4} + \tan^{-1} \frac{2}{9} + \tan^{-1} \frac{1}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$.

(iii) $2 \tan^{-1} \frac{1}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{7} + 2 \tan^{-1} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$.

3. (i) $\sin^{-1} \frac{4}{5} + \cos^{-1} \frac{2}{\sqrt{5}} = \tan^{-1} \frac{11}{2}$ [ব. '১০; সি. '১২; দি. '১৩]

(ii) $\sin^{-1} \frac{1}{3} + \cos^{-1} \sqrt{\frac{2}{3}} = \tan^{-1} \sqrt{2}$. (iii) $\sec^{-1} \frac{13}{5} - \operatorname{cosec}^{-1} \frac{\sqrt{5}}{2} = \tan^{-1} \frac{2}{29}$ [চ. '০২]

4. (i) $\cot^{-1} \frac{5}{3} + \sin^{-1} \frac{3}{5} = \tan^{-1} \frac{27}{11}$ [বুয়েট '০৩-'০৪] (ii) $\cos^{-1} \frac{63}{65} + 2 \tan^{-1} \frac{1}{5} = \tan^{-1} \frac{3}{4}$.

(iii) $\cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{3}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \tan^{-1} 2$.

[য. '১৩; চ.সি. '১১; ঢা. কু. দি. '১৪; ঢা. '১৪, '১৬]

5. (i) $\sin^{-1} \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{5}{13} - \cot^{-1} 2 = \tan^{-1} \frac{28}{29}$ [কু. '১২; ব.চ.সি. '১৩; রা. '১৪]

(ii) $\sin^{-1} \frac{2a}{1+a^2} - \cos^{-1} \frac{1-b^2}{1+b^2} = 2 \tan^{-1} x$ হলে দেখাও যে, $x = \frac{a-b}{1+ab}$ [সি. '০৩; য. '০৫; দি. '১১]

6. $4 \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{17}} - \tan^{-1} \frac{79}{401} = \frac{\pi}{4}$.

7. (i) $\tan^{-1} \frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1} \frac{\sqrt{13}}{2}$; [সি. '১০; ঢা. '১১]

(ii) $\tan^{-1} \frac{1}{4} + \tan^{-1} \frac{2}{9} = \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{3}{5}$.

8. $4 \left(\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{5}} + \cot^{-1} 3 \right) = \pi$. [ঢা. '০৯; ব. '১১; দি. '১২]

9 (i) $\{\cos(\sin^{-1} x)\}^2 = \{\sin(\cos^{-1} x)\}^2$

(ii) $2 \sin^{-1} x = \sin^{-1} (2x \sqrt{1-x^2})$.

(iii) $\sin(3 \sin^{-1} x) = 3x - 4x^3$.

(iv) $\cos \left(2 \tan^{-1} \frac{1}{7} \right) = \sin \left(4 \tan^{-1} \frac{1}{2} \right)$ [রা. '১৩]

(v) $\sin^{-1}(-\cos x) + \sin^{-1}(\cos 3x) = 2x$ [ঢা. দি. সি. '০৯]

(vi) $\sin^{-1}(\sqrt{2} \sin \theta) + \sin^{-1}(\sqrt{\cos 2\theta}) = \frac{\pi}{2}$ [কু. য. '১১, ব. '১৩; দি. '১৪]

10. $\cos^{-1} \sqrt{\frac{2}{3}} - \cos^{-1} \frac{\sqrt{6+1}}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$.

11. $\tan(2 \tan^{-1} x) = 2 \tan(\tan^{-1} x + \tan^{-1} x^3)$. [কু. '০৭; চ. '০৯, '১৪]

12. $\tan^{-1} \left(\frac{1}{2} \tan 2A \right) + \tan^{-1}(\cot A) + \tan^{-1}(\cot^3 A) = 0$.

13. $\tan^{-1}\{(\sqrt{2}+1)\tan \alpha\} - \tan^{-1}\{(\sqrt{2}-1)\tan \alpha\} = \tan^{-1}(\sin 2\alpha)$. [চ. '১০, দি. '১৩]

14. (i) $\tan^{-1} \sqrt{x} = \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{1-x}{1+x}$. [কু. '০৮; টেক্সটাইন '০৮-০৯]

(ii) $\tan^{-1} x = \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^{-1} \frac{1+x^2}{2x}$.

(iii) $2 \tan^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{\theta}{2} \right\} = \cos^{-1} \frac{b+a \cos \theta}{a+b \cos \theta}$. [কু. '০৮, '১১; য. '০৯, সি. '১৩; ঢা. '১৪]

(iv) $2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} \tan \frac{\theta}{2} \right) = \sin^{-1} \frac{2\sqrt{ab} \sin \theta}{b+a+(b-a)\cos \theta}$

(v) $\tan \left\{ \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2} \right\} = \frac{2x}{1-x^2}$. [কু. '১৪]

15. $\tan^{-1} \frac{a^2-b^2}{1+a^2b^2} + \tan^{-1} \frac{b^2-c^2}{1+b^2c^2} + \tan^{-1} \frac{c^2-a^2}{1+c^2a^2} = 0$.

16. $\tan^{-1} x = 2 \tan^{-1} [\operatorname{cosec} \tan^{-1} x - \tan \cot^{-1} x]$. [দি. '১০; রা. '১১; য. '১২]

17. (i) $\sec^2(\tan^{-1} 2) + \operatorname{cosec}^2(\cot^{-1} 3) = 15$, [ব. '১২; ঢা. রা. '১৩; চ. সি. '১৪]

(ii) $\sec^2(\tan^{-1} 4) + \tan^2(\sec^{-1} 3) = 25$, [কু. '১৩; ছয়েট '১১-'১২]

(iii) $\sin^2(\cos^{-1} \frac{1}{3}) - \cos^2(\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{9}$. [রা. চ. '০৭; টেক্সটাইন '০৯-'১০]

(iv) $\operatorname{cosec}^2(\tan^{-1} \frac{1}{2}) - 3 \sec^2(\cot^{-1} \sqrt{3}) = 1$. [ঢা. '০৩]

18. (i) $\cot \cos^{-1} \sin \tan^{-1} \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$. [ঢা. '০২, রা. '১৬]

(ii) $\sin \cot^{-1} \tan \cos^{-1} x = x$. [রা. '০৮; ব. '০৯; সি. '১১; রা. '১২; সি.; য. '১৪]

(iii) $\cos \tan^{-1} \cot \sin^{-1} x = x$.

(iv) $\cos \tan^{-1} \sin \cot^{-1} x = \sqrt{\frac{1+x^2}{2+x^2}}$. [য. দি. '০৯; ঢা. '১০; চ. '১২]

$$(v) \sin \cos^{-1} \tan \sec^{-1} \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{2y^2 - x^2}}{y} \quad [\text{সি. '০৯, ব. '১১; ব. '১৪}]$$

$$(vi) \cot \cos^{-1} \sin \tan^{-1} x = x \quad [\text{দি. '১৬}]$$

19. (i) যদি $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \frac{\pi}{2}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, (i) $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1$.

$$(ii) x^2 + y^2 = 1.$$

[য. '১০, '১৪; ব. রা. '১২; ঢা. '১৩]

20. (i) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \pi$ হলে প্রমাণ কর যে, $x + y + z = xyz$. [কু. '১২]

(ii) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \frac{\pi}{2}$ হলে, দেখাও যে, $yz + zx + xy = 1$.

(iii) $\cos^{-1} x + \cos^{-1} y + \cos^{-1} z = \pi$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. [কু. '১৬]

(iv) যদি $A + B + C = \pi$, $\tan^{-1} 2 = A$ এবং $\tan^{-1} 3 = B$ হয়, তবে দেখাও যে, $C = \frac{\pi}{4}$.

[চ. '১৩, '১৬]

(v) $\tan^{-1} x + \frac{1}{2} \sec^{-1} \frac{1+y^2}{1-y^2} + \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^{-1} \frac{1+z^2}{2z} = \pi$ হলে দেখাও যে, $x + y + z = xyz$.

[চ. '১১]

21. (i) $\sin(\pi \cos \theta) = \cos(\pi \sin \theta)$ হলে, দেখাও যে, $\theta = \pm \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{3}{4}$.

[ঢা. '১০; দি. '১২; কু. '১৩]

(ii) $\sin(\pi \cos \theta) = \cos(\pi \sin \theta)$ হলে, দেখাও যে, $\theta = \pm \frac{\pi}{4} + \cos^{-1} \frac{1}{2\sqrt{2}}$. [য. '১৬]

(iii) $\sec \theta - \operatorname{cosec} \theta = \frac{4}{3}$ হলে দেখাও যে, $\theta = \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{3}{4}$.

22. $\cos^{-1} \frac{x}{a} + \cos^{-1} \frac{y}{b} = \theta$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \theta + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \theta$. [ব. রা '১৪]

23. সমাধান কর :

(a) $\tan^{-1} \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2} \tan^{-1} x$

[বুয়েট '০৬-'০৭]

(b) $\tan^{-1} \frac{x-1}{x-2} + \tan^{-1} \frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$

(c) $\tan(\cos^{-1} x) = \sin(\tan^{-1} 2)$. [বুয়েট '১২-'১৩]

(d) $\cos^{-1} x - \sin^{-1} x = \cos^{-1} x\sqrt{3}$;

(e) $\tan^{-1} x + 2 \cot^{-1} x = \frac{2\pi}{3}$. [বুয়েট '১০-'১১]

(f) $\sec^{-1} \frac{x}{a} - \sec^{-1} \frac{x}{b} = \sec^{-1} b - \sec^{-1} a$.

(g) $\tan^{-1} \sin \tan^{-1} x = \cos^{-1} \sqrt{\frac{3}{5}}$.

(h) $\tan^{-1} \frac{x-1}{x+1} + \tan^{-1} \frac{2x-1}{2x+1} = \tan^{-1} \frac{23}{36}$.

উত্তরমালা

23. (a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; (b) $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$; (c) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; (d) $0, \pm \frac{1}{2}$; (e) $\sqrt{3}$; (f) ab ; (g) $\sqrt{2}$; (h) $\frac{4}{3}$.

প্রশ্নমালা 7.2

1. সমাধান কর : (যখন $0^\circ < \theta < 360^\circ$)

(i) $\tan^2 \theta + \cot^2 \theta = 2$; [ব. '০৭] (ii) $4(\cos^2 \theta + \sin \theta) = 5$; [দি. '১২]

(iii) $2 \sin^2 \theta - 5 \cos \theta + 1 = 0$; (iv) $2(\sin \theta \cos \theta + \sqrt{3}) = \sqrt{3} \cos \theta + 4 \sin \theta$;

(v) $\tan^2 \theta + \sec \theta = -1$; (vi) $3 \tan^2 \theta + 1 = \frac{2\sqrt{3}}{\cot \theta}$; (vii) $3 \tan^2 \theta - 4\sqrt{3} \sec \theta + 7 = 0$;

(viii) $\cot^2 \theta - 2\sqrt{2} \operatorname{cosec} \theta + 3 = 0$; (ix) $1 - 2 \sin \theta - 2 \cos \theta + \cot \theta = 0$. [চ. '১৬]

সাধারণ সমাধান কর : (ব্যবধির উল্লেখ থাকলে সম্ভাব্য মানগুলিসহ)

2. $\tan^2 x + \sec^2 x = 3$. 3. (i) $\tan x + \tan 3x = 0$. (ii) $\cot 2x - \cot 4x = \sqrt{2}$.

4. (i) $\tan \theta + \cot \theta = 2$.

(ii) $\cot \theta - \tan \theta = 2$, যখন $0 < \theta < 2\pi$.

(iii) $\tan^2 \theta - 2\sqrt{3} \sec \theta + 4 = 0$. [রা. '১৪]

(iv) $\tan^2 \theta - 3 \operatorname{cosec}^2 \theta + 1 = 0$. [বুয়েট '০৩-'০৪; টেক্সটাইন '০৫-'০৬]

5. $\operatorname{cosec} x + \cot x = \sqrt{3}$.

6. $\sec^2 \frac{x}{2} = 2\sqrt{2} \tan \frac{x}{2}$. [ব. '১৩]

7. (i) $4(\sin^2 \theta + \cos \theta) = 5$, যখন $-2\pi < \theta < 2\pi$; [ব.সি.রা. '১০; চ. '১১]

(ii) $\sec^2 \theta + \tan^2 \theta = 3 \tan \theta$. [দি. '০৯]

8. $2 \sin^2 \theta = 3 \cos \theta$, যখন $0 < \theta < 2\pi$. [য. '০৯]

9. $\cot \theta + \tan \theta = 2 \sec \theta$, যখন $-2\pi < \theta < 2\pi$.

[ঢা. '১০; দি. '১১; সি. '১২, '১৬; য. '১২; চ. '১৩; কু. '১৪]

10. (i) $\sin^2 2\theta - 3 \cos^2 \theta = 0$; [কু. '১০; চ. '১১] (ii) $\cos 2x + \sin x = 1$.

11. $2 \sin x \sin 3x = 1$, যখন $0 < x < 2\pi$. [রা. '১০; দি. '১২; য. '১৩, '১৬; ঢা. '১৪]

12. $4 \sin \theta \cos \theta = 1 - 2 \sin \theta + 2 \cos \theta$; যখন $0^\circ < \theta < 180^\circ$. [সি. '১৩]

13. (i) $\tan^3 \theta - \sec^2 \theta = 4 \tan^2 \theta - 5 \tan \theta$;

(ii) $\sin 2x \tan x + 1 = \sin 2x + \tan x$;

(iii) $\cos^3 x - \cos x \sin x = \sin^3 x + 1$;

(iv) $\sin 2\theta + 4 \cos \theta = \sqrt{3} \sin \theta + 2\sqrt{3}$.

14. $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \tan \theta = 2$. [সি. '১৩]

15. $\sin^2 2\theta - \sin^2 \theta = \frac{1}{3} \sin 3\theta$.

16. (i) $\cot 2x = \cos x + \sin x$. [কু. '১১]

(ii) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 2x$

(iii) $\frac{\sqrt{3}}{\sin 2x} - \frac{1}{\cos 2x} = 4$. [বুয়েট '০৬-'০৭]

17. $\cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}$. [য. '১২; সি. '১৪, '১৬; চ. '১৪]

18. (i) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(ii) $\sin \theta + \cos \theta = 1$ [সি. '০৯; চ. '১০; দি. '১৬]

(iii) $\cos \theta - \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, যখন $-\pi < \theta < \pi$. [দি. কু. '১৩]

19. (i) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{3}$;

(ii) $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 1$; যখন $-2\pi < x < 2\pi$. [য. '১০, '১৪; ঢা. '১১; ব. '১৪]

20. $\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta = 2$, যখন $-2\pi < \theta < 2\pi$.

[ঢা. '১৩, '১৬; রা. '১১; চ. '১২; বুয়েট ছুয়েট '০৭-'০৮]

21. $\cos \theta + 2 \sin \theta = 1$. [বুয়েট '০৫-'০৬]

22. $\sin x + \cos x = \sin 2x + \cos 2x$. [য. '১১; চ. '১২; ঢা. '১৩; দি. য. '১৪]

23. $\operatorname{cosec} \theta + \sec \theta = 2\sqrt{2}$. 24. $\cos 3\theta = \cos 2\theta$.

25. (i) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$; [ঢা. '০৫; কু. '১৩; রা. '১৬]

(ii) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$; [রা. '০৭; ব. '১৩]

(iii) $\cos \theta - \cos 7\theta = \sin 4\theta$; [ঢা. '১০, '১৪; ব. '১১; চ. '১৪]

(iv) $\cos \theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta = 0$, যখন $0 < \theta < \pi$.

26. $\cos 6x + \cos 4x = \sin 3x + \sin x$ [কু. '১৪, '১৬; রা. '১৪]

27. $\sin 3\theta + \sin 5\theta + \sin 7\theta + \sin 9\theta = 0$.



প্রতিদিনের চাকুরীর মার্কুলার পেতে [এখানে ক্লিক করুন](#)

প্রতি মাসের কারেন্ট অ্যাফেয়ার্স পিডিএফ [এখানে ক্লিক করুন](#)

চাকুরীর প্রয়োজনীয় সকল পিডিএফ বই [এখানে ক্লিক করুন](#)

বিসিএম এর প্রয়োজনীয় পিডিএফ বই [এখানে ক্লিক করুন](#)

প্রতি সপ্তাহের চাকুরী পত্রিকা ডাউনলোড [এখানে ক্লিক করুন](#)

সকল নিয়োগ পরীক্ষার প্রশ্ন সমাধান [এখানে ক্লিক করুন](#)

বিডিনিয়োগ.কম দেশের মেরা পিডিএফ কালেকশন

SSC এর প্রয়োজনীয় সকল পিডিএফ বই [এখানে ক্লিক করুন](#)

HSC এর প্রয়োজনীয় সকল পিডিএফ বই [এখানে ক্লিক করুন](#)

বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তির সকল পিডিএফ বই [এখানে ক্লিক করুন](#)

সকল ধরনের **মাজেশন** ডাউনলোড [এখানে ক্লিক করুন](#)



28. (i) $\sqrt{2} \cos 3\theta - \cos \theta = \cos 5\theta$. [সি. '১০; য. '১৩]
(ii) $\sin 7\theta - \sqrt{3} \cos 4\theta = \sin \theta$ [দি. '১০; রা. '১৩; ঢা. '১৬]
29. (i) $\sin 5\theta \cos \theta = \sin 6\theta \cos 2\theta$;
(ii) $\cos 9x \cos 7x = \cos 5x \cos 3x$. [ঢা. '১২, '১৬]
30. $\tan x + \tan 2x + \tan x \tan 2x = 1$. [ঢা. '০৯; ব. '১১]
31. (i) $\tan \theta + \tan 2\theta + \sqrt{3} \tan \theta \tan 2\theta = \sqrt{3}$. [ব. চ. '০৯; সি. '১৪]
(ii) $\sqrt{3}(\tan x + \tan 2x) + \tan x \tan 2x = 1$. [রা. য. '১১; চ. দি. '১৩]
(iii) $\cot x + \cot 2x + \cot 3x = \cot x \cot 2x \cot 3x$
(iv) $\tan \theta + \tan 2\theta + \tan 3\theta = 0$ [ব. '১১]
32. $4 \cos x \cos 2x \cos 3x = 1$, যখন $0 < x < \pi$. [দি. '১১, '১৪, '১৬; কু. রা. '১২]
33. $\tan 2\theta \tan \theta = 1$. [কু. য. ব. '১০; ঢা. '১১; ব. '১২]
34. $\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 1 + \cos \theta + \cos 2\theta$. [চ. '০৮; বুয়েট '০৮-'০৯]
35. $\cos 7\theta = \cos 3\theta + \sin 5\theta$, যখন $-90^\circ < \theta < 90^\circ$. [ঢা. '০৮-'০৯]
36. 0° এবং 360° এর মধ্যবর্তী সব মানসহ সমাধান কর :
- (i) $1 + \sqrt{3} \tan^2 \theta = (1 + \sqrt{3}) \tan \theta$; [ব. '১৪]
(ii) $\sec 4\theta - \sec 2\theta = 2$, [ঢা. '০৮; কু. '১১; ছুয়েট '০৩-'০৪]
(iii) $(2 + \sqrt{3}) \cos \theta = 1 - \sin \theta$;
(iv) $4 \cot 2\theta = \cot^2 \theta - \tan^2 \theta$.
37. যদি $\sin(\pi \cot \theta) = \cos(\pi \tan \theta)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\operatorname{cosec} 2\theta$, বা $\cot 2\theta$ এর মান $\left(n + \frac{1}{4}\right)$ এর সমান, যখন n এর মান একটি পূর্ণ সংখ্যা হয়।
38. যদি $\sin A = \sin B$ এবং $\cos A = \cos B$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $A = B$, অথবা এদের পার্থক্য 2π এর সমকোণের যেকোনো গুণিতকের সমান।
39. যদি $a \cos \theta + b \sin \theta = c$ সমীকরণের দুইটি সমাধান যথাক্রমে α ও β হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$
40. $1 + \cos(y - z) + \cos(z - x) + \cos(x - y) = 0$ হলে, দেখাও যে, $(y - z)$ অথবা, $(z - x)$ অথবা, $(x - y)$ হবে π এর বিজোড় গুণিতকের সমান।

উত্তরমালা

অন্য কিছু উল্লেখ করা না হলে প্রত্যেক প্রশ্নের উত্তরের সংগে ব্যবহৃত n এর মান যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা ধরতে হবে।

1. (i) $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ$ এবং 315° ; (ii) 30° এবং 150° ; (iii) 60° এবং 300° ; (iv) 120° এবং 60° ; (v) কেবল 180° ; (vi) 30° এবং 210° ; (vii) 30° এবং 330° ; (viii) 45° এবং 135° ; (ix) $30^\circ, 135^\circ, 150^\circ$ এবং 315° .

2. $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$. 3. (i) $\frac{1}{4}n\pi$; (ii) $\{4n + (-1)^n\} \frac{\pi}{16}$. 4. (i) $(4n + 1) \frac{\pi}{4}$. (ii) $\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}$.

(iii) $2n\pi \pm \alpha$, যখন $\alpha = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}$; (iv) $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

5. $2n\pi + \frac{\pi}{3}$. 6. $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$. 7. (i) $\pm \frac{\pi}{3}, \pm \frac{5\pi}{3}$. (ii) $n\pi + \alpha$, যেখানে $\tan \alpha = \frac{1}{2}$

8. $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$. 9. $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$. 10. (i) $(2n + 1) \frac{\pi}{2}, n\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

(ii) $\frac{1}{6} \{6n + (-1)^n\} \pi$.

11. $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$ এবং $\frac{11\pi}{6}$; 12. $30^\circ, 120^\circ$ এবং 150° ;

13. (i) $n\pi + \pi/4, n\pi + \alpha, n\pi + \beta$; যখন $\tan \alpha = 2 + \sqrt{3}$ এবং $\tan \beta = 2 - \sqrt{3}$;

(ii) $n\pi + \pi/4, \frac{1}{4}(4n + 1)\pi$;

(iii) $2n\pi, 2n\pi - \frac{\pi}{2}$; (iv) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$. 14. $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$. 15. $n\pi, n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n\pi + (-1)^n$

α , যখন $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. 16. (i) $n\pi - \frac{\pi}{4}, \frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\alpha}{2}$, যখন $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

(ii) $n\pi + \frac{\pi}{4}$, যখন $n = 0$ অথবা জোড় পূর্ণ সংখ্যা (iii) $(6n + 1) \frac{\pi}{18}, (3n + 1) \frac{\pi}{3}$.

17. $(24n + 7) \frac{\pi}{12}, (24n + 1) \frac{\pi}{12}$. 18. (i) $2n\pi - \frac{\pi}{12}, 2n\pi + \frac{7\pi}{12}$; (ii) $2n\pi, 2n\pi + \frac{\pi}{2}$.

(iii) $\frac{\pi}{12}, -\frac{7}{12}$ 19. (i) $2n\pi, (6n + 1) \frac{\pi}{3}$; (ii) $-\frac{\pi}{6}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$. 20. $-\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$.

21. $2n\pi, 2(n\pi + \alpha)$; যখন $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. 22. $2n\pi, (4n + 1) \frac{\pi}{6}$.

23. $(8n + 3) \frac{\pi}{12}, (8n + 1) \frac{\pi}{4}$. 24. $2n\pi, \frac{2}{5}n\pi$. 25. (i) $(2n + 1) \frac{\pi}{4}, 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$;

(ii) $\frac{1}{2}n\pi, 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$; (iii) $\frac{1}{4}n\pi, \frac{1}{3}n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{18}$; (iv) $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

এবং $\frac{\pi}{2}$. 26. $(2n + 1) \frac{\pi}{2}, (4n - 1) \frac{\pi}{6}, \frac{4n + 1}{14} \pi$.

27. $\frac{n\pi}{6}, (2n + 1) \frac{\pi}{4}, (2n + 1) \frac{\pi}{2}$. 28. (i) $(2n + 1) \frac{\pi}{6}, n\pi \pm \frac{\pi}{8}$;

$$(ii) (2n + 1) \frac{\pi}{8}, \frac{1}{3} n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{9}. \quad 29. (i) n\pi, (2n + 1) \frac{\pi}{14}; \quad (ii) \frac{n\pi}{12}, \frac{n\pi}{4}.$$

$$30. (4n + 1) \frac{\pi}{12}. \quad 31. (i) (3n + 1) \frac{\pi}{9}; \quad (ii) \frac{1}{6} (2n + 1)\pi. \quad (iii) \frac{n\pi}{3} \pm \frac{\pi}{12};$$

$$(iv) \frac{n\pi}{3}, n\pi \pm \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad 32. \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{\pi}{3} \text{ এবং } \frac{2\pi}{3}. \quad 33. n\pi \pm \frac{\pi}{6}.$$

$$34. (2n + 1) \frac{\pi}{2}, 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}. \quad 35. \frac{n\pi}{5}, \frac{n\pi}{2} + (-1)^n \left(-\frac{\pi}{12}\right); \text{ সম্ভাব্য মানঃ } \neq$$

$$-75^\circ, -72^\circ, -36^\circ, -15^\circ, 0^\circ, 36^\circ \text{ এবং } 72^\circ. \quad 36. (i) n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{\pi}{6}; \text{ সম্ভাব্য মান : } 30^\circ,$$

$$45^\circ, 210^\circ, 225^\circ; \quad (ii) \text{ সাধারণ সমাধানঃ } (2n + 1) \frac{\pi}{2}, (2n + 1) \frac{\pi}{10}; \text{ সম্ভাব্য মান : } k \times 18^\circ, \text{ যখন}$$

$$k = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19; \quad (iii) \text{ সাধারণ সমাধান : } 2n\pi - \pi/3, 2n\pi + \pi/2; \text{ সম্ভাব্য}$$

$$\text{মান : } 90^\circ, 300^\circ; \quad (iv) \text{ সাধারণ সমাধান : } n\pi \pm \pi/4; \text{ সম্ভাব্য মান : } 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ \text{ এবং } 315^\circ.$$

প্রশ্নমালা ৪.১

১. (i) কোনো বিন্দুতে $7 N$ এবং $8 N$ দুইটি বল পরস্পর 60° কোণে কার্যরত আছে। এদের লম্বি নির্ণয় কর।
(ii) দুইটি বল সমকোণে ক্রিয়া করলে লম্বি $13 N$ এবং এদের বৃহত্তম লম্বি $17 N$, বল দুইটি 120° কোণে ক্রিয়া করলে লম্বি নির্ণয় কর। [ঢা. বি. ০৪-০৫]
- (iii) কোনো কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লম্বি এদের বৃহত্তর বলটির ক্রিয়ারেখার সাথে 60° -কোণ উৎপন্ন করে। বৃহত্তর বলটিকে দ্বিগুণ করলে উক্ত কোণটি 30° হয়। বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। [বুয়েট '১১-'১২]
- (iv) কোনো বিন্দুতে $2P$ এবং P মানের দুইটি বল ক্রিয়াশীল। প্রথমটিকে দ্বিগুণ করলে এবং দ্বিতীয়টির মান 8 একক বৃদ্ধি করলে লম্বির দিক অপরিবর্তিত থাকে। P এর মান নির্ণয় কর। [ব. ২০১১, কুয়েট, '০৮-'০৯]
- (v) একটি বিন্দুতে পরস্পর 120° কোণে ক্রিয়ারত P , $2P$ এবং $3P$ বলদ্বয়ের লম্বির মান ও দিক নির্ণয় কর।
২. (i) $3P$ এবং $2P$ মানের বল দুইটির লম্বির মান R ; যদি প্রথম বলের পরিমাণ দ্বিগুণ করা হয় তবে লম্বির মানও দ্বিগুণ হয়। বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [ব.০৪ কু.সি.০৭, বুয়েট ০৩-০৪, ঢা.বি. ০৯-১০]
- (ii) 2α কোণে ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলের লম্বি, 2β কোণে ক্রিয়ারত বল দুইটির লম্বির দ্বিগুণ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos \alpha = 2 \cos \beta$ । [রা. ০৫, ২০১০, সি. ০৩, কু. ১২]
- (iii) একটি কণার উপর কার্যরত P , P দুইটি বলের লম্বির মান P হলে বল দুইটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। [কুয়েট ১৪-১৫]
- (iv) দুইটি সমান বল কোনো একটি কণার উপর ক্রিয়ারত। এদের লম্বির বর্গ বল দুইটির গুণফলের তিনগুণের সমান হলে বলদুইটি অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর। [ঢা. বি. ৯৯-০০, বুয়েট, চুয়েট ১০-১১]
- (v) একটি বিন্দুতে পরস্পর 90° কোণে ক্রিয়ারত $6N$, $8N$ দুইটি বলের লম্বির মান এবং বৃহত্তর বলের সাথে লম্বির নতি নির্ণয় কর।
৩. (i) দুইটি বলের লম্বি $12 N$, যা ক্ষুদ্রতর বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব এবং এদের বৃহত্তম লম্বি $18 N$, হলে বল দুইটি নির্ণয় কর।
- (ii) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P এবং $2P$ মানের বলদ্বয়ের লম্বি যদি P এর ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব হয়, তবে বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [ঢা. বি. ০৭-০৮, টেক্সটাইল ১২-১৩]
- (iii) কোনো বিন্দুতে 120° কোণে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লম্বি ক্ষুদ্রতর বলের সাথে সমকোণ উৎপন্ন করে। বৃহত্তর বলটি $10N$ হলে, লম্বি নির্ণয় কর। [চুয়েট ১২-১৩]
- (iv) একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত P নিউটন এবং $12N$ দুইটি বলের লম্বি $3\sqrt{7}N$ যার ক্রিয়ারেখা P এর সাথে 90° কোণ উৎপন্ন করে। P এর মান নির্ণয় কর। [ঢা. বি. ০৮-০৯]
৪. (i) কোনো কণার উপর ক্রিয়ারত দুইটি বলের লম্বি একটি বলের উপর লম্ব এবং এর মান অপরটির মানের এক তৃতীয়াংশের সমান। দেখাও যে, বল দুইটির অনুপাত $2\sqrt{2} : 3$ । [য. ২০১০, বুয়েট ১২-১৩]
- (ii) পরস্পর α কোণে আনত P ও Q মানের বল দুইটির লম্বির মান $\sqrt{3}Q$ এবং তা P বলের ক্রিয়ারেখার সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। দেখাও যে, $P = Q$ অথবা $P = 2Q$ । [সি. ২০০৫, মা. বো. ১৪]
- (iii) একটি বিন্দুতে কার্যরত P ও Q মানের দুইটি বলের লম্বির মান R ; Q বলটিকে দ্বিগুণ করলে R ও দ্বিগুণ হয়। আবার Q বিপরীতমুখী হলেও R এর মান দ্বিগুণ হয়।
প্রমাণ কর যে, $P : Q : R = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$ ।

(iv) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q দুইটি বলের লব্ধির মান R . যদি Q কে দ্বিগুণ করা হয়, তবে নতুন লব্ধি P বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব হয়। প্রমাণ কর যে, $Q = R$.

(v) এক বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q দুইটি বলের লব্ধির মান R . যদি Q কে বিপরীতমুখী করা হয়, তবে নতুন লব্ধি এক সমকোণে ঘুরে যায়। প্রমাণ কর যে, $P = Q$.

5 (i) OA ও OB সরলরেখা বরাবর ক্রিয়ারত P এবং Q মানের বল দুইটির লব্ধি OA এর উপর লম্ব। একই রেখা বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে P' এবং Q' মানের বল দুইটির লব্ধি OB এর উপর লম্ব হলে প্রমাণ কর যে, $P P' = Q Q'$.

(ii) পরস্পর α কোণে আনত OA এবং OB রেখা বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে P ও Q মানের বলদ্বয়ের লব্ধি R , যা OA এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। একই রেখা বরাবর Q এর স্থলে Q' ক্রিয়া করলে এদের লব্ধির R'

যা OA এর সাথে θ' কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, $\frac{R}{R'} = \frac{\sin(\alpha - \theta')}{\sin(\alpha - \theta)}$, যখন $\alpha < \pi$.

[দি. ১০, ব. ১৩]

(iii) কোনো একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত P, Q দুইটি বলের লব্ধি P হলে দেখাও যে, একই রেখা বরাবর ক্রিয়ারত $2P$ ও Q বলের লব্ধি Q বলের উপর লম্ব।

6. দুইটি বল ABC ত্রিভুজের CA ও CB বাহু বরাবর ক্রিয়া করে এবং এদের মান যথাক্রমে $\cos A$ ও $\cos B$ এর সমানুপাতিক। প্রমাণ কর যে, এদের লব্ধির মান $\sin C$ এর সমানুপাতিক এবং এর গতি পথ C কোণকে $\frac{1}{2}(C + B - A)$ ও $\frac{1}{2}(C + A - B)$ এ দুই অংশে বিভক্ত করে। [ব. ০৫, ১০, চ. ১১, ঢা. ০৬]

7. (i) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বলের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধির মান যথাক্রমে S এবং T . প্রমাণ কর যে, বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখার মধ্যবর্তী কোণ α হলে, তাদের লব্ধির মান $\sqrt{S^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + T^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$ হবে। [দি. ১২]

(ii) P ও Q বলদ্বয়ের বৃহত্তম লব্ধি ও ক্ষুদ্রতম লব্ধি একটি বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়ারত। তাদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। [ঢা. ২০০৫]

(iii) প্রমাণ কর যে, দুইটি বলের ক্রিয়া রেখার অন্তর্গত কোণ α হলে, তাদের লব্ধির মান

$\sqrt{A^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + B^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$, যেখানে বলদ্বয়ের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান যথাক্রমে A এবং B [ষ. ২০১৪]

8. (i) কোনো বিন্দুতে 2α কোণে কার্যরত $P + Q$ এবং $P - Q$ মানের বল দুইটির লব্ধি এদের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। দেখাও যে, $P \tan \theta = Q \tan \alpha$.

[ঢা. ০৪; কু. ০৬; রা. ০৯, সি. ২০১৩, টেক্সটাইল ০৮-০৯]

(ii) $P + Q$ এবং $P - Q$ বলদ্বয় α কোণে ক্রিয়ারত। তাদের লব্ধি বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সাথে $\frac{\theta}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে। দেখাও যে, $P : Q = \tan \frac{\alpha}{2} : \tan \frac{\theta}{2}$. [চ. ২০০৪]

9. (i) ΔABC এর সমতলে O একটি বিন্দু। BC, CA ও AB বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F হলে, প্রমাণ কর যে, \vec{OD}, \vec{OE} এবং \vec{OF} বলগুলির লব্ধি \vec{OB} . [সি. ২০০১]

(ii) কোনো বৃত্তের দুইটি জ্যা AB ও CD পরস্পর P বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে। বৃত্তের কেন্দ্র O হলে, দেখাও যে, $\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{PC}, \vec{PD}$ বলগুলির লব্ধি $2\vec{PO}$ হবে।

(iii) $ABCD$ চতুর্ভুজের BC ও AD এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E, F দেখাও যে, \vec{AB} ও \vec{DC} বলদ্বয়ের লম্বি $2 \vec{FE}$ ।

(iv) ΔABC এর ভরকেন্দ্র G হলে, দেখাও যে O বিন্দুতে ক্রিয়ারত $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ বলত্রয়ের লম্বি $3 \vec{OG}$ ।

(v) \vec{AB} এবং \vec{AC} বলদ্বয়ের লম্বি ΔABC এর পরিকেন্দ্রগামী হলে, প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমকোণী বা সমদ্বিবাহু হবে।

(vi) যেকোনো ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F হলে, \vec{AD}, \vec{BE} এবং \vec{CF} বল তিনটির লম্বি নির্ণয় কর।

10. (i) ABC সমবাহু ত্রিভুজের AB, BC, CA বাহুর সমান্তরালে যথাক্রমে $2N, 4N$ এবং $6N$ একক তিনটি সমবিন্দু বল ক্রিয়াশীল। এদের লম্বি নির্ণয় কর। [চ্যুয়েট ১১-১২]

(ii) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত $Q - R, Q, Q + R$ মানের বলগুলির দিক একইক্রমে কোনো সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলির সমান্তরাল। বলগুলির লম্বির মান ও দিক নির্ণয় কর। [ঢা. ২০০১, য. ২০০৪]

11. (i) $5P$ ও $2P$ দুইটি বল A বিন্দুতে ক্রিয়াশীল এবং এদের লম্বি $4P$ । যদি কোনো ছেদক তাদের ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে B, C ও D বিন্দুতে ছেদ করে, তাহলে প্রমাণ কর যে, $\frac{4}{AD} = \frac{5}{AB} + \frac{2}{AC}$

(ii) $4P$ ও $3P$ মানের দুইটি বল O বিন্দুতে ক্রিয়া করে এবং এদের লম্বির মান $5P$ । যদি কোনো ছেদক এদের ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে R, S ও T বিন্দুতে ছেদ করে, তাহলে দেখাও যে, $\frac{4}{OR} + \frac{3}{OS} = \frac{5}{OT}$

[সি. ০৯, ১৪, কু. ১১; দি. চ. ১৩]

12. (i) এক বিন্দুতে কার্যরত P, Q মানের দুইটি বলের লম্বির মান R এবং P এর দিক বরাবর R এর লম্বাংশের

পরিমাণ Q হলে, প্রমাণ কর যে, বল দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\alpha = \cos^{-1} \frac{Q-P}{Q} = 2 \sin^{-1} \sqrt{\frac{P}{2Q}}$ এবং

$$R = \sqrt{Q^2 - P^2 + 2PQ}$$

[আলিম ২০০৪, ১৩, কু. ২০০৮; কু. রা. ২০১৩, দি. ১৬]

(ii) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q মানের দুইটি বলের লম্বি তাদের অন্তর্গত কোণকে এক-তৃতীয়াংশে বিভক্ত করে। দেখাও যে, বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের পরিমাণ $3 \cos^{-1} \frac{P}{2Q}$ এবং লম্বি $\frac{P^2 - Q^2}{Q}$, ($P > Q$)

[য. ১২, ঢা. ১৩, ১৬, কু. ১০; আলিম ১১, দি. ১৪, টেক্সটাইল ০৯-১০]

13 (i) $P, 3P, \sqrt{3}P$ এবং $\sqrt{3}P$ মানের বলগুলি যথাক্রমে একতলীয় OA, OB, OC এবং OD সরলরেখা বরাবর ক্রিয়া করে। যদি $\angle AOB = 60^\circ, \angle BOC = 90^\circ$ এবং $\angle COD = 120^\circ$ হয়, তাহলে এদের লম্বির মান ও দিক নির্ণয় কর।

(ii) $ABCD$ আয়তক্ষেত্রের AB বাহু ৪ সে.মি. এবং BC বাহু ৩ সে.মি.। AB, AC ও AD বরাবর ক্রিয়ারত যথাক্রমে $6N, 10N$ ও $8N$ সমবিন্দু বল তিনটির লম্বি ও ক্রিয়া রেখা নির্ণয় কর।

(iii) $ABCD$ একটি রম্বস। এর কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু O তে $3N, 4N, 9N$ এবং $10N$ বলগুলি যথাক্রমে OA, OB, OC এবং OD বরাবর ক্রিয়া করে। লম্বির মান ও দিক নির্ণয় কর।

14. (i) একই সমতলে অবস্থিত OA, OB, OC রেখা বরাবর যথাক্রমে P, Q, R মানের বলগুলি কার্যরত আছে। এদের লম্বির মান F হলে প্রমাণ কর যে,

$$F^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + 2QR \cos BOC + 2PQ \cos AOB + 2PR \cos COA.$$

(ii). কোনো বিন্দুতে P, Q, R মানের তিনটি বল এরূপভাবে ক্রিয়া করে যেন, এদের দিক একটি সমবাহু ত্রিভুজের একইক্রমে তিনটি বাহুর সমান্তরাল হয়। প্রমাণ কর যে,

$$\text{এদের লম্বি } \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2 - QR - RP - PQ}.$$

(iii). কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত $P, Q, R,$ ও S মানের চারটি বলের দিক $ABCD$ আয়তক্ষেত্রের যথাক্রমে AB, BC, CD ও DA বাহুর সমান্তরাল। প্রমাণ কর যে,

$$\text{এদের লম্বির মান } \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2 + S^2 - 2PR - 2QS}$$

(iv) P মানের তিনটি বল একটি বিন্দুতে এরূপভাবে কার্যরত যেন এদের দিক ΔABC এর BC, CA এবং AB বাহুর সমান্তরাল। প্রমাণ কর যে, এদের লম্বি মান $P\sqrt{3 - 2 \cos A - 2 \cos B - 2 \cos C}$.

[ঢা. ১০, বুয়েট ০০-০১]

(v) ABC ত্রিভুজের বাহু বরাবর একইক্রমে কার্যরত তিনটি সমবিন্দু বলের মান এদের স্ব স্ব ক্রিয়ারেখার বিপরীত কোণের কোসাইনের সমানুপাতিক। প্রমাণ কর যে, এদের লম্বির মান

$$\sqrt{1 - 8 \cos A \cos B \cos C} \text{ এর সমানুপাতিক।}$$

15.(i) কোনো বিন্দুতে 150° কোণে ক্রিয়ারত দুইটি বলের লম্বি ক্ষুদ্রতর উপাংশের উপর লম্ব। বৃহত্তর উপাংশ 100 N হলে ক্ষুদ্রতর উপাংশ এবং লম্বি নির্ণয় কর।

(ii) একটি কণার উপর ক্রিয়ারত দুইটি বলের লম্বি একটি বলের উপর লম্ব এবং এর মান অপরটি অর্ধেকের সমান। দেখাও যে, তাদের মধ্যবর্তী কোণ 150° .

16. একটি বৃত্তের AB ও AC দুইটি জ্যা দ্বারা সূচিত দুইটি বলের লম্বি বৃত্তের কেন্দ্রগামী হলে প্রমাণ কর যে, বল দুইটি সমান অথবা পরস্পর লম্ব।

উত্তরমালা

1. (i) 13 N , (ii) 10.44 N (iii) 120° , (iv) $P = 8$ একক, (v) $\sqrt{3}P$, P এর সাথে 210° .

2. (i) 120° . (iii) 120° . (iv) 60° . (v) 10 N , $36^\circ 52'$ (প্রায়) 3. (i) 5 N , 13 N (ii) 120° .

(iii) $5\sqrt{3} \text{ N}$. (iv) 9 N 4. 120° . 5. 60° 7.(ii) লম্বি $2\sqrt{P^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + Q^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$,

$$\theta = \tan^{-1} \frac{(P-Q) \sin \alpha}{(P+Q) + (P-Q) \cos \alpha} \cdot 9. \text{(vi) লম্বি শূন্য } 10. \text{(i) } 2\sqrt{3} \text{ N.}$$

(ii) $\sqrt{3}R$, $(Q - R)$ এর সাথে 210° 13.(i) $2P$, OA এর সাথে 60° ।

(ii) $14\sqrt{2} \text{ N}$, AB এর সাথে 45° . (iii) $6\sqrt{2} \text{ N}$, $\angle COD$ কোণের সমদ্বিখণ্ডক.

15.(i) $50\sqrt{3} \text{ N}$, লম্বি 50 N .

প্রশ্নমালা ৪.২

1. (i) 5 N, 7 N এবং 8 N বলত্রয় একটি বস্তুর উপর ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করলে 8N এবং 5N বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।
- (ii) কোনো বিন্দুতে 60° কোণে ক্রিয়ারত P মানের দুইটি সমান বলকে একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত 9N বলের সাহায্যে ভারসাম্য রাখলে P এর মান নির্ণয় কর। [ঢা. বি. ০৮-০৯]
- (iii) কোনো বিন্দুতে 1 পা, 2 পা, এবং $\sqrt{3}$ পা. ওজনের তিনটি বল ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। বলগুলির মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [কু. ২০০২]
- (iv) একটি আনত সমতলে 10 kg. ওজনের একটি বস্তুকে সমতল বরাবর 2 kg. ওজনের বল এবং একটি আনুভূমিক বল প্রয়োগ করে স্থিরভাবে রাখা হয়েছে। যদি ভূমির সমতলের নতি $\theta = \sin^{-1} \frac{3}{5}$ হয়, তবে, আনুভূমিক বলটি নির্ণয় কর। [কুয়েট ১১-১২]
2. (i) দেখাও যে কোনো বস্তুর উপর ক্রিয়ারত 5:6:12 অনুপাতের বলগুলি সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করতে পারে না।
- (ii) কোনো শর্তে একটি বস্তুকণার উপর কার্যরত 3 : 4 : 7 অনুপাতের বলগুলি সাম্যাবস্থায় থাকবে?
3. (i) P, Q, R বলত্রয় একবিন্দুতে ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ 60° এবং P ও R এর মধ্যবর্তী কোণ 150° হলে দেখাও যে, $P = Q = \frac{R}{\sqrt{3}}$ । [কুয়েট ০৫-০৬]
- (ii) P, Q, R সাম্যাবস্থা সৃষ্টিকারী সমবিন্দু তিনটি বলের ক্রিয়া রেখা ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর সমান্তরাল। বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 50 cm, 75 cm, 65 cm এবং $Q - R = 8N$ হইলে বলগুলি নির্ণয় কর।
- (iii) O বিন্দুতে OX, OY এবং OZ বরাবর কার্যরত P, Q, R মানের তিনটি বল সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। O বিন্দুগামী একটি বৃত্ত বলত্রয়ের ক্রিয়া রেখাকে যথাক্রমে A, B, C বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে,
 $P : Q : R = BC : CA : AB$.
4. (i) ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র I থেকে IA, IB, IC বরাবর কার্যরত যথাক্রমে P, Q, R মানের বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করলে প্রমাণ কর যে, $P^2 : Q^2 : R^2 = a(b+c-a) : b(c+a-b) : c(a+b-c)$ । [ঢা. ২০০২, কুয়েট ১৬-১৭]
- (ii) ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O থেকে OA, OB, OC বরাবর কার্যরত যথাক্রমে P, Q, R মানের বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{P}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \frac{Q}{b^2(c^2+a^2-b^2)} = \frac{R}{c^2(a^2+b^2-c^2)}$
5. (i) রম্বস আকারের একটি সুথম পাতের একটি ধার ভূ-সমান্তরাল ও একটি কোণ 120° , রম্বসটির কেন্দ্র থেকে কর্ণ বরাবর P এবং Q মানের দুইটি বল ক্রিয়া করে একে ঝাড়াভাবে স্থির রাখে। $P > Q$ হলে প্রমাণ কর যে, $P^2 = 3Q^2$ । [চ. ২০১০]
- (ii) একই আনুভূমিক রেখায় d দূরত্বে অবস্থিত A ও B বিন্দুতে l দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি তারের প্রান্তদ্বয় বাঁধা আছে। w ওজনের একটি মসৃণ আঠো তার বরাবর অবাধে গড়িয়ে যেতে পারে। $l > d$ হলে, দেখাও যে, তারের টান, $T = \frac{wl}{2\sqrt{l^2 - d^2}}$ । [কু. ২০০৪, ১৬ সি. ২০০৬; আলিম ২০০৭; চ. ২০১২]
6. (i) একই আনুভূমিক রেখায় 25 সে. মি. ব্যবধানে দুইটি বিন্দুতে 3। সে. মি. লম্বা একটি রশির দুইপ্রান্ত বাঁধা আছে। রশির একপ্রান্ত থেকে 7 সে. মি. দূরে W ওজনের একটি বস্তু সংযুক্ত করা হলে 7 সে.মি. রশির টান 48 কেজি ওজন হয়। W এর মান নির্ণয় কর।

(ii) a দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি সূতার এক প্রান্ত একটি উল্লম্ব দেয়ালে আটকানো এবং অন্য প্রান্ত a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি সুস্থম গোলকের সাথে যুক্ত আছে। গোলকটির ওজন W হলে দেখাও যে, সূতার টান $T = \frac{2}{\sqrt{3}} W$ ।

[কুয়েট ০৪-০৫]

(iii) W কেজি ওজনের একটি বস্তু দুইটি রশি দ্বারা ঝুলানো হল। একটি রশি উল্লম্ব রেখার সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। অপর রশিটি উল্লম্ব রেখার সাথে কত কোণ উৎপন্ন করলে এতে টানের পরিমাণ ক্ষুদ্রতম হবে। এক্ষেত্রে রশি দুইটির টানের পরিমাণ নির্ণয় কর।

(iv) 5 কেজি ওজনের একটি বস্তু 12 সে. মি. ও 16 সে. মি. দীর্ঘ দুইটি রশির সাহায্যে একটি আনুভূমিক রেখায় 20 সে. মি. ব্যবধানে দুইটি বিন্দুতে বাঁধা আছে। রশিতে টানের পরিমাণ নির্ণয় কর।

(v) 6 ফুট ও 8 ফুট দৈর্ঘ্যের দুইটি রশির সাহায্যে 20 পাউন্ড ওজনের একটি বস্তুকে ঝুলান হলো। রশির দুইটির অপর প্রান্ত 10 ফুট দৈর্ঘ্যের একটি দণ্ডের দুই প্রান্তে বাঁধা আছে। দণ্ডটি এরূপভাবে স্থাপন করা হলো যেন বস্তুটি এর মধ্যবিন্দুর ঠিক খাড়া নিচে থাকে। রশিদ্বয়ের টান নির্ণয় কর। [বুয়েট ০৮-০৯]

7. (i) একই আনুভূমিক রেখায় অবস্থিত দুইটি বিন্দুতে একটি রশির দুই প্রান্ত বাঁধা আছে। W কেজি ওজনের একটি মসৃণ আঁটা রশির উপর দিয়ে অবাধে চলাচল করতে পারে। P মানের একটি আনুভূমিক বল, এর উপর সক্রিয় হলে স্থিরাবস্থায় রশির অংশদ্বয় উল্লম্ব রেখার সাথে 30° এবং 60° কোণ সৃষ্টি করে।

দেখাও যে, $P = W(2 - \sqrt{3})$ এবং রশির টান $T = W(\sqrt{3} - 1)$

(ii) l দৈর্ঘ্যের একটি সূতার দুই প্রান্ত একই আনুভূমিক রেখায় a দূরত্বে ($l > a$) অবস্থিত A ও B বিন্দুতে বাঁধা আছে। w ওজনের একটি মসৃণ আঁটা সূতার উপর দিয়ে অবাধে চলাচল করতে পারে। P মানের একটি আনুভূমিক বল আঁটাটিকে টেনে B বিন্দুর খাড়া নিচে স্থির রাখে। দেখাও যে, $P = \frac{aw}{l}$ এবং সূতার টান

$T = \frac{w(a^2 + l^2)}{2l}$ । সংকেত : স্থির বিন্দুটি C ধরে $\triangle ABC$ তে বলের ত্রিভুজ সূত্রের বিপরীত সূত্র প্রয়োগ কর।

(iii) আনুভূমিক রেখায় α কোণে আনত একটি মসৃণ সমতলের উপর একটি বস্তু উল্লম্বের সাথে γ কোণে নত একটি রশি দ্বারা সুস্থিত আছে। তলের নতি β ($\beta > \alpha$) হলে এবং γ অপরিবর্তিত থাকলে রশির টান দ্বিগুণ হয়। দেখাও যে, $\cot \alpha - 2 \cot \beta = \cot \gamma$ ।

(iv) W ওজনের একটি সুস্থম দণ্ড একটি কজার চতুর্দিকে অবাধে ঘুরতে সক্ষম। এর এক প্রান্ত একটি মসৃণ দেওয়ালে ঠেস দিয়ে আছে। দণ্ডটি যদি আনুভূমিক রেখার সাথে θ কোণ করে, তাহলে প্রমাণ কর যে, কজার প্রতিক্রিয়া

$W \sqrt{\frac{1}{4} \cot^2 \theta + 1}$ এবং এর ক্রিয়ারেখা আনুভূমিক রেখার সাথে $\tan^{-1}(2 \tan \theta)$ কোণ উৎপন্ন করে।

8. (i) ABC ত্রিভুজের O লম্বকেন্দ্র। O বিন্দু থেকে BC , CA , AB বাহুর উপর লম্ব বরাবর ক্রিয়াশীল P , Q , R বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকলে প্রমাণ কর যে, [ঢা. সি. ১১, ব. ১২, চুয়েট ০৩-০৪,

(i) $P : Q : R = \sin A : \sin B : \sin C$, (ii) $P : Q : R = a : b : c$ রা. ২০০৩]

(ii) P , Q , R মানের বলত্রয় ABC ত্রিভুজের A , B , C তিনটি কৌণিক বিন্দু হতে যথাক্রমে বিপরীত বাহুর লম্বা ভিমুখী দিকে ক্রিয়ারত থেকে সাম্যাবস্থায় থাকলে, প্রমাণ কর যে, $P : Q : R = a : b : c$

[ঢা. সি. '১১, মা. বো. ১৩, বুয়েট ৯৯-০০]

9. ভূমির সাথে α কোণে নত একটি মসৃণ সমতল বরাবর উপরের দিকে কার্যরত P_1 বল এবং P_2 মানের আনুভূমিক বল একটি বস্তুকে তলের উপর সাম্যাবস্থায় রাখে। P_1 , P_2 এবং α এর প্রত্যেকটির মান অর্ধেক হলেও বস্তুটি তলের উপর সাম্যাবস্থায় থাকে। প্রমাণ কর যে, $P_1 : P_2 = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{4} : 1$ ।

10. AB ও AC মসৃণ তলদ্বয় ভূমিতলের সাথে যথাক্রমে α ও β কোণে হেলানো আছে। A বিন্দুর খাড়া উপরে স্থাপিত মসৃণ কপিকলের উপর দিয়ে একটি সূতার দুইপ্রান্তে সংযুক্ত W এবং $2W$ ওজনের দুইটি বস্তু যথাক্রমে AB ও AC তলের উপর বসানো আছে। সূতার অংশদ্বয় AB ও AC এর সাথে যথাক্রমে β ও α কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, $\sin 2\alpha = 2 \sin 2\beta$ ।
11. (i) ABC ত্রিভুজের BC , CA এবং AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D , E , F । প্রমাণ কর যে, AD , BE এবং CF মধ্যমা দ্বারা সূচিত বলত্রয় কোনো কণার উপর কার্যরত হলে তা সাম্যাবস্থায় থাকবে।
(ii) ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O এবং BC , CA , AB বাহুর উপর যথাক্রমে OD , OE , OF লম্ব। প্রমাণ কর যে, AO , BO , CO , OD , OE , OF দ্বারা সূচিত বলগুলি সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে।
12. 60 কেজি ওজনের একটি বস্তুকে দুইটি তার দিয়ে দুইজন ব্যক্তি বহন করছে। তার দুইটি উলম্বের সাথে 70° ও 30° কোণ উৎপন্ন করলে তার দুইটি টান নির্ণয় কর। [ছয়েট ০৫-০৬]
13. কোনো ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হতে মধ্যমাত্রয় বরাবর ক্রিয়ারত P , Q , R মানের বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকলে, দেখাও যে, এরা অনুসঙ্গী মধ্যমার দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক। [য. ২০০২]
14. (i) কোনো লম্বিক তলে 10 কেজি ওজনের একটি বস্তুকে 5 কেজি ওজনের একটি আনুভূমিক বল, আনুভূমিক সাথে 60° কোণে কার্যরত F বল এবং, F -এর উপর লম্বভাবে কার্যরত R বল সাম্যাবস্থায় থাকলে দেখাও যে, $F - \sqrt{3}R + 10 = 0$ এবং $\sqrt{3}F + R - 20 = 0$ । [বুয়েট ০৩-০৪]
(ii) P ও Q দুইটি বল যথাক্রমে আনুভূমিক ও আনুভূমিকের সাথে 30° কোণে ক্রিয়া করে 6 কেজি ওজনের একটি বস্তুকে স্থির রাখতে সক্ষম। P ও Q এর মান নির্ণয় কর?
15. কোনো বিন্দুতে কার্যরত P , Q , R মানের তিনটি বল সাম্যাবস্থায় আছে। P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ P ও R এর মধ্যবর্তী কোণের দ্বিগুণ হলে, দেখাও যে, $R^2 = Q(Q - P)$
[য. ০৭; ব. য. ০৯, দি. ১১; ১৬; রা. ১২, বুয়েট ০৭-০৮, সি. ১৬]
16. (i) সমান দৈর্ঘ্যের তিনটি একতলীয় সরলরেখা OA , OB , OC যদি O বিন্দুগামী কোনো সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত না হয় এবং P , Q , R মানের বলত্রয় যথাক্রমে উক্ত রেখাগুলি বরাবর এমনভাবে ক্রিয়া করে যেন $\frac{P}{\Delta OBC} = \frac{Q}{\Delta OCA} = \frac{R}{\Delta OAB}$ হয়, তবে দেখাও যে, P , Q , R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকবে।
(ii) X , Y , মানের বল দুইটি যথাক্রমে একটি বৃন্তঃস্থ চতুর্ভুজ $ABCD$ এর AB ও AD বাহু বরাবর কার্যরত। যদি C হতে A এর দিকে CA বরাবর কার্যরত Z পরিমাণ বল দ্বারা নিষ্ক্রিয় হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $\frac{X}{CD} = \frac{Y}{CB} = \frac{Z}{BD}$
[য. ২০০৬]
17. P ও Q বলদ্বয় যথাক্রমে একটি হেলানো তলের দৈর্ঘ্য ও ভূমির সমান্তরালে ক্রিয়ারত থেকে প্রত্যেকে এককভাবে তলের উপরস্থ W ওজনের একটি বস্তুকে ধরে রাখতে পারে। প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2} = \frac{1}{W^2}$ [কু. '০৯, সি. '১০; য. রা. ১১, কু, চ, ব, ১৪, টেক্সটাইল ০৭-০৮]
18. একটি ভারী সুযম রডের একপ্রান্ত একটি মসৃণ খাড়া দেওয়ালে এবং অপর প্রান্ত দেওয়ালের সাথে θ কোণে নত একটি মসৃণ সমতলে রাখা আছে। রডটি সাম্যাবস্থায় থাকলে এবং ভূমির সাথে রডের নতি α হলে, প্রমাণ কর যে, $\tan \theta = 2 \tan \alpha$ ।

উত্তরমালা

1. (i) 120° , (ii) $3\sqrt{3}N$ (iii) 120° , 150° , 90° , (iv) 5 kg-wt. 3. (ii) $P = 40N$, $Q = 60N$, $R = 52N$ 6. (i) 50 কেজি (iii) 60° , $\frac{\sqrt{3}}{2}W$, $\frac{1}{2}W$. (iv) 3 কেজি ওজন, 4 কেজি ওজন। . (v) 12 পাঃ ওজন, 16 পাঃ ওজন। (vi) $\frac{22}{\sqrt{15}}$ এবং $\frac{28}{\sqrt{15}}$ কেজি ওজন। 12. 30.46N, 57.26N. 14. (ii) $6\sqrt{3}$ এবং 12. কেজি ওজন।

প্রশ্নমালা ৪.৩

1. (i) 32 সে. মি. ব্যবধানে দুইটি বিন্দুতে 15 কেজি এবং 9 কেজি ওজনের দুইটি সমান্তরাল বল কার্যরত আছে। এদের লম্বি ও তার প্রয়োগ বিন্দু নির্ণয় কর, যখন (ক) বল দুইটি সদৃশ (খ) বল দুইটি বিসদৃশ।
(ii) AB একটি দণ্ডের A ও B প্রান্তে যথাক্রমে 5 কেজি ও 8 কেজি ওজন স্থাপন করে C বিন্দুতে রশি বেঁধে ঘরের ছাদ হতে ঝুলানো হলে দণ্ডটি আনুভূমিকভাবে অবস্থান করে। যদি A প্রান্তে 112 কেজি ওজন রাখা হয় তবে B প্রান্তে কত ওজন দিলে দণ্ডটি আগের মতো স্থির থাকবে?
2. (i) 12 মিটার দীর্ঘ একটি ভারী সুষম বীম দুইটি খুটির উপর আনুভূমিক ভাবে সুস্থিত আছে। একটি খুটি এর একপ্রান্তে এবং অন্যটি ঐ প্রান্ত হতে 8 মিটার দূরে অবস্থিত। বীমটিকে না উল্টিয়ে 55 কেজি ওজনের একটি লোক কোন রকমে অপর প্রান্ত পর্যন্ত যেতে পারে। বীমটির ওজন নির্ণয় কর।
(ii) 2.5 মিটার দীর্ঘ একটি হালকা তক্তার উপর 100 কেজি ওজনের একখন্ড পাথর রেখে দুইজন লোক তক্তার প্রান্তদ্বয় ধরে বহন করছে। পাথরখন্ডটি কোথায় রাখলে সবল লোকটি 60 কেজি ওজন বহন করবে?
(iii) 16 m. দীর্ঘ 200 kg. ওজনের একটি সুষম বীমের দুইপ্রান্তে দুইটি অবলম্বনের উপর আনুভূমিকভাবে স্থাপিত। 160 kg. ওজনের একটি লোক বীমের উপর কোথায় দাঁড়ালে অবলম্বন দুইটির উপর চাপের অনুপাত 1 : 2 হবে?
[চুয়েট ০৫-০৬, কুয়েট ০৬-০৭, বুয়েট ০৬-০৭]
3. একটি দণ্ডের একপ্রান্ত হতে 2, 8, 6 মিটার দূরত্বে অবস্থিত তিনটি বিন্দুতে যথাক্রমে P , Q , R মানের তিনটি সমান্তরাল বল ক্রিয়া করছে। দণ্ডটি সাম্যাবস্থায় থাকলে দেখাও যে, $P : Q : R = 1 : 2 : 3$.
[ঢা. ০২, য. ০৫; য. ব. '০৯; সি. ০৬, '১১, চ. ১৬]
4. (i) 10 মিটার দীর্ঘ এবং 50 কেজি ওজনের AB একটি তক্তা দুইটি খুটির উপর আনুভূমিক ভাবে স্থাপিত। একটি খুটি A বিন্দুতে এবং অপরটি B থেকে 2 মিটার ভিতরে। A থেকে 3 মিটার দূরে 70 কেজি ওজনের একখন্ড পাথর তক্তাটির উপর স্থাপন করলে খুটিদ্বয়ের উপর চাপের পরিমাণ নির্ণয় কর।
(ii) AB একটি ভারী সুষম দণ্ডের A প্রান্তে 10 কেজি ওজন ঝুলানো হলে ঐ প্রান্ত থেকে 1 মিটার দূরে একটি খুটির উপর আনুভূমিকভাবে সুস্থিত থাকে। খুটির উপর চাপের পরিমাণ 30 কেজি ওজন হলে দণ্ডটির দৈর্ঘ্য এবং ওজন নির্ণয় কর।
(iii) ভূমিতলের সমান্তরাল একই রেখাস্থ দুইটি মসৃণ পেরেক P ও Q এর উপর 8 মি. দীর্ঘ একটি বাঁশের প্রান্তদ্বয় অবস্থান করছে। বাঁশটির উপরস্থ R বিন্দুতে একটি ভারী বোঝা ঝুলানো হলো, যদি $PR = 3RQ$ হয় এবং Q বিন্দুতে চাপ P বিন্দুতে চাপ অপেক্ষা 325 গ্রাম-ওজন বেশি হয়, তবে বোঝাটির ওজন নির্ণয় কর।
[সি. ২০০১; ক. ২০০২; কুয়েট ১২-১৩]
5. (i) 6 মিটার দীর্ঘ এবং 40 কেজি ওজনের AB একটি তক্তা দুইটি কিলকের উপর আনুভূমিক ভাবে স্থাপিত। কিলক দুইটির একটি A প্রান্তে এবং অন্যটি B প্রান্ত থেকে 2 মিটার ভিতরে অবস্থিত। তক্তাটি না উল্টিয়ে 80 কেজি ওজনের একটি লোক B প্রান্তের দিকে কতদূর যেতে পারবে?
(ii) 4 মিটার দীর্ঘ এবং 15 কেজি ওজনের একটি সমরূপ তক্তা দুইটি অবলম্বনের উপর আনুভূমিকভাবে স্থির আছে। একটি অবলম্বন A প্রান্তে এবং অন্যটি B প্রান্ত হতে 50 সে. মি. ভিতরে অবস্থিত। একটি বালক তক্তাটিকে না উল্টিয়ে এর উপর দিয়ে B প্রান্তে পৌঁছতে সক্ষম হলে বালকটির ওজন কত?
[কু. ২০০২]
6. (i) P ও Q ($P > Q$) দুইটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বল দুইটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। একই বিন্দুতে যথাক্রমে $(P + R)$ ও $(Q + S)$ বল দুইটি ক্রিয়া করলে, লম্বি একই বিন্দুগামী হয়। প্রমাণ কর যে, $PS = QR$.
(ii) ACB সরলরেখার AC ও CB অংশের মধ্যবিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল P ও Q এর লম্বি C বিন্দুগামী। দেখাও যে, P ও Q বল দুইটি পরস্পর স্থান বিনিময় করলে লম্বি AB এর মধ্য বিন্দুগামী হবে।
7. (i) P ও Q ($P > Q$) দুইটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বল দুইটি বিন্দুতে কার্যরত আছে। যদি এদেরকে সমপরিমাণে বৃদ্ধি করা হয়, তবে দেখাও যে, নতুন লম্বির ক্রিয়াবিন্দু P বল থেকে আরও দূরে সরে যাবে।
[ঢা. ২০০৮; কু. ২০০৯, '১১; য. ব. '১১; চ. সি. '১৩; দি. ১৪]

- (ii) 20 সে. মি. ব্যবধানে অবস্থিত দুইটি বিন্দুতে যথাক্রমে 10 ডাইন ও 5 ডাইন দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল কার্যরত আছে। এদের প্রত্যেকের সাথে সমপরিমাণ কত বল যোগ করলে নতুন লম্বি 10 সে. মি. দূরে সরে যাবে?
- (iii) 12 N এবং 8 N দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল কোন কঠিন বস্তুর উপর যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। বল দুইটির অবস্থান বিনিময় করলে এদের লম্বির ক্রিয়াবিন্দু AB বরাবর কত দূর সরে যাবে? [য. ১৬]
8. 20 সে. মি. দীর্ঘ AB হালকা দণ্ডটি 10 সে.মি. ব্যবধানে দুইটি পেরেকের উপর আনুভূমিক ভাবে অবস্থিত। A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে 2W এবং 3W ওজন ঝুলানো হলে পেরেক দুইটির কোন্ অবস্থানের জন্য এদের উপর চাপ সমান হবে? [সি. '০৩, চ্যুয়েট ১৩-১৪]
9. একজন লোক একটি লাঠি কাঁধের উপর আনুভূমিকভাবে স্থাপন করে এর এক প্রান্তে হাত রেখে অপর প্রান্তে W ওজনের একটি বস্তু বহন করছে। [কু. ০৩, চ্যুয়েট ০৪-০৫]
- (i) যদি তার কাঁধ হতে বস্তু ও হাতের দূরত্ব যথাক্রমে a এবং x হয়, তবে প্রমাণ কর যে, তার কাঁধের উপর চাপের পরিমাণ হবে $W(1 + \frac{a}{x})$ [সি. ২০০৫, ব. ২০১০; ঢা. ১৪, দি. ১৬]
- (ii) যদি লাঠির দৈর্ঘ্য 6 ফুট হয় তবে লোকটির হাত ও কাঁধের দূরত্ব কত হলে কাঁধের উপর চাপ ন্যূনতম হবে? [ঢা. বি. জবি. ০৭-০৮]
- (iii) যদি লাঠির দৈর্ঘ্য 3 মিটার এবং কাঁধের উপর চাপের পরিমাণ বস্তুটির ওজনের তিনগুণ হয় তবে, হাত ও কাঁধের দূরত্ব নির্ণয় কর।
10. দেখাও যে, P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের Q কে $\frac{P^2}{Q}$ তে পরিবর্তন করে P এর সাথে স্থান পরিবর্তন করলে এদের লম্বির অবস্থান একই থাকে। [ঢা. ২০০২, চ. ২০০৮, য. ২০১০]
11. (i) P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল কোন একটি বস্তুর উপর দুইটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত। এদের অবস্থান বিনিময় করলে যদি লম্বির অবস্থান অপরিবর্তিত থাকে, তাহলে প্রমাণ কর যে, $P = Q$.
- (ii) ABC ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু A, B, C তে তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল P, Q, R কার্যরত আছে। এদের লম্বি ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রে কার্যরত হলে দেখাও যে, $P = Q = R$. [ঢা. ০৮, কু. ব. '১০; আলিম, '১০; কু. '১৪]
- (iii) দেখাও যে, ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুতে তিনটি সমান সদৃশ সমান্তরাল বলের লম্বি সর্বদা ত্রিভুজটির ভর কেন্দ্রগামী হবে।
12. (i) তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল P, Q, R যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A, B, C তে কার্যরত আছে। যদি এদের লম্বি ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্রগামী হয়, তবে দেখাও যে,
- (i) $P : Q : R = \sin A : \sin B : \sin C$, [ব. দি. ২০১৩. মা. বো. ১৪, রা. ১৬]
- (ii) $P : Q : R = a : b : c$ [কু. ০৮, আলিম '০৬, য. '১১]
- (ii) P, Q, R সদৃশ সমান্তরাল বল তিনটি যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের শীর্ষ A, B, C তে ক্রিয়ারত। বলগুলির যে কোনো সাধারণ দিকের জন্য এদের লম্বি যদি ত্রিভুজের পরিকেন্দ্রগামী হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
- $P : Q : R = a \cos A : b \cos B : c \cos C$, [চ. ২০১০]
13. ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O. একটি বল P, AO বরাবর ক্রিয়ারত। দেখাও যে, B ও C বিন্দুতে P এর সমান্তরাল উপাংশদ্বয়ের অনুপাত $\sin 2B : \sin 2C$. [য. ০৬; ঢা. ০৯; ব. দি. রা. ১২]
14. (i) 2a দীর্ঘ এবং W ওজন বিশিষ্ট একটি সুষম তক্তা b দূরত্বে অবস্থিত দুইটি খুঁটির উপর আনুভূমিকভাবে অবস্থিত। একে না উল্টিয়ে এর দুই প্রান্তে পর্যায়ক্রমে সর্বাধিক W_1 এবং W_2 ওজন ঝুলানো যায়। প্রমাণ কর যে, $\frac{W_1}{W + W_1} + \frac{W_2}{W + W_2} = \frac{b}{a}$. [আলিম ০৩, ব., য. ০১, সি. ০৩, ঢা. য. রা. ০৭, চ. ০৮, ১১, কু. ০৯, সি. ১০, ব. ০৪, ১১]
- (ii) একটি ভারী সুষম দণ্ডের একপ্রান্তে P ওজন স্থাপন করলে ঐ প্রান্ত হতে a একক দূরত্বে স্থাপিত একটি অবলম্বনের উপর আনুভূমিকভাবে সুস্থিত থাকে। একই বিন্দুতে Q ওজন স্থাপন করলে ঐ বিন্দু থেকে b একক

দূরত্বে একটি অবলম্বনের উপর সুস্থিত হয়। দেখাও যে, দণ্ডের ওজন $= \frac{Pa - Qb}{b - a}$ এবং দৈর্ঘ্য $= \frac{2a(P - Q)}{Pa - Qb}$

15. P, Q, R মানের সমমুখী সমান্তরাল বল তিনটি যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের A, B, C শীর্ষবিন্দুতে ক্রিয়ারত এদের লম্বি ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রে ক্রিয়ারত হলে দেখাও যে, $\frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$ [রা. ০৭, ১৪; ঢা. ০২]

16. (i) P ও Q দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল ($P > Q$) যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে কার্যরত আছে। উভয় বলকে R পরিমাণে বৃদ্ধি করা হলে যদি এদের লম্বির ক্রিয়া বিন্দু d দূরত্বে সরে যায় তবে দেখাও যে, $d = \frac{R}{P - Q} AB$ । [রা. ১০; চ. ১১; ঢা. ১৩; ব. ০৬, '১৪, কু. ১৬]

(ii) P ও Q দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল। P বলটির ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল রেখে তার ক্রিয়া বিন্দুকে x দূরত্বে সরালে দেখাও যে, এদের লম্বি $\frac{Px}{P + Q}$ দূরত্বে সরে যাবে। [রা. ০৬, ঢা. ০৭; য. দি. ১০; য. ১২; সি. ০৯, ১৪]

17. P ও Q মানের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লম্বি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। P কে R পরিমাণে এবং Q কে S পরিমাণে বৃদ্ধি করলেও লম্বি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। আবার, P ও Q এর বদলে যথাক্রমে Q ও R ক্রিয়া করলেও লম্বি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। প্রমাণ কর যে, $S = R - \frac{(Q - R)^2}{P - Q}$ [ঢা. ০৬; রা. কু. ০৯; ১১; য. চ. ১৪, বুয়েট ০৩-০৪]

18. (i) $ABCD$ বর্গের AB, BC, CD ও DA বরাবর যথাক্রমে $P, 2P, 3P$ ও $4P$ মানের বলগুলি ক্রিয়া করে। এদের লম্বির মান ও ক্রিয়া রেখা নির্ণয় কর। [ঢা. ০২]

(ii) $ABCD$ বর্গের AB, BC, AD এবং DC বাহু বরাবর যথাক্রমে ১, ২, ৩, এবং ৪ এর সমানুপাতিক বলগুলি কার্যরত আছে। এদের লম্বির মান ও ক্রিয়া রেখা নির্ণয় কর, যখন বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য ২ সে. মি।

(iii) $ABCD$ বর্গের AB, BC, CD বরাবর কার্যরত যথাক্রমে ১, ২, ৩ মানের তিনটি বলের লম্বি নির্ণয় কর।

(iv) একটি দণ্ডের ভারকেন্দ্র তাকে a ও b দুই অংশে বিভক্ত করে। দণ্ডটি একটি মসৃণ গোলকের ভিতর স্থাপন করা আছে এবং গোলকের কেন্দ্রে 2α কোণ উৎপন্ন করে। আনুভূমির সাথে দণ্ডের নতি θ হলে,

$$\text{দেখাও যে, } \tan \theta = \frac{b - a}{b + a} \tan \alpha.$$

উত্তরমালা

1. ক. ২৪ কেজি ওজন, বৃহত্তর বল থেকে ১২ সে.মি. ভিতরে, খ. লম্বি ৬ কেজি ওজন, বৃহত্তর বল থেকে ৪৪ সে.মি. বাইরে; (ii). ১৭৯.২ কেজি ওজন 2. (i) ১১০ kg. wt. (ii) সবল লোকটি থেকে এক মিটার দূরে; (iii) A প্রাপ্ত হতে ২m দূরে 4. (i) $5\frac{1}{2}$ কেজি ওজন ও $62\frac{1}{2}$ কেজি ওজন; (ii) ৩ মি., ২০ কেজি ওজন 4. (iii) ৬৫০ গ্রাম-ওজন। 5. (i) মধ্যবিন্দু থেকে ১.৫ মিটার দূরে। (ii) ৪৫ কেজি ওজন। 7. (ii) ২.৫ ডাইন। (iii) $\frac{1}{5}$ AB. 8. A প্রাপ্ত হতে ৭ সে. মি. এবং B প্রাপ্ত হতে ৩ সে. মি. 9. (ii) ৬ ফুট (iii) এক মিটার। 18. (i) $2\sqrt{2} P$. ক্রিয়ারেখা CA কর্ণের সমান্তরাল, BA কে ৭:৫ অনুপাতে বহিঃস্থভাবে বিভক্ত করে। (ii) $5\sqrt{2}$ এর সমানুপাতিক, AC এর সমান্তরাল এবং AD কে ২:৩ অনুপাতে বিভক্ত করে। (iii) $2\sqrt{2}$.

প্রশ্নমালা 9.1

1. (i) একজন সাইকেল চালক সোজাপথে 3 ঘণ্টায় 30 কি.মি. যাওয়ার পর প্রথম রাস্তার সাথে লম্বভাবে অপর একটি পথে 8 কি.মি./ঘ বেগে 5 ঘণ্টা চলল। তার গড় বেগ ও গড় দ্রুতি নির্ণয় কর।
(ii) 20 ms^{-1} বেগে আনুভূমিকে চলন্ত একটি ক্রিকেট বলকে তার বেগের সাথে সমকোণে ব্যাট দ্বারা আঘাত করলে তা 30 ms^{-1} বেগ প্রাপ্ত হলো। ব্যাটের আঘাতের বেগ কত? [বুয়েট ০৫-০৬]
2. (i) একটি বস্তুর উপর 7 মি/সে., 8 মি/সে. এবং 13 মি/সে. বেগ ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা রক্ষা করে। ক্ষুদ্রতর বেগ দুইটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। [বুয়েট ১২-১৩]
(ii) দেখাও যে, দুইটি সমমানের সমবিন্দু বেগের লম্বিত্ব তাদের অন্তর্গত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [য. ২০০২]
(iii) একটি বিন্দুতে কার্যরত দুইটি বেগের একটির দিক বিপরীত করলে নতুন লম্বিত্ব পূর্বের লম্বিত্বের সাথে 90° কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, বেগ দুইটির মান সমান।
3. (i) একজন সাতারু স্রোতের বেগের 2 গুণ বেগে সাঁতার দিয়ে একটি নদীর অপর তীরে যাত্রা বিন্দুর বিপরীত বিন্দুতে পৌঁছিল। স্রোতের সাথে তার দিক নির্ণয় কর।
(ii) এক ব্যক্তি নদীর স্রোতের সাথে সমকোণে যাত্রা করে অপর পাড়ে যাত্রাস্থানের বিপরীত বিন্দু হতে নদীর তীর বরাবর 2.5 কি. মি. ভাটিতে পৌঁছিল। সাঁতারুর বেগ স্রোতের বেগের দ্বিগুণ হলে, নদীর প্রস্থ নির্ণয় কর। [বুয়েট ১১-১২]
(iii) s মিটার প্রশস্ত স্রোতহীন একটি নদী সাঁতার দিয়ে পার হতে একজন লোকের t মিনিট সময় লাগে। স্রোত থাকলে t_1 মিনিটে সে এটা সোজাসুজি পার হয়। প্রমাণ কর যে, স্রোতের বেগ $= s \sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t_1^2}}$ মি./মিনিট [বুয়েট ০০-০১]
(iv) এক ব্যক্তি সোজাসুজি ভাবে t_1 সময়ে একটি নদী পারাপার করতে পারে। তীর বরাবর নদীর প্রস্থের সমান দূরত্ব যাওয়া আসা করতে তার t_2 সময় লাগে। সাঁতারুর বেগ u এবং স্রোতের বেগ v ($u > v$) হলে, প্রমাণ কর যে, $\sqrt{u^2 - v^2} : u = t_1 : t_2$

4. (i) সোজাসুজি একটি নদী পার হতে একজন সাতারুর t_1 সেকেন্ড সময় লাগে। স্রোতের অনুকূলে তীর বরাবর একই দূরত্ব অতিক্রম করতে তার t_2 সেকেন্ড সময় লাগে। সাতারুর গতিবেগ u মি/সে. এবং স্রোতের গতিবেগ v মি/সে. ($u > v$) হলে, দেখাও যে, $t_1 \geq t_2 = \sqrt{u+v} \geq \sqrt{u-v}$.

[ঢা. কু. ০৮; য. ১৩; ১৬, ঢা. দি. ১৪]

(ii) দুইজন সাতারুর একজন u_1 গতিবেগে সাতারিয়ে ক্ষুদ্রতম পথে এবং অপরজন u_2 গতিবেগে সাতারিয়ে ক্ষুদ্রতম সময়ে v বেগে প্রবাহিত একটি নদী পার হওয়ার জন্য এক সঙ্গে একই স্থান হতে যাত্রা করে এবং উভয়ে নদীর অপর তীরে একত্রে পৌঁছিল। প্রমাণ কর যে, $u_1^2 - u_2^2 = v^2$ যেখানে $u_1 > v$.

(iii) একজন সাতারু ৪০ মিটার প্রস্থের একটি শান্ত নদী ৫ মিনিটে আড়াআড়িভাবে পার হতে পারে। স্রোত থাকলে একই পথে পার হতে তার দ্বিগুণ সময় লাগে। স্রোতের বেগ নির্ণয় কর। [ঢা. বি. ১১-১২]

(iv) একজন সাতারু ১০০ মিটার প্রশস্ত প্রবাহমান নদী ৫ মিনিটে আড়াআড়িভাবে পার হয়। স্রোতের অনুকূলে নদীর প্রস্থের সমান দূরত্ব ৪ মিনিটে অতিক্রম করে। সাতারু এবং স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

5. একটি কণা একটি সরলরেখা বরাবর ৩ মি./সে. গতিতে চলছে। ৩ সেকেন্ড পর কণাটির গতির সাথে লম্ব বরাবর ৪ মি./সে. গতি সংযোজন করা হল। এর ২ সেকেন্ড পর কণাটি যে বিন্দু হতে প্রথম যাত্রা শুরু করেছিল তা হতে কতদূরে থাকবে? [কু. ২০০২]

6. লম্বভাবে মিলিত হয় এরূপ দুইটি সোজা রাস্তার একটি বরাবর ৪ কি.মি./ঘ. বেগে একটি ভ্যান গাড়ি চলছে। অন্য রাস্তা দিয়ে এক ব্যক্তি ৩ কি.মি./ঘ. বেগে হেঁটে ভ্যানে উঠার চেষ্টা করছে। যদি কোনো এক সময় ভ্যান গাড়িটি চৌমাথা থেকে ৭৫০ মিটার পিছনে এবং লোকটি ৫০০ মিটার দূরে থাকে, তাহলে দেখাও যে, ঐ ব্যক্তি কখনও ভ্যান গাড়ির ৫০ মিটারের অধিক নিকটে আসতে পারবে না।

7. (i) ৫০০ মিটার প্রশস্ত এবং ৩ কি. মি./ঘ. বেগে প্রবাহিত একটি নদী ৫ কি. মি./ঘ বেগে চলে দুই খানা নৌকা একটি ন্যূনতম পথে এবং অন্যটি স্বল্পতম সময়ে পার হয়। এদের সময়ের ব্যবধান নির্ণয় কর। [রা. '১১]

(ii) ৫৫০ মিটার প্রশস্ত একটি নদীর স্রোত ঘণ্টায় ৩ কি.মি. বেগে প্রবাহিত হয়। দুইটি নৌকার প্রত্যেকটি ঘণ্টায় ৫ কি.মি. বেগে একটি নৌকা ক্ষুদ্রতম পথে এবং অপরটি ক্ষুদ্রতম সময়ে নদীটি অতিক্রম করতে চেষ্টা করছে। যদি তারা একই সময়ে যাত্রা শুরু করে তবে তাদের অপর পাড়ে পৌঁছাবার সময়ের পার্থক্য নির্ণয় কর।

[চ. ২০০৪]

(iii) প্রতিঘণ্টায় ১.৫ কি. মি. বেগে ২৫০ মিটার প্রশস্ত একটি নদী প্রবাহিত হচ্ছে। একজন সাতারু প্রতি ঘণ্টায় ৩ কি. মি. বেগে স্রোতের সাথে কোনো দিকে সাতার দিলে সে স্বল্পতম সময়ে নদী পার হতে পারবে? স্বল্পতম সময় নির্ণয় কর।

8. (i) কোনো কণার উপর ক্রিয়াশীল u, v, w মানের তিনটি গতিবেগ পর্যায়ক্রমে পরস্পর α, β, γ কোণে আনত।

দেখাও যে, এদের লম্বির মান $\sqrt{(u^2 + v^2 + w^2 + 2uv \cos \alpha + 2vw \cos \beta + 2wu \cos \gamma)}$ [ঢা. ০২]

(ii) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত u ও v বেগদ্বয়ের লম্বি w ; এবং u এর দিক বরাবর w এর লম্বাংশের পরিমাণ v হলে প্রমাণ কর যে, বেগ দুইটির অন্তর্গত কোণ বেগ $\cos^{-1} \frac{v-u}{v}$ এবং $w = \sqrt{v^2 - u^2 + 2uv}$

[চ. ০৮, দি. ১০]

(iii) একটি কণার উপর একই সময়ে কার্যরত ২, ৪, ৬ এবং ১০ মিটার/সেকেন্ড বেগগুলি প্রথম বেগের সাথে অপর বেগগুলি যথাক্রমে $30^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ কোণ উৎপন্ন করে। এদের লম্বির মান ও দিক নির্ণয় কর।

9. (i) ৪ কি.মি./ঘ. বেগে চলন্ত একটি বাস থেকে একটি বস্তুকণা ১৬ কি.মি./ঘ. বেগে কোন দিকে নিক্ষেপ করলে তা বাসের বেগের সাথে লম্বভাবে চলবে? [কুয়েট ০৬-০৭, বুয়েট ১২-১৩]

(ii) একটি কণা ১২ কিলোমিটার/ঘণ্টা গতিবেগে ছুটছে। একে কত গতিবেগে এবং কোনো দিকে আঘাত করলে তা এর গতিপথের সাথে সমকোণে ৯ কিলোমিটার/ঘণ্টা বেগে চলবে?

10. (i) দুইজন সাইকেল আরোহী একই সময়ে A ও B বিন্দু থেকে যথাক্রমে AB ও BA এর সাথে 60° ও 30° কোণে আনত সরলপথে যাত্রা করল। যদি A বিন্দু থেকে একজন ১০ km/h সমবেগে যাত্রা করে তাহলে B

বিন্দু থেকে অপরজন কত বেগে যাত্রা করলে তারা কোনো একটি বিন্দুতে মিলিত হবে? [বুয়েট ১০-১১]

[সংকেত : মিলিত বিন্দু C ধরে $\triangle ABC$ তে সাইন সূত্র প্রয়োগ কর।]

(ii) একটি কণা A বিন্দু থেকে যাত্রা করে পূর্ব-দিকে 3 m/sec. বেগে চলে 2 সেকেন্ডে B বিন্দুতে যায়।
অতপর B বিন্দু থেকে দক্ষিণ পূর্ব দিকে 4 m/sec. বেগে চলে 3 সেকেন্ডে C বিন্দুতে পৌঁছে। A এবং C
বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর। [সংকেত : কোসাইন সূত্র ব্যবহার কর।]

11. (i) 650 মিটার প্রশস্ত একটি নদী 1500 m/h বেগে প্রবাহিত হচ্ছে। ঘণ্টায় 3000 মিটার গতিবেগ সম্পন্ন
একখানা মোটর লঞ্চ কোনো দিকে যাত্রা করলে উহা যাত্রা বিন্দুর বিপরীত বিন্দুতে পৌঁছাবে? নদী পাড়ি দিতে
কত সময় লাগবে?

(ii) একটি জাহাজ কোন স্থান হতে 15 km/h বেগে উত্তর দিকে যাত্রা করল। যাত্রার শুরুতেই তার পূর্বদিকে
 10 km দূরে অপর একটি জাহাজ দেখতে পেল। দ্বিতীয় জাহাজটি 20 km/h. বেগে পশ্চিম দিকে যাচ্ছে।
কতক্ষণ পর তাদের মাঝে দূরত্ব ন্যূনতম হবে এবং ন্যূনতম দূরত্ব কত? [বুয়েট ০৮-০৯]

(iii) দুপুর 2 টায় গভীর সমুদ্রে দক্ষিণ দিকে 20 কি.মি. দূরে একখানা রণতরী দেখতে পেয়ে একখানা জাহাজ
ঘণ্টায় 15 কি.মি. বেগে পূর্বদিকে যাত্রা করে। রণতরীখানা ঘণ্টায় 20 কি.মি. বেগে উত্তর দিকে ধাবমান হলে
কখন এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব ন্যূনতম হবে? ন্যূনতম দূরত্ব নির্ণয় কর।

(iv) কোন বন্দর হতে একখানা জাহাজ উত্তর-পশ্চিম দিকে ঘণ্টায় 15 কিঃ মিঃ বেগে যাত্রা করল। একই
সময়ে একই স্থান হতে অপর একখানা জাহাজ দক্ষিণ-পশ্চিম দিকে ঘণ্টায় 12 কিঃ মিঃ বেগে যাত্রা করল।
তাদের বেতার যন্ত্রের গ্রহণ শক্তির সীমা সর্বোচ্চ 500 কিঃ মিঃ হলে, কতক্ষণ তারা একে অপরের সাথে
যোগাযোগ রক্ষা করতে পারবে? [কু. বো. ২০০৯, ২০১১]

12. (i) কোনো কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়াশীল দুইটি বেগের লম্বি বৃহত্তর বেগের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন
করে। বৃহত্তর বেগটি দ্বিগুণ করলে উক্ত কোণটি 30° হয়। বেগ দুইটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।

(ii) কোনো কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়ারত দুইটি বেগের একটির মান অপরটির দ্বিগুণ হলে এবং তাদের
লম্বি ক্ষুদ্রতরটির উপর লম্ব হলে বেগ দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।

13. কোনো কণার উপর নির্দিষ্ট কোণে আনত রেখা বরাবর একই সময়ে কার্যরত u এবং v বেগ দুইটির লম্বির u
এর উপর লম্ব। একই রেখা বরাবর কার্যরত যথাক্রমে u_1 ও v_1 বেগ দুইটির লম্বি v_1 এর উপর লম্ব হলে
প্রমাণ কর যে, $uu_1 = vv_1$.

14. কোনো কণার উপর একই সময়ে 3 m/sec. , 4 m/sec এবং 6 m/sec. বেগ তিনটি ABC সমবাহু ত্রিভুজের
বাহুর সমান্তরালে ক্রিয়া করলে এদের লম্বি নির্ণয় কর।

15. কোনো কণার উপর একই সময়ে নির্দিষ্ট কোণে ক্রিয়াশীল u ও v বেগের লম্বি w ; দেখাও যে, v কে
বিপরীতমুখী করে তার স্থলে $(w^2 - u^2)/v$ বেগ প্রয়োগ করলে লম্বির মান অপরিবর্তিত থাকবে।

উত্তরমালা 9.1

[ব. ২০১৩]

- 1(i) গড় বেগ $6\frac{1}{4}$ কি. মি./ঘ; গড় দ্রুতি $8\frac{3}{4}$ কি. মি./ঘ. (ii) $10\sqrt{5} \text{ ms}^{-1}$ 2.(i) 60° . 3.(i) 120° .
(ii) 5 কি.মি.। 4.(iii) স্রোতের বেগ 13.86 মিটার/মিনিট। (iv) সাঁতারুর বেগ 29 মি./মিনিট, স্রোতের বেগ
 21 মি./মিনিট। 5. 17 মিটার। 7.(i) $3/2$ মিনিট (ii) 1 মিনিট 39 সেকেন্ড, (iii) সমকোণে, 5 মিনিট,
8.(iii) 16.23 m/sec , 77.67° 9.(i) 120° (ii) 15 km/h , 143.13° 10.(i) $\frac{10}{\sqrt{3}} \text{ km/h}$, (ii) 16.78
 m (প্রায়) 11.(i) 120° , 15 মিনিট (ii) $8/25$ ঘণ্টা, 6 কি.মি. (iii) 6 ঘণ্টা, 12 কি.মি., (iv) 26.02 ঘণ্টা
12.(i) 120° , 12.(ii) 120° 14. $\sqrt{7} \text{ m/sec}$, 1m বেগের সাথে $220^\circ .89'$.

প্রশ্নমালা 9.2

1. পরস্পর α কোণে আনত দুইটি সরলরেখা বরাবর A ও B দুইটি বিন্দু যথাক্রমে u ও v গতিবেগে চলছে। A বিন্দুর সাপেক্ষে B বিন্দুর আপেক্ষিক গতিবেগ নির্ণয় কর।
2. A এবং B দুইটি বাস পরস্পর সমকোণে আনত দুইটি রাস্তা বরাবর যথাক্রমে 40 কি.মি./ঘ. এবং 30 কি.মি./ঘ. বেগে চলছে। B বাসের যাত্রীদের ধারণা অনুসারে A বাসের বেগ নির্ণয় কর।
3. বৃষ্টি 30 মি./সে. বেগে খাড়াভাবে পড়ছে। একজন রেলগাড়ির যাত্রীর কাছে তা খাড়ারেখার সাথে 60° কোণে পড়ছে বলে মনে হয়। রেলগাড়ির বেগ নির্ণয় কর।
4. 200 মিটার ও 300 মিটার দৈর্ঘ্যের দুইটি ট্রেন একটি স্টেশন থেকে একই দিকে দুইটি সমান্তরাল রেলপথে যথাক্রমে 40 কি.মি./ঘ. এবং 30 কি.মি./ঘ. বেগে যাত্রা করে। কত সময়ে এরা পরস্পরকে অতিক্রম করবে?
[বুয়েট ১২-১৩]
5. ঘন্টায় 3 কি.মি. বেগে ভ্রমণরত এক ব্যক্তিকে বৃষ্টির ধারা খাড়াভাবে আঘাত করে; তাঁর বেগ ঘন্টায় 5 কি.মি. হলে বৃষ্টির ধারা তাঁকে ভূলম্বের সাথে 30° কোণে আঘাত করে। বৃষ্টির প্রকৃত বেগ ও দিক নির্ণয় কর।
6. একটি ভ্যান গাড়ি সোজা রাস্তায় প্রতি ঘন্টায় 40 কি.মি. বেগে চলে এবং বৃষ্টি উপর থেকে উলম্বভাবে পড়ে। যদি বৃষ্টি ভ্যান গাড়িতে উলম্বের সাথে 30° কোণে আঘাত করে তবে বৃষ্টির বেগ নির্ণয় কর।
7. u বেগে একটি জাহাজ পূর্বদিকে চলছে। অপর একটি জাহাজ প্রথমটির দিকের সাথে উত্তর দিকে θ কোণে আনত রেখায় $2u$ বেগে চলছে। প্রথম জাহাজের যাত্রীদের নিকট মনে হচ্ছে দ্বিতীয় জাহাজটি উত্তর-পূর্বদিকে চলছে। প্রমাণ কর যে, $\theta = \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{3}{4}$
[ব. ২০০১, দি. ২০১৬]
8. ঘন্টায় 45 কি.মি. বেগে চলমান একটি ট্রেনের যাত্রী দেখছে যে, খাড়ারেখায় পড়ন্ত বৃষ্টির ধারার আপেক্ষিক

বেগের দিক উল্লম্ব রেখার সাথে $\tan^{-1} \frac{3}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে। বৃষ্টির আসল বেগ বের কর।

উত্তরমালা 9.2

1. $\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cos \alpha}$ 2. 50 কি.মি./ঘ. 3. $30\sqrt{3}$ মি./সে. 4. 3 মিনিট 5. $\sqrt{21}$ কি. মি./ঘ.,

উল্লম্বের সাথে $\tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$. 6. $40\sqrt{3}$ কি.মি./ঘ. 8. 30 km/h.

প্রশ্নমালা 9.3

1. (i) একটি কণা নির্দিষ্ট বেগে সরলরেখায় যাত্রা করে সমত্বরণে চলে 3 সেকেন্ডে 81 সেন্টিমিটার দূরত্ব অতিক্রম করার সাথে সাথে ত্বরণ নিষ্ক্রিয় হয় এবং কণাটি পরবর্তী 3 সেকেন্ডে 72 সেন্টিমিটার দূরত্ব অতিক্রম করে। কণাটির আদিবেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।
 - (ii) 50 m. দূরত্ব অতিক্রম করতে একখানি গাড়ির বেগ 10 m/s হতে 20 m/s হয়। আরও 200 m. যাবার পর তার বেগ কত হবে? [রুয়েট ১২-১৩]
 - (iii) কোনো সরলরেখা বরাবর চলমান একটি বস্তুকণা 5 সেকেন্ড পরের অর্ধ সেকেন্ড সময়ে 16½ মিটার দূরত্ব এবং 10তম সেকেন্ড সময়ে 50 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করলে বস্তুকণাটির আদিবেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।
 - (iv) একটি বিন্দু সমত্বরণে সরলরেখা বরাবর চলে 12 তম সেকেন্ডে 72 সে. মি. এবং 20 তম সেকেন্ডে 120 সে. মি. দূরত্ব অতিক্রম করে। বিন্দুটির আদিবেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।
 - (v) একটি কণা নির্দিষ্ট বেগে যাত্রা করে সমত্বরণে চলে 3 সেকেন্ডে 81 ফুট দূরত্ব অতিক্রম করার সাথে সাথে ত্বরণ নিষ্ক্রিয় হয় এবং কণাটি পরবর্তী 3 সেকেন্ডে 72 ফুট দূরত্ব অতিক্রম করে। কণাটির আদিবেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর। [য. ২০০৪]
2. (i) একটি বিমান 50 কি. মি./ঘ. বেগে সরল রণওয়ে স্পর্শ করে এবং 300 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে থামে। মন্দন সুষম হলে বিমানটি থামতে প্রয়োজনীয় সময় নির্ণয় কর।
 - (ii) 450 মিটার সরলপথ অতিক্রম করতে একটি ট্রেনের গতিবেগ হ্রাস পেয়ে প্রতি ঘণ্টায় 40 কি. মি. হতে 10 কি. মি. দাঁড়ায়। মন্দন সুষম হলে, ট্রেনটি থামার আগে আর কত দূরত্ব অতিক্রম করবে?
 - (iii) 36 km/h বেগে চলমান একটি গাড়ির চলক হঠাৎ গাড়ির সমানে 100 m দূরত্বে একটি বালক দেখতে পায়। দূর্ঘটনা এড়ানোর জন্য বালকের 2 m আগে গাড়ি থামাতে চাইলে কত মন্দন প্রয়োগ করতে হবে?
3. (i) একটি কণা সুষম ত্বরণে সরলরেখায় চলছে। কণাটি একাদশ ও পঞ্চদশ সেকেন্ডে যথাক্রমে 720 সে. মি. ও 960 সে. মি. পথ অতিক্রম করে। তাহলে কণাটি 20 সেকেন্ডে কত পথ অতিক্রম করবে ?
 - (ii) একটি বস্তু কোনো সরলরেখা বরাবর চলে কোনো এক সেকেন্ডে 10 মিটার যায় এবং পরবর্তী 4 সেকেন্ডে 60 মিটার পথ গেল। এর ত্বরণ নির্ণয় কর। [কুয়েট ০৭-০৮]
 - (iii) একটি কণা স্থিতাবস্থা হতে সমত্বরণে সরলপথে চলে 3 সেকেন্ডে 2 মিটার দূরত্ব যাওয়ার পর সমবেগে চলে। পরবর্তী 2 মিটার যেতে কত সময় লাগবে?
 - (iv) একটি কণা স্থির অবস্থা হতে সমত্বরণে চলে একটি দূরত্ব অতিক্রম করল। যদি কণাটি গতির প্রথম সেকেন্ডে 16 m এবং শেষ সেকেন্ডে মোট দূরত্বের $\frac{9}{25}$ অংশ অতিক্রম করে, তাহলে মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব এবং ভ্রমণকাল নির্ণয় কর।

4. (i) একবাক্তি তার 50 মিটার সম্মুখে স্থিরাবস্থা হতে সুযম ত্বরণে সরলপথে একটি বাসকে ছাড়তে দেখে সমবেগে দৌড়াতে লাগল। সে এক মিনিটে বাসটি কোনো রকমে ধরতে পারল। লোকটির বেগ ও বাসটির ত্বরণ নির্ণয় কর। [সি. ২০০৩]
- (ii) সরলরেখায় ধ্রুব ত্বরণে চলমান একটি কণা পরপর দুই সেকেন্ডে যথাক্রমে 10 মিটার ও 15 মিটার পথ অতিক্রম করে। কণাটির ত্বরণ নির্ণয় কর।
5. একটি ট্রেন 4 কি. মি. দূরবর্তী সরলপথ 8 মিনিটে অতিক্রম করে। যাত্রাপথের প্রথম অংশ x সমত্বরণে এবং শেষ অংশ y সমমন্দনে যায়। প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 8$ (দূরত্ব ও সময়ের একক যথাক্রমে কি. মি. ও মিনিট) [কু. ১৩]
6. কোনো চলমান কণা u আদিবেগে এবং f সমত্বরণে সরলরেখায় চলে p তম, q তম এবং r তম সেকেন্ডে যথাক্রমে a , b এবং c দূরত্ব অতিক্রম করে। প্রমাণ কর যে, $a(q-r) + b(r-p) + c(p-q) = 0$
7. (i) একটি বুলেট একটি তক্তা ভেদ করতে এর বেগের $\frac{1}{10}$ অংশ হারায়। মন্দন সুযম হলে, বুলেটটি থামার পূর্বে পরপর স্থাপিত অনুরূপ কতগুলি তক্তা ভেদ করবে? [বুয়েট ০৯-১০]
- (ii) একটি বুলেট কোনো দেয়ালের ভিতর 3 c.m চুকবার পর এর অর্ধেক বেগ হারায়। বুলেটটি দেয়ালের ভিতর আর কতদূর চুকবে? [বুয়েট ১২-১৩]
- (iii) একটি বুলেট কোনো দেয়ালের ভিতর 2 সে.মি. চুকবার পর এর অর্ধেক বেগ হারায়। বুলেটটি দেয়ালের ভিতর কতদূর চুকবে? [কু. ০৫, ঢা. ২০১৩, ব. সি. ১৪]
8. (i) একটি বাঘ 20 মিটার দূরে একটি হরিণ দেখে স্থিরাবস্থা থেকে 3 মি./সে.² ত্বরণে এর পশ্চাতে দৌড়াল। হরিণটি 13 মি./সে. সমবেগে সরল পথে দৌড়াতে থাকলে, কতক্ষণে এবং কতদূরে বাঘটি হরিণকে ধরতে পারবে? [কু. ২০০৯, কুয়েট ০৯-১০]
- (ii) একটি বিড়াল এর সম্মুখে 15 মিটার দূরত্বে একটি ইঁদুর দেখতে পেয়ে তাকে ধরার জন্য 2 মি./সে.² সমত্বরণে দৌড়াতে শুরু করল। ইঁদুরটি 14 মি./সে. সমবেগে সরলপথে চলতে থাকলে, কোথায় এবং কখন বিড়ালটি ইঁদুরটিকে ধরতে পারবে? [বুয়েট ৯৮-৯৯, চুয়েট ০৫-০৬]
- (iii) একটি বাঘ তার 80 m সামনে একটি হরিণকে দেখে একে ধরার জন্য ধাওয়া করল। হরিণটি টের পেয়ে সঙ্গে সঙ্গে তার থেকে 212.5 m দূরে নিরাপদ আশ্রয়ের দিকে সোজা পথে দৌড় শুরু করল। বাঘটি 2 m/sec আদিবেগে এবং 1.5 m/sec² সমত্বরণে আর হরিণটি 4 m/sec, আদিবেগ এবং 1 m/sec² সমত্বরণে দৌড়াতে লাগল। বাঘটি হরিণকে ধরতে পারবে কি? গাণিতিক বিশ্লেষণ করে উত্তর দাও।
9. একটি বাস স্থির অবস্থান হতে 1 মি./সে.² ত্বরণে সরলপথে যাত্রা করল। দেখাও যে, $40\frac{1}{2}$ মিটারের অধিক পশ্চাত হতে কোনো যাত্রী 9 মি./সে. সমবেগে দৌড়ে বাসটি ধরতে পারবে না।
10. একটি রেলগাড়ী A থেকে B পর্যন্ত $\frac{1}{2}$ কি. মি. পথ 50 সেকেন্ডে এবং B থেকে C পর্যন্ত $\frac{3}{4}$ কি. মি. পথ একই সময়ে অতিক্রম করে। ত্বরণ সুযম হলে A এবং C বিন্দুতে গাড়ির বেগ নির্ণয় কর।
11. (i) স্থির অবস্থান থেকে একটি গাড়ি 2 মি./সে.² সমত্বরণে এবং এর 84 মিটার পশ্চাত হতে একজন সাইকেল চালক 20 মি./সে. সমবেগে একসঙ্গে একই দিকে সরল পথে যাত্রা করল। কখন তারা মিলিত হবে? দুইটি উত্তরের কারণ ব্যাখ্যা কর।
- (ii) একটি সরলরেখায় দুইটি কণা a ও b সমত্বরণে চলছে। কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে যখন এরা x ও y দূরত্বে অবস্থান করে তখন এদের বেগ যথাক্রমে u ও v হয়। প্রমাণ কর এরা দুইবারের বেশি মিলিত হতে পারে না এবং মিলিত হবার সময়ের ব্যবধান $= \frac{2}{a-b} \sqrt{(u-v)^2 - 2(x-y)(a-b)}$
12. একটি রেলগাড়ি কমলাপুর স্টেশন থেকে ছেড়ে নারায়ণগঞ্জে থামে। যদি এর ভ্রমণ পথের প্রথম চতুর্থাংশ সমত্বরণে, শেষ চতুর্থাংশ সমমন্দনে এবং বাকি অংশ সমবেগে যায়, তবে প্রমাণ করে যে, গাড়িখানার গড়বেগ এবং সর্বোচ্চ বেগের অনুপাত 2 : 3 হবে। [ঢা. ২০০৩]

13. (i) একটি বস্তু কণা f সমত্বরণে একটি সরলরেখা বরাবর চলে। t সময়ে s দূরত্ব এবং পরবর্তী t_1 সময়ে s_1 দূরত্ব অতিক্রম করে। দেখাও যে, $f = 2 \left(\frac{s_1}{t_1} - \frac{s}{t} \right) / (t + t_1)$

[ঢা. '০৭; রা. ০৯; চ. দি. ২০১৩, কু. ১৪]

- (ii) শহরতলীতে ট্রেনে যাতায়াতের জন্য প্রতি s দূরত্ব পর পর স্টেশন আছে। যাত্রীদের সুবিধার জন্য সর্বোচ্চ ত্বরণ a ও সর্বোচ্চ মন্দন r নির্ধারণ করা হল। দেখাও যে, সোজা রেলপথে এক স্টেশন থেকে পরবর্তী স্টেশনে

যাবার সময়, $t = \sqrt{\frac{2s(a+r)}{ar}}$

- (iii) একটি বস্তুকণা স্থিরাবস্থা থেকে একটি সরলরেখা বরাবর যাত্রা করে প্রথমে f_1 সুস্থম ত্বরণে এবং পরে f_2 সুস্থম মন্দনে চলে। যদি তা t সময়ে যাত্রা বিন্দু থেকে s দূরত্বে গিয়ে থাকে, তবে প্রমাণ কর যে,

(i) $t = \sqrt{\frac{2(f_1 + f_2)s}{f_1 f_2}}$ (ii) $\frac{t^2}{2s} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$ [চ. ০৫, দি. ০৯; ঢা. কু. দি. ১১]

- (iv) একটি রেলগাড়ি এক স্টেশন থেকে যাত্রা করে একই সরলরেখায় d দূরত্বে অবস্থিত অপর এক স্টেশনে থাকে। গাড়িটির গতিপথের প্রথম অংশ a সমত্বরণে এবং শেষ অংশ b সমমন্দনে চলে। দেখাও যে, সমগ্র দূরত্ব

অতিক্রম করতে $\sqrt{\frac{2(a+b)}{ab}} d$ সময় লাগে। [===. ২০১৬]

- (v) সোজা রেলপথে একটি রেলগাড়ির বেগ f_1 সুস্থম হারে বৃদ্ধি পেয়ে শূন্য থেকে v হবার পর কিছুক্ষণ বেগ বৃদ্ধি বন্ধ থাকে এবং শেষে f_2 সুস্থম হারে হ্রাস পেয়ে বেগ শূন্য হয়। অতিক্রান্ত দূরত্ব x এবং সময় t হলে

প্রমাণ কর যে, (i) $t = \frac{x}{v} + \frac{v}{2} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \right)$ (ii) $2x = v \left[2t - v \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \right) \right]$

14. (i) সুস্থম ত্বরণে সরলরেখা বরাবর চলন্ত একটি বিন্দুকণা t_1, t_2, t_3 সময়ে যথাক্রমে সমান তিনটি ক্রমিক দূরত্ব অতিক্রম করলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = \frac{3}{t_1 + t_2 + t_3}$

[ব. কু. চ. ১০; য. ১১; চ. দি. ১২, সি. ১৬]

- (ii) একটি সরলরেখায় সমত্বরণে চলমান কোনো বিন্দুর t_1, t_2, t_3 সময়ের গড়বেগ যথাক্রমে v_1, v_2, v_3 হলে

দেখাও যে, $\frac{v_1 - v_2}{v_2 - v_3} = \frac{t_1 + t_2}{t_2 + t_3}$ [য. '০৮, ঢা. ব. ০৯; দি. ২০১১]

15. (i) দুইটি রেলগাড়ি একই সরল রেলপথে u_1 এবং u_2 গতিবেগে পরস্পরের দিকে অগ্রসর হচ্ছে। এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব যখন x তখন পরস্পরকে দেখতে পায়। ব্রেক প্রয়োগ করে রেলগাড়ি দুইটি যদি যথাক্রমে সর্বোচ্চ f_1 এবং f_2 মন্দন সৃষ্টি করে, তবে প্রমাণ কর যে, কোনো রকমে সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব যদি

(i) $u_1^2 f_2 + u_2^2 f_1 = 2f_1 f_2 x$ হয়। (ii) $\frac{u_1^2}{f_1} + \frac{u_2^2}{f_2} = 2x$ [রা. ২০১৩]

- (ii) একটি মালগাড়ি সোজা রেলপথে ঢাকা স্টেশন থেকে u_2 বেগে যাত্রা করার কিছুক্ষণ পর কর্ণফুলী এক্সপ্রেস একই স্থান থেকে u_1 বেগে একই দিকে রওনা দেয়। কিছু সময় পরে উভয় গাড়ির চালক পরস্পরকে x দূরত্বের ব্যবধানে দেখতে পেয়ে তারা যথাক্রমে f_2 সর্বোচ্চ ত্বরণ এবং f_1 সর্বোচ্চ মন্দন প্রয়োগ করল। দেখাও যে, দুর্ঘটনা কেবলমাত্র এড়ানো সম্ভব যদি $(u_1 - u_2)^2 = 2(f_1 + f_2)x$ হয়।

16. একটি রেলগাড়ি স্টেশন A থেকে সরল রেলপথে যাত্রা করে 10 মিনিট পরে স্টেশন B তে থাকে। স্টেশন দুইটির মধ্যবর্তী কোনো C বিন্দুতে এর সর্বোচ্চ বেগ ঘন্টায় 60 কি. মি. হয়। গাড়িটি যদি A থেকে C পর্যন্ত সমত্বরণে এবং C থেকে B পর্যন্ত সমমন্দনে গমন করে, তাহলে A ও B এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

17. ঢাকা থেকে সোজা রেলপথে ছেড়ে আন্তঃনগর ট্রেনটি নরসিংদীতে থামে। এর বেগ সমত্বরণে ক্রমশ বেড়ে সর্বোচ্চ v হয় এবং পরে সমমন্দনে চলে মেমে যায়। স্টেশন দুইটির দূরত্ব x হলে, ঢাকা থেকে নরসিংদী যেতে ট্রেনটির কতক্ষণ লাগবে?
18. একটি বস্তুকণা n আদিবেগে সরলরেখায় যাত্রা করে একটি নির্দিষ্ট দূরত্বের দুই অর্ধাংশ যথাক্রমে f_1 এবং f_2 ত্বরণে অতিক্রম করে। দেখাও যে, বস্তুটির অন্তবেগ একই হবে যদি একই আদিবেগে এবং $\frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ সমত্বরণে কণাটি সম্পূর্ণ পথ অতিক্রম করে। [ব. ২০০৫]
19. (i) একটি দৌড় প্রতিযোগিতায় একস্থান থেকে দুই জন সাইকেল আরোহী দুইটি সমান্তরাল সরল পথে যথাক্রমে u_1 ও u_2 বেগে চলে একই সময়ে গন্তব্য স্থলে পৌঁছিল। যদি এদের ত্বরণ যথাক্রমে f_1 ও f_2 হয় তবে দেখাও যে, তারা $2(u_1 - u_2)(u_1 f_2 - u_2 f_1)/(f_1 - f_2)^2$ দূরত্ব অতিক্রম করেছে।
(ii) A বিন্দু হতে AB সরলরেখা বরাবর একটি বস্তুকণা 20 মি./সে, সমবেগে এবং অপর একটি বস্তুকণা স্থিরাবস্থা থেকে 4 মি./সে.² সমত্বরণে এক সাথে যাত্রা করল। কখন এবং কত দূরত্বে এরা পুনরায় মিলিত হবে ?
20. একটি কণা একটি সরলরেখা বরাবর সমমন্দনে চলে পঞ্চম সেকেন্ডে 7 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে এবং কিছুক্ষণ পরে থেমে যায়। কণাটি এর ভ্রমণকালের শেষতম সেকেন্ডে মোট অতিক্রান্ত পথের $\frac{1}{64}$ অংশ যায়। এর ভ্রমণকাল ও আদিবেগ নির্ণয় কর।
21. (i) একটি কণা স্থিরাবস্থা হতে যাত্রা করে সরলপথে সুষম ত্বরণে চলে চতুর্থ সেকেন্ডে 14 c.m. দূরত্ব অতিক্রম করে। অষ্টম সেকেন্ডে কণাটি কত দূরত্ব অতিক্রম করবে তা নির্ণয় কর।
(ii) একটি কণা স্থিতিতাবস্থা হতে যাত্রা করে সরলপথে চলে 192 ft. পথ যায়। যাত্রাপথের প্রথম অংশ 25 ft./sec². সমত্বরণে এবং শেষ অংশ 5 ft./sec² সমমন্দনে চলে কোনোরকমে সম্পূর্ণ পথ অতিক্রম করে। কণাটির সর্বোচ্চ গতিবেগ নির্ণয় কর। [বুয়েট ০১-০২]

উত্তরমালা 9.3

1. (i) 30 সে.মি./সে. - 2 সে.মি./সে.², (ii) 40 m/s. (iii) 12 মি./সে.; 4 মি./সে.²। (iv) 3 সে.মি./সেকেন্ড; 6 সে.মি./সেকেন্ড², 2.(i) 43.2 সেকেন্ড, (ii) 30 মিটার। (iii) 0.51 m/sec² (শায়)।
3.(i) 13800 সে.মি. (ii) 2 মিটার/সেকেন্ড², (iii) $\frac{3}{2}$ সেকেন্ড (iv) 400 m., 5 sec.। 4.(i) $\frac{5}{3}$ মি/সে.; $\frac{1}{36}$ মি/সে.². (ii) 5 মি./সে.², 7.(i) $5\frac{5}{19}$ টি, (ii) 1 সে. মি. (iii) $2\frac{2}{3}$ সে.মি. 8.(i) 150 মিটার দূরত্বে; 10 সেকেন্ড, (ii) 225 মিটার দূরে; 15 সেকেন্ড। 10. 27 কি.মি./ঘ., 63 কি.মি./ঘ, 11.(i) 6 সেকেন্ড, 14 সেকেন্ড, 16. 5 কি. মিটার, 17. $t = 2x/v$ (একক)। 19.(ii) 200মি., 10 সে. 20. 8 সেকেন্ড, 16 মি./সে.; 21. (i) 30 মিটার (ii). 40 ft/sec.

প্রশ্নমালা ৯.৪

1. (i) একটি বস্তু ভূমি থেকে উল্লম্ব ভাবে উপরের দিকে নিক্ষেপ করলে, তা 6 সেকেন্ডে পুনরায় ভূমিতে পতিত হয়। বস্তুটির নিক্ষেপণ বেগ, সর্বাধিক উচ্চতা এবং উত্থান কাল নির্ণয় কর। $g = 9.8$ মিটার/সে^২।
 (ii) একটি মিনারের শীর্ষ হতে 14.5 মিটার/সেকেন্ড বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তু 5 সেকেন্ড পরে মিনারের পাদদেশে পতিত হয়। মিনারের উচ্চতা নির্ণয় কর।
 (iii) একটি ব্রীজের উপর থেকে একটি পাথরের টুকরা 12.4 m/sec বেগে খাড়া নিম্নদিকে নিক্ষেপ করলে তা 2 সেকেন্ডে পানিতে আঘাত করে। পানিতে আঘাতের সময় পাথরের বেগ নির্ণয় কর।
2. (i) সমবেগে খাড়া উর্ধ্বগামী একটি এরোপ্লেন থেকে একটি বোমা ফেলে দেয়া হল। বোমাটি 5 সেকেন্ডে ভূমিতে আঘাত করে। বোমাটি ভূমিতে পড়ার মুহূর্তে এরোপ্লেনের উচ্চতা নির্ণয় কর। [সি. ২০০৭]
 (ii) 4.5 সেকেন্ড যাবত সমবেগে খাড়া উপরের দিকে উঠার পর একটি বেলুন হতে একটি ভারী বস্তু পড়ে গেল। যদি বস্তুটি 7 সেকেন্ডে ভূমিতে পড়ে তবে বেলুনের গতিবেগ এবং কত উঁচু হতে বস্তুটি পড়েছিল তা নির্ণয় কর। [দি. ২০১১]
3. (i) অবাধে পতনশীল একটি বস্তুর পতনকালের শেষতম সেকেন্ডে 93.1 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করল। কত উঁচু থেকে বস্তুটি পড়েছিল? বস্তুটির পতনকাল নির্ণয় কর। ($g = 9.81$ সি./সে^২)
 (ii) স্থিতাবস্থায় ভূপৃষ্ঠ হতে 4 ফুট/সেকেন্ডে^২ সমত্বরণে উর্ধ্বগামী একটি লিফট 8 সেকেন্ড উঠার মুহূর্তে একটি বস্তু নিচে ফেলা হলে কত সময়ে তা ভূপৃষ্ঠে পড়বে?
 (iii) 19.6 m/s বেগে একটি পাথর খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করলে কত সময়ে এটি ভূমিতে পড়বে? [বুয়েট ১৩-১৪]
4. (i) একটি বল u বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করলে তা t_1 ও t_2 সেকেন্ডে h উচ্চতায় অবস্থান করে। প্রমাণ কর যে, $h = \frac{1}{2}gt_1t_2$ এবং $u = \frac{1}{2}g(t_1 + t_2)$ [রা. ১০, ঢা. ১১; য. '১২; ঢা. ১৩, দি. ১৬]
 (ii) একটি বস্তুকণা খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো। বস্তুকণাটি একটি নির্দিষ্ট বিন্দু P তে পৌঁছতে t সময় লাগে এবং আরও t_1 সময়ে তা ভূমিতে পতিত হয়। দেখাও যে, বস্তুটির সর্বাধিক উচ্চতা $= \frac{1}{8}g(t + t_1)^2$
5. (i) একটি কণাকে h উচ্চতা হতে মুক্তভাবে পড়তে দেয়া হলো এবং এটি পতনকালে শেষতম সেকেন্ডে $\frac{9h}{25}$ দূরত্ব অতিক্রম করে তাহলে h এর মান কত? ($g = 9.8$ m/s²) [বুয়েট ১১-১২]
 (ii) একটি টাওয়ারের চূড়া থেকে অবাধে পড়ন্ত একটি বস্তু এর ভ্রমণকালের শেষ সেকেন্ডের পূর্ববর্তী সেকেন্ডে টাওয়ারের উচ্চতার $\frac{1}{3}$ অংশ দূরত্ব অতিক্রম করে। টাওয়ারের উচ্চতা নির্ণয় কর? ($g=32$ ফুট/সে.^২) [দি. ২০১১]
 (iii) একটি খাড়া টাওয়ারের শীর্ষবিন্দু থেকে একটি কণা নিচে ছেড়ে দেয়া হল। কণাটি এর শেষতম সেকেন্ডে টাওয়ারের উচ্চতার $\frac{8}{9}$ অতিক্রম করে। টাওয়ারের উচ্চতা নির্ণয় কর। [য. ২০০৫]
 (iv) একটি দালানের ছাদ থেকে একটি পাথর নিচে ছেড়ে দেওয়া হল এবং একই সময়ে অপর একটি পাথর দালানের পাদদেশ থেকে 20ms⁻¹ বেগে উপরে ছোড়া হল। তারা 3 সেকেন্ড পর একত্রে মিলিত হলে দালানটির উচ্চতা নির্ণয় কর।
 (v) একখন্ড পাথর একটি মিনারের শীর্ষ থেকে খাড়া উপরে নিক্ষেপ করার 10 সেকেন্ড পরে তা ভূমিতে 51m/sec. বেগে পতিত হলো। মিনারের উচ্চতা কত? সংকেত : অনু: 9.8.5 দ্রষ্টব্য। [জবি. ১০-১১]
 (vi). একখন্ড পাথর কোন নির্দিষ্ট উচ্চতা হতে ফেলে দেয়া হলে, তা শেষ t সেকেন্ডে h মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে। দেখাও যে, পতনের মোট সময় $\left(\frac{h}{gt} + \frac{t}{2}\right)$ সেকেন্ড।
 (vii) একটি বস্তু একটি স্তম্ভের শীর্ষ থেকে খাড়া উপরের দিকে 19.5 m/sec. নিক্ষেপ করলে তা 5 সেকেন্ড পরে ভূমিতে পড়ে। স্তম্ভের উচ্চতা নির্ণয় কর। [ঢা.বি. ০৭-০৮, ১১-১২, বুয়েট ০৮-০৯]

6. (i) 100 মিটার উঁচুতে অবস্থিত কোনো বিন্দু হতে একটি বস্তু নিচে ছেড়ে দেয়া হল। একই সময়ে ভূমি থেকে অন্য একটি বস্তুকে 25 মি./সে. বেগে খাড়া উপরে নিক্ষেপ করা হলে, কোথায় তারা মিলিত হবে?
 (ii) 49 মিঃ/সেঃ বেগে একটি বলকে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হল এবং 2 সেঃ পরে একই বিন্দু হতে একই বেগে অপর একটি বল একই দিকে নিক্ষেপ করা হল। কোথায় এবং কখন তারা মিলিত হবে।
 [সি. ১২, য. ১৬]
7. (i) 160 ফুট উচ্চ একটি মিনারের শীর্ষ ও পাদদেশ থেকে দুটি বস্তু একই সময়ে যথাক্রমে 20 ফুট/সেকেন্ড এবং 100 ফুট/সেকেন্ড বেগে খাড়া উপরে নিক্ষেপ করা হলো। তারা কোথায় কখন মিলিত হবে? মিলিত হবার সময় এদের গতির দিক নির্ণয় কর। [$g = 32$ ফুট/সেকেন্ড²]
 (ii) 176.4 মিটার উঁচু হতে অবাধে পড়ন্ত একটি বস্তু 19.6 মিটার নিচে পড়ার মুহূর্তে অপর একটি বস্তুকে 78.4 মিটার উঁচু হতে নিচে ফেলে দেয়া হল। প্রমাণ কর যে, তারা একই সাথে ভূমিতে পতিত হবে।
8. h উচ্চতা বিশিষ্ট একটি টাওয়ারের শীর্ষবিন্দু হতে অবাধে পড়ন্ত একখণ্ড পাথর x মিটার দূরত্বে পৌঁছিলে টাওয়ারের শীর্ষবিন্দুর y মিটার নিচে কোনো বিন্দু থেকে আর একখণ্ড পাথর নিচে ফেলা হল। এরা একই সাথে ভূমিতে পড়লে দেখাও যে, $h = \frac{(x+y)^2}{4x}$ মিটার।
 [য. কু. ১১; ঢা. ব. ১২; রা. ১৩; কু. চ. য. দি. ১৪, কু. ১৬]
9. (i) একটি পাথর কুয়ার ভিতর ফেলার t সময় পরে পানিতে এর পতন শব্দ শোনা গেল। শব্দের বেগ v এবং কুয়ার গভীরতা h হলে, বাতাসের বাধা অগ্রাহ্য করে, প্রমাণ কর যে,
 (ii) $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v}$ (ii) $gt^2 = 2h \left(1 + \frac{gt}{v}\right)$, যখন $v > h$
 (iii) $gv^2t^2 - 2ghvt + h(gh - 2v^2) = 0$ [ব. ২০১০; সি. ১১১৪; য. ১৩]
10. (i) একটি শূন্য কুয়ার মধ্যে অবাধে পড়ন্ত একখণ্ড পাথর 21 মিটার/সেকেন্ড গতিবেগে এর তলদেশে পতিত হল। পাথর ফেলার $2\frac{3}{14}$ সেকেন্ড পর এর পতন শব্দ শোনা গেলে শব্দের গতিবেগ নির্ণয় কর।
 (ii) একটি শূন্য কূপের মধ্যে একটি পাথরের টুকরা ছেড়ে দেয়ার পর তা 19.6 মি./সে. বেগে কূপের তলদেশে পতিত হয়। টুকরাটি ছেড়ে দেয়ার $2\frac{2}{35}$ সেকেন্ড পরে পাথরটির পতনের শব্দ শোনা গেল। শব্দের বেগ নির্ণয় কর।
 [য. ০৯-১০, চ. ২০১৬]
- (iii) একটি কুয়ার মধ্যে একটি ভারীবস্তু ফেলার 4 সেকেন্ড পর পানিতে এর পতন শব্দ শোনা গেল। শব্দের গতিবেগ 330 মি./সে. হলে কুয়ার গভীরতা নির্ণয় কর। $g = 9.8$ মি./সে². [চুয়েট ০৯-১০]
11. (i) একটি কণা ভূমি থেকে u বেগে উল্লম্বভাবে উপরে নিক্ষিপ্ত হল। যদি $u^2 > 2gh$ হয়, তবে দেখাও যে, কণাটি $\frac{2}{g} \sqrt{u^2 - 2gh}$ সময়ের ব্যবধানে দুইবার h উচ্চতায় থাকবে।
 (ii) h মিটার উচ্চ একটি টাওয়ারের চূড়া হতে একটি বস্তু অবাধে ছেড়ে দেওয়া হল এবং একই মুহূর্তে এর পাদদেশ হতে অপর একটি বস্তু v মি./সে. বেগে খাড়া উপরে ছোড়া হল। যদি বস্তু দুইটি ভূমি থেকে $\frac{h}{3}$ মিটার উপরে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $v = \frac{1}{2} \sqrt{3gh}$ মি./সে.
 (iii) একটি বস্তু কণা খাড়াভাবে উপরে নিক্ষিপ্ত হল। প্রমাণ কর যে, তা যে যে সময়ে সর্বোচ্চ উচ্চতার $\frac{3}{4}$ অংশে অবস্থান করে তাদের অনুপাত 1 : 3.
12. $\sqrt{2gy}$ মি./সে. বেগে খাড়া উপরের দিকে উঠন্ত একটি রকেট এর বৃহত্তম উচ্চতায় ফেটে গেল। এর শব্দ $\frac{1}{n}$ সেকেন্ডের ব্যবধানে রকেটের যাত্রাস্থান ও এ থেকে x মিটার আনুভূমিক দূরত্বে দুই স্থানে শোনা গেল। প্রমাণ কর যে, শব্দের বেগ $v = n \left\{ \sqrt{x^2 + y^2} - y \right\}$ মি./সে. [দি. চ. ২০১০; ব. ১৪]

13. $f = m/s^2$ সুসম ত্বরণে উঠন্ত একটি লিফটের উপর থেকে লিফটের সাপেক্ষে v m/s আপেক্ষিক বেগে খাড়া উর্ধ্বে একটি বল নিক্ষেপ করা হল। t সময় পরে বলটি পুনরায় লিফটে ফিরে আসলে প্রমাণ কর যে, $f + g = 2v/t$
14. (i) ভূ-পৃষ্ঠের উর্ধ্বে h_1, h_2, h_3 উচ্চতা থেকে তিনটি বস্তু খাড়া নিচের দিকে যথাক্রমে v_1, v_2, v_3 বেগে ছোড়া হল। এরা একই সাথে ভূ-পৃষ্ঠে পড়লে প্রমাণ কর যে,
 $h_1 - h_2 \propto h_2 - h_3 \propto h_3 - h_1 = v_1 - v_2 \propto v_2 - v_3 \propto v_3 - v_1$
- (ii) তিনটি বল h_1, h_2, h_3 উচ্চতায় অবস্থিত তিনটি বিন্দু থেকে যথাক্রমে u_1, u_2, u_3 বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হল। এরা একই সাথে ভূমিতে পতিত হলে, প্রমাণ কর যে,
 $h_1(u_2 - u_3) + h_2(u_3 - u_1) + h_3(u_1 - u_2) = 0$
15. অবাধে পতনশীল একটি বস্তু 49 মি/সে. বেগে কোনো একটি নির্দিষ্ট বিন্দু অতিক্রম করে। পরবর্তী 2 সেকেন্ডে বস্তুটির অবস্থান নির্ণয় কর।
16. 39.2 মিটার উচ্চ টাওয়ারের শীর্ষ থেকে একখণ্ড পাথর নিচে ছেড়ে দেওয়ার মুহূর্তে এর পাদদেশ থেকে অপর একখণ্ড পাথর 19.6 মি/সে. বেগে খাড়া উপরে নিক্ষেপ করা হল। দেখাও যে, তারা মধ্যপথে মিলিত হবে।
17. (i) ভূমি থেকে 122.5 মিটার উচ্চতায় অবস্থিত কোনো বিন্দু হতে P বস্তুকে নিচে ছেড়ে দেয়া হল। P বস্তুটি 44.1 মিটার নিচে নামার মুহূর্তে একই বিন্দু হতে Q বস্তুকে নিচে u বেগে নিক্ষেপ করা হল। এরা একই সংগে ভূমিতে পতিত হয়। u এর মান নির্ণয় কর।
- (ii) একটি বস্তু 196 ms^{-1} বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হল। অপর একটি বস্তু এর 6 সেকেন্ড পরে একই স্থান থেকে একই দিকে নিক্ষেপ করলে এরা পরস্পর প্রথম বস্তুটির বৃহত্তম উচ্চতায় মিলিত হয়।
 দ্বিতীয় বস্তুটির নিক্ষেপণ বেগ কত [বুয়েট ০৭-০৮]
- (iii) একটি কণা u বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো। এর n সেকেন্ড পরে অপর একটি কণা একই স্থান হতে v বেগে একইদিকে নিক্ষেপ করা হলো। যদি তারা প্রথম কণার বৃহত্তম উচ্চতায় মিলিত হয়, তবে দেখাও যে, $v - u = g^2 n^2 / 2(u - ng)$.
- (iv) 288 ফুট উচ্চ মিনারের চূড়া হতে একটি পাথর ছেড়ে দেওয়া হল। একই সময়ে অপর একটি পাথর মিনারের পাদদেশ হতে খাড়া উপরে নিক্ষেপ করা হল। এরা পরস্পর মধ্যপথে মিলিত হলে দ্বিতীয় পাথরের নিক্ষেপণ বেগ নির্ণয় কর।
- (v) একই স্থান থেকে দুটি বল খাড়া উপরে নিক্ষেপ করা হলো। এদের একটি অপরটি অপেক্ষা 48 মিটার উপরে উঠে এবং নিক্ষেপণ বিন্দুতে 3 সেকেন্ড পর প্রত্যাবর্তন করে। বল দুইটির নিক্ষেপণ বেগ নির্ণয় কর।
18. h মিটার উচ্চ একটি মিনারের চূড়া থেকে একটি পাথর নিচে ছেড়ে দেয়ার মুহূর্তে এর পাদদেশ থেকে অপর একটি পাথর এরূপ বেগে খাড়া উপরে নিক্ষেপ করা হলো যেন তা কোনো রকমে মিনারের চূড়ায় পৌঁছতে পারে। কত উচ্চতায় এরা পরস্পরকে অতিক্রম করবে? [বুয়েট ০৫-০৬]

উত্তরমালা 9.4

1. (i) 29.4 মি/সে., 44.1 মিটার; 3 সেকেন্ড (ii) 50 মিটার (iii) 32 m/sec। 2. (i) 122.5 মিটার (ii) 20.88 মি./সে.; 93.96 মিটার। 3. (i) 490 মিটার (প্রায়); 10 সেকেন্ড। (ii) 4 সেকেন্ড। (iii) 4 সে.। 5. (i) 122.5m (ii) 144 ফুট, (iii) $h = 11.025$ মিটার। (iv) 60 মিটার। (v) 20 মিটার (vii) 25 মিটার। 6. (i) 21.6 মিটার উচ্চতায়। (ii) ২য়টি নিক্ষিপ্ত হবার 4 সেকেন্ড পরে 117.6 মিটার উচ্চতায়। 7. (i) 2 সেকেন্ড, 136 ফুট উচ্চতায়, শীর্ষের বস্তুটির গতি নিম্নমুখী, পাদদেশের বস্তুটির গতি উর্ধ্বমুখী। 10. (i) 315 মি./সে. (ii) 343 মি./সে. (iii) 70.27 মিটার। 15. নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে 191.1 মিটার নিচে। 17. (i) $u = 51.45$ মি./সে.। (ii) 208.6 ms^{-1} . (iv) 96 ফুট/ সেকেন্ড। (v) 39,35 m/sec, 24.65 m/sec.
18. $\frac{3h}{4}$ উচ্চতায়।

প্রশ্নমালা 9.5

1. (i) একটি প্রক্ষেপক 21 মি./সে. বেগে এবং আনুভূমির সাথে 30° কোণে শূন্যে প্রক্ষেপ করা হল। এর পাল্লা, সর্বাধিক উচ্চতা এবং 2 সেকেন্ড পরে এর অবস্থান ও বেগ নির্ণয় কর।
(ii) একটি কণা 78.4 মি. উচ্চ কোনো স্থান থেকে আনুভূমিকভাবে প্রক্ষেপ করা হলে t সেকেন্ড পরে তা ভূমিতে পতিত হয়। t এর মান কত?
(iii) ভূমি হতে $\sin^{-1} \frac{3}{5}$ কোণে শূন্যে নিষ্ক্ষিপ্ত বস্তুর আনুভূমিক পাল্লা 120 মিটার হলে, নিষ্ক্ষেপণ বেগের মান এবং এর বিচরণ পথের সর্বোচ্চ বিন্দুতে বস্তুর বেগ ও গমনকাল নির্ণয় কর। ($g = 9.8 \text{ m/sec}^2$)
(iv) ভূমির সাথে 30° কোণে এক ফুট উচ্চ থেকে 63 ফুট/সেকেন্ড বেগে একটি ক্রিকেট বলকে ব্যাট দ্বারা আঘাত করা হল। কত সময়ে তা ভূমিতে পতিত হবে এবং অতিক্রান্ত আনুভূমিক দূরত্ব কত? $g = 32 \text{ ফুট/সে}^2$.
2. (i) একটি বালক একটি ফুটবল খাড়া উপরের দিকে 80 মিটার উঁচুতে নিষ্ক্ষেপ করতে পারে। সে বলটি সর্বাধিক কত আনুভূমিক দূরত্বে নিষ্ক্ষেপ করতে পারবে এবং এ ক্ষেত্রে বিচরণকাল নির্ণয় কর।

- (ii) 196 মি./সে. বেগে ভূ-সমান্তরালে চলমান একটি বেলুন থেকে একখণ্ড পাথর নিচে ফেলা হলে তা 5 সেকেন্ড পরে ভূমিতে পড়ে। বেলুনের উচ্চতা এবং পাথরটি যে বেগে ভূমিতে পড়ে তা নির্ণয় কর।
- (iii) 176.4 মিটার উঁচু একটি টাওয়ারের শীর্ষ হতে একটি বস্তু কি গতিবেগে আনুভূমিকভাবে নিক্ষেপ করলে তা টাওয়ারের পাদদেশ থেকে 96 মিটার দূরে ভূমিতে পড়বে? [বুয়েট ১২-১৩]
3. একজন বৈমানিক 5000 মিটার উপর দিয়ে ঘণ্টায় 250 কি. মি. বেগে উড়ে যাওয়ার সময় একটি বোমা ফেলে দিল। সে যে স্থানে আঘাত করতে চায় সেই স্থান হতে তার আনুভূমিক দূরত্ব কত হওয়া প্রয়োজন? [চা. দি. ১৪]
4. (i) প্রমাণ কর যে, নিক্ষেপণ কোণ $\frac{\pi}{4}$ হলে আনুভূমিক পাল্লার মান বৃহত্তম হবে এবং পাল্লা $R = 4H$.
- (ii) u গতিবেগে এবং α কোণে শূন্যে নিক্ষিপ্ত কোনো বস্তুর আনুভূমিক পাল্লা ও বৃহত্তম পাল্লার মান যথাক্রমে R ও D হলে, প্রমাণ কর যে, $R = D \sin 2\alpha$, এবং দুইটি বিচরণ পথের সর্বাধিক উচ্চতা h_1, h_2 হলে, $D = 2(h_1 + h_2)$. [য. ২০০২]
5. t সময় অন্তে একটি প্রক্ষেপক এর বিচরণে পথের P বিন্দুতে পৌঁছে। আরও t' সময় শেষে তা P বিন্দু হতে নিক্ষেপণ বিন্দুর আনুভূমিক সমতলে ফিরে আসে। দেখাও যে, P বিন্দুর উচ্চতা $h = \frac{1}{2} g t t'$ [দি. ১২; চা. ০৯]
6. (i) ভূমিতে পতিত হয়ে একটি বোমা ফেটে এর কণাগুলো u বেগে চতুর্দিকে ছুটতে থাকে। ভূমির যে অংশ জুড়ে কণাগুলি ছড়িয়ে পড়ে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
- (ii) একটি ক্রিকেটবলকে 28 মি./সে. বেগে আঘাত করলে তা 40 মিটার দূরে H মিটার উঁচু একটি দেয়াল আনুভূমিকভাবে স্পর্শ করে যায়। দেয়ালের উচ্চতা H এবং নিক্ষেপণ কোণ নির্ণয় কর। ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$). [চুয়েট ০৩-০৪]
- (iii) একটি বোমা বিস্ফোরিত হওয়া মাত্র কণাগুলি 128 ft/sec গতিবেগে চারিদিকে ছুটতে থাকে। দেখাও যে, 384 ft. আনুভূমিক দূরত্বে অবস্থিত কোনো বিন্দুতে এর কণাগুলি 4 sec. অন্তর পড়বে। [বুয়েট ৯৯-০০]
7. (i) 2.25 মিটার উচ্চতা হতে একজন খেলোয়াড় একটি টেনিস বল আনুভূমিকে নিক্ষেপ করে এবং তা খেলোয়াড় হতে 15 মিটার দূরে ভূমিকে আঘাত করে। বলটি যদি খেলোয়াড় হতে 10 মিটার দূরে একটি জালকে স্পর্শ করে যায়, তা হলে জালটির উচ্চতা নির্ণয় কর।
- (ii) কোনো পাহাড়ের শীর্ষদেশ হতে ভূমির সমান্তরালে 50 মি./সে. বেগে নিক্ষিপ্ত একটি পাথর এর পাদদেশ হতে 350 মিটার দূরে ভূমিতে পতিত হয়। পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় কর।
- (iii) একটি উঁচু টাওয়ারের শীর্ষ হতে একটি বল 21 m/s গতিবেগে আনুভূমিক দিকে নিক্ষেপ করা হলো। বলটি টাওয়ারের পাদদেশ হতে 84 m দূরে ভূমিতে আঘাত করলে টাওয়ারের উচ্চতা কত? [বুয়েট ১২-১৩]
8. (i) নির্দিষ্ট বেগে একটি গোলা ছোঁড়া হল। গোলাটি 9.8 মিটার দূরে এবং 2.45 মিটার উচ্চ একটি খাড়া দেওয়াল কোনো রকমে আনুভূমিক ভাবে অতিক্রম করল। গোলার নিক্ষেপণ বেগ ও দিক নির্ণয় কর। [চ. ০৬]
- (ii) একটি বুলেট 50 গজ দূরবর্তী এবং 75 ফুট উচ্চ একটি খাড়া দেওয়াল কোনো রকমে ভূমির সমান্তরালে অতিক্রম করে। বুলেটটির প্রক্ষেপ বেগ ও দিক নির্ণয় কর। [চ. ০৩, বুয়েট ১৩-১৪, চুয়েট ১৪-১৫]
- (iii) একটি বুলেট 39.2 মিটার দূরে অবস্থিত 19.6 মিটার উচ্চ একটি দেওয়াল স্পর্শ করে আনুভূমিকভাবে চলে যায়। বুলেটের প্রক্ষেপণ বেগের মান ও দিক নির্ণয় কর। [চুয়েট ০৫-০৬]
- (iv) ভূমি থেকে নিক্ষিপ্ত একটি প্রক্ষেপক 4 সেকেন্ড পরে নিক্ষেপণ বিন্দু হতে 58.8 মিটার দূরে ভূমিতে আঘাত করে। নিক্ষেপণ বেগের মান এবং সর্বাধিক উচ্চতা নির্ণয় কর। [সংকেত $R = u \cos \alpha \cdot t$] [বুয়েট ১৩-১৪]
9. (i) 80 মিটার উঁচু একটি মিনারের চূড়া হতে একখণ্ড পাথর 128 মিটার/সেকেন্ড বেগে এবং আনুভূমিক তলের সাথে 30° কোণে নিক্ষেপ করা হল। উহা মিনারের পাদদেশ হতে কত দূরে ভূমিতে পড়বে? [চা. ০৬; কু. ০৮]

(ii) একটি বলকে ভূমি হতে 100 ft/sec. বেগে এবং আনুভূমিকের সাথে $\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ কোণে শূন্যে নিক্ষেপ করা হলো। 2 sec. পরে নিক্ষেপণ বিন্দু হতে বলটির দূরত্ব নির্ণয় কর। [বুয়েট ৯৫-৯৬]

10. (i) ভূমি থেকে শূন্যে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তু 100 মিটার দূরে ভূমিতে ফিরে আসে এবং এর বিচরণপথের সর্বাধিক উচ্চতা $18\frac{3}{4}$ মিটার হলে, এর বিচরণকাল এবং নিক্ষেপণ কোণ নির্ণয় কর।

(ii) একটি ক্রিকেট বলকে ভূমি থেকে নিক্ষেপ করা হলে এটি 100 গজ দূরে ভূমিতে ফিরে আসে। এর বিচরণ পথের সর্বাধিক উচ্চতা $56\frac{1}{4}$ ফুট হলে এর বিচরণকাল ও প্রক্ষেপণ কোণের মান নির্ণয় কর।

[কু. ০৭; চ. ২০১৩]

11. (i) একই বেগে নিক্ষিপ্ত কোনো বস্তুর একই আনুভূমিক পাল্লা R এর জন্য বিচরণকাল t_1, t_2 হয় তবে প্রমাণ কর যে, $R = \frac{1}{2} g t_1 t_2$ [ঢা. ০৭; স. ব. ২০১৩]

(ii) একই গতিতে নিক্ষিপ্ত একটি প্রক্ষেপকের নির্দিষ্ট পাল্লা R এর জন্য দুইটি বিচরণ পথের সর্বাধিক উচ্চতা h, \bar{h} হলে দেখাও যে, $R = 4\sqrt{h\bar{h}}$ [ঢা. কু. ০৫, ব. ০৬; চ. ০৯; রা. য. ১৪, ঢা. ১৬, বুয়েট ০১-০২]

12. একটি বস্তু u বেগে এবং আনুভূমিকের সাথে α কোণে নিক্ষেপ করা হল। আনুভূমিক পাল্লা R , সর্বাধিক উচ্চতা H এবং বিচরণকাল T হলে, প্রমাণ কর যে, (i) $16 gH^2 - 8u^2 H + gR^2 = 0$ [ঢা. ১০]

$$(ii) g^2 T^4 - 4T^2 u^2 + 4R^2 = 0$$

13. ভূমি থেকে α ও β কোণে নিক্ষিপ্ত একটি গোলা সমতলের উপরস্থ লক্ষ্যবস্তুর যথাক্রমে a মিটার আগে এবং b মিটার দূরে পড়ে। একই বেগে এবং θ কোণে নিক্ষেপ করলে যদি গোলা লক্ষ্যবস্তুর উপর পড়ে, তবে দেখাও যে, $\theta = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{a \sin 2\beta + b \sin 2\alpha}{a + b} \right)$

14. একটি বস্তুকে আনুভূমিকের সাথে 60° কোণে নিক্ষেপ করা হলে তা 20 মিটার ব্যবধানে অবস্থিত 10 মিটার উঁচু দুইটি দেওয়ালের ঠিক উপর দিয়ে যায়। বস্তুটির পাল্লা নির্ণয় কর।

15. একটি বস্তুকে ভূমি থেকে α কোণে এমনভাবে নিক্ষেপ করা হল যেন তা $2a$ ব্যবধানে অবস্থিত a পরিমাণ উঁচু দুইটি দেওয়ালের ঠিক উপর দিয়ে অতিক্রম করে। প্রমাণ কর বস্তুটির পাল্লা $R = 2a \cot \frac{\alpha}{2}$.

[সি. ০৩, বুয়েট ৯৬-৯৭]

16. একজন ব্যাটসম্যান 2 মিটার উঁচু থেকে 28.4 মি./সে. বেগে আনুভূমিকের সাথে 30° কোণে একটি ক্রিকেট বলকে আঘাত করল। একজন ফিল্ডার বলটিকে 50 সে.মি. উঁচুতে ধরে ফেলল। ব্যাটসম্যান থেকে ফিল্ডারের দূরত্ব নির্ণয় কর।

17. (i) একজন খেলোয়াড় 3.5 মিটার উচ্চতা হতে ভূমির সাথে 30° কোণে 9.8 মিটার/সেকেন্ড বেগে একটি বল নিক্ষেপ করে এবং অপর একজন খেলোয়াড় 2.1 মিটার উচ্চতায় বলটি ধরে ফেলে। খেলোয়াড় দু'জন পরস্পর কত দূরে ছিল?

[সি. ০৫, য. ১০]

(ii) দুই মিটার উপর হতে 50 মি./সে. বেগে এবং আনুভূমিক তলের সাথে 30° কোণে নিক্ষিপ্ত একটি ক্রিকেট বল ভূমি হতে 1 মিটার উপর থেকে একজন খেলোয়াড় ধরে ফেলে। খেলোয়াড়দ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর।

[রা. ২০১২]

18. (i) দেখাও যে নির্দিষ্ট বেগে শূন্যে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতিপথের সমীকরণ $y = x \tan \alpha \left(1 - \frac{x}{R} \right)$ যখন নিক্ষেপণ কোণ α এবং পাল্লা R .

[ঢা. ব. সি. ১২; রা. ১৩, ব. চ. ০৭, ঢা. ০৮]

- (ii) কোনো প্রক্ষিপ্ত বস্তু তার প্রক্ষেপ বিন্দু হতে x আনুভূমিক দূরত্বে এবং y খাড়া দূরত্বে অবস্থিত কোনো বিন্দু অতিক্রম করে। বস্তুটির আনুভূমিক পাল্লা R হলে দেখাও যে, প্রক্ষেপ কোণ $\tan^{-1} \frac{y}{x} = \frac{R}{R-x}$ [য. ০৮]
19. একটি রাইফেলের পাল্লা 1000 মিটার। চন্দ্রের মাধ্যাকর্ষণ শক্তি পৃথিবীর মাধ্যাকর্ষণ শক্তির $\frac{1}{6}$ হলে একইরূপ অবস্থায় চন্দ্র পৃষ্ঠে রাইফেলের পাল্লা কত হবে? [কু. ২০০২]
20. (i) দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে দুইটি বস্তু একই বেগে একই সাথে কোনো উল্লম্ব তলে যথাক্রমে α, β কোণে শূন্যে নিক্ষেপ করা হলে, প্রমাণ কর যে, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ।
(ii) u ও v আদিবেগে এবং α ও β ($\alpha > \beta$) কোণে দুইটি বস্তু নিক্ষিপ্ত হল। এরা যথাক্রমে t_1 ও t_2 সময়ে একই আনুভূমিক দূরত্ব অতিক্রম করলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{t_1^2 - t_2^2}{t_1^2 + t_2^2} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$ [কু. ২০১০]
21. ভূমির সাথে α কোণে এবং u বেগে একটি বস্তু শূন্যে নিক্ষিপ্ত হল। যদি কণাটির পাল্লা R এবং বিচরণ কাল T হয়, তাহলে দেখাও যে, $gT^2 = 2R \tan \alpha$ ।
22. একটি ক্রিকেট বলকে আঘাত করলে তা নিক্ষেপ বিন্দু থেকে যথাক্রমে b এবং a দূরত্বে অবস্থিত a এবং b উচ্চতাবিশিষ্ট দুইটি দেওয়াল কোনোরকমে অতিক্রম করে। দেখাও যে, এর পাল্লা $R = \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$ কু. ১০
23. একটি বৃত্তাকার বেসিনের কেন্দ্রে অবস্থিত 2.5 মিটার উচ্চ একটি ফোয়ারা থেকে 2 ms^{-1} বেগে জল নির্গত হচ্ছে। বেসিনের ব্যাস কত হলে জলকণা বেসিনের বাইরে পড়বে না?
24. একটি খাড়া দেয়ালের পাদদেশ থেকে ভূমি বরাবর 147 m. দূরত্ব হতে একটি বস্তু 49 m/s. বেগে আনুভূমিকের সাথে 60° কোণে নিক্ষেপ করা হলো। কত উচ্চতায় বস্তুটি দেয়ালে আঘাত করবে? [বুয়েট ১০-১১]
25. u আদিবেগে ও α কোণে একটি প্রক্ষেপক শূন্যে নিক্ষিপ্ত হল। দেখাও যে, প্রক্ষেপকটি t সময়ে আদি নিক্ষেপণ বেগের সাথে সমকোণে চললে, $t = \frac{u}{g \sin \alpha}$ হবে।
26. আনুভূমিকের সাথে 30° কোণে এবং 39.2 মি./সে. বেগে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তু কতক্ষণ পর তার আদি নিক্ষেপণ দিকের সাথে লম্বভাবে চলবে? তখন বস্তুটির বেগ কত? চ. ২০০৭

উত্তরমালা 9.5

1. (i) 38.97 মিটার (প্রায়), 5.625 মিটার; অবস্থান $(x, y) = (36.37, 1.4)$, 20.34 মি./সে.; (ii) 4 সেকেন্ড। (iii) 35 মি./সে., 28 মি./সে. 2.14 সেকেন্ড (প্রায়)। (iv) 2 সেকেন্ড, 109.12 ফুট (প্রায়)। 2.(i) 160 মিটার, 5.71, সে.; (ii) 122.5 মিটার, 202.03 মি./সে. (iii) 16 মি./সে. (প্রায়) 3. 2218.05 মিটার। 6.(i) $\pi u^4/g^2$ বর্গ একক। (ii) $H = 20 \text{ m}$, 45° । 7. (i) 1.25 মিটার। (ii) 240.1 মিটার। (iii) 78.4 মিটার 8. (i) 15.49 মি./সে. (প্রায়), $\tan^{-1} \frac{1}{2}$ (ii) $40\sqrt{6}$ ফু./সে., 45° . (iii) 27.73 মি./সে., 45° (iv) 24.5 মি./সে. 19.6 মিটার 9.(i) 1575.20 মিটার। (ii) 153.67 ফুট। 10.(i) 3.9 সে.; $\tan^{-1} \frac{3}{4}$. (ii) 3.75 সে, $\tan^{-1} 3/4$. 14. $20\sqrt{3}$ মিটার, 16. 73.78 মিটার (প্রায়); 17.(i) 10.44 মিটার (প্রায়); 19.(i) 6000 মিটার (ii) 222.56 m, 23. 2.96 মিটার। 24. 77.21 মিটার। 26. 8 sec. এবং বেগ $v = 67.89$ মি./সে. (প্রায়)।

প্রশ্নমালা 10.1

1. বিস্তার কি? গড় ব্যবধান ও পরিমিত ব্যবধানের সংজ্ঞা লিখ।
2. প্রথম 7টি স্বাভাবিক সংখ্যার গড় ও ভেদাজক নির্ণয় কর।
3. বিস্তার পরিমাপ বলতে কি বুঝ? বিস্তার পরিমাপের প্রয়োজনীয়তা বর্ণনা কর।
4. (i) নিম্নে ছাদশ শ্রেণির 60 জন ছাত্রের গণিতে প্রাপ্ত নম্বর দেওয়া হলো। প্রাপ্ত নম্বরের গড় ব্যবধান ও পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর।

নম্বর	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100
ছাত্র	10	20	15	10	5

- (ii) নিচে একটি গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। গণসংখ্যা নিবেশনের গড় ব্যবধান ও পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর। [য. ২০১৫]

শ্রেণিব্যাপ্তি	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800
গণসংখ্যা f	12	18	36	24	10	8

5. নিম্নের গণসংখ্যা সারণী থেকে পরিমিত ব্যবধান গড় ব্যবধান ও নির্ণয় কর :

x :	2	3	4	5	6
f :	6	14	12	10	8

6. নিচের তথ্যসারি থেকে প্রমাণ কর যে, পরিমিত ব্যবধান গড় ব্যবধান অপেক্ষা বড় :

15	18	24	35	40	42	54	60
----	----	----	----	----	----	----	----

7. (i) নিচের সংখ্যাগুলির পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাজক নির্ণয় কর।

6, 10, 9, 12, 21, 24, 25, 15, 16, 22

[কু. ২০১৫]

- (ii) প্রদত্ত উপাত্তগুলির পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর : 16, 12, 14, 15, 18

[চ. মা. ১৫]

- (iii) নিচে প্রদত্ত উপাত্তগুলির পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাজক নির্ণয় কর : 2, 3, 7, 4, 9.

[ঢা. ১৫]

- (iv) গাণিতিক গড় ব্যবহার করে 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 6, 11, 8 সংখ্যাগুলির গড় ব্যবধান ও পরিমিত নির্ণয় কর।

[সি. ১৬]

8. (i) নিচের তথ্য সারি হতে পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাজক নির্ণয় কর।

[ঢা. রা. ১৬]

শ্রেণি ব্যাপ্তি	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
গণসংখ্যা	7	10	15	13	9	6

- (ii) নিচের গণসংখ্যা নিবেশনের ভেদাজক ও বিভেদাজক নির্ণয় কর :

[দি. ১৬]

শ্রেণি	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
গণসংখ্যা	3	5	10	8	2

9. নিচের তথ্যসারি হতে পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাজক নির্ণয় কর।

[য. ২০১৬]

দৈনিক মজুরী (টাঃ)	50 - 55	55 - 60	60 - 65	65 - 70	70 - 75	75 - 80
কর্মচারীর সংখ্যা	7	14	22	36	15	6

10. নিম্নে একটি কোম্পানির এক বছরের শেয়ারমূল্য দেয়া হলো। পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর।

কোম্পানির শেয়ার মূল্য (টাকায়) : 315, 320, 350, 340, 360, 365, 355, 370, 372, 378, 410, 390.
সংকেত : $d = x - a = (x - 360)$ প্রয়োগ কর।

উত্তরমালা

2. $\bar{x} = 4, \sigma^2 = 4,$ 4. (i) $\sigma = 11.78, M.D. = 9.96$ (ii) $M.D. = 107.2, \sigma = 134.64$
5. $\sigma = 1.26, M.D. = 1.04$ 6. $\sigma = 15.26, M.D. = 13.$ 7. (i) $\sigma = 6.38, \sigma^2 = 40.8,$ (ii) $\sigma = 2.$
- (iii) $\sigma = 2.6, \sigma^2 = 6.8,$ (iv) $M.D. = 1.8, \sigma = 2.107,$ 8. (i) $\sigma = 7.38, \sigma^2 = 54.5,$
- (ii) $\sigma^2 = 29.43, \%C.V = 30.68\%.$ 9. $\sigma = 5.83, \sigma^2 = 33.98$ 10. $\sigma = 26.04.$

প্রশ্নমালা 10.2

1. সম্ভাবনার সংজ্ঞা দাও ও এর গাণিতিক রূপ দেখাও। য. ২০০৩
2. বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাবনার সংযোগসূত্র লিখ এবং প্রমাণ কর। [কু. রা. ০৩, টা. কু. য. রা. ০৪]
3. কোনো সমীক্ষায় দেখা গেল 100 জন পরীক্ষার্থীর মধ্যে বাংলায় 40 জন, ইংরেজীতে 35 জন এবং গণিতে 20 জন পাশ করেছে। বাংলা ও ইংরেজীতে 17 জন, ইংরেজি ও গণিতে 7 জন, গণিত ও বাংলায় 6 জন পাশ করেছে এবং তিন বিষয়ে পাশ করেছে 5 জন। দৈব চয়নে একজন ছাত্রকে বাছাই করলে তার তিন বিষয়ে ফেলের সম্ভাবনা কত? [টা. ২০০২]
4. একটি পাত্রে 2টি সাদা এবং 3টি কালো বল ও অপর পাত্রে 3টি সাদা এবং 4টি কালো বল আছে। পাত্র দুইটি হতে একটি করে বল উঠানো হলে (i) বলগুলি একই রঙের, (ii) ভিন্ন রঙের হবার সম্ভাবনা কত?
5. একটি সুষম মুদ্রা পর পর 3 বার টস করা হল। প্রতিটি টসেই প্রথমে হেড পাওয়ার শর্তে 2 বা ততোধিক হেড পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। কোনো শর্ত আরোপ না করা হলে 2 বা ততোধিক হেড পাওয়ার সম্ভাবনা কত? [বুয়েট '১১-'১২]
6. একটি ঝুড়িতে 5টি কালো এবং 4টি সাদা বল আছে। একটি বালক নিরপেক্ষভাবে তিনটি বল উঠালো। 3টি বলই কালো হবার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। [চ. ২০০৫, ২০১৩; আলিম ২০১০; য. ২০১২]
7. 52 খানা তাসের প্যাকেট হতে 1টি তাস দৈবভাবে উঠানো হল। (i) তাসটি লাল টেকা হওয়ার সম্ভাবনা কত? (ii) তাসটি লাল অথবা টেকা হওয়ার সম্ভাবনা কত? [য. ০২, রা. ০৮, য. ১৩, বুয়েট ০৭-০৮]

৪. (i) ১২টি ভাসের প্যাকেট হতে ৩টি ভাস বেঁধে রাখা হলে তিনটি ভাসই রাজা হবার সম্ভাবনা কত?
 (ii) এক প্যাকেট ভাস হতে হরতনের একটি রাজা বেঁধে রাখা হল। বাকি ভাসগুলি ভালভাবে শাফল করা হল। পরবর্তী ভাসটি হরতন হবার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। রা. ২০০১
৯. (i) যদি $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$, $P(A) = \frac{1}{2}$ হয়, তবে $P(B)$ এবং $P(B^c)$ এর মান নির্ণয় কর। ঢা. ২০০৪, ২০০৬, চ. ২০০৯, রা. ১০, আলিম '১১, সি. ১৪
 (ii) যদি $P(AB) = 0.48$ এবং $P(A) = 0.6$ হয় তবে $P(B)$ এর মান কত হলে A ও B স্বাধীন হবে?
১০. (i) $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$, A ও B স্বাধীন হলে $P(A \cap B)$ এবং $P(A \cup B)$ এর মান নির্ণয় কর।
 [টেক্সটাইল-১১, বুয়েট ০৬-০৭, আলিম ০৪, ১৩, ঢা. সি. ০৮, দি. ০৯, ১২, ১৬, ঢা. সি. ১০, চ. কু. ১২, ১৬, সি. ১৬]
 (ii) $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ এবং $P(B|A) = \frac{3}{5}$ হলে, ক. $P(A \cap B)$ খ. $P(A|B)$ এবং গ. $P(A \cup B)$ এর মান নির্ণয় কর। চ. ২০১০
 (iii) $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ এবং $P(A|B) = \frac{3}{8}$ হলে, $P(A \cap B)$, $P(B|A)$ এবং $P(A \cup B)$ নির্ণয় কর। [চ. ১০, বুয়েট ০৬-০৭]
১১. (i) ২০০ জন পরীক্ষার্থীর ৪০ জন গণিতে, ২০ জন পরিসংখ্যানে ফেল করে। উভয় বিষয়ে ১০ জন ফেল করে। একজন পরীক্ষার্থী দৈবভাবে নেয়া হল। সে গণিতে ফেল কিন্তু পরিসংখ্যানে পাস করার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। [আলিম ০৫, ০৭, ঢা. সি. ০৫, চ. ০৮, কু. রা. ২০১২; দি. ২০১৪, টেক্সটাইল ০৩-০৪]
 (ii) একটি কলেজের একাদশ শ্রেণির ৪০ জন ছাত্রের মধ্যে ২০ জন ফুটবল খেলে, ২৫ জন ক্রিকেট খেলে এবং ১০ জন ফুটবল ও ক্রিকেট খেলে। তাদের মধ্য থেকে একজনকে দৈবায়িত উপায়ে নির্বাচন করা হল।
 (a) যদি ছেলেটি ফুটবল খেলে তবে তার ক্রিকেট খেলার সম্ভাবনা কত? [য. ২০০৬, দি. ১১]
 (b) যদি ছেলেটি ক্রিকেট খেলে তবে তার ফুটবল খেলার সম্ভাবনা কত? [বুয়েট ০৮-০৯]
১২. একটি পরীক্ষায় ৩০% ছাত্র গণিতে এবং ২০% ছাত্র রসায়নে এবং ১০% ছাত্র উভয় বিষয়ে ফেল করে। দৈবভাবে একজন ছাত্র নির্বাচন করলে (i) ছাত্রটি গণিতে ফেল করার সম্ভাবনা কত? যখন জানা আছে ছাত্রটি রসায়নে ফেল করেছে (ii) ছাত্রটির একটি মাত্র বিষয়ে ফেল করার সম্ভাবনা কত?
১৩. দুইটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে তাদের নমুনা ক্ষেত্রটি তৈরি কর এবং দুইটি ৬ উঠার সম্ভাবনা কত তা নির্ণয় কর। আলিম ২০০৬, ১০, ১৪; রা. ০৭, চ. ০৮, ১১; কু. ১০, ১৩; রা. য. ১৪]
 ১ম. ছক্কার পিঠে x এবং ২য় ছক্কার পিঠে y উঠলে $x + y = 7$ হবার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।
১৪. একটি মুদ্রা তিন বার টস করা হল। পর্যায়ক্রমে মুদ্রাটির হেড এবং টেইল পাবার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।
১৫. একটি বাক্সে ১৫টি সাদা ও ১০টি কালো রঙের মার্বেল আছে। একটি বালক যেমন খুশি টানলে প্রতিবারে দুইটি (i) ভিন্ন রঙের (ii) একই রঙের মার্বেল হওয়ার সম্ভাবনা কত। ঢা. ২০০৮
১৬. একজন ছাত্রের বাংলা পরীক্ষায় পাস করার সম্ভাবনা $\frac{2}{3}$ বাংলা ও অঙ্ক দুইটিতেই পাসের সম্ভাবনা $\frac{14}{45}$ এবং দুইটির যেকোন একটিতে পাসের সম্ভাবনা $\frac{4}{5}$ হলে, তার অঙ্ক পাসের সম্ভাবনা কত? সি. ২০১১; ঢা. ১৪
১৭. দুইজন ছাত্রের একটি অঙ্কের সামাধান করতে পারার সম্ভাবনা যথাক্রমে $\frac{1}{3}$ এবং $\frac{1}{4}$ । তারা একত্রে অঙ্কটি করার চেষ্টা করলে অঙ্কটির সমাধান করার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। রা. ০৯, য. ১০, ১৬, ঢা. সি. ২০১৩
১৮. (i) একটি বাক্সে ৪টি লাল, ৫টি নীল এবং ৭টি সাদার রঙের বল আছে। দৈবচয়নে একটি বলের লাল বা সাদা হবার সম্ভাবনা কত? ব. ০৩, আলিম ২০১০

(ii) একটি বাস্কে বিভিন্ন আকারের 6টি সাদা, 7টি লাল এবং 9টি কালো বল আছে। এলোমেলোভাবে 3টি বল তুলে নেয়া হল। বলগুলি লাল বা সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত? [চ. ১০, কু. ১১]

19. একটি ব্যাগে 5টি সাদা, 7টি লাল এবং 8টি কালো বল আছে। যদি বিনিময় না করে একটি একটি করে পর পর চারটি বল তুলে নেয়া হয় তবে, সবগুলি বল সাদা হবার সম্ভাবনা কত?

20. দুইটি থলির একটিতে 5টি লাল এবং 3টি কালো বল আছে। অপর থলিতে 4টি লাল এবং 5টি কালো বল আছে। সমসম্ভব উপায়ে একটি থলি নির্বাচন করা হল এবং তা থেকে দুইটি বল তোলা হলে একটি লাল ও একটি কালো হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। [রা. ২০১১]

21. একটি থলিতে 3টি সাদা এবং 2টি কালো বল আছে। অপর একটি থলিতে 2টি সাদা এবং 5টি কালো বল আছে। নিরপেক্ষভাবে প্রত্যেক থলি হতে একটি করে বল তোলা হলো। দুইটি বলের মধ্যে অন্ততঃ একটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। [চ. ০২, কু. ২০০৯; রা. ১৩]

22. একটি ব্যাগে 4টি সাদা এবং 5টি কালো বল আছে। একজন লোক নিরপেক্ষভাবে 3টি বল উত্তোলন করলেন। 3টি বলই কালো হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। [কু. ২০০৮, ঢা. ২০১১]

23. একটি বাস্কে 5টি লাল ও 4টি সাদা ক্রিকেট বল এবং অপর একটি বাস্কে 3টি লাল ও 6টি সাদা ক্রিকেট বল আছে। প্রত্যেক বাস্ক হতে একটি করে বল উঠান হলে দুইটি বলের মধ্যে কমপক্ষে একটি লাল হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। [ঢা. ২০০২, ২০১২; কু. ২০০৮]

24. একজন প্রার্থী একটি শিল্প প্রতিষ্ঠানের তিনটি পদে আবেদন করে। প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদে প্রার্থীর সংখ্যা যথাক্রমে 3, 4 এবং 2। ঐ প্রার্থীর কমপক্ষে একটি পদে চাকুরী পাওয়ার সম্ভাবনা কত? [কু. ২০০২]

25. 10 থেকে 30 পর্যন্ত সংখ্যা হতে যে-কোনো একটিকে ইচ্ছামত নিলে সেই সংখ্যাটি মৌলিক, অথবা 5 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। [কুয়েট ০৮-০৯, ব. ২০১১, কু. ১৪]

26. একটি বাস্কে সমআকৃতির 5টি নীল ও 4টি কালো বল আছে। আর একটি অনুরূপ বাস্কে সমআকৃতির 4টি নীল এবং 8টি কালো বল আছে। একটি বাস্ক লটারী করে নির্বাচন করা হলো এবং সেটা থেকে একটি বল তোলা হলো। বলটি নীল হবার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। যদি বলটি নীল হয়, তাহলে প্রথম বাস্কটি যে নির্বাচিত হয়েছে তার সম্ভাবনা কত? [বুয়েট ১০-১১, ব. ২০০৬]

27. একটি ব্যাগে 1টি টাকা ও 3টি পয়সা, দ্বিতীয় ব্যাগে 2টি টাকা ও 4টি পয়সা এবং তৃতীয় ব্যাগে 3টি টাকা ও 1টি পয়সা আছে। লটারির মাধ্যমে একটি ব্যাগ বাছাই করে একটি মুদ্রা উত্তোলন করলে সেটি টাকা হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। [য. ২০০৩]

28. একটি পাত্রে 6টি লাল 5টি সবুজ এবং 4টি সাদা বল আছে। 3টি বল দৈবভাবে নেয়া হল। (i) বলগুলি ভিন্ন রঙের (ii) বলগুলি একই রঙের (iii) দুইটি লাল বল [টেস্টটাইল ০০-০১] (iv) 3টি সবুজ বল হবার সম্ভাবনা নিণয় কর। (v) অন্তত 2টি লাল বল হওয়ার সম্ভাবনা কত? [কুয়েট ০৩-০৪]

29. দুইটি বাস্কের প্রথমটিতে 4টি সাদা ও 3টি লাল এবং দ্বিতীয়তে 3টি সাদা ও 7টি লাল বল আছে। সমসম্ভব উপায়ে একটি বাস্ক নির্বাচন করা হল। ঐ বাস্ক হতে একটি বল টানা হলে, বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। [য. চ. ২০০৫, ঢা. ২০০৯]

30. কোনো জরিপে দেখা গেল 80% লোক ইন্ডেফাক পড়ে, 70% লোক জনকণ্ঠ পড়ে এবং 60% লোক উভয় পত্রিকা পড়ে। নিরপেক্ষভাবে বাছাই করলে একজন লোকের ইন্ডেফাক অথবা জনকণ্ঠ পড়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। [য. চ. ২০০৫, ঢা. ২০০৯]

31. একটি বাস্কে 6টি সাদা ও 5টি লাল বল আছে। বাস্ক থেকে দৈব পদ্ধতিতে 1টি করে 2টি বল তুলে নেয়া হল। দুইটি বলই সাদা হবার সম্ভাবনা নির্ণয় কর যখন প্রথমে তোলা বলটি দ্বিতীয়টি তোলার আগে (i) প্রতিস্থাপিত হয় [বুয়েট ০৪-০৫] (ii) প্রতিস্থাপিত হয় না। [য. ২০০১]

32. একটি ব্যাগে 7টি লাল এবং 5টি সাদা বল আছে। নিরপেক্ষভাবে 4টি বল তোলা হলে তাদের মধ্যে 2টি লাল এবং 2টি সাদা বল হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। [ব. ২০১২, কু. ২০১৬]
33. একটি ব্যাগে 6টি লাল এবং 4টি হলুদ বল আছে। ঐ ব্যাগ হতে দৈবভাবে পরপর 2টি বল নেয়া হলো। প্রথম বলটি নেয়ার পর তা ব্যাগে ফেরত দেয়া হলো না। যদি প্রথমবারে নেয়া বলটি লাল হয়, তবে দ্বিতীয় বলটি লাল হবার শর্তাধীন সম্ভাবনা কত? [টেক্সটাইল ০৮-০৯]
34. একটি ব্যাগে 6টি লাল, 4টি সাদা এবং 5টি নীল বল আছে। দৈবচয়নে ক্রমাগতভাবে তিনটি বল ব্যাগ থেকে নেয়া হলে লাল, সাদা, নীল অথবা নীল, সাদা, লাল বল ক্রমানুসারে পাবার সম্ভাবনা বের কর, যখন প্রতিটি বল ব্যাগে পুনরায় রাখা না হয়। [বুয়েট ০৬-০৭]
35. তিনটি দল I, II এবং III এ বিভক্ত শিশুদের দলে যথাক্রমে 3 জন বালিকা ও 1 জন বালক, 2 জন বালিকা ও 2 জন বালক এবং 1 জন বালিকা ও 3 জন বালক বিদ্যমান আছে। প্রতিটি দল হতে নিরপেক্ষভাবে একজন করে নির্বাচিত করা হলে তিনজনের একটি বাছাইয়ে 1 জন বালিকা ও 2 জন বালক থাকার সম্ভাবনা কত? [বুয়েট ০৭-০৮]
- 36.(i) পুনরাবৃত্তি না ঘটিয়ে 2, 4, 7, 9, 3, 8 সংখ্যাগুলি ব্যবহার করে দুই অঙ্ক বিশিষ্ট একটি সংখ্যা বানানো হবে। সংখ্যাটির জোড় হবার সম্ভাবনা কত? [বুয়েট ১০-১১]
- (ii) 7টি সাদা 3টি কালো বল একটি সারিতে সাজানো হলো। দুইটি কালো বল পাশাপাশি না আসার সম্ভাবনা কত? [বুয়েট ১১-১২]
37. একজন দোকানদার প্রত্যেক খরিদারের নিকট শতকরা 70 ভাগ সুযোগে দ্রব্য বিক্রি করে। পর্যায়ক্রমিক খরিদারের আচরণ পারস্পরিক প্রভাবমুক্ত। যদি A এবং B দুইজন খরিদার দোকানে প্রবেশ করে, তাহলে A অথবা B নিকট বিক্রেতার দ্রব্য বিক্রয়ের সম্ভাবনা কত? [বুয়েট ১২-১৩]
38. একটি ছক্কা দুইবার চাল দেয়া হলো। প্রথম চলে 4, 5 অথবা 6 এবং দ্বিতীয় চলে 1, 2, 3 অথবা 4 ওঠার সম্ভাবনা কত? [বুয়েট ০৯-১০]

উত্তরমালা-10.2

3. $\frac{3}{10}$ 4. (i) $\frac{18}{35}$ (ii) $\frac{17}{35}$ 5. $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ 6. $\frac{5}{42}$ 7. (i) $\frac{1}{26}$ (ii) $\frac{7}{13}$ 8. (i) $\frac{1}{5525}$ (ii) $\frac{4}{17}$
9. (i) $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$ (ii) 0.8 10. (i) $\frac{1}{4}, \frac{5}{6}$ (ii) (ক) $\frac{3}{10}$, (খ) $\frac{9}{10}$ (গ) $\frac{8}{15}$ (iii) $\frac{3}{40}, \frac{3}{20}, \frac{5}{8}$
11. (i) $\frac{3}{20}$ (ii) (a) $\frac{1}{2}$, (b) $\frac{2}{5}$ 12. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{2}{5}$ 13. $\frac{1}{36}, \frac{1}{6}$ 14. $\frac{1}{8}$ 15. (i) $\frac{1}{2}$, (ii) $\frac{1}{2}$ 16. $\frac{4}{9}$
17. $\frac{1}{2}$ 18. (i) $\frac{11}{16}$, (ii) $\frac{11}{308}$ 19. $\frac{1}{969}$ 20. $\frac{275}{504}$ 21. $\frac{5}{7}$ 22. $\frac{5}{42}$ 23. $\frac{19}{27}$ 24. $\frac{3}{4}$ 25. $\frac{11}{21}$
26. $\frac{4}{9}, \frac{5}{8}$ 27. $\frac{4}{9}$ 28. (i) $\frac{24}{91}$ (ii) $\frac{34}{455}$ (iii) $\frac{27}{91}$ (iv) $\frac{2}{91}$ (v) $\frac{31}{91}$ 29. $\frac{61}{140}$ 30. $\frac{9}{10}$
31. (i) $\frac{36}{121}$ (ii) $\frac{3}{11}$ 32. $\frac{14}{33}$ 33. $\frac{5}{9}$ 34. $\frac{8}{91}$ 35. $\frac{13}{32}$ 36. (i) $\frac{1}{2}$, (ii) $\frac{7}{15}$ 37. $\frac{91}{100}$ 38. $\frac{1}{3}$



প্রতিদিনের চাকুরীর মার্কুলার পেতে [এখানে ক্লিক করুন](#)

প্রতি মাসের কারেন্ট অ্যাফেয়ার্স পিডিএফ [এখানে ক্লিক করুন](#)

চাকুরীর প্রয়োজনীয় সকল পিডিএফ বই [এখানে ক্লিক করুন](#)

বিসিএম এর প্রয়োজনীয় পিডিএফ বই [এখানে ক্লিক করুন](#)

প্রতি সপ্তাহের চাকুরী পত্রিকা ডাউনলোড [এখানে ক্লিক করুন](#)

সকল নিয়োগ পরীক্ষার প্রশ্ন সমাধান [এখানে ক্লিক করুন](#)

বিডিনিয়োগ.কম দেশের মেরা পিডিএফ কালেকশন

SSC এর প্রয়োজনীয় সকল পিডিএফ বই [এখানে ক্লিক করুন](#)

HSC এর প্রয়োজনীয় সকল পিডিএফ বই [এখানে ক্লিক করুন](#)

বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তির সকল পিডিএফ বই [এখানে ক্লিক করুন](#)

সকল ধরনের **মাজেশন** ডাউনলোড [এখানে ক্লিক করুন](#)

