লাল-সবুজে দাগানো

TEXT BOOK

পদার্থবিজ্ঞান

১ম পত্র

উন্মেষ

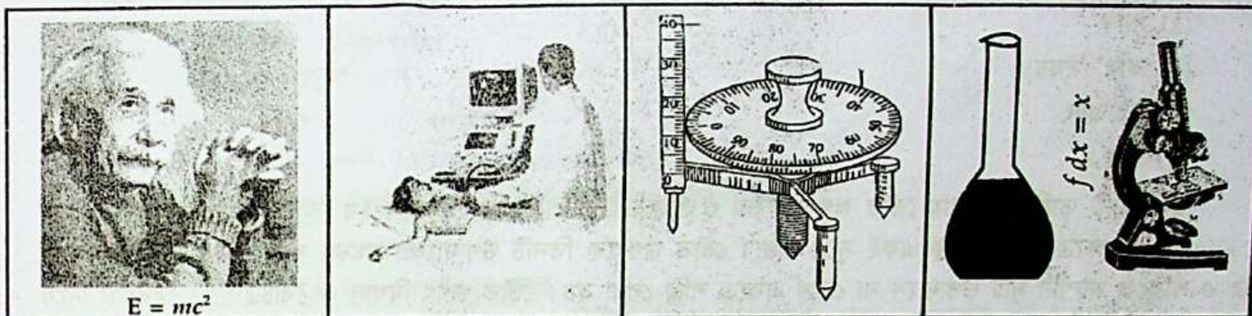
মেডিকেল এন্ড ডেন্টাল এডমিশন কেয়ার

১

ভৌত জগৎ ও পরিমাপ

PHYSICAL WORLD AND MEASUREMENT

প্রধান শব্দ (Key Words) : ভৌত জগৎ, জীব জগৎ, পরিমাপ, রাশি, একক, এককের প্রকারভেদ, মৌলিক একক, লব্ধ বা যৌগিক একক, ব্যবহারিক একক, মাত্রা, নিয়মিত ত্রুটি, অনিয়মিত ত্রুটি।



সূচনা
Introduction

দৈনন্দিন জীবনে বিজ্ঞান আমাদের নিত্য সঙ্গী। সকালে ঘুম থেকে উঠে রাতে ঘুমানো পর্যন্ত সকল কর্মকাণ্ডের সাথে মিশে আছে বিজ্ঞান। বিজ্ঞান মানব জীবনকে করেছে সুন্দর ও সমৃদ্ধ, বাড়িয়ে দিয়েছে আরাম-আয়েশ এবং সুখ স্বাচ্ছন্দ্য। কিন্তু বিজ্ঞানের এই সমৃদ্ধি একদিনে সম্ভব হয়নি। প্রাচীনকাল থেকে অদ্যাবধি বিজ্ঞানীদের চিন্তা-চেতনা, তথ্য উদ্ভাবন এবং প্রয়োগ বিজ্ঞানকে সমৃদ্ধ করেছে। মানব সম্পদ, চিকিৎসাবিজ্ঞান, কৃষিবিজ্ঞান, সাহিত্য-সংস্কৃতি, সমাজবিজ্ঞান, জ্যোতির্বিজ্ঞান, রসায়নশাস্ত্র, গণিতশাস্ত্র এবং জীববিজ্ঞান এমন কি জীবন দর্শনের ক্ষেত্রেও অবদান রেখেছে বিজ্ঞান। দৈনন্দিন জীবনের প্রতিটি কাজের সাথে পরিমাপ বিষয়টি জড়িত। পদার্থবিজ্ঞানের প্রায় সকল পরীক্ষণেই বিভিন্ন রাশির পরিমাপ করতে হয়। ভৌত জগতের প্রকৃতি, বর্তমান সভ্যতায় পদার্থবিজ্ঞানের অবদান এবং পরিসর, বিস্ময়কর আবিষ্কার, বিভিন্ন জ্ঞান-বিজ্ঞানের সাথে পদার্থবিজ্ঞানের সম্পর্ক, পরিমাপের নির্ভুলতা দূর করে সঠিকতা যাচাই, বিভিন্ন মৌলিক এককের মধ্যে সম্পর্ক ও বিজ্ঞানীদের অবদানসহ নানা বিষয়ে বিজ্ঞানের প্রয়োগই হলো এ অধ্যায়ের মূল বিষয়।

এ অধ্যায় পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা—

- ভৌত জগতের প্রকৃতি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- পদার্থবিজ্ঞানের পরিসর এবং এর বিস্ময়কর অবদান ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- পদার্থবিজ্ঞানের ব্যবহৃত বিভিন্ন ধারণা, সূত্র, নীতি, স্বীকার্য, অনুকল্প এবং তত্ত্বের অর্থ উপলব্ধি ও ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- পদার্থবিজ্ঞানের সাথে বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখার সম্পর্ক বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- স্থান, সময়, ভর এবং অন্যান্য প্রতিভাসের কার্যকারণ সম্পর্ক ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- মৌলিক ও লব্ধ এককের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করতে পারবে।
- পরিমাপের মূলনীতি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- পর্যবেক্ষণ ও পরীক্ষণের ক্রমবিকাশ ও গুরুত্ব ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- পরিমাপের ত্রুটি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- পরিমাপযোগ্য রাশির শুদ্ধতর মান নির্ধারণের কৌশল প্রয়োগ করতে পারবে।
- ব্যবহারিক :
  ১. স্ফেরোমিটারের সাহায্যে গোলীয় তলের বক্রতার ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে পারবে।
  ২. নিক্তির সাহায্যে দোলন পদ্ধতিতে বস্তুর ভর নির্ণয় করতে পারবে।

১·১ ভৌত জগতের প্রকৃতি
Nature of physical world

আমরা যেখানে আছি, যে কারণে আছি, যা পঞ্চইন্দ্রিয় দ্বারা অনুভব করছি বা আমাদের অনুভূতি বহির্ভূত যা কিছু অস্তিত্বশীল (ভর ও শক্তি) রয়েছে তাই জগৎ। জগতের এই ধারণা আমাদের ভৌত জগৎকে বুঝতে সাহায্য করবে। যে

কোনো বিষয় সম্পর্কে ধারণা স্পষ্ট হবার অর্থ তার অস্তিত্ব, আর অস্তিত্বের কারণ সম্পর্কে ধারণা দেয় সেই জিনিসের ধর্ম বা বৈশিষ্ট্য। জগতের শ্রেণিবিভাগ দুটি—একটি ভৌত জগৎ, অপরটি জীব জগৎ। যার জীবন নেই, তা নিয়ে যে জগৎ তার নাম ভৌত জগৎ বা জড় জগৎ; যেমন ইট, পাথর, লোহা, সোনা, মাটি ইত্যাদি নিয়ে যে জগৎ তা হলো ভৌত জগৎ। আর জীবিত বস্তু নিয়ে যে জগৎ অর্থাৎ যার জীবন আছে তা হলো জীব জগৎ; যেমন মানুষ, গরু, ছাগল, গাছ-পালা ইত্যাদি নিয়ে জীব জগৎ।

ভৌত জগৎ মূলত চারটি উপাদানের সমন্বয়ে তৈরি। সেগুলো হলো :

(১) স্থান

(২) কাল (সময়)

(৩) ভর এবং

(৪) শক্তি।

প্রথম দুটি তাত্ত্বিক হওয়ায় ভৌত জগৎকে ভর ও শক্তির উপস্থিতি দ্বারাই বুঝান হয় (আইনস্টাইনের বিখ্যাত সূত্র $E = mc^2$)। এক্ষেত্রে ভর ও শক্তি একই সূত্রে গাঁথা। ভৌত জগৎকে তিনটি উপাদানের সমন্বয় বলে প্রচার করা হয় অর্থাৎ ভর ও শক্তিকে আলাদা দুটি উপাদানে না রেখে একত্রে শক্তি লেখা হয়। ভৌত জগৎ বিশাল ও বৈচিত্র্যপূর্ণ। বিষয়টি নিয়ে গবেষণা করতে গিয়েই মানুষ তা উপলব্ধি করেছে। তাইতো বৈজ্ঞানিক সূত্রগুলোকে চিরন্তন সত্য বলা যায় না। কারণ বর্তমান বৈজ্ঞানিক সূত্র কোনো ভৌত বিষয়কে ব্যাখ্যা করতে না পারলে নতুন সূত্র দাঁড় করাতে হয়। উদাহরণস্বরূপ গ্যালিলিও রূপান্তরকে পরিবর্তন করে লরেঞ্জ রূপান্তরে পরিণত করতে হয়েছে। ভৌত জগতের বৈচিত্র্য উপলব্ধি করার দুটি সুন্দর উপায় রয়েছে। এক, ভৌত জগৎকে ক্ষুদ্র হতে ক্ষুদ্রতরভাবে দেখা; দুই, ভৌত জগৎকে বৃহৎ হতে বৃহত্তরভাবে দেখা।

ক্ষুদ্রতরভাবে দেখার অর্থ হলো— কোনো বস্তুকে ভেঙ্গে পেলাম অণু, অণুকে ভেঙ্গে পেলাম পরমাণু। আবার পরমাণুকে ভেঙ্গে পেলাম স্থায়ী ও অস্থায়ী কণিকা, কণিকাকে ভেঙ্গে কোয়ার্ক, কোয়ার্ককে ভেঙ্গে শক্তিগুচ্ছ আরও কত কী ! শুধু তাই নয়, এর প্রত্যেকটি অংশের আবার বহু শ্রেণি রয়েছে।

বৃহত্তরভাবে দেখার অর্থ হলো— উপগ্রহ, গ্রহ, সৌর জগতের মতো জগৎ, ছায়াপথ, আরও বৃহত্তর কত কী! ভৌত জগতে আরও রয়েছে ব্ল্যাকহোল যা হতে আলোক পর্যন্ত বের হয়ে আসতে পারে না। অনুমান করা হয় এক বৃহৎ ব্ল্যাকহোলকে কেন্দ্র করে বৃহৎ ছায়াপথগুলো ঘুরছে। **ভৌত জগতের নানা বিষয়ের বিশেষ জ্ঞানের আলোচনাই ভৌত বিজ্ঞান।**

আজ আমরা যে আধুনিক জীবন যাপন করছি তা ভৌত বিজ্ঞানেরই অবদান। জীববিজ্ঞানের অগ্রগতিরও দাবিদার ভৌত বিজ্ঞান। ভৌত বিজ্ঞানের অনেক শাখার মধ্যে পদার্থবিজ্ঞান, রসায়ন শাস্ত্র, গণিত শাস্ত্র, জ্যোতির্বিদ্যা, ভূবিদ্যা প্রভৃতি অন্যতম। এসব বিজ্ঞানের মাধ্যমে মানুষ ভৌত জগৎকে বোঝার চেষ্টা চালিয়ে যাচ্ছে। তবে মজার বিষয় হচ্ছে সমগ্র ভৌত জগতের সকল পদার্থের মধ্যে মানুষ জানতে পেরেছে খুব সামান্যই। অনুমান করা হয় মানুষ জানতে পেরেছে মাত্র 4%। উপরন্তু কপারনিকাস, গ্যালিলিও, রবার্ট বয়েল, স্যার আইজ্যাক নিউটন, ফ্র্যাংকলিন, জেমস্ ওয়াট, গ্যালভানি, ভোল্টা, ফ্যারাডে, অ্যাম্পিয়ার, ও'ম, মার্কনি, আচার্য জগদীশ চন্দ্র বসু, ওয়েরস্টেড, রনজেন, ডি-ব্রগলি, হাইজেনবার্গ, রাদারফোর্ড, হেনরি বেকেরেল, কুরী, মাদাম কুরী, মিলিক্যান, চ্যাডউইক, গ্লাশো, ওয়েইনবার্গ, আব্দুস সালাম প্রমুখ যশস্বী বিজ্ঞানীদের অবদান ভৌত বিজ্ঞানের অমূল্য সম্পদ। সংক্ষেপে বলা যায়, **বিশ্ব ব্রহ্মাণ্ডের জীব সম্পদ ছাড়া সব কিছুই ভৌত বিজ্ঞানের দুর্ভেদ্য ভিত।**

আমাদের উচিত ভৌত জগৎ নিয়ে গবেষণা করে আমাদের কৌতূহল মিটানো, ভৌত জগৎকে মানব কল্যাণে ব্যবহার করা এবং ভৌত জগতের সাথে সাথে জীব জগতের অস্তিত্বের কারণ সম্পর্কে জেনে সে অনুসারে জীবন পরিচালনা করা।

১·২ পদার্থবিজ্ঞানের পরিসর ও বিস্ময়কর অবদান
Scope of physics and its wonderful contribution

১·২·১ পদার্থবিজ্ঞানের পরিসর
Scope of physics

পদার্থবিজ্ঞান হলো বিজ্ঞানের চাবিকাঠি। অন্যান্য বিজ্ঞানের মৌলিক শাখা হলো পদার্থবিজ্ঞান। কারণ এর নীতিগুলোই বিজ্ঞানের অন্যান্য শাখাসমূহের ভিত্তি রচনা করেছে। উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, অণু-পরমাণু গঠন থেকে শুরু

করে ঝড়-বৃষ্টির পূর্বাভাষ পর্যন্ত পদার্থবিজ্ঞান বিস্তৃত। পঠন পাঠনের সুবিধার জন্য এবং বিশদভাবে আলোচনার জন্য পদার্থবিজ্ঞানকে বিভিন্ন ভাগে ভাগ করা হয়েছে, যথা—

(১) সাধারণ পদার্থবিজ্ঞান (General Physics)
(২) তাপবিজ্ঞান (Heat)
(৩) শব্দবিজ্ঞান (Sound)
(৪) আলোকবিজ্ঞান (Light)
(৫) চুম্বকবিজ্ঞান (Magnetism)
(৬) তড়িৎ বা বিদ্যুৎবিজ্ঞান (Electricity)
(৭) ইলেকট্রনিক্স (Electronics)
(৮) পারমাণবিক বিজ্ঞান (Atomic Physics) ইত্যাদি।

সাধারণ পদার্থবিজ্ঞানকে আবার দুই ভাগে ভাগ করা হয়েছে, যথা—

(১) বলবিদ্যা (Mechanics)
(২) পদার্থের ধর্ম (Properties of matter)

বলবিদ্যা বস্তুর ওপর বলের ক্রিয়া সংক্রান্ত বিভিন্ন বিষয় আলোচনা করে। পদার্থের ধর্ম বস্তুর বিভিন্ন গুণ আলোচনা করে।

বলবিদ্যা আবার দুই ভাগে বিভক্ত, যথা—

(১) স্থিতিবিদ্যা (Statics) এবং
(২) গতিবিদ্যা (Dynamics)

স্থিতিবিদ্যা স্থিতিশীল বস্তুর ওপর বলের ক্রিয়া আলোচনা করে এবং গতিবিদ্যা গতিশীল বস্তুর ওপর বলের ক্রিয়া আলোচনা করে। গতিবিদ্যাকে পুনরায় দুই অংশে ভাগ করা হয়; যথা —সৃতিবিদ্যা ও চলবিদ্যা।

পদার্থের কতকগুলো গুণ বা বৈশিষ্ট্য রয়েছে। এগুলোকে মিলিতভাবে পদার্থের ধর্ম (Properties of matter) বলে। পদার্থের ধর্ম দুই প্রকার; যথা—

(১) সাধারণ ধর্ম (General property) এবং
(২) বিশেষ ধর্ম (Special property)

যে ধর্ম সকল পদার্থেরই কম-বেশি রয়েছে তাকে পদার্থের সাধারণ ধর্ম বলে; যেমন ওজন, বিস্তৃতি, রোধ, স্থিতিস্থাপকতা ইত্যাদি। আর যে ধর্ম সকল পদার্থের নেই তাকে পদার্থের বিশেষ ধর্ম বলে, যেমন স্থিতিস্থাপকতা (elasticity), দৃঢ়তা (rigidity), ভঙ্গুরতা (fragility) ইত্যাদি ধর্ম কেবলমাত্র কঠিন পদার্থের বেলায় দেখা যায়। এসব ধর্ম কঠিন পদার্থের বিশেষ ধর্ম। সান্দ্রতা (viscosity) তরল ও বায়বীয় পদার্থের বিশেষ ধর্ম। পৃষ্ঠটান বা তলটান (surface tension) তরল পদার্থের বিশেষ ধর্ম।

পদার্থবিজ্ঞানের পরিসর বা আওতা সুবিস্তীর্ণ। মানব সভ্যতার অগ্রগতির মূলে ইহা ভিত্তিপ্রস্তর স্বরূপ। মানব জীবনের প্রতিটি ক্ষেত্রে ইহা বিশেষভাবে প্রয়োজনীয়। পদার্থবিজ্ঞানের সাহায্য ছাড়া এই মহাবিশ্ব সম্বন্ধে কোনো কিছু জানা আমাদের পক্ষে সম্পূর্ণ অসম্ভব। অসীম আকাশ হতে শুরু করে প্রত্যেক পরমাণুর অভ্যন্তর পর্যন্ত এর পরিধি বিস্তৃত। যেখানেই বস্তু ও শক্তি রয়েছে সেখানেই পদার্থবিজ্ঞানের কিছু না কিছু করণীয় রয়েছে। সুতরাং সাধারণ শিক্ষার বাহক হিসেবে পদার্থবিজ্ঞানের সেবায় ব্রত হওয়া প্রত্যেক নাগরিকের কর্তব্য। পদার্থবিজ্ঞানের ব্যাপকতা এবং এর ব্যবহার মানবকল্যাণে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে চলেছে।

১.২.২ পদার্থবিজ্ঞানের বিস্ময়কর অবদান
Wonderful contribution of physics

মানব কল্যাণে পদার্থবিজ্ঞানের অবদান অপরিসীম। বিভিন্ন শক্তি হতে দৈনন্দিন জীবনে আমরা প্রভূত আরাম-আয়েশ পেয়ে থাকি। একমাত্র বিদ্যুৎ শক্তি এত প্রকার কার্যে ব্যবহৃত হয়েছে যে, আধুনিক যুগকে বৈদ্যুতিক যুগ বললেও অত্যুক্তি হয় না। বৈদ্যুতিক পাখা, বৈদ্যুতিক বাতি, বৈদ্যুতিক চুল্লি, টেলিগ্রাফ, টেলিফোন, টেলিভিশন, কম্পিউটার, রেডিও, মোটর, বিদ্যুচ্চালিত ট্রেন, বিদ্যুচ্চালিত কল-কারখানা সবই বিদ্যুতের অবদান। বাষ্পীয় ইঞ্জিন, পেট্রোল ইঞ্জিন এবং তৈল ইঞ্জিন হতে আমরা যে তাপ শক্তি পাই তা বিভিন্ন কার্যে প্রয়োগ করি। বায়ুর চাপ মাপার জন্য ব্যারোমিটার, উষ্ণতা বা তাপমাত্রা মাপার জন্য থার্মোমিটার, বায়ুতে জলীয় বাষ্পের পরিমাণ মাপার জন্য আমরা হাইগ্রোমিটার নামক যন্ত্র ব্যবহার করি। আলোকবিজ্ঞানে আমরা চশমা, অণুবীক্ষণ যন্ত্র, দূরবীক্ষণ যন্ত্র, ক্যামেরা প্রভৃতি ব্যবহার করে থাকি। বিভিন্ন বাদ্যযন্ত্র; যেমন হারমোনিয়াম, বাঁশি, ঢাক, ঘণ্টা, পিয়ানো, গ্রামোফোন, বেহালা, এসরাজ, সেতার প্রভৃতি যন্ত্র

দ্বারা আমরা বিশেষভাবে উপকৃত হই। বিজ্ঞানের ক্ষেত্রে হাইড্রলিক প্রেস, বিভিন্ন পাম্প, তুলাযন্ত্র, ঘড়ি, দোলক, লিভার, ক্রেন, পুলি প্রভৃতি যন্ত্রের বহুল ব্যবহার রয়েছে। রিয়্যাক্টর (reactor) নামক যন্ত্রের সাহায্যে পরমাণুর নিউক্লিয়াসকে ভেঙ্গে যে প্রচুর শক্তি পাওয়া যায় সেই শক্তিকে বিভিন্ন শিল্পে এবং চিকিৎসাবিজ্ঞানে প্রয়োগ করা হয়। এছাড়াও বিশ্লিষ্ট এই যন্ত্র পারমাণবিক বোমা প্রস্তুতে ব্যবহৃত হয়। মানুষ আজ রকেট চালিত মহাকাশযানে চড়ে চন্দ্রে এবং গ্রহান্তরে পাড়ি দিচ্ছে। এ সবই বিজ্ঞানের বিস্ময়কর অবদান।

বিজ্ঞানের উন্নতির জন্যই মানুষ পেয়েছে গুহার পরিবর্তে আধুনিক বাড়ি-ঘর, পার্থিব আরাম-আয়েশ ও জীবনের নিরাপত্তা। বিজ্ঞানের অগ্রগতির ফলে মানুষ দূরকে করেছে নিকট, প্রকৃতিকে করেছে বশীভূত এবং অসম্ভবকে করেছে সম্ভব। সুখ-স্বাচ্ছন্দ্য, আরাম-আয়েশ এবং নিরাপত্তার জন্য মানবজাতি বিজ্ঞানের কাছে ঋণী। বিজ্ঞানের কল্যাণে 10^{-30} মিটার আকৃতির মৌলিক কণাসহ 10^{30} মিটার দূরত্বের আকাশ পর্যবেক্ষণ করা সম্ভব হয়েছে। অতএব আমাদের প্রত্যেক নাগরিকের বিজ্ঞান সাধনাকে সাধারণ শিক্ষার প্রধান বাহন হিসেবে গ্রহণ করা উচিত।

১·৩ পদার্থবিজ্ঞানে ধারণা, সূত্র, নীতি, স্বীকার্য, অনুকল্প এবং তত্ত্ব-এর অর্থ
Meaning of concept, law, principle, postulates, hypothesis and theory in physics

বৈজ্ঞানিক তত্ত্ব প্রতিষ্ঠার জন্য অনেক চিন্তা-ভাবনা ও পরীক্ষা-নিরীক্ষার প্রয়োজন। বৈজ্ঞানিক তত্ত্ব কীভাবে প্রতিষ্ঠা লাভ করে তা বুঝাবার জন্য একটি মনোজ্ঞ উদাহরণ দেওয়া হলো। মনে করি, একটি ছেলে বাড়ি হতে হারিয়ে গিয়েছে। গৃহস্বামী এই সংবাদ পেয়ে সঙ্গে সঙ্গেই অস্থির হয়ে উঠবেন এবং জল্পনা-কল্পনা করতে শুরু করবেন। প্রথমেই তিনি মনে করবেন যে ছেলেটি কোনো প্রতিবেশীর বাড়িতে গিয়েছে। এটা তদন্ত করবার জন্য তিনি প্রতিবেশীর বাড়িতে যাবেন। কিন্তু ছেলেটিকে যদি প্রতিবেশীর বাড়িতে পাওয়া না যায় তবে তিনি ধরে নিবেন যে তাঁর অনুমান মিথ্যা এবং তিনি এই অনুমান পরিত্যাগ করবেন। মনে করি, ঠিক ওই সময়ে জনৈক ভদ্রলোক গৃহস্বামীকে জানালেন যে, ছেলেটিকে 'X' নামক রাস্তায় দেখা গিয়েছে। তখন গৃহস্বামী ধরে নিবেন যে, তাঁর ছেলে হারিয়ে যায়নি বরং ছেলেটি 'X' নামক রাস্তায় গিয়েছে। তখন তিনি ছেলেটির সন্ধানে 'X' নামক রাস্তায় যাবেন। যাবার পর তিনি দেখলেন যে 'X' নামক রাস্তাটি দুটি রাস্তায় বিভক্ত। মনে করি, একটি 'Y' এবং অপরটি 'Z'। এখন তাঁর নিকট দুটি সম্ভাবনা দেখা দিবে। ছেলেটি দুটি রাস্তার যে কোনো একটি রাস্তায় যেতে পারে। ছেলেটি কোন রাস্তায় গিয়েছে এর সত্যতা নিরূপণের জন্য ঐ জায়গায় তদন্তের প্রয়োজন। তদন্তের পর দেখা গেল যে, ছেলেটি 'Z' নামক রাস্তায় গিয়েছে। এখন গৃহস্বামীর ধারণা ছেলেটি হারিয়ে যায়নি। সে 'X' নামক রাস্তা হয়ে 'Z' নামক রাস্তায় গিয়েছে। ছেলেটিকে পাবার জন্য তিনি 'Z' নামক রাস্তায় যাবেন। মনে করি, 'Z' নামক রাস্তাটি আবার তিনটি রাস্তায় বিভক্ত। সেগুলো হলো 'P', 'Q' এবং 'R'। ছেলেটি কোন রাস্তায় গিয়েছে তা জানার জন্য আরও তদন্তের প্রয়োজন। এভাবে ছেলেটি সম্পর্কে আমরা ক্রমাগত জানতে পারি এবং আমাদের তত্ত্ব প্রতিষ্ঠা লাভ করতে থাকবে। অনুরূপভাবে বলা যেতে পারে যে বৈজ্ঞানিক তত্ত্ব প্রতিষ্ঠার জন্য শতাব্দীর পর শতাব্দী ধরে জল্পনা-কল্পনা, চিন্তা-ভাবনা ও পরীক্ষা-নিরীক্ষা চালিয়ে যেতে হবে।

ধারণা বা প্রত্যয়
Concept

কোনো কিছু সম্পর্কে সঠিক উপলব্ধি বা বোধগম্যতা হলো ওই বিষয় সম্পর্কে স্পষ্ট ধারণা। অথবা, ধারণা হলো কোনো ভাবনা বা চিন্তাধারা বা কোনো সাধারণ অভিমত। যেমন তাপের ধারণা হলো— তাপ এক প্রকার শক্তি যা কোনো বস্তুতে প্রয়োগ করলে বা বস্তুটিকে গরম করলে বস্তুটির তাপমাত্রা বৃদ্ধি পায় এবং বর্জন করলে তাপমাত্রা হ্রাস পায়।

সূত্র
Law

যখন কোনো তত্ত্ব অনেক পরীক্ষা-নিরীক্ষার সাহায্যে প্রমাণিত হয় এবং এর মূল কথাগুলি একটি উক্তির মাধ্যমে প্রকাশ করা হয় তখন তাকে বৈজ্ঞানিক সূত্র বলা হয়। সূত্র অনেক সময় আবিষ্কর্তার নামানুসারে হয়, যেমন ও'মের সূত্র, বয়েলের সূত্র; কখনওবা বিষয়ের নামে, যেমন শক্তির নিত্যতা সূত্র, তাপগতিবিদ্যার সূত্র; আবার কখনও আবিষ্কারক এবং বিষয় উভয়ের নামে হয়ে থাকে, যেমন নিউটনের গতিসূত্র, গ্যালিলিওর পড়ন্ত বস্তুর সূত্র।

নীতি
Principle

যে সকল প্রাকৃতিক সত্য সরাসরি স্পষ্টভাবে প্রমাণ করা যায় এবং ওই সত্যের সাহায্যে অনেক প্রাকৃতিক ঘটনাকে প্রমাণ করা যায়, তাকে নীতি বলে। যেমন ডপলারের নীতি, হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তা নীতি ইত্যাদি।

স্বীকার্য
Postulates

কোনো গাণিতিক মডেল বা সূত্র প্রতিষ্ঠা করার লক্ষ্যে যদি কিছু পূর্বশর্ত স্বীকার করে নেওয়া হয়, তবে ওই পূর্বশর্তসমূহকে স্বীকার্য (Postulates) বলে। সাধারণত কোনো বৈজ্ঞানিক তত্ত্ব একটি সার্বিক বিবৃতি দিয়ে শুরু হয়, ইহাই স্বীকার্য। যেমন বিখ্যাত বিজ্ঞানী নীলস বোর (Neils Bohr) পরমাণু মডেল প্রদানের জন্য দুটি স্বীকার্য গ্রহণ করেন। আবার, বিজ্ঞানী আইনস্টাইন আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্ব প্রবর্তন করেন যা দুটি মৌলিক স্বীকার্যের উপর প্রতিষ্ঠিত।

অনুকল্প
Hypothesis

বিজ্ঞানীরা তাঁদের পর্যবেক্ষিত ঘটনার কারণ সম্বন্ধে ব্যাখ্যা প্রদানের জন্য অনেক সময় পূর্বে আবিষ্কৃত প্রাকৃতিক নিয়মের সাথে সামঞ্জস্য রেখে কিছু অনুমান করেন। এই অনুমানগুলোকে বলা হয় অনুকল্প। অনুকল্পগুলো পর্যবেক্ষিত ঘটনার প্রাথমিক ব্যাখ্যা প্রদান করে। অনুকল্পগুলোর সত্যতা যাচাইয়ের জন্য পরীক্ষা সম্পাদন করা হয় এবং পরীক্ষায় সত্য প্রমাণিত হলে তা তত্ত্বে পরিণত হয়। পরীক্ষণ বা পর্যবেক্ষণ দ্বারা অনুকল্প সমর্থিত হতেও পারে, আবার বাতিলও হতে পারে। তবে কিছু কিছু অনুকল্প আছে যা প্রমাণিত হওয়ার পরেও অনুকল্প হিসেবে এখনও পরিচিত। যেমন অ্যাভোগেড্রোর অনুকল্প (Avogadro's hypothesis)।

তত্ত্ব
Theory

অনুকল্প ও নিয়মের সমন্বয়ে তত্ত্ব প্রতিষ্ঠিত। পরীক্ষা-নিরীক্ষার দ্বারা প্রমাণিত অনুকল্পকে তত্ত্ব বলে। বৈজ্ঞানিক তত্ত্বের সাহায্যে প্রকৃতিকে সবচেয়ে বিশ্বাসযোগ্যভাবে ব্যাখ্যা করা যায়। যখন কোনো তত্ত্বকে কিছু ধারণা বা উক্তি এবং সমীকরণের মাধ্যমে ব্যাখ্যা করা যায়, তখন সেই তত্ত্বকে সূত্র বলে। সুতরাং **সকল সূত্রই তত্ত্ব, তবে সকল তত্ত্ব সূত্র নয়। আবার সকল তত্ত্বই অনুকল্প, তবে সকল অনুকল্প তত্ত্ব নয়।** তত্ত্ব সাধারণত আবিষ্কর্তার নামানুসারে অথবা বিষয়ের সাথে সংগতি রেখে নামকরণ করা হয়। যেমন আইনস্টাইনের আপেক্ষিক তত্ত্ব, কোয়ান্টাম তত্ত্ব ইত্যাদি।

১.৪ পদার্থবিজ্ঞান ও অন্যান্য বিজ্ঞান ও জ্ঞানের জগৎ
Physics and world of other sciences and knowledge

পদার্থবিজ্ঞানের সাথে বিজ্ঞানের অন্যান্য শাখার সম্পর্ক : পদার্থবিজ্ঞান হচ্ছে বিজ্ঞানের অন্যান্য শাখার ভিত্তি। বিজ্ঞানের অন্যান্য শাখার উন্নয়নে পদার্থবিজ্ঞান গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে আসছে। পদার্থবিজ্ঞানের সূত্রাবলি বিজ্ঞানের নতুন শাখার উদ্ভব ঘটিয়েছে যাকে আমরা জীবপদার্থবিদ্যা (biophysics) বলতে পারি। Mechanical, nuclear, gravimetric এবং acoustics পদ্ধতি বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় বিশেষ করে ভূতত্ত্ববিদ্যা, পরিমাপন বিদ্যা, সমুদ্র গবেষণা ও ভূকম্পবিদ্যায় ব্যাপক হারে ব্যবহৃত হয়ে আসছে। সুতরাং বলা যায় মানবজাতির উন্নতি এবং প্রযুক্তির উন্নয়নে পদার্থবিজ্ঞানের ভূমিকা খুবই গুরুত্বপূর্ণ। নিম্নে বিভিন্ন বিজ্ঞান এবং সাহিত্য সংস্কৃতি, সমাজবিজ্ঞানসহ দৈনন্দিন জীবনের বিভিন্ন বিষয়ের উপর পদার্থবিজ্ঞানের প্রভাব আলোচনা করা হলো। পদার্থবিজ্ঞানের বিভিন্ন তত্ত্ব, নীতি, সূত্র বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় অধ্যয়ন সহজ করে দিয়েছে।

রসায়ন : পরমাণুর গঠন, তেজস্ক্রিয়তা, এক্স-রে বর্তমান রসায়ন শাস্ত্রের জগতে বিপ্লব সূচনা করেছে। এই সমস্ত গবেষণা মৌলের পর্যায় সারণিতে পুনর্বিন্যাস ঘটিয়েছে, নমুনা বস্তুর গতি নির্ণয় করেছে, ভ্যালেন্সির প্রকৃতি এবং রাসায়নিক বন্ধন সম্বন্ধে অবহিত করেছে। ইহা জটিল রাসায়নিক গঠন জানতে সহায়তা করে।

গণিতশাস্ত্র : পদার্থবিজ্ঞান হচ্ছে তাত্ত্বিক বিজ্ঞান। পদার্থবিজ্ঞানের তত্ত্বগুলি গাণিতিক ধারণার মাধ্যমে সম্পন্ন হয়। তাত্ত্বিক পদার্থবিজ্ঞানের উন্নয়নে গণিতশাস্ত্র শক্তিশালী হাতিয়ার হিসেবে কাজ করে আসছে।

জীববিদ্যা : জীববিদ্যায় পদার্থবিজ্ঞানের ভূমিকা অপরিসীম। জীববিদ্যা অধ্যয়নে মাইক্রোস্কোপের ব্যবহার অনেক গুরুত্বপূর্ণ। ইলেকট্রনিক মাইক্রোস্কোপের সাহায্যে কোষের গঠন জানা অনেক সহজ হয়েছে। কোষের গঠন জানা অনেকটা সম্ভবপর করে তুলেছে ইলেকট্রনিক মাইক্রোস্কোপ। X-Ray এর ব্যবহার নিউক্লিক এসিডের গঠন জানতে সহায়তা করেছে যা জীবনকার্যের মূল প্রক্রিয়া নিয়ন্ত্রণ করে। এছাড়া জীব দেহে সংঘটিত শারীরবৃত্তীয় প্রক্রিয়া যেমন ব্যাপন, অসমোসিস ইত্যাদি পদার্থবিজ্ঞানের নীতি ব্যবহার করে ব্যাখ্যা করা যায়।

জ্যোতির্বিদ্যা : জ্যোতির্বিদ্যা সম্পর্কীয় টেলিস্কোপ গ্যালিলিওকে জ্যোতিষ্কমণ্ডলী সম্পর্কে জানতে সহায়তা করেছিল। বিভিন্ন দেশের মানমন্দিরে বড় বড় টেলিস্কোপ স্থাপন করে সৌরজগতের বিভিন্ন গ্রহ সম্বন্ধে আমরা জ্ঞানার্জন করতে পারি। রেডিও টেলিস্কোপের ব্যবহার Quasars এবং Pulsars আবিষ্কারে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করেছে এবং ইহা জ্যোতির্বিজ্ঞানীদের বিশ্বব্রহ্মাণ্ডের অনেক রহস্য উদঘাটন করতে সহায়তা করেছে। পদার্থবিজ্ঞানের উন্নত চিত্রগ্রহণ পদ্ধতি জ্যোতির্বিদ্যার জগতে বিরাট ভূমিকা পালন করেছে।

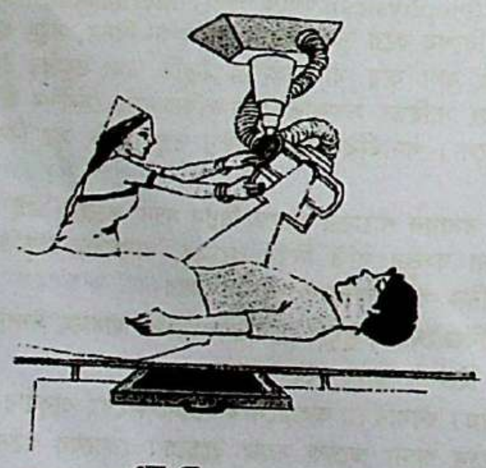
প্রযুক্তির বিভিন্ন শাখা : প্রযুক্তি কীভাবে তোমার জীবনকে প্রভাবিত করে তা খেয়াল কর। সকালে ঘুম থেকে উঠে দাঁত ব্রাশ করা, গোসল করা, রান্না করা, খাওয়া, কলেজে যাওয়া, গাড়িতে উঠা, রাতে বাতি জ্বালিয়ে পড়াশুনা করা, কলম দিয়ে খাতায় লেখা, জ্বর মাপা, ঘড়ি দেখা, রেডিও-টিভিতে খবর শুনা সবকিছুই হলো প্রযুক্তি। এছাড়া জমি চাষ করে কৃষকের ফসল ফলানো, বিভিন্ন রোগের চিকিৎসার জন্য ব্যবহৃত হয় নানা রকমের প্রযুক্তি। তাই বলা যায়, প্রযুক্তি আমাদের জীবনযাত্রাকে প্রভাবিত করছে। আধুনিক প্রযুক্তির মধ্যে সবচেয়ে বিস্ময়কর প্রযুক্তি হলো তথ্য প্রযুক্তি। এই সকল প্রযুক্তিকে সুশৃঙ্খল ও সমৃদ্ধ করার জন্য ভিন্ন ভিন্ন শাখায় বিভক্ত করা হয়েছে। যেমন তথ্য প্রযুক্তি, কৃষি প্রযুক্তি, চিকিৎসা প্রযুক্তি, মহাকাশ প্রযুক্তি ইত্যাদি।

প্রযুক্তি সাধারণত সাধারণ বিজ্ঞান কিংবা পদার্থবিজ্ঞানের প্রয়োগের উপর নির্ভরশীল। পদার্থবিজ্ঞান ও অন্যান্য বিজ্ঞানের বাস্তব প্রয়োগ শিল্পের উন্নয়নে এবং মানবের জীবন-মানের উন্নয়নে বিশেষ ভূমিকা পালন করে থাকে। ফ্যারাডে কর্তৃক আবিষ্কৃত তড়িচ্চুম্বকীয় আবেশ (electromagnetic induction) এক অভূতপূর্ব আবিষ্কার যা শুধু মানুষের উন্নয়নই ঘটায়নি, বরং তা প্রযুক্তির মূল ভিত্তি। জেনারেটর, মোটর, ট্রান্সফরমার ও অন্যান্য বৈদ্যুতিক যন্ত্র আবিষ্কারের ফলে যন্ত্র সভ্যতার সূচনা হয়েছে। ফ্যারাডের এই যুগান্তকারী আবিষ্কার প্রযুক্তিবিদ্যার ভিত্তিস্বরূপ। দীর্ঘ তরঙ্গদৈর্ঘ্য পরিসরে তড়িৎ চৌম্বকীয় তরঙ্গের স্থান রেডিও, টেলিভিশন, বেতার যোগাযোগ ব্যবস্থার উন্নয়নে বিশেষ অবদান রাখছে। স্যাটেলাইট চ্যানেলের মাধ্যমে আমরা বিভিন্ন দেশের অনুষ্ঠান টিভির পর্দায় সরাসরি দেখতে পাই। এ ধরনের স্যাটেলাইট আবহাওয়ার পূর্বাভাস দিতে সক্ষম। তাছাড়া ভূতাত্ত্বিক জরিপ (Geophysical survey) এবং তেলের খনি আবিষ্কার করতে সহায়তা করে।

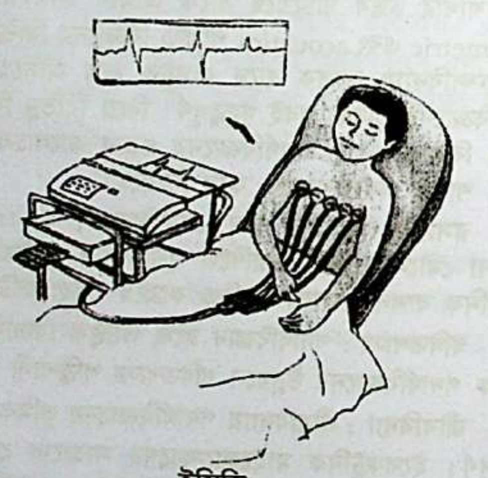
আমরা গৃহে ও শিল্প কারখানায় যে বিদ্যুৎ ব্যবহার করে থাকি তা বিভিন্ন প্রকার শক্তির রূপান্তরের মাধ্যমে বৈদ্যুতিক শক্তিতে রূপান্তরিত হয়। বিদ্যুৎ উৎপাদন কেন্দ্রে তাপ শক্তিকে বৈদ্যুতিক শক্তিতে রূপান্তরিত করা হয়।

জলবিদ্যুৎ কেন্দ্রে পানির বিভব শক্তিকে ব্যবহার করে যান্ত্রিক শক্তিকে বৈদ্যুতিক শক্তিতে রূপান্তরিত করা হয়। নিউক্লিয় পারমাণবিক চুল্লিতে ফিশন মিথস্ক্রিয়ার ফলে সৃষ্ট নিউক্লিয় শক্তিকে ব্যবহার করে বিদ্যুৎ উৎপাদন করা হয়। এগুলোসহ পদার্থবিজ্ঞানের বিভিন্ন প্রয়োগ প্রযুক্তিক্ষেত্র উন্নয়নে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা রাখছে। সুতরাং নিঃসন্দেহে বলা যায় পদার্থবিজ্ঞান প্রযুক্তির জগতে এবং আমাদের দৈনন্দিন জীবনে বিরাট অবদান রাখছে।

চিকিৎসাবিজ্ঞান : আধুনিক চিকিৎসা যেমন মানবজীবন রক্ষাকারী হিসেবে কাজ করছে তেমনি পদার্থবিজ্ঞানের উদ্ভাবিত নানাবিধ যন্ত্র সঠিক রোগ নির্ণয়ে দীর্ঘদিন অবদান রেখে চলেছে। উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, এক্স-রে, আল্ট্রা-সনোগ্রাফ, সিটিস্ক্যান, এম আর আই, ইসিজি, এন্ডোসকোপি, রেডিওথ্যারাপি, ইটিটি, এনজিওগ্রাফি ও আইসোটোপ



এক্স-রে



ইসিজি

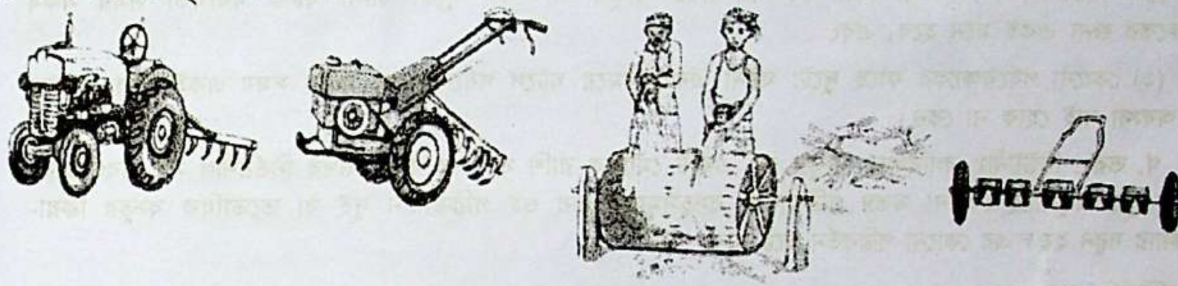
চিত্র ১·১

ব্যবহার করে চিকিৎসকগণ তাদের চিকিৎসা ব্যবস্থাকে সঠিকভাবে প্রয়োগ করতে সক্ষম হচ্ছে। চিত্র ১·১ এ এক্স-রে ও ইসিজি মেশিন দেখানো হলো। রোগ নির্ণয়ে X-Ray ব্যবহৃত হয়ে থাকে। ক্যান্সারসহ অন্যান্য রোগের চিকিৎসায় রেডিওথেরাপি প্রদান করা হয় এবং এতে রেডিও আইসোটোপ ব্যবহৃত হয়ে থাকে।

কৃষিবিজ্ঞান : প্রযুক্তি মানব সভ্যতার মতোই পুরানো। যখন থেকে সভ্যতার ইতিহাস লেখা হচ্ছে তার আগে থেকেই প্রযুক্তির ব্যবহার চলে আসছে। আমাদের বেঁচে থাকার জন্য সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ হলো খাদ্য। প্রকৃতিতে যেসব উদ্ভিদ ও প্রাণী সহজাতভাবে জন্মে ও বৃদ্ধি পায় তা মানুষ এক সময় ব্যবহার করেছে। বিভিন্ন উদ্ভিদ, গাছের ফল,

প্রাণীর মাংস খাদ্যরূপে মানুষ গ্রহণ করেছে শত শত বছর ধরে। পরবর্তীতে যাযাবর জীবনের অবসান ঘটিয়ে মানুষ যখন খাদ্য উৎপাদন ও পশুপালন শুরু করল তখনই কৃষি সভ্যতার শুরু।

কৃষি প্রযুক্তিতে বড় ধরনের পরিবর্তন এলো দুটো কারণে। একটি হলো উদ্ভিদবিজ্ঞানীরা আবিষ্কার করলেন কীভাবে উদ্ভিদ সূর্যের আলো থেকে শক্তি নিয়ে এবং মাটি, পানি ও বাতাস থেকে প্রয়োজনীয় উপাদান নিয়ে খাদ্য উৎপাদন করে। অন্যটি হলো নতুন সব কৃষি যন্ত্রের উদ্ভাবন ও কৃষিকাজের যান্ত্রিকীকরণ। এর ফলে কৃষির ব্যাপক অগ্রগতি ঘটেছে যাকে কৃষি বিপ্লব বলা যায়। এই সকল উদ্ভাবিত সকল যন্ত্রপাতি হলো পদার্থবিজ্ঞানের অবদান। চিত্র ১.২ এ কয়েকটি কৃষি যন্ত্রপাতি দেখানো হলো।



চিত্র ১.২

সাহিত্য ও সংস্কৃতি : সাহিত্য ও সংস্কৃতি সভ্য জাতিসত্তার একটি উল্লেখযোগ্য দিক। সাহিত্য ও সংস্কৃতি চর্চা মানব সমাজকে সভ্য জাতি হিসেবে প্রতিষ্ঠা করে। এরই আওতায় পদার্থবিজ্ঞান নানাভাবে ভূমিকা রেখে চলেছে। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় কবিতা পাঠে, শব্দের তীব্রতা বৃদ্ধি করতে, মাইক্রোফোনের সাহায্যে কথা বলা থেকে শুরু করে গান-বাজনা চর্চায় ব্যবহৃত হচ্ছে বিভিন্ন বাদ্যযন্ত্রসহ নানাবিধ পদার্থবিজ্ঞানের উদ্ভাবিত যন্ত্রপাতি ও কলাকৌশল।

সমাজবিজ্ঞান : পদার্থবিজ্ঞানের ক্ষেত্রে বিজ্ঞানীদের বিভিন্ন আবিষ্কার মানব কল্যাণ এবং উন্নয়নে গুরুত্বপূর্ণ অবদান রেখে চলেছে। পদার্থবিজ্ঞানের সাথে সমাজ জীবনের ঘনিষ্ঠ সম্পর্ক রয়েছে। পদার্থবিজ্ঞানের জগতের যে কোনো আবিষ্কার সমাজকে প্রভাবিত করে। পদার্থবিজ্ঞানের যে কোনো প্রযুক্তি আমাদের জীবনের প্রতিটি স্তরকে স্পর্শ করেছে। পদার্থবিজ্ঞানের আবিষ্কার যোগাযোগের ক্ষেত্রে বৈপ্লবিক পরিবর্তন সাধন করেছে। উদাহরণস্বরূপ— টেলিফোন, টেলিগ্রাফ, টেলিপ্রিন্টার, টেলেক্স, ই-মেইল, ফ্যাক্স, ইন্টারনেট ইত্যাদির মাধ্যমে আমরা সারা বিশ্বের সাথে অতি অল্প সময়ে যোগাযোগ স্থাপন করতে সক্ষম হচ্ছি। রেডিও ও টেলিভিশন আমাদের যোগাযোগ ব্যবস্থাকে দ্রুততর করেছে। স্যাটেলাইট চ্যানেলসমূহ আমাদের যোগাযোগ ব্যবস্থায় যুগান্তকারী বিপ্লবের সূচনা করেছে। বিশ্বের কোথায় কি ঘটেছে বা ঘটছে তা আমরা মুহূর্তের মধ্যে দেখতে পাচ্ছি। Microelectronics, lasers এবং কম্পিউটার মানবের চিন্তনে এবং জীবন ব্যবস্থায় বড় ধরনের পরিবর্তন সাধন করেছে।

দর্শন : মানুষের আচার-আচরণ নির্ভর করে তার ব্যক্তিসত্তা ও কর্মকাণ্ডের ওপর। মানুষ প্রকৃতির দাস। সে যে আচরণ অন্যের কাছ থেকে পেয়ে থাকে অপরের সাথে সে তদ্রূপ আচরণ করার চেষ্টা করে। এক্ষেত্রে পদার্থবিজ্ঞানের ভাষায় বলা যায় প্রত্যেক ক্রিয়ারই সমান এবং বিপরীত প্রতিক্রিয়া আছে। মানুষের মেধা ও মনন যদি কোনো কারণে থেমে যায় বা বাধাগ্রস্ত হয় তা অন্য কোনো কর্মকাণ্ডে অন্যভাবে প্রতিফলিত হয় এবং তার মেধা, মনন ও প্রতিভার কোনো ঘাটতি ঘটে না। এদিক দিয়ে উক্ত তথ্যটি পদার্থবিজ্ঞানের ভরবেগের নিত্যতার সূত্রের সাথে একাত্ম হয়ে আছে। এভাবে চলমান জীবনে নানা ক্ষেত্রে পদার্থবিজ্ঞান ওতপ্রোতভাবে জড়িয়ে আছে।

খেলাধুলা : খেলাধুলা শরীর ও মনকে সতেজ করে। সুশৃঙ্খল ও নিয়মমাফিক খেলাধুলায় ব্যবহৃত বিভিন্ন সরঞ্জামাদি এবং আনুষঙ্গিক দ্রব্যাদি শুধু খেলার মানকেই বৃদ্ধি করে না বরং শরীরচর্চায় নানাবিধ সুযোগ সৃষ্টি করে দেয়। যেমন ফ্লাশলাইট ব্যবহার করে রাতে আমরা খেলা উপভোগ করি, সময় নিয়ন্ত্রণের জন্য বিভিন্ন ধরনের টাইমার ব্যবহার করি, ফলাফল প্রদর্শনের জন্য স্কোরবোর্ড ব্যবহার করি, গতি মাপার জন্য স্পিডোমিটার ব্যবহার করি। এছাড়া খেলাধুলার সাথে সম্পৃক্ত নানা ক্ষেত্রে পদার্থবিজ্ঞানের সকল প্রযুক্তি খেলার জগৎকে সমৃদ্ধ করেছে।

১.৫ পদার্থবিজ্ঞানে স্থান, সময় ও ভর
Space, time and mass in physics

চিরায়িত বলবিদ্যা নিউটনীয় বলবিদ্যা নামে পরিচিত। এই বলবিদ্যায় তিনটি মৌলিক রাশির ধারণা করা হয়েছে। এগুলো হলো স্থান (Space), সময় বা কাল (Time) এবং ভর (Mass)।

ক. স্থান : বিজ্ঞানী নিউটনের মতে, স্থান একটি পরম জিনিস যা তার নিজের মধ্যেই অবস্থান করে। এটি বাইরের কোনো কিছুর সঙ্গে সম্পর্কীয় নয় এবং পরিবেশ দ্বারা প্রভাবিত হয় না। যেমন কোনো বস্তুর দৈর্ঘ্য বস্তুর বা পর্যবেক্ষকের গতির উপর নির্ভরশীল নয় এবং স্থির অবস্থায় অপরিবর্তনীয়।

খ. সময় বা কাল : নিউটনের মতে সময় বা কাল প্রকৃতিগতভাবে একটি পরম রাশি যা বাইরের কোনো কিছুর ওপর নির্ভর না করে সমভাবে এগিয়ে চলে। সুতরাং সময় সর্বজনীন এবং নির্দিষ্ট হারে এগিয়ে চলে যা বস্তু বা পর্যবেক্ষকের গতির উপর নির্ভরশীল নয়। এ থেকে দুটো মন্তব্য করা যায় :

(১) পর্যবেক্ষক চলমান বা স্থির যে অবস্থায়ই থাকুক না কেন দুটো ঘটনা ঘটার মধ্যবর্তী সময় সকল পর্যবেক্ষকের জন্য একই মনে হবে; এবং

(২) কোনো পর্যবেক্ষকের কাছে দুটো ঘটনা একই সময়ে ঘটলে পর্যবেক্ষকের কাছে সময় একই হবে, তাদের গতীয় অবস্থা যাই হোক না কেন।

গ. ভর : নিউটনীয় বলবিদ্যায় বস্তুর ভর একটি মৌলিক রাশি যা তার গতির ওপর নির্ভরশীল নয় এবং ভরের নিত্যতা সূত্র অনুসারে কোনো স্বতন্ত্র প্রক্রিয়াধীন বস্তুসমূহের ভর ওই প্রক্রিয়াধীন দুই বা ততোধিক বস্তুর ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়ার দরুন হয়। এর কোনো পরিবর্তন ঘটে না।

আধুনিক ধারণা

বিজ্ঞানী আইনস্টাইন প্রমাণ করেন যে, চিরায়ত বলবিদ্যার মৌলিক রাশি তিনটি গতির সাথে পরিবর্তন হয়। সুতরাং রাশি তিনটি পরম নয়।

ক. স্থান : কোনো বস্তুর গতিশীল অবস্থার দৈর্ঘ্য ওই বস্তুর স্থির অবস্থার দৈর্ঘ্যের চেয়ে ছোট হওয়াকে দৈর্ঘ্য সংকোচন বলে। সুতরাং গতির সাথে বস্তুর দৈর্ঘ্য সংকুচিত হয়।

খ. সময় বা কাল : কোনো জড় বা স্থির কাঠামোতে সংঘটিত ঘটনা উক্ত কাঠামো সাপেক্ষে গতিশীল অন্য কোনো কাঠামো থেকে লক্ষ করলে দেখা যাবে ঘটনার সময় ব্যবধান বৃদ্ধি পেয়েছে। এ বিষয়টিকে কাল দীর্ঘায়ন বা সময় প্রসারণ বলে। সুতরাং গতির সাথে সময়ের প্রসারণ ঘটে।

গ. ভর : বস্তু গতিশীল হলে এর ভর বৃদ্ধি পায়। এই ঘটনাকে ভরের আপেক্ষিকতা বা গতিজনিত ভর বৃদ্ধি বলে।

১.৬ মৌলিক বা প্রাথমিক ও লব্ধ একক
Fundamental and derived units

বিজ্ঞানে ব্যবহৃত অসংখ্য ভৌত রাশির প্রতিটির নিজস্ব একক আছে। কিন্তু প্রায় সব ভৌত রাশির একককে মাত্র তিনটি এককের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। যথা—

(১) **মৌলিক বা মূল বা প্রাথমিক একক** (Fundamental unit),
(২) **লব্ধ বা প্রাপ্ত বা যৌগিক একক** (Derived unit) এবং
(৩) **ব্যবহারিক একক** (Practical unit)।

যে একক অন্য কোনো এককের ওপর নির্ভর করে না এবং একেবারে সম্পর্কশূন্য বা স্বাধীন তাকে মৌলিক বা প্রাথমিক একক বলে। যেমন দৈর্ঘ্য বা ভর বা সময়ের একক অন্য কোনো এককের ওপর নির্ভর করে না। সুতরাং দৈর্ঘ্যের একক, ভরের একক এবং সময়ের একক মৌলিক একক। **এই তিনটিকে ভিত্তি করে যে একক গঠন করা হয় বা মৌলিক একক হতে যে একক পাওয়া যায় তাকে লব্ধ বা যৌগিক একক বলে।** উদাহরণস্বরূপ ক্ষেত্রফল মাপতে দৈর্ঘ্যকে প্রস্থ দিয়ে গুণ করতে হয়। যেমন এক মিটার (m) দৈর্ঘ্য ও এক মিটার (m) প্রস্থবিশিষ্ট ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 1 মিটার (m) × 1 মিটার (m) = 1 বর্গ মিটার বা, $1\,m^2$।

এই বর্গ মিটারই ক্ষেত্রফল মাপার একক। সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে, দৈর্ঘ্যের একক জানা থাকলে, ক্ষেত্রফলের একক জানা যায়, তার জন্য নতুন কোনো এককের দরকার হয় না। অতএব ক্ষেত্রফলের একক যৌগিক একক। তেমনি আয়তন, বেগ, ত্বরণ, বল ইত্যাদির একক যৌগিক একক।

মৌলিক একক তিনটি ; যথা—
(ক) **দৈর্ঘ্যের একক** (Unit of length),
(খ) **ভরের একক** (Unit of mass) এবং
(গ) **সময়ের একক** (Unit of time)।

এই এককগুলি হবে নির্দিষ্ট, সুবিধাজনক ও অপরিবর্তনীয় অর্থাৎ গরমকালে কোনো দূরত্ব যদি 1 মিটার হয়, তবে শীতকালেও তা 1 মিটার হবে। সময় কিংবা চাপ ইত্যাদির প্রভাবে তাদের কোনো পরিবর্তন ঘটে না।

কোনো কোনো সময় মৌলিক বা প্রাথমিক একক খুব বড় বা ছোট হওয়ায় ব্যবহারিক কাজের অনুপযোগী হয়ে পড়ে। এ সকল ক্ষেত্রে তাদের উপ-গুণিতক (ভগ্নাংশ) (Sub-multiples) বা গুণিতক (Multiples)-কে একক হিসেবে ব্যবহার করা হয়। কোনো কোনো ক্ষেত্রে সুবিধাজনক নতুন এককও ব্যবহৃত হয়। এর নাম ব্যবহারিক একক (Practical unit); যেমন কিলোমিটার (km), মাইক্রোন (μ), টন ইত্যাদি । অবশ্য প্রশ্নও জাগে বিজ্ঞানী আইনস্টাইন-এর আপেক্ষিক তত্ত্ব অনুসারে কোনো ভর, সময় ও দৈর্ঘ্য মহাজগতের সব স্থান হতে সমান হবে কী ?

অনুসন্ধানমূলক কাজ : আলোকবর্ষ প্রাথমিক একক না লব্ধ একক ? ব্যাখ্যা দাও।

শূন্য মাধ্যমে আলোক এক বছরে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে এক আলোকবর্ষ বলে। এর মাত্রা দৈর্ঘ্যের মাত্রার সমান। সুতরাং আলোকবর্ষ হলো প্রাথমিক একক।

একক লেখার পদ্ধতি

1960 সালে আন্তর্জাতিক সম্মেলনে গৃহীত একক এবং সংখ্যা লেখার কয়েকটি নিয়ম নিম্নে উল্লেখ করা হলো :

(১) একক একবচনে লিখতে হবে, যথা km, কিন্তু (kms নয়)

(২) এককের শেষে ফুলস্টপ দেয়া যাবে না, যেমন km, কিন্তু (km. নয়)

(৩) দশমিক চিহ্ন দেয়ার নিয়ম 1.9, তবে অনেকে 1·9 এভাবেও লেখে।

(৪) দীর্ঘ সংখ্যা পাঠে সুবিধার জন্যে দশমিক স্থান হতে আরম্ভ করে ডানে বা বামে একত্রে তিনটি করে সংখ্যা লিখতে হবে।

অশুদ্ধ	শুদ্ধ
24765·321	24,765·321

(৫) একক লেখার সময় প্রয়োজন মতো বিভক্তি চিহ্ন (/) যথা (N/m^2) একবার মাত্র ব্যবহার করা চলে। তবে তা না করাই ভালো। যেমন N/m^2 এর স্থলে Nm^{-2} লেখা উচিত।

(৬) এককের দশমাংশগুলো নিম্নলিখিতভাবে লিখতে হবে; যেমন

ডেসি ($= 10^{-1}$)d

সেন্টি ($= 10^{-2}$) c ইত্যাদি।

(৭) সাধারণ ব্যবহারে মিনিট, ঘণ্টা, দিন, সপ্তাহ, মাস, বছর ইত্যাদি চললেও বিজ্ঞানের সঠিক পরিমাপে এ ধরনের একক ব্যবহার করা অনুচিত।

এককের পদ্ধতি
System of units

উপরের তিনটি প্রাথমিক একককে প্রকাশ করার জন্য তিনটি পদ্ধতি আছে। এছাড়া পদার্থবিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখার প্রয়োজন উপযোগী অতিরিক্ত এক বা একাধিক প্রমাণ রাশি ও তার একক যুক্ত করে পরিমাপের আরও দুটি পদ্ধতি প্রচলিত আছে। পদ্ধতিগুলো নিম্নে আলোচনা করা হলো।

(১) সেন্টিমিটার-গ্রাম-সেকেন্ড পদ্ধতি বা মেট্রিক পদ্ধতি বা ফ্রেঞ্চ পদ্ধতি (Centimetre-Gramme-Second System or Metric system or French system) : এ পদ্ধতিকে সংক্ষেপে সি. জি. এস. (C. G. S.) বা সেমি. গ্রাম সে. পদ্ধতি বলা হয়।

এখানে,

সি.	অক্ষরটি	বুঝাচ্ছে	সেন্টিমিটার—দৈর্ঘ্যের একক
জি.	"	"	গ্রাম—ভরের একক
এস.	"	"	সেকেন্ড—সময়ের একক

অর্থাৎ এই পদ্ধতিতে দৈর্ঘ্যের একক সেন্টিমিটার, ভরের একক গ্রাম এবং সময়ের একক সেকেন্ড। এই পদ্ধতিকে দশমিক পদ্ধতি (Decimal system) বলে।

(২) মিটার-কিলোগ্রাম-সেকেন্ড পদ্ধতি (Metre-Kilogramme-Second system) : এই পদ্ধতিকে সংক্ষেপে এম. কে. এস. (M. K. S.) পদ্ধতি বলা হয়। এখানে,

এম. অক্ষরটি বুঝাচ্ছে মিটার—দৈর্ঘ্যের একক
কে. " " কিলোগ্রাম—ভরের একক
এস. " " সেকেন্ড—সময়ের একক

অর্থাৎ, এ পদ্ধতিতে দৈর্ঘ্যের একক মিটার, ভরের একক কিলোগ্রাম এবং সময়ের একক সেকেন্ড।

(৩) আন্তর্জাতিক পদ্ধতির একক বা এস. আই. একক (International System of Units or S. I. Units) : বিভিন্ন দেশে ভিন্ন ভিন্ন পদ্ধতির এককের প্রচলন আছে। কোথাও এফ. পি. এস. পদ্ধতি, কোথাও সি. জি. এস. পদ্ধতি, আবার কোথাও এম. কে. এস. পদ্ধতি। পরিমাপের এই বৈষম্যের জন্য বাস্তব ক্ষেত্রে বেশ অসুবিধা হয়। এই অসুবিধা দূর করার উদ্দেশ্যে বিশ্বের বিভিন্ন দেশের বিজ্ঞানীরা পরিমাপের উপরোক্ত তিনটি পদ্ধতি ছাড়াও 1960 সালে পরিমাপের একটি নতুন পদ্ধতি প্রচলন করেন। এটাই আন্তর্জাতিক পদ্ধতির একক বা এস. আই. একক.। পূর্বের এম. কে. এস. পদ্ধতির সাথে আরও কয়েকটি প্রমাণ রাশি ও উহার একক যোগ করে এই পদ্ধতি তৈরি করা হয়। এই পদ্ধতিতে ব্যবহৃত বিভিন্ন মৌলিক রাশি এবং তাদের একক ও প্রতীক নিচের তালিকায় উল্লেখ করা হলো। এই পদ্ধতিতে সর্বমোট নয়টি রাশি আছে।

ক্রমিক সংখ্যা	রাশি	একক	এককের প্রতীক
1.	দৈর্ঘ্য	মিটার	m
2.	ভর	কিলোগ্রাম	kg
3.	সময়	সেকেন্ড	s
4.	তাপমাত্রা	কেলভিন	K
5.	বিদ্যুৎ প্রবাহমাত্রা	অ্যাম্পিয়ার	A
6.	কোণ (দ্বিমাত্রিক)	রেডিয়ান	rad
7.	কোণ (ত্রিমাত্রিক)	স্টেরিডিয়ান	Sr
8.	দীপন মাত্রা	ক্যান্ডেলা	cd
9.	পদার্থের পরিমাণ	মোল	mole

এটি প্রণিধানযোগ্য যে, আন্তর্জাতিক পদ্ধতিতে এই নয়টি মূল এককের সাহায্যে বস্তু জগতের পরিমাপ বিষয়ক সর্বপ্রকার একক পাওয়া যায়।

এ পদ্ধতিতে লব্ধ একক এবং তাদের প্রতীক নিম্নে বর্ণিত হলো।

ক্রমিক সংখ্যা	রাশি	একক	এককের প্রতীক
1.	বল	নিউটন	N
2.	শক্তি	জুল	J
3.	ক্ষমতা	ওয়াট	W
4.	তড়িতাধান	কুলম্ব	C
5.	বৈদ্যুতিক রোধ	ও'ম	Ω
6.	বৈদ্যুতিক বিভব	ভোল্ট	V
7.	কম্পাঙ্ক	হার্জ	Hz

(৪) M.K.S.A. পদ্ধতি : পরিমাপের পূর্বোক্ত পদ্ধতি ছাড়াও বলবিদ্যা, তড়িৎ ও চুম্বকের সমষ্টিগত প্রয়োজনে আর একটি নতুন পদ্ধতি ব্যবহৃত হয়। এর নাম মিটার-কিলোগ্রাম-সেকেন্ড-অ্যাম্পিয়ার পদ্ধতি। সংক্ষেপে একে M. K. S. A.

System বা এম. কে. এস. এ. পদ্ধতি বলা হয়। এটা একটি সুসংগত পদ্ধতি। এটি চারটি প্রমাণ একক নিয়ে গঠিত, যথা—

ক্রমিক সংখ্যা	রাশি	একক	এককের প্রতীক
1.	দৈর্ঘ্য	মিটার	m
2.	ভর	কিলোগ্রাম	kg
3.	সময়	সেকেন্ড	s
4.	বিদ্যুৎ প্রবাহমাত্রা	অ্যাম্পিয়ার	A

মৌলিক এককসমূহ, এগুলোর গুণিতক ও উপগুণিতক

আমরা জানি মৌলিক একক তিনটি; যথা—

(ক) দৈর্ঘ্যের একক,

(খ) ভরের একক এবং

(গ) সময়ের একক।

(ক) দৈর্ঘ্যের একক : সি. জি. এস. পদ্ধতিতে দৈর্ঘ্যের একক সেন্টিমিটার। 90 ভাগ প্লাটিনাম ও 10 ভাগ ইরিডিয়ামের সংকর নির্মিত দণ্ডের উপর দুইটি নির্দিষ্ট দাগের মধ্যবর্তী দূরত্বকে আন্তর্জাতিক মিটার (International Proto-type Metre) বলে। আন্তর্জাতিক ওজন ও পরিমাপ সংস্থার রক্ষণশালায় দণ্ডটি বিশেষভাবে রক্ষিত আছে। তাপমাত্রার বৃদ্ধি বা হ্রাসের প্রভাব যাতে এর উপর না পড়ে, সেজন্য দণ্ডটিকে 0°C তাপমাত্রায় রাখা হয়। এই দূরত্বের এক শ' ভাগের এক ভাগকে এক সেন্টিমিটার বলে।

এককসমূহের তালিকা

সি. জি. এস. এবং এম. কে. এস. ও আন্তর্জাতিক পদ্ধতিতে দৈর্ঘ্যের এককের তালিকা :

10 মিলিমিটার (মিমি)	= 1 সেন্টিমিটার (সেমি)	10 ডেকামিটার (Dm)	= 1 হেক্টোমিটার (হেমি)
10 সেন্টিমিটার	= 1 ডেসিমিটার (ডেমি)	10 হেক্টোমিটার (Hm)	= 1 কিলোমিটার (কিমি)
10 ডেসিমিটার (dm)	= 1 মিটার (মি)	10 কিলোমিটার (Km)	= 1 মিরিয়া মিটার (মিরিয়ামি)
10 মিটার (m)	= 1 ডেকামিটার (ডেকামি)		

অন্যান্য ছোট, বড় ও নভোমণ্ডলীয় একক :

1 এক্সরে ইউনিট (X.U.)	=	10^{-11} সেমি $= 10^{-13}$ মিটার
1 এ্যাংস্ট্রম (Å)	=	10^{-8} সেমি $= 10^{-10}$ মিটার
1 মিলিমাইক্রোন (mμ)	=	10^{-7} সেমি $= 10^{-9}$ মিটার
1 মাইক্রোন (μ) বা মাইক্রোমিটার	=	10^{-4} সেমি $= 10^{-6}$ মিটার
1 মেগামিটার (Mm)	=	10^{8} সেমি $= 10^{6}$ মিটার
1 এ্যাস্ট্রনোমিক্যাল ইউনিট (AU)	=	$1\cdot495 \times 10^{8}$ মিটার $= 9\cdot289 \times 10^{7}$ মাইল
1 আলোকবর্ষ (ly)	=	এক বছরে আলোকের অতিক্রান্ত দূরত্ব
	=	$9\cdot42 \times 10^{15}$ মি $= 9\cdot42 \times 10^{12}$ কিলোমিটার
	=	$5\cdot865 \times 10^{12}$ মাইল
1 পারসেক (pc) = 3·26 আলোকবর্ষ	=	$3\cdot083 \times 10^{13}$ কিলোমিটার $= 3\cdot083 \times 10^{16}$ মিটার
1 একক পারমাণবিক ভর (a.m.u.)	=	$1\cdot66 \times 10^{-27}$ কিলোগ্রাম

কয়েকটি উপসর্গের (Prefixes) অর্থ :

	উপসর্গ	সংকেত	অর্থ	এককের কত গুণ
এককের উপগুণিতক	ডেসি (Deci)	d	$\frac{1}{10}$	10^{-1} (দশাংশ)
	সেন্টি (Centi)	c	$\frac{1}{10^2}$	10^{-2} (শতাংশ)
	মিলি (Milli)	m	$\frac{1}{10^3}$	10^{-3} (সহস্রাংশ)
	মাইক্রো (Micro)	μ	$\frac{1}{10^6}$	10^{-6} (নিযুতাংশ)
	ন্যানো (Nano)	n	$\frac{1}{10^9}$	10^{-9} অংশ
	পিকো (Pico)	p	$\frac{1}{10^{12}}$	10^{-12} "
	ফেমটো (Femto)	f	$\frac{1}{10^{15}}$	10^{-15} "
	অ্যাটো (Ato)	a	$\frac{1}{10^{18}}$	10^{-18} "
এককের গুণিতক	ডেকা (Deca)	da	$\frac{10}{1}$	10^1 (দশ গুণ)
	হেক্টো (Hecto)	h	$\frac{100}{1}$	10^2 (শত গুণ)
	কিলো (Kilo)	k	$\frac{1000}{1}$	10^3 (হাজার গুণ)
	মিরিয়া (Myria)	Ma	$\frac{10000}{1}$	10^4 (দশ হাজার গুণ)
	মেগা (Mega)	M	$\frac{1000000}{1}$	10^6 (দশ লক্ষ গুণ)
	গিগা (Giga)	G	$\frac{1000000000}{1}$	10^9 গুণ
	টেরা (Tera)	T	$\frac{1000000000000}{1}$	10^{12} গুণ
	পেটা (Peta)	P	$\frac{1000000000000000}{1}$	10^{15} গুণ
	এক্সা (Exa)	E	$\frac{1000000000000000000}{1}$	10^{18} গুণ

গাণিতিক উদাহরণ ১.১

১। এক টনে কত কিলোগ্রাম (kg) ?

আমরা জানি,

1 টন $= 2,240$ পাউন্ড

$= 2,240 \times 453.6 \text{ g}$

$= \frac{2,240 \times 453.6}{1000} \text{ kg}$

$= 1,016 \text{ kg}$

২। 1 গ্যালন কত ঘন মিটার (m^3)-এর সমান ?

আমরা জানি,

1 গ্যালন $= 277 \text{ inch}^3$ ও $1 \text{ inch} = 2.54 \text{ cm}$

$\therefore$ $1 \text{ inch}^3 = (2.54 \text{ cm})^3 = 16.39 \text{ cm}^3 = 16.39 \times 10^{-6} \text{ m}^3$

কাজেই, 1 গ্যালন $= 277 \times 16.39 \times 10^{-6} \text{ m}^3 = 4.54 \times 10^{-3} \text{ m}^3$

৩। বলের একককে মৌলিক এককের মাধ্যমে প্রকাশ কর। [চ. বো. ২০১৫]

আমরা জানি,

বল, F = ভর × ত্বরণ = ma

এখানে ভর, m এর একক kg এবং ত্বরণ a এর একক ms^{-2}

সুতরাং F এর মৌলিক একক = $kg\ ms^{-2}$

হিসাব কর : X, Y এবং Z এই তিনটি ভৌত রাশির একক যথাক্রমে kgm^2s^{-3}, kgs^{-1} এবং ms^{-2} হলে X, Y এবং Z-এর মধ্যে সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা কর।

ধরা যাক, $X = KY^aZ^b$ ... ... (i)

যেখানে K একটি মাত্রাহীন ধ্রুবক, a ও b হলো সংখ্যাসূচক।

প্রশ্নানুযায়ী, X-এর মাত্রা = ML^2T^{-3}

Y-এর মাত্রা = MT^{-1}

এবং Z-এর মাত্রা = LT^{-2}

সমীকরণ (i)-এ এই মানগুলো বসিয়ে পাই,

$ML^2T^{-3} = M^aT^{-a}L^bT^{-2b} = M^aL^bT^{-a-2b}$

সমীকরণ (i)-এর উভয় পক্ষের মাত্রা তুলনা করে পাই,

$a = 1, b = 2$

অতএব, নির্ণেয় সম্পর্ক $X = KYZ^2$

মৌলিক ও লব্ধ এককের মাত্রা ও মাত্রা সমীকরণ
Dimension and dimensional equation of fundamental and derived units

মাত্রা
Dimension

আমরা পূর্বেই আলোচনা করেছি যে উৎপত্তি অনুসারে রাশি দুই প্রকার—একটি **মৌলিক রাশি** এবং অপরটি **যৌগিক রাশি**। আমরা আরও জানি, যে সকল রাশি অন্য কোনো রাশির ওপর নির্ভর করে না, তাদেরকে মৌলিক রাশি বলে। এখন আমরা আলোচনা করব, কোনো রাশির 'মাত্রা' বলতে কী বুঝি ? কোনো রাশির মাত্রার নিম্নলিখিত যে কোনো একটি সংজ্ঞা দেয়া যেতে পারে।

(১) কোনো একটি রাশি এবং তার মৌলিক এককের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপনের জন্য যে সংকেত ব্যবহার করা হয় তাকে উক্ত রাশির মাত্রা বলে।

উদাহরণস্বরূপ দৈর্ঘ্য একটি রাশি। ফুট বা সেমি বা মিটার তার মৌলিক একক। দৈর্ঘ্য এবং এর মৌলিক এককের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপনের জন্য 'L' সংকেত ব্যবহার করা হয়। এখানে L দৈর্ঘ্য বুঝায়। আবার ফুট বা সেমি বা মিটার এরাও প্রত্যেকে দৈর্ঘ্য প্রকাশ করে। সুতরাং 'L' অক্ষর দৈর্ঘ্য এবং এর মৌলিক এককের মধ্যে যোগসূত্র স্থাপনের একটি সংকেত। অতএব দৈর্ঘ্যের মাত্রা L।

(২) কোনো একটি প্রাকৃতিক রাশির মাত্রা উক্ত রাশি এবং তার মৌলিক এককের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করে।

(৩) কোনো লব্ধ একক গঠন করতে মৌলিক এককগুলোকে যে ঘাতে উন্নীত করা হয়, সে ঘাতকে ওই লব্ধ এককের মাত্রা বলে।

মাত্রা সমীকরণ
Dimensional equation

পদার্থবিজ্ঞানের তিনটি মৌলিক রাশি হলো দৈর্ঘ্য, ভর এবং সময়। এদের মাত্রা যথাক্রমে L, M এবং T। দৈর্ঘ্যকে L দ্বারা প্রকাশ করা হয় বলে দৈর্ঘ্য এক L-মাত্রিক রাশি, ক্ষেত্রফল হলো দৈর্ঘ্য × দৈর্ঘ্য = $L \times L = L^2$। অতএব ক্ষেত্রফল দুই L-মাত্রিক রাশি। অনুরূপভাবে, আয়তন হলো দৈর্ঘ্য × দৈর্ঘ্য × দৈর্ঘ্য = $L \times L \times L = L^3$। অতএব আয়তন হলো তিন L-মাত্রিক রাশি ইত্যাদি। এখানে [L], [L^2], [L^3]-কে মাত্রিক বা **মাত্রা সমীকরণ** (Dimensional equation) বলা হয়। মাত্রা সমীকরণের নিম্নরূপ সংজ্ঞা দেওয়া যেতে পারে।

যে সমীকরণ মৌলিক একক এবং লব্ধ এককের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করে তাকে মাত্রা সমীকরণ বলে।

গাণিতিক উদাহরণ ১.২

১। তড়িৎ প্রাবল্য E-এর মাত্রা সমীকরণ লিখ।

আমরা জানি, তড়িৎ ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে একক ধনাত্মক আধানের ওপর প্রযুক্ত বলকে তড়িৎ প্রাবল্য বলে। সুতরাং,

$E = \frac{F}{q}$, এখানে F প্রযুক্ত বল ও q আধান।

এখন, F এর মাত্রা $= MLT^{-2}$ এবং q এর মাত্রা $= AT$

$$\therefore \quad E = \frac{MLT^{-2}}{AT} = MLT^{-3}A^{-1} \qquad [\because q = it = AT]$$

সুতরাং E এর মাত্রা সমীকরণ $[MLT^{-3}A^{-1}]$

২। দেখাও যে, কৌণিক ভরবেগের মাত্রা ও প্ল্যাঙ্কের ধ্রুবকের মাত্রা একই।

আমরা জানি,

কৌণিক ভরবেগ $= mv \times r$ (এখানে m = ভর, v = বেগ এবং r = ব্যাসার্ধ)

$$= [MLT^{-1}] \times [L]$$
$$= [ML^2T^{-1}] \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (i)$$

আবার, প্ল্যাঙ্কের ধ্রুবক, $h = \frac{E}{\upsilon} \qquad [\because E = h\upsilon]$

$$= \frac{\text{শক্তি}}{\text{কম্পাঙ্ক}} = \frac{[ML^2T^{-2}]}{[T^{-1}]}$$
$$= [ML^2T^{-1}] \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (ii)$$

সমীকরণ (i) ও (ii) থেকে দেখা যায় যে কৌণিক ভরবেগের মাত্রা ও প্ল্যাঙ্ক ধ্রুবকের মাত্রা অভিন্ন।

৩। যদি বল (F), দৈর্ঘ্য (L) এবং সময় (T) মৌলিক রাশি হয়, তবে ভরের মাত্রা নির্ণয় কর।

নিউটনের দ্বিতীয় গতি সূত্রানুসারে আমরা জানি,

বল = ভর × ত্বরণ

$$\therefore \quad \text{ভর} = \frac{\text{বল}}{\text{ত্বরণ}}$$

এখন, বলের মাত্রা = F, ত্বরণের মাত্রা $= LT^{-2}$

$$\therefore \quad \text{ভরের মাত্রা} = \frac{F}{LT^{-2}} = FL^{-1}T^2$$

মাত্রা সমীকরণের প্রয়োজনীয়তা

পদার্থবিজ্ঞানে মাত্রা সমীকরণের ভূমিকা অপরিসীম। নিম্নে এর ভূমিকা বা প্রয়োজনীয়তা উল্লেখ করা হলো :

(১) এক পদ্ধতির একককে অন্য পদ্ধতির এককে রূপান্তর করা যায়।
(২) সমীকরণের নির্ভুলতা যাচাই করা যায়।
(৩) বিভিন্ন রাশির সমীকরণ গঠন করা যায়।
(৪) কোনো ভৌত রাশির একক নির্ণয় করা যায়।
(৫) কোনো ভৌত সমস্যার সমাধান করা যায়।

সমমাত্রিক নীতি (Principle of dimensional homogeneity) : কোনো সঠিক সম্পর্ক বা সমীকরণের দুটি দিকের মাত্রা সব সময় অভিন্ন হবে। এটিই সমমাত্রিক নীতি।

কাজ : একটি মাত্রাহীন ভৌত রাশির নাম লিখ এবং দেখাও যে রাশিটি মাত্রাহীন।

মাত্রাহীন ভৌত রাশিটি হলো সমতলিক কোণ (Plane angle) θ।
এখন কোণের সংজ্ঞানুযায়ী, আমরা জানি,

$$\theta = \frac{\text{বৃত্তচাপ}}{\text{ব্যাসার্ধ}}$$

বৃত্তচাপ ও ব্যাসার্ধ উভয় রাশিরই মাত্রা হলো দৈর্ঘ্যের মাত্রা [L]

$$\therefore \text{কোণ } (\theta) = \frac{[L]}{[L]} = 1$$

সুতরাং সমতলিক কোণ একটি মাত্রাহীন রাশি।

১.৭ ভৌত রাশির মান এক একক পদ্ধতি হতে অন্য একক পদ্ধতিতে রূপান্তর

Conversion of the value of a physical quantity from one unit to another unit

যদি কোনো ভৌত রাশির মান একটি একক পদ্ধতিতে জানা থাকে তবে সমমাত্রিক নীতি প্রয়োগ করে ও মাত্রা বিশ্লেষণের মাধ্যমে অন্য একটি একক পদ্ধতিতে রাশিটির মান নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ : SI এবং CGS পদ্ধতিতে বলের একক হলো যথাক্রমে Newton এবং dyne। 1 Newton বল কত dyne বলের সমান তা এখানে নির্ণয় করা হলো।

আমরা জানি, বলের মাত্রা সমীকরণ = $[MLT^{-2}]$

ধরা যাক, CGS পদ্ধতিতে ভর, দৈর্ঘ্য এবং সময়ের একক যথাক্রমে m_1, l_1 ও t_1 এবং SI পদ্ধতিতে ভর, দৈর্ঘ্য ও সময়ের একক যথাক্রমে m_2, l_2 ও t_2।

ধরা যাক, 1 Newton = n dyne

অতএব, বলের মাত্রা অনুযায়ী লেখা যায়,

$$1 \times m_2 l_2 t_2^{-2} = n \times m_1 l_1 t_1^{-2}$$

বা, $n = \left(\frac{m_2}{m_1}\right) \times \left(\frac{l_2}{l_1}\right) \times \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{-2}$

বা, $n = \frac{10^3\,g}{1\,g} \times \frac{10^2\,cm}{1\,cm} \times \left(\frac{1\,s}{1\,s}\right)^{-2}$ $[\because m_2 = 1\,kg,\ m_1 = 1\,g,\ l_2 = 1\,m,\ l_1 = 1\,cm,\ t_2 = 1\,s = t_1]$

বা, $n = 10^5$

$\therefore$ 1 Newton = 10^5 dyne

অর্থাৎ Newton এককে প্রকাশিত কোনো মানকে dyne এককে পরিবর্তন করার রূপান্তর গুণক (conversion factor) হলো $\frac{10^5\,dyne}{1\,N}$।

গাণিতিক উদাহরণ ১.৩

১। একটি বস্তুর ওপর 50 N বল ক্রিয়া করলে ওই বলের মান ডাইন এককে প্রকাশ কর।

আমরা জানি, SI পদ্ধতিতে বলের একক নিউটন (N) এবং CGS পদ্ধতিতে বলের একক ডাইন (dyne)।

বলের মাত্রা সমীকরণ, F = $[MLT^{-2}]$

$$\therefore \quad n_2 = n_1 \left[\frac{M_1}{M_2}\right]^x \left[\frac{L_1}{L_2}\right]^y \left[\frac{T_1}{T_2}\right]^z$$

$$= 50 \left(\frac{kg}{g}\right)^1 \left(\frac{m}{cm}\right)^1 \left(\frac{s}{s}\right)^{-2}$$

$$= 50 \times 1000 \times 100 \times 1 = 5 \times 10^6 \text{ dyne}$$

২। যদি ত্বরণের একক $9{\cdot}8\ ms^{-2}$ এবং বেগের একক $3 \times 10^8\ ms^{-1}$ ধরা হয়, তাহলে সময়ের একক কী হবে ?

আমরা জানি,

বেগের মাত্রা, $v = [LT^{-1}]$ এবং ত্বরণের মাত্রা, $[a] = [LT^{-2}]$

$\therefore$ T এর মাত্রা $= \frac{[v]}{[a]} = \frac{3 \times 10^8}{9{\cdot}8}$

$= 3{\cdot}06 \times 10^7$ s

৩। মাত্রা বিশ্লেষণের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $\tau \propto \frac{nr^4}{l}$।

এখানে, τ = প্রতি একক পাকের জন্য মোচড় দ্বন্দ্ব, l = তারের দৈর্ঘ্য, r = তারের ব্যাসার্ধ এবং n = দৃঢ়তা গুণাঙ্ক

τ এর মাত্রা = ML^2T^{-2}, n এর মাত্রা = $ML^{-1}T^{-2}$, r ও l এর মাত্রা = L

অতএব, ডানপক্ষ $\frac{nr^4}{l}$-এর মাত্রা $= \frac{ML^{-1}T^{-2} \times L^4}{L}$

$= ML^2T^{-2}$ = বামপক্ষ

১.৮ সমীকরণের নির্ভুলতা যাচাই
Verification of accuracy of an equation

সমমাত্রিক নীতির সাহায্যে কোনো সমীকরণের উভয় দিকের মাত্রা বিশ্লেষণ করে আমরা একটি সমীকরণের মাত্রাগত নির্ভুলতা যাচাই করতে পারি।

উদাহরণ : একটি বস্তুর অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ সমীকরণটি মাত্রাগতভাবে নির্ভুল কিনা যাচাই করা হোক।

এখন, s এর মাত্রা = L, u এর মাত্রা = LT^{-1}, সময় t-এর মাত্রা = T এবং a-এর মাত্রা = LT^{-2}।

অতএব, বামদিকের মাত্রা = L এবং ডানদিকের দুটি রাশি মাত্রা ut এবং $\frac{1}{2}at^2$

ut এর মাত্রা $= LT^{-1} \times T = L$

এবং $\frac{1}{2}at^2$ এর মাত্রা $= 1 \times LT^{-2} \times T^2 = L$

সুতরাং সমীকরণটির ডানদিকের মাত্রা = L

অতএব, বামদিকের মাত্রা = ডানদিকের মাত্রা।

অর্থাৎ সমীকরণটি মাত্রাগতভাবে নির্ভুল।

১.৯ বিভিন্ন প্রাকৃতিক রাশির মধ্যে সম্পর্কযুক্ত যথাযথ সমীকরণ গঠন
Formation of appropriate equation using relation of different physical quantities

সমমাত্রিক নীতির সাহায্যে বিভিন্ন প্রাকৃতিক রাশির মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করা যায়। কোনো ভৌত রাশিকে যে সকল বিষয়ের ওপর নির্ভরশীল তা জানা থাকলে ওই রাশিকে ওই সমস্ত বিষয়গুলোর সাথে সম্পর্কযুক্ত একটি সমীকরণ প্রকাশ করা যায়। তবে খেয়াল রাখতে হবে যেন সমীকরণের উভয় পার্শ্বের মাত্রা অবশ্যই সমান হয়। নিচে কয়েকটি উদাহরণের সাহায্যে আলোচনা করা হলো।

উদাহরণ ১। একটি ছোট ভারী বস্তুকে একটি নগণ্য ভরের অপ্রসারণযোগ্য সুতা দিয়ে বেঁধে ঝুলিয়ে দিলে সরল দোলক তৈরি হয়। আমরা জানি, এর দোলনকাল T নির্ভর করে ববের ভর m, দোলকের দৈর্ঘ্য l এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ g-এর ওপর। এখন এদের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

ধরা যাক সম্পর্কটি হলো,

$$T = Km^x l^y g^z \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1.1)$$

এখানে K হলো মাত্রাহীন ধ্রুবক এবং x, y ও z হলো সংখ্যা সূচক।

এখন T এর মাত্রা $= t$, m-এর মাত্রা = M, l-এর মাত্রা = L ও g-এর মাত্রা = LT^{-2}।

এই মাত্রাগুলো সমীকরণ (1.1) এ বসিয়ে পাই,

$$T = 1 . m^x L^y (LT^{-2})^z$$

বা, $$M^0L^0T^1 = M^xL^{y+z}T^{-2z} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1.2)$$

সমীকরণ (1.2)-এর উভয় দিকের মাত্রা তুলনা করা যায়।

ভরের মাত্রা থেকে পাওয়া যায়, $x = 0$

সময়ের মাত্রা থেকে পাওয়া যায়, $1 = -2z$

$\therefore \quad z = -\frac{1}{2}$

দৈর্ঘ্যের মাত্রা থেকে পাওয়া যায়, $0 = y + z$

বা, $y = -z = \frac{1}{2}$

এই মানগুলিকে সমীকরণ (1.1)-এ বসিয়ে পাই,

$$T = Km^0 l^{1/2} g^{-\frac{1}{2}}$$

বা, $$T = K\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1.3)$$

এই সম্পর্ক থেকে বোঝা যায় যে, (ক) m এর ওপর T নির্ভর করে না (খ) $T \propto \sqrt{l}$ এবং (গ) $T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$। এগুলিই হচ্ছে সরল দোলকের সূত্রাবলি।

উল্লেখ্য, K ধ্রুবকটির মান মাত্রা বিশ্লেষণ থেকে জানা যায় না।

উদাহরণ ২। পরীক্ষালব্ধ ফলাফল থেকে জানা যায় যে, কোনো গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বেগ, v মাধ্যমটির ঘনত্ব, ρ এবং স্থিতিস্থাপকতা E-এর ওপর নির্ভর করে। মাত্রা বিশ্লেষণের মাধ্যমে এদের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করা যায়।

ধরা যাক, $v \propto \rho^x$ এবং $v \propto E^y$

সুতরাং, $v \propto \rho^x E^y = K \rho^x E^y$ ... ... (i)

[এখানে K হলো একটি মাত্রাহীন ধ্রুবক]

আমরা জানি, v, ρ ও E এর মাত্রা হলো,

$v' = [LT^{-1}], \rho = ML^{-3}, E = ML^{-1}T^{-2}$

সমীকরণ (i)-এর উভয় পক্ষে মাত্রা বসিয়ে পাই,

$[LT^{-1}] = [ML^{-3}]^x [ML^{-1}T^{-2}]^y$

$= [M^{x+y} L^{-3x-y} T^{-2y}]$ ... ... (ii)

সমীকরণ (ii) এর উভয় পক্ষের M_1, L, T এর মাত্রা সমান ধরে পাই,

$x + y = 0$ $\quad -3x - y = 1$ এবং $-2y = -1$

বা, $x = -y$ $\quad$ বা, $-3(-y) - y = 1$

$\therefore x = -\frac{1}{2}$ $\quad$ বা, $+3y - y = 1$

বা, $2y = 1$

$y = \frac{1}{2}$

সমীকরণ (i)-এ x ও y এর মান বসিয়ে পাই,

$$v = K\rho^{-\frac{1}{2}} E^{\frac{1}{2}} = K\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

পরীক্ষা থেকে K = 1 পাওয়া যায়।

অতএব, গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বেগ, $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

উদাহরণ ৩। একটি টানা তারের আড় কম্পাঙ্ক (n), তারের টান (T), তারের দৈর্ঘ্য (l) এবং তারের একক দৈর্ঘ্যের ভর (m)-এর ওপর নির্ভর করে। তারের কম্পাঙ্কের সাথে অন্যান্য রাশিগুলির সম্পর্ক স্থাপন কর।

মনে করি, সম্পর্কটি হলো,

$n \propto T^x l^y m^z = KT^x l^y m^z$ ... ... (i)

এখন n এর মাত্রা T^{-1}, টান T এর মাত্রা = বলের মাত্রা

$= MLT^{-2}$, l এর মাত্রা $= [L]$ এবং m এর মাত্রা $[ML^{-1}]$

$\therefore [T^{-1}] = [MLT^{-2}]^x [L]^y [ML^{-1}]^z$

$= [M^{x+z} L^{x+y-z} T^{-2x}]$ ... ... (ii)

সমীকরণ (ii) এর উভয় দিকের মাত্রা তুলনা করে পাই,

$x + z = 0$ $\quad x + y - z = 0$

বা, $x = -z$ $\quad$ বা, $-z + y - z = 0$

আবার, $-2x = -1$ $\quad$ বা, $y = 2z$

$\therefore x = \frac{1}{2}$

বা, $z = -\frac{1}{2}$, $y = 2 \times -\frac{1}{2} = -1$

সমীকরণ (i) এ x, y ও z এর মান বসিয়ে পাই,

$$n = KT^{\frac{1}{2}} l^{-1} m^{-\frac{1}{2}} = \frac{K}{l}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

পরীক্ষার ফলাফল থেকে K এর মান পাওয়া যায়, $K = \frac{1}{2}$

$$\therefore n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

উদাহরণ ৪। গতিবেগ (v), সময় (T) এবং বল (F)-কে যদি মৌলিক রাশি ধরা হয়, তবে ভরের মাত্রা কী হবে ?

আমরা জানি,

গতিবেগের মাত্রা, $[v] = LT^{-1}$, সময়ের মাত্রা, $[t] = T$, বলের মাত্রা, $[F] = MLT^{-2}$

এই তিনটি রাশি থেকে L ও T অপনয়ন (elimination) করলে ভরের মাত্রা M পাওয়া যায়

অতএব, ভরের মাত্রা, $[m] = M = \frac{MLT^{-2}}{LT^{-1} \times T^{-1}} = \frac{[F]}{[v]\,[t]^{-1}}$

$= [F]\,[v]^{-1}[t] = Fv^{-1}T$

অর্থাৎ, গতিবেগ, সময় ও বলকে যদি মৌলিক রাশি ধরা হয়, তবে ভরের মাত্রা = $Fv^{-1}T$

মাত্রা সমীকরণের সীমাবদ্ধতা
Limitations of dimensional equation

মাত্রা সমীকরণের বহুল প্রয়োগ থাকলেও এর কিছু সীমাবদ্ধতা রয়েছে, যেমন—

(১) কোনো সম্পর্ক বা সমীকরণে উপস্থিত ধ্রুবকের মান নির্ণয় করা সম্ভব নয়। যেমন, সরল দোলনকাল $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, সম্পর্কটির ধ্রুবক 2π মাত্রা বিশ্লেষণের সাহায্যে নির্ণয় করা সম্ভব নয়।

(২) কোনো সমীকরণে যদি মাত্রাযুক্ত ধ্রুবক থাকে, তবে সম্পর্কটি নির্ণয় করা সম্ভব নয়। যেমন নিউটনের মহাকর্ষ সূত্রে, $F = G\frac{m_1m_2}{r^2}$ সমীকরণটিতে G হলো মাত্রাযুক্ত ধ্রুবক। এর উপস্থিতির জন্য মাত্রা বিশ্লেষণের মাধ্যমে সম্পর্কটি নির্ণয় করা যায় না।

(৩) কোনো সম্পর্কে যদি একটি মাত্রাহীন রাশি থাকে তবে সম্পর্কটির অবশিষ্ট রাশিগুলোর সঙ্গে মাত্রাহীন রাশিটির সম্পর্ক মাত্রা বিশ্লেষণের সাহায্যে নির্ণয় করা সম্ভব নয়। যেমন বল F দ্বারা কোনো বস্তুর ওপর কৃত কাজ W বল ও সরণ-এর মান এবং বল ও সরণের দিকের মধ্যবর্তী কোণের ওপর করে। অর্থাৎ $W = Fs\cos\theta$। এখন θ মাত্রাহীন রাশি হওয়ায় সম্পর্কটি মাত্রা বিশ্লেষণের সাহায্যে নির্ণয় করা সম্ভব নয়।

(৪) কেবল L, M ও T এই তিনটি মৌলিক রাশির ওপর ভিত্তি করে আমরা মাত্রা সমীকরণ গঠন করি। কিন্তু কোনো অজ্ঞাত রাশি যদি এই তিন রাশি অপেক্ষা বেশি রাশির ওপর নির্ভরশীল হয়, তবে সেই অজ্ঞাত রাশির মাত্রা সমীকরণ আমরা গঠন করতে পারি না। যেমন তাপ পরিবাহিতাংকের মাত্রা সমীকরণ কেবল L, M ও T দ্বারা প্রকাশ করা যায় না, কারণ এটি আরও একটি রাশি যথা তাপমাত্রার ওপর নির্ভরশীল।

(৫) এছাড়া মাত্রিক পদ্ধতিতে কোনো মাত্রাবিহীন রাশি যথা 'ধ্রুবক'-এর মান বের করা যায় না।

(৬) যে সমস্ত সমীকরণে সূচকীয়, ত্রিকোণমিতিক (যেমন $\sin\theta$, $\cos\theta$ ইত্যাদি) এবং লগারিদমিক রাশি থাকে সেই সমস্ত সমীকরণকে মাত্রা বিশ্লেষণের সাহায্যে প্রতিষ্ঠা করা যায় না।

(৭) মাত্রা বিশ্লেষণ পদ্ধতি স্কেলার ও ভেক্টর রাশি চিহ্নিত করতে পারে না।

(৮) একই মাত্রার প্রাকৃতিক রাশি একই নাও হতে পারে। যেমন টর্ক, কাজ এবং শক্তি—এদের মাত্রা একই অর্থাৎ $[ML^2T^{-2}]$। কিন্তু এরা একই প্রকৃতির রাশি নয়। কাজ ও শক্তি স্কেলার রাশি, পক্ষান্তরে টর্ক ভেক্টর রাশি।

কয়েকটি প্রাকৃতিক রাশি, সম্পর্ক, মাত্রা ও এস.আই. একক

ক্রমিক নম্বর	প্রাকৃতিক রাশি	সম্পর্ক	মাত্রা	এস. আই. একক
১।	দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, উচ্চতা, ব্যাসার্ধ, সরণ, দূরত্ব ইত্যাদি (Length, width, height, radius, displacement, distance etc.)		[L]	মিটার (m)
২।	ভর (mass)		[M]	কিলোগ্রাম (kg)
৩।	সময় (time)		[T]	সেকেন্ড (s)
৪।	ক্ষেত্রফল (area)	$(\text{দৈর্ঘ্য})^2$	$[L^2]$	m^2
৫।	আয়তন (volume)	$(\text{দৈর্ঘ্য})^3$	$[L^3]$	m^3
৬।	ঘনত্ব (density)	$\frac{\text{ভর}}{\text{আয়তন}}$	$[ML^{-3}]$	kgm^{-3}

ক্রমিক নম্বর	প্রাকৃতিক রাশি	সম্পর্ক	মাত্রা	এস. আই. একক
৭।	গতিবেগ (velocity)	$\frac{\text{দূরত্ব}}{\text{সময়}}$	$[LT^{-1}]$	ms^{-1}
৮।	ত্বরণ (acceleration)	$\frac{\text{বেগের পরিবর্তন}}{\text{সময়}}$	$[LT^{-2}]$	ms^{-2}
৯।	বল (force)	ভর × ত্বরণ	$[MLT^{-2}]$	নিউটন (N)
১০।	চাপ (pressure)	$\frac{\text{বল}}{\text{ক্ষেত্রফল}}$	$[ML^{-1}T^{-2}]$	পাসক্যাল (Pa) $=Nm^{-2}$
১১।	কার্য বা শক্তি (work or energy)	বল × সরণ	$[ML^2T^{-2}]$	জুল (J)
১২।	ক্ষমতা (power)	$\frac{\text{কাজ}}{\text{সময়}}$	$[ML^2T^{-3}]$	ওয়াট (W)
১৩।	ভরবেগ (momentum)	ভর × গতিবেগ	$[MLT^{-1}]$	$kgms^{-1}$
১৪।	বলের ঘাত (impulse of force)	বল × সময়	$[MLT^{-1}]$	$kgms^{-1}$
১৫।	বলের ভ্রামক (moment of force)	বল × দূরত্ব	$[ML^2T^{-2}]$	kgm^2s^{-2}
১৬।	জড়তার ভ্রামক (moment of inertia)	ভর × (দূরত্ব)^2	$[ML^2]$	kgm^2
১৭।	চক্রগতির ব্যাসার্ধ (radius of gyration)	$\left(\frac{\text{জড়তার ভ্রামক}}{\text{ভর}}\right)^{\frac{1}{2}}$	$[L]$	m
১৮।	কোণ (angle)	$\frac{\text{চাপ}}{\text{ব্যাসার্ধ}}$	মাত্রাহীন রাশি	রেডিয়ান (rad)
১৯।	ঘনকোণ (solid angle)	$\frac{\text{ক্ষেত্রফল}}{(\text{দূরত্ব})^2}$	মাত্রাহীন রাশি	স্টেরেডিয়ান (steradian)
২০।	মহাকর্ষীয় প্রাবল্য (gravitational intensity)	$\frac{\text{বল}}{\text{ভর}}$	$[LT^{-2}]$	Nkg^{-1}
২১।	মহাকর্ষীয় বিভব (gravitational potential)	$\frac{\text{কাজ}}{\text{ভর}}$	$[L^2T^{-2}]$	Jkg^{-1}
২২।	কৌণিক ভরবেগ (angular momentum)	রৈখিক ভরবেগ × দূরত্ব	$[ML^2T^{-1}]$	kgm^2s^{-1}
২৩।	বেগের নতিমাত্রা (velocity gradient)	$\frac{\text{বেগের পরিবর্তন}}{\text{দূরত্ব}}$	$[T^{-1}]$	s^{-1}
২৪।	পীড়ন (stress)	$\frac{\text{বল}}{\text{ক্ষেত্রফল}}$	$[ML^{-1}T^{-2}]$	$kgm^{-1}s^{-2}$ বা Nm^{-2}
২৫।	বিকৃতি (strain)	$\frac{\text{দৈর্ঘ্যের পরিবর্তন}}{\text{প্রাথমিক দৈর্ঘ্য}}$	মাত্রাহীন	—
২৬।	স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক (modulus of elasticity)	$\frac{\text{পীড়ন}}{\text{বিকৃতি}}$	$[ML^{-1}T^{-2}]$	Nm^{-2}

ক্রমিক নম্বর	প্রাকৃতিক রাশি	সম্পর্ক	মাত্রা	এস. আই. একক
২৭।	পয়সন অনুপাত (Poisson's ratio)	$\frac{\text{পার্শ্বীয় বিকৃতি}}{\text{অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি}}$	মাত্রাহীন	—
২৮।	অভিকর্ষজ ত্বরণ (acceleration due to gravity)	$\frac{\text{মহাকর্ষীয় ধ্রুবক} \times \text{পৃথিবীর ভর}}{(\text{পৃথিবীর ব্যাসার্ধ})^2}$	$[LT^{-2}]$	ms^{-2}
২৯।	পৃষ্ঠটান (surface tension)	$\frac{\text{বল}}{\text{দৈর্ঘ্য}}$	$[MT^{-2}]$	Nm^{-1} বা kgs^{-2}
৩০।	সান্দ্রতাঙ্ক (co-efficient of viscosity)	$\frac{\text{বল/ক্ষেত্রফল}}{\text{বেগের পরিবর্তন/দূরত্ব}}$	$[ML^{-1}T^{-1}]$	Nsm^{-2} বা Pas^{-1}
৩১।	আপেক্ষিক গুরুত্ব (specific gravity)	$\frac{\text{বস্তুর ভর}}{\text{সমআয়তন পানির ভর}}$	মাত্রাহীন রাশি	—
৩২।	কম্পাঙ্ক (frequency)	$\frac{\text{ঘটনা সংখ্যা}}{\text{সময়}}$	$[T^{-1}]$	Hertz (Hz) $= s^{-1}$
৩৩।	পর্যায়কাল (time period)	সময়	$[T]$	s
৩৪।	তাপ (heat)	—	—	J
৩৫।	তাপমাত্রা (temperature)	—	$[\theta]$	কেলভিন (K)
৩৬।	আপেক্ষিক তাপ (specific heat)	$\frac{\text{তাপশক্তি}}{\text{ভর} \times \text{তাপমাত্রার পার্থক্য}}$	$[L^2T^2\theta^{-1}]$	$Jkg^{-1}K^{-1}$
৩৭।	লীন তাপ (latent heat)	$\frac{\text{তাপশক্তি}}{\text{ভর}}$	$[L^2T^{-2}]$	Jkg^{-1}
৩৮।	তাপ ধারকত্ব (thermal capacity)	$\frac{\text{শোষিত তাপশক্তি}}{\text{তাপমাত্রা বৃদ্ধি}}$	$[MKL^2T^{-2}\theta^{-1}]$	JK^{-1}
৩৯।	তাপ পরিবাহিতাঙ্ক (thermal conductivity)	$\frac{\text{তাপশক্তি} \times \text{বেধ}}{\text{ক্ষেত্রফল} \times \text{তাপমাত্রার পার্থক্য} \times \text{সময়}}$	$[MLT^{-3}\theta^{-1}]$	$Wm^{-1}K^{-1}$
৪০।	তাপমাত্রার নতিমাত্রা (temperature gradient)	$\frac{\text{তাপমাত্রার পরিবর্তন}}{\text{দূরত্ব}}$	$[\theta L^{-1}]$	$m^{-1}K$
৪১।	এনট্রপি (entropy)	$\frac{\text{তাপ}}{\text{উষ্ণতা}}$	$[ML^2T^{-2}\theta^{-1}]$	JK^{-1}
৪২।	মোলার গ্যাস ধ্রুবক (molar gas constant)	$\frac{\text{কাজ বা শক্তি}}{\text{মোল সংখ্যা} \times \text{উষ্ণতা}}$	$[ML^2T^2]$	$Jmole^{-1}K^{-1}$
৪৩।	টর্ক (torque)	বল × বাহুর দৈর্ঘ্য	$[ML^2T^{-2}]$	Nm
৪৪।	বোলজম্যান ধ্রুবক (Boltzmann's constant)	$\frac{\text{শক্তি}}{\text{উষ্ণতা}}$	$[ML^2T^{-2}\theta^{-1}]$	JK^{-1}
৪৫।	তড়িৎ আধান (electric charge)	তড়িৎ প্রবাহমাত্রা × সময়	$[IT]$	কুলম্ব (C)

ক্রমিক নম্বর	প্রাকৃতিক রাশি	সম্পর্ক	মাত্রা	এস. আই. একক
৪৬।	তড়িৎ প্রবাহমাত্রা (electric current)	—	[I]	অ্যাম্পিয়ার (A)
৪৭।	তড়িৎ বিভব (electric potential)	$\frac{\text{কাজ}}{\text{আধান}}$	$[ML^2T^{-3}I^{-1}]$	JC^{-1}
৪৮।	তড়িৎ ক্ষেত্রের প্রাবল্য (electric field intensity)	$\frac{\text{বল}}{\text{আধান}}$	$[MLT^{-3}I^{-1}]$	NC^{-1} বা Vm^{-1}
৪৯।	প্রবাহ ঘনত্ব (current density)	$\frac{\text{প্রবাহমাত্রা}}{\text{প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল}}$	$[IL^{-2}]$	Am^{-2}
৫০।	তড়িৎ রোধ (electric resistance)	$\frac{\text{ক্ষমতা}}{(\text{প্রবাহমাত্রা})^2}$	$[ML^2T^{-3}I^{-2}]$	ohm (Ω)
৫১।	তড়িৎ রোধাঙ্ক (electrical resistivity)	$\frac{\text{তড়িৎ রোধ} \times \text{প্রস্থচ্ছেদ}}{\text{দৈর্ঘ্য}}$	$[ML^3T^{-3}I^{-2}]$	ohm-m
৫২।	তড়িৎ দ্বিমেরু ভ্রামক (electric dipole moment)	আধান × দূরত্ব	[ITL]	C-m
৫৩।	ধারকত্ব (capacitance)	$\frac{\text{আধান}}{\text{বিভব পার্থক্য}}$	$[M^{-1}L^{-2}T^4I^2]$	Farad (F)
৫৪।	স্টিফান ধ্রুবক (Stefan's constant)	$\frac{\text{বিকীর্ণ তাপ}}{\text{ক্ষেত্রফল} \times \text{সময়} \times (\text{উষ্ণতা})^4}$	$MLT^{-3}\theta^{-4}$	$Wm^{-2}K^{-4}$
৫৫।	চৌম্বক মেরুশক্তি (magnetic pole strength)	$\frac{\text{চৌম্বক ভ্রামক}}{\text{দৈর্ঘ্য}}$	$[IL^{-1}]$	A-m
৫৬।	স্বাবেশাঙ্ক (self inductance)	$\frac{\text{বিভব পার্থক্য}}{\text{প্রবাহমাত্রা পরিবর্তনের হার}}$	$[ML^2T^{-2}I^{-2}]$	henry (H)
৫৭।	চৌম্বক দ্বিমেরু ভ্রামক (magnetic dipole moment)	প্রবাহমাত্রা × ক্ষেত্রফল	$[IL^2]$	$A\text{-}m^2$
৫৮।	চৌম্বক প্রবাহ ঘনত্ব (magnetic flux density)	$\frac{\text{বল}}{\text{প্রবাহমাত্রা} \times \text{দৈর্ঘ্য}}$	$[MT^2I^{-1}]$	Wbm^{-2} (Tesla)
৫৯।	চৌম্বক ফ্লাক্স (magnetic flux)	চৌম্বক প্রবাহ ঘনত্ব × ক্ষেত্রফল	$[ML^2T^{-2}I^{-1}]$	Wb
৬০।	কৌণিক বেগ (angular velocity)	ω	$[T^{-1}]$	rad s^{-1}
৬১।	কৌণিক ত্বরণ (angular acceleration)	α	$[T^{-2}]$	rads^{-2}
৬২।	পৃষ্ঠ শক্তি (surface energy)	E	$[MT^{-2}]$	Jm^{-2} বা Nm^{-1}
৬৩।	তরঙ্গের তীব্রতা (intensity of wave)	শক্তি ঘনত্ব × তরঙ্গ বেগ	$[MLT^{-3}]$	$Jm^{-2}s^{-1}$ বা Wm^{-2}

গাণিতিক উদাহরণ ১.৪

১। নিউটনের সূত্র অনুসারে গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বেগ, $v = \sqrt{\frac{P}{D}}$, এখানে P = গ্যাসীয় চাপ, এবং D = ঘনত্ব। মাত্রা বিবেচনায় সমীকরণটি সঠিক কি-না যাচাই কর।

বামপক্ষ, $v = [LT^{-1}]$

ডানপক্ষ, $\sqrt{\frac{P}{D}} = \left[\frac{ML^{-1}T^{-2}}{ML^{-3}}\right]^{\frac{1}{2}}$

$= [LT^{-1}]$

সুতরাং, মাত্রা বিবেচনায় সমীকরণটি সঠিক।

২। মাত্রা বিবেচনায় দেখাও যে, নিচের সমীকরণটি সঠিক :

$$Fs = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2$$

বামপক্ষ, $Fs = [MLT^{-2}] \times [L] = [ML^2T^{-2}]$

ডানপক্ষ, $\frac{1}{2}mv^2 = [M]\,[LT^{-1}]^2 = [ML^2T^{-2}]$

$\frac{1}{2}mu^2 = [M]\,[LT^{-1}]^2 = [ML^2T^{-2}]$

সুতরাং, মাত্রা বিবেচনায় সমীকরণটি সঠিক।

১.১০ পরিমাপের মূলনীতি
Basic principle of measurements

আমরা জানি কোনো কিছুর মাপ-জোখের নাম পরিমাপ। পরিমাপ ছাড়া কোনো রাশি সম্বন্ধে সম্যক জ্ঞান লাভ করা সম্ভব নয়। প্রকৃত প্রস্তাবে পদার্থবিজ্ঞানের মূল ভিত্তি হলো বিভিন্ন রাশির পরিমাপ গ্রহণ। এজন্য পদার্থবিজ্ঞানকে **পরিমাপবিজ্ঞান** বলে।

কোনো রাশি সম্বন্ধে আমরা দুভাবে জ্ঞান লাভ করতে পারি—একটি **গুণগত** ও অন্যটি **পরিমাণগত**। বস্তু ও শক্তির বৈশিষ্ট্যকে আমরা ইন্দ্রিয়াদির সাহায্যে অনুভব করতে পারি ও ভাষায় প্রকাশ করতে পারি। বস্তু ও শক্তি সম্বন্ধে এটাই আমাদের গুণগত জ্ঞান। কিন্তু এদের সম্বন্ধে পরিমাণগত জ্ঞান লাভ করতে হলেই পরিমাপের একান্ত প্রয়োজন এবং এই পরিমাপের জন্য মাপকাঠির আবশ্যক।

কোনো একটি প্রাকৃতিক রাশি পরিমাপ করতে হলে তার একটি নির্দিষ্ট ও সুবিধাজনক অংশ বা খণ্ডকে আদর্শ (Standard) হিসেবে ধরে নিয়ে সেই রাশির পরিমাপ করা হয় এবং সর্বত্র ওই নির্দিষ্ট অংশেরই প্রচলন করা হয়। পরিমাপের এই আদর্শকে ওই রাশির একক বা মাপকাঠি বলে। যদি বলা হয় একটি কামরা 20 মিটার লম্বা, তবে আমরা বুঝি যে মিটার নামক একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যকে আদর্শ হিসেবে ধরে নেয়া হয়েছে, যার তুলনায় কামরাটি 20 গুণ লম্বা। আবার যদি বলা হয় একটি বস্তুর ভর 10 কিলোগ্রাম, তবে বুঝতে হবে যে, কিলোগ্রাম নামক একটি নির্দিষ্ট ভরকে আদর্শ হিসেবে ধরে নেয়া হয়েছে যার তুলনায় বস্তুর মোট ভর 10 গুণ। সুতরাং **একটি রাশির মধ্যে তার একক যতবার থাকবে সেই সংখ্যাই হবে ওই রাশির মাপ নির্দেশক এবং যে কোনো রাশির পরিমাপ নিতে হলে দুটি জিনিসের প্রয়োজন। একটি হলো সংখ্যা, অপরটি হলো একক।** একটি ছাড়া অপরটি অর্থহীন। যেমন রেশন ব্যাগে 10 কিলোগ্রাম চাউল আছে। এখানে ভর একটি রাশি, '10' একটি সংখ্যা এবং 'কিলোগ্রাম' একক। কিন্তু যদি বলা যায় রেশন ব্যাগে চাউলের ভর 10, তবে তার কোনো অর্থ হয় না। শুধু সংখ্যা দ্বারা রাশি প্রকাশ করা যায় না, এককও বলতে হয়। সুতরাং

রাশির মাপ = সংখ্যা × একক। এটিই হলো পরিমাপের মূলনীতি।

১.১১ পর্যবেক্ষণ ও পরীক্ষণের ক্রমবিকাশ এবং গুরুত্ব
Successive development of observations and experiments and their importance

বিজ্ঞান ও প্রযুক্তির যে সমৃদ্ধি আজ আমরা প্রত্যক্ষ করছি তা যুগে যুগে বিজ্ঞানীদের বিভিন্ন ক্ষেত্রে অবদানের ফসল। প্রাচীনকালে ভৌত বিজ্ঞানের বিকাশে গ্রিকদের একচ্ছত্র আধিপত্য ছিল। **থেলেস** (Thales খ্রি. পূ. 622–569) সূর্যগ্রহণ সম্পর্কে ভবিষ্যদ্বাণীর জন্য বিখ্যাত। বিভিন্ন পর্যবেক্ষণে, উদ্ভাবনে এবং বিজ্ঞানের ক্রমবিকাশের অগ্রযাত্রায় যাদের অবদান চিরস্মরণীয় এমন কয়েকজন বরেণ্য বিজ্ঞানীদের অবদান সম্বন্ধে আলোচনা করা হলো।

পিথাগোরাস (খ্রি. পূ. 560–480) : পিথাগোরাস জ্যোতির্বিদ্যা, গণিত, শব্দবিজ্ঞান বিষয়ে অবদানের জন্য বিখ্যাত। তিনি এবং তাঁর অনুসারীরা বিশ্বাস করতেন যে, গাণিতিক সূত্রের সাহায্যে সবকিছুই প্রকাশ করা যেতে পারে। খ্রি. পূ. চতুর্থ শতকে **ইউক্লিড** (Euclid) জ্যামিতি ও আলোকবিজ্ঞানের অনেক মূল্যবান গবেষণালব্ধ তথ্য প্রদান করেন।

আর্কিমিডিস (খ্রি. পূ. 287–212) : খ্রি. পূ. তৃতীয় শতকে আর্কিমিডিস (Archimedes) লিভারের নীতি ও উদস্থিতিবিদ্যার সূত্র আবিষ্কার করেন। তিনি গোলকীয় দর্পণের সাহায্যে সূর্য রশ্মি কেন্দ্রীভূত করে আগুন ধরানোর কৌশল উদ্ভাবন করেন। লিভারের নীতিসহ কোনো বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল উর্ধ্বমুখি বলের সূত্রও তিনি আবিষ্কার করেন।

বিজ্ঞানের ইতিহাস পর্যালোচনা করলে দেখা যায় যে, আর্কিমিডিসের পরে কয়েক শতাব্দী বিজ্ঞানের তেমন কোনো উল্লেখযোগ্য উন্নতি হয় নি। এ সময়ে বিজ্ঞান চর্চায় এক ধরনের স্থবিরতা লক্ষ করা যায়।

আধুনিক বিজ্ঞানের ক্রমবিকাশের ধারা শুরু
Beginning of successive development of modern science

গ্যালিলিও (Galileo 1564—1642) : 1589 খ্রিস্টাব্দে বিজ্ঞানী গ্যালিলিও (Galileo) মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুর বিভিন্ন তথ্য-উপাত্ত সংগ্রহ করে তিনটি সূত্র আবিষ্কার করেন। এগুলোকে পড়ন্ত বস্তুর সূত্র বলা হয়। তিনি স্থিতিবিদ্যা ও গতিবিদ্যার ওপর যথেষ্ট অবদান রাখেন।

1610 খ্রিস্টাব্দে বিজ্ঞানী গ্যালিলিও যৌগিক অণুবীক্ষণ যন্ত্র আবিষ্কার করেন। এই যন্ত্রের সাহায্যে অতি ক্ষুদ্র বস্তুকে বহুগুণে বিবর্ধিত করে দেখা যায়। এটি সরল অণুবীক্ষণ যন্ত্র অপেক্ষা অধিক বিবর্ধন ক্ষমতার অধিকারী। গ্যালিলিও দূরবীক্ষণ যন্ত্রও আবিষ্কার করেন। 1610 খ্রিস্টাব্দে তিনি নব আবিষ্কৃত দূরবীক্ষণ যন্ত্র (Telescope) ব্যবহার করে বৃহস্পতি গ্রহের 4টি উপগ্রহ আবিষ্কার করেন। তিনি পানি উত্তোলনের যন্ত্র, বায়ু থার্মোস্কোপ আবিষ্কার করেন। সর্বকালের শ্রেষ্ঠ বিজ্ঞানী আইনস্টাইন গ্যালিলিওকে আধুনিক বিজ্ঞানের চমক হিসেবে আখ্যায়িত করেছেন। তিনি সরণ, গতি, ত্বরণ, সময়ের সংজ্ঞা প্রদানসহ পড়ন্ত বস্তুর সূত্র আবিষ্কার করেন। তিনি পড়ন্ত বস্তুর সূত্র প্রদান করেন এবং দেখান যে পড়ন্ত বস্তুর দ্রুতি এর ভরের ওপর নির্ভরশীল নয়। তিনি সৃতিবিদ্যার (Kinematics) ভিত্তি স্থাপন করেন।

নিউটন (Newton, 1642—1727) : বস্তু কেন মাটিতে পড়ে ? মহাবিশ্বে সূর্য, চন্দ্র, গ্রহ, নক্ষত্র ইত্যাদির গতিবিধি সম্পর্কেও প্রাচীনকাল থেকেই মানুষের কৌতূহল ছিল। সপ্তদশ শতাব্দী পর্যন্ত মানুষের ধারণা ছিল যে বস্তুর মাটিতে পতিত হওয়া বস্তুর স্বাভাবিক ঘটনা। তিনি স্বর্গীয় বস্তুসমূহের গতিবিধি সম্পর্কে প্রথমে মতবাদ ব্যক্ত করেন। দ্বিতীয় শতাব্দীর দিকে গ্রিক জ্যোতির্বিদ টলেমি ভূ-কেন্দ্রিক তত্ত্ব উপস্থাপন করেন। এ তত্ত্ব অনুসারে স্থির পৃথিবীকে কেন্দ্র করে সূর্য, চন্দ্র, গ্রহ, নক্ষত্র আবর্তনরত। পঞ্চদশ শতাব্দীতে জ্যোতির্বিদ কোপারনিকাস 'সূর্যকেন্দ্রিক' তত্ত্ব দেন। এই তত্ত্বে সূর্যকে মহাজগতের কেন্দ্রে স্থির বিবেচনা করা হয়েছে এবং অন্যান্য গ্রহ সূর্যকে কেন্দ্র করে আবর্তন করে। কোপারনিকাসের ধারণা ছিল গ্রহগুলোকে সূর্যের চারদিকে ঘুরতে বাধ্য করে চৌম্বক বল। পঞ্চদশ শতাব্দীতে কেপলার গ্রহ-নক্ষত্রের গতিপথের বিভিন্ন উপাত্ত বিশ্লেষণ করে স্থির সিদ্ধান্তে উপনীত হন যে, গ্রহগুলোর গতিপথ বৃত্তাকার নয়, উপবৃত্তাকার। 1658 খ্রিস্টাব্দে নিউটন বল সম্পর্কে ধারণা লাভের জন্য তার বিখ্যাত পরীক্ষাটি করেন। তিনি বাতাসের অনুকূলে ও প্রতিকূলে লাফ দিয়ে দূরত্বের পার্থক্য পর্যবেক্ষণ করেন। 1665 সালে ক্যামব্রিজে পড়ার সময় তিনি মহাকর্ষ বলের তত্ত্ব, ক্যালকুলাস ও আলোর বর্ণালি এই তিনটি সূত্র আবিষ্কার করেন।

গ্রহপুঞ্জের গতির মধ্যে কেপলার কিছু নিয়মনীতি খুঁজে পান এবং এই নিয়মনীতিগুলোকে তিনটি সূত্রের সাহায্যে প্রকাশ করেন। এগুলো কেপলারের সূত্র নামে পরিচিত। কিন্তু কোপারনিকাসের চৌম্বক বলের ধারণার সঙ্গে কেপলার কোনোভাবেই উপবৃত্তাকার প্রকল্প মিলাতে পারছিলেন না। সূর্যকে কেন্দ্র করে গ্রহগুলোর আবর্তন করার সন্তোষজনক কোনো কারণ তিনি দিতে পারেন নি। তাছাড়া একটি বস্তু কেন মাটিতে পতিত হয় তার ব্যাখ্যাও কেপলারের সূত্র থেকে পাওয়া যায় না। এ সকল প্রশ্নের ব্যাখ্যা পাওয়া যায় 1687 খ্রিস্টাব্দে স্যার আইজ্যাক নিউটনের 'ফিলোসোফিয়া ন্যাচারালাস প্রিন্সিপিয়া ম্যাথমেটিকস' (Philosophiae Naturalis Principia Mathematics) গ্রন্থটি প্রকাশিত হওয়ার পর। তিনি এই বইয়ে বস্তুপিণ্ডগুলো কী করে চলাচল করে, গাণিতিক বিশ্লেষণসহ তার তত্ত্ব প্রকাশ করেন। এ ছাড়াও তিনি মহাকর্ষীয় বিধি উপস্থাপন করেন। তিনি দেখান যে উপবৃত্তাকার কক্ষে চন্দ্রের পৃথিবী প্রদক্ষিণ করার এবং সূর্যের চারদিকে গ্রহগুলোর উপবৃত্তাকার পথে ভ্রমণের কারণও এই মহাকর্ষ।

আলোকবিদ্যা ও গণিতেও নিউটনের অবদান অপরিসীম। তিনি বলবিদ্যার এবং লেন্সের সূত্রের প্রবর্তক এবং প্রতিফলক টেলিস্কোপ-এরও আবিষ্কারক।

তিনি আলোর কণিকা তত্ত্বের প্রবক্তা। এই তত্ত্ব অনুযায়ী যেকোনো দীপ্ত বস্তু (Luminous body) হতে অনবরত অসংখ্য ক্ষুদ্র কণিকা ঝাঁকে ঝাঁকে নির্গত হয়। এই কণিকা তত্ত্বের সাহায্যে তিনি আলোর বিভিন্ন গুণাগুণ সম্পর্কীয়

বিভিন্ন ঘটনা ব্যাখ্যা করতে সক্ষম হন। আলোর সরলপথে গমন, আলোর প্রতিফলন, প্রতিসরণ গুণাবলি এ তত্ত্বের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা যায়। তাঁর অবদান এত সুদূরপ্রসারী যে সনাতনী পদার্থবিজ্ঞানকে নিউটনীয় পদার্থবিজ্ঞান বলা হয়।

টমাস ইয়ং (Thomas Young, 1773—1829) : টমাস ইয়ং একজন ব্রিটিশ চিকিৎসক ও পদার্থবিজ্ঞানী। নিউটনের

কণিকা তত্ত্ব আলোর অনেক ঘটনা ব্যাখ্যা করতে পারে। তবে আলোর ব্যতিচার, অপবর্তন, সমবর্তন ইত্যাদির কোনো সন্তোষজনক ব্যাখ্যা কণিকা তত্ত্বে পাওয়া যায় না। স্যার আইজাক নিউটনের সমসাময়িক ডাচ বিজ্ঞানী **হাইগেন্স** (Huygens) 1678 খ্রিস্টাব্দে আলোর তরঙ্গ তত্ত্ব প্রদান করেন। পরে টমাস ইয়ং, ফ্রেনেলসহ আরও অনেকে এই তত্ত্বকে প্রতিষ্ঠিত করেন।

টমাস ইয়ং বহুমুখী প্রতিভার অধিকারী ছিলেন। তিনি পেশায় একজন চিকিৎসক হওয়া সত্ত্বেও পদার্থবিজ্ঞানে তাঁর অবদান অপরিসীম। তাঁর সবচেয়ে বেশি আগ্রহ ছিল আলোকবিজ্ঞানে। 1801 খ্রিস্টাব্দে তিনি আলোকের ব্যতিচার আবিষ্কার করেন। দুটি উৎস হতে সমান কম্পাঙ্ক ও বিস্তারের দুটি আলোক তরঙ্গের উপরিপাতনের ফলে কখনও কখনও আলো খুব উজ্জ্বল এবং কখনও কখনও অন্ধকার দেখায়। আলোকের এ ঘটনাকে ব্যতিচার বলে। 1807 খ্রিস্টাব্দে বিজ্ঞানী ইয়ং আলোকের ব্যতিচার প্রদর্শনের নিমিত্তে একটি পরীক্ষা সম্পাদন করেন। তাঁর নামানুসারে এই পরীক্ষাকে **ইয়ং-এর পরীক্ষা** বলে। এই পরীক্ষার ফলে আলোকের তরঙ্গ তত্ত্ব সুদৃঢ় হয়। পদার্থের স্থিতিস্থাপকতার ওপরও তিনি একটি সূত্র প্রদান করেন। স্থিতিস্থাপকতার দৈর্ঘ্য গুণাঙ্ক ইয়ং-এর গুণাঙ্ক নামে পরিচিত। মানব চোখে বিভিন্ন আলোর সংবেদনশীলতা সম্বন্ধে তিনি সর্বপ্রথম ব্যাখ্যা প্রদান করেন।

মাইকেল ফ্যারাডে (Michael Faraday, 1791–1867) : মাইকেল ফ্যারাডে একজন পদার্থবিদ ও রসায়নবিদ ছিলেন। তিনি ইংল্যান্ডের রয়েল ইনস্টিটিউটের রসায়নবিদ্যার অধ্যাপক ছিলেন। 1845 খ্রিস্টাব্দে তিনি আবিষ্কার করেন যে একটি প্রবল চৌম্বক ক্ষেত্রের প্রভাবে সমবর্তন তল ঘুরে যায়। এ ঘটনা ফ্যারাডে ক্রিয়া নামে পরিচিত। এই ক্রিয়া আবিষ্কারের পর বিজ্ঞানীরা ধারণা করলেন যে আলোকের সঙ্গে চুম্বকত্বের একটি গভীর সম্পর্ক রয়েছে। পরবর্তীকালে তিনি তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গ তত্ত্ব আবিষ্কার করেন। ফ্যারাডে তড়িৎ চুম্বকীয় আবেশ এবং আপেক্ষিক আবেশিক ধারকত্ব আবিষ্কারের জন্য অমর হয়ে আছেন। 1831 খ্রিস্টাব্দে তিনি আবিষ্কার করেন যে চৌম্বক ক্ষেত্র দ্বারা তড়িৎ প্রবাহ

সৃষ্টি করা যায়। এর নামই তড়িৎচৌম্বক আবেশ। এই তড়িৎ চৌম্বক আবেশের ওপর ভিত্তি করে জেনারেটর, ট্রান্সফরমার ও অন্যান্য বৈদ্যুতিক যন্ত্রপাতি আবিষ্কৃত হয়েছে। আধুনিক সভ্যতা বিকাশে এ সমস্ত আবিষ্কার নিঃসন্দেহে যুগান্তকারী। এছাড়াও মাইকেল ফ্যারাডে তড়িৎ বিশ্লেষণ, তড়িৎ বিশ্লেষণের সূত্র আবিষ্কার করেন। তড়িৎ প্রলেপন, তড়িৎ মুদ্রণ, ধাতু নিষ্কাশন, ধাতু বিশুদ্ধিকরণ ইত্যাদিতে তড়িৎ বিশ্লেষণ প্রক্রিয়া ব্যবহার করা হয়।

লর্ড রাদারফোর্ড (Lord Rutherford) : উনবিংশ শতাব্দী পর্যন্ত বিজ্ঞানীদের ধারণা ছিল যে, প্রতিটি পরমাণু ধনাত্মক

আধানের বস্তু দ্বারা গঠিত এবং এই ধনাত্মক আধানযুক্ত বস্তুর মাঝে ইতস্ততভাবে ঋণাত্মক আধানযুক্ত ইলেকট্রন ছড়িয়ে রয়েছে। প্রতিটি পরমাণুর মোট ধন আধান ও ঋণ আধানের পরিমাণ সমান।

1911 সালে রাদারফোর্ড বিখ্যাত আলফা বিক্ষেপণ পরীক্ষার ফলাফল হতে এই সিদ্ধান্তে উপনীত হন যে, পরমাণুর সমস্ত ধন আধান এবং ভর এর কেন্দ্রে অতি অল্প পরিসর স্থানে কেন্দ্রীভূত রয়েছে। রাদারফোর্ড একে নিউক্লিয়াস নামে অভিহিত করেন। এই নিউক্লিয়াসের চারদিকে কতকগুলো ইলেকট্রন বৃত্তাকার কক্ষপথে ঘুরছে। ইলেকট্রনগুলোর ঘূর্ণনজনিত বল ও নিউক্লিয়াস এবং ইলেকট্রনগুলোর মধ্যে ক্রিয়াশীল কুলম্বীয় বল সমান ও বিপরীতমুখি হওয়ায় ইলেকট্রন সুস্থিরভাবে নির্দিষ্ট দূরত্বে নিউক্লিয়াসকে প্রদক্ষিণ করে। পরমাণুর এই মডেলকে সৌর জগতের সাথে তুলনা করা যায়। রাদারফোর্ডের পরমাণুর এই মডেল অন্যান্য মডেলের চেয়ে অধিকতর যুক্তিসঙ্গত হলেও এর সীমাবদ্ধতা ছিল যা পরবর্তীতে নীলস বোর দূর করেন।

আলবার্ট আইনস্টাইন (Albert Einstein 1879—1955) : আজ যদি বিশ্বের যেকোনো দেশের বিজ্ঞানমনস্ক কোনো ব্যক্তিকে জিজ্ঞেস করা হয়, "বিংশ শতাব্দীর সবচেয়ে বিখ্যাত বিজ্ঞানী কে?" স্বাভাবিক উত্তর পাওয়া যাবে, **"আলবার্ট আইনস্টাইন।"** খুব কম সংখ্যক বিজ্ঞানীই আইনস্টাইনের মতো তাঁর মৌলিক কাজের সংখ্যা, বৈচিত্র্য এবং অপরিসীম গুরুত্ব বিবেচনায় এত বিখ্যাত হতে পেরেছেন। আইনস্টাইন তাঁর বহু বৈচিত্র্যময় বৈজ্ঞানিক আবিষ্কারের মধ্যে সবচেয়ে বেশি পরিচিত তাঁর আপেক্ষিক তত্ত্বের জন্য। আপেক্ষিক তত্ত্বের মধ্যে আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্বের জন্য তিনি সমধিক পরিচিত। তিনি ব্রাউনীয় গতি, আলোক তড়িৎ ক্রিয়া, আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্ব এবং শক্তি ও জড়তার সূত্র ইত্যাদি জগৎ বিখ্যাত সূত্রের আবিষ্কারক। জার্মানিতে জন্ম হওয়া সত্ত্বেও তিনি 1901 সালে সুইজারল্যান্ডের নাগরিকত্ব গ্রহণ করেন।

1905 সালে যখন তাঁর বয়স মাত্র 23 বছর তখন তিনি আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্ব প্রকাশ করেন। আমাদের মৌলিক চিন্তা-চেতনা বা বিশ্বাসের অনেক কিছুরই পরিবর্তন সাধন করেছে এই আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্ব। পারমাণবিক বিজ্ঞানের ক্রমবিকাশের ক্ষেত্রে আপেক্ষিক তত্ত্বের ভূমিকা অপরিসীম। আইনস্টাইনের মতে স্থান, কাল, দৈর্ঘ্য, কোনোটিই পরম রাশি বা নিরপেক্ষ নয়। এগুলো পরিবর্তনশীল। চিরায়ত বলবিজ্ঞানে ভর এবং শক্তি স্বাধীন হলেও আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্ব অনুসারে এরা সমতুল্য (Equivalent)। এই তত্ত্ব অনুসারে আমরা জানতে পারি যে ভরসম্পন্ন কোনো বস্তুই আলোর বেগ বা তার বেশি বেগে ছুটতে পারে না, তা যত বলই বস্তুর ওপর প্রয়োগ করা হোক না কেন। আপেক্ষিকতার ভর-শক্তির সমতা সূত্র, $E = mc^2$ তাঁর আবিষ্কার। 1915 সালে তিনি আপেক্ষিকতার সার্বিক তত্ত্ব প্রদান করেন। তাঁর আপেক্ষিক তত্ত্ব পদার্থবিজ্ঞানে দ্বিতীয় বৃহত্তম তত্ত্ব হিসেবে পরিচিত।

আইনস্টাইনের আরেকটি অমর সৃষ্টি হচ্ছে আলোক তড়িৎ ক্রিয়া ব্যাখ্যা প্রদান। কোনো ধাতব পদার্থের ওপর উপযুক্ত কম্পাঙ্ক বা তরঙ্গদৈর্ঘ্যের আলোক আপতিত হলে ওই পদার্থ হতে ইলেকট্রন নির্গত হয়। এই ক্রিয়াকে আলোক তড়িৎ ক্রিয়া বলে। তিনি 1921 সালে আলোক তড়িৎ ক্রিয়া আবিষ্কারের জন্য নোবেল পুরস্কার পান। 1905 খ্রিস্টাব্দে আলোক তড়িৎ ক্রিয়া ব্যাখ্যার জন্য আইনস্টাইন প্ল্যাঙ্কের কোয়ান্টাম তত্ত্ব প্রয়োগ করেন। কোয়ান্টাম তত্ত্ব অনুসারে যে কোনো বিকিরণ অসংখ্য ফোটনের সমষ্টি অর্থাৎ বিকিরণ ফোটনের একটি ঝাঁক বা ঝরনা। প্রতিটি ফোটনের শক্তি হচ্ছে $h\upsilon$। এখানে h হলো প্ল্যাঙ্কের ধ্রুবক এবং υ হচ্ছে ফোটনের কম্পাঙ্ক। এখন একটি ফোটন কোনো ধাতব পাতের পরমাণুর ওপর আপতিত হলে ফোটনের সাথে পরমাণুর সংঘাত হবে এবং এই সংঘাত স্থিতিস্থাপক সংঘাত। এই সংঘাতের ফলে পরমাণুস্থ একটি ইলেকট্রন ফোটনের সমুদয় শক্তি গ্রহণ করবে এবং কোনো শক্তি স্থানান্তরিত হবে না। এখন ইলেকট্রনটি পরমাণুর নিউক্লিয়াসের সঙ্গে আবদ্ধ থাকায় এই শক্তির কিছু অংশ ইলেকট্রনকে নিউক্লিয়াসের আকর্ষণ হতে মুক্ত করতে ব্যয় হবে এবং অবশিষ্ট শক্তি নিয়ে ইলেকট্রন নির্গত হবে। এটিই আলোক তড়িৎ ক্রিয়ার ব্যাখ্যা। আইনস্টাইনের ভবিষ্যদ্বাণীর ওপর ভিত্তি করে এক শ' বছর পর 2016 সালে 11ই ফেব্রুয়ারি একদল বিজ্ঞানী (LSC) মহাকর্ষীয় তরঙ্গ সরাসরি শনাক্ত করতে সক্ষম হন।

ম্যাক্স প্ল্যাঙ্ক (Max Planck, 1858—1947) : বিজ্ঞানী প্ল্যাঙ্ক ছিলেন জার্মানির প্রখ্যাত পদার্থবিদ। 1900 খ্রিস্টাব্দে তিনি তেজকণাবাদ (Quantum theory) আবিষ্কার করেন। এই আবিষ্কারের মাধ্যমে পদার্থবিজ্ঞানে বিপ্লব সূচিত হয়। বিখ্যাত বিজ্ঞানী স্যার আইজ্যাক নিউটন এবং সমকালীন বিজ্ঞানীরা বিশ্বাস করতেন যে আলো কণা প্রকৃতির। এই তত্ত্ব অনুযায়ী যে কোনো দীপ্ত বস্তু (Luminous body) হতে অনবরত অসংখ্য ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র কণিকা ঝাঁকে ঝাঁকে নির্গত হয়। 1802 সালে আলোকের ব্যতিচারের ক্ষেত্রে ইয়ং-এর দ্বিচিড় পরীক্ষা প্রমাণ করে যে আলো তরঙ্গ প্রকৃতির। আলোর বিভিন্ন ঘটনা বিশ্লেষণে ও ব্যাখ্যার সাফল্য এই তত্ত্বকে প্রতিষ্ঠিত করে। ইয়ং-এর পরীক্ষার প্রায় একশ বছর পরে ম্যাক্স প্ল্যাঙ্ক কৃষ্ণ বস্তুর বিকিরণ ব্যাখ্যায় আলোকের কণাতত্ত্ব পুনর্জীবিত করেন। এই প্রবন্ধ এবং অন্যান্য বিজ্ঞানীদের পরীক্ষালব্ধ ফলাফল থেকে এই ধারণা সৃষ্টি হয় যে আলো এবং সকল ধরনের তড়িৎ চৌম্বকীয় তরঙ্গই অতি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র শক্তিগুচ্ছের সমন্বয়ে গঠিত।

প্ল্যাঙ্কের অভিমত অনুসারে কোনো বস্তু হতে শক্তির বিকিরণ বা বিভিন্ন ধাতুর মধ্যে শক্তির বিনিময় নিরবচ্ছিন্নভাবে ঘটে না। এই প্রক্রিয়ায় কোনো ধারাবাহিকতা নেই। শক্তির নিঃসরণ বা শোষণ বিচ্ছিন্নভাবে খণ্ড খণ্ড আকারে বা এক একটি গুচ্ছ বা প্যাকেটে নির্গত বা শোষিত হয়। প্রতিটি শক্তিকণা বা শক্তিগুচ্ছ এক একটি অবিভাজ্য একক। তিনি শক্তির এ ক্ষুদ্র গুচ্ছের নাম দেন **কোয়ান্টা** (Quanta)। প্রতিটি কোয়ান্টার শক্তি বিকিরণ কম্পাঙ্কের সমানুপাতিক। এই শক্তি কোয়ান্টা পরবর্তীতে **ফোটন** হিসেবে পরিচিতি লাভ করে। ফোটন বিদ্যুৎ নিরপেক্ষ এবং এর কোনো ভর নেই। কৃষ্ণবস্তুর বিকিরণ ব্যাখ্যায় তাঁর আবিষ্কৃত কোয়ান্টাম তত্ত্ব সঠিকভাবে বর্ণনা করতে সক্ষম।

১.১২ পরিমাপে ভুল বা ত্রুটি
Errors in measurements

কোনো ভৌত রাশির নির্ভুল পরিমাপ পেতে রাশির সাথে সম্পর্কযুক্ত যে সূত্র থাকে তার অন্তর্গত সকল রাশির মাপ নির্ভুল হওয়া প্রয়োজন। এর ব্যত্যয় ঘটলে পরিমাপ সঠিক হবে না। একে ভুল বা ত্রুটি বলে।

যেকোনো ভৌত রাশি পরিমাপে প্রকৃত শুদ্ধ মান পাওয়া যায় না। কিছু না কিছু ত্রুটি পরিলক্ষিত হয়। এই ত্রুটির উৎস পরীক্ষণ কাজে ব্যবহৃত যন্ত্রপাতির সূক্ষ্মভাবে রাশি পরিমাপের সীমাবদ্ধতা এবং যিনি পরিমাপ করছেন পাঠ গ্রহণে তার ত্রুটির কারণ। এর অর্থ হলো যেকোনো পরিমাপ্য রাশির পরিমাপে একটি অনিশ্চয়তা বিদ্যমান থাকে।

পরিমাপের ত্রুটিগুলোকে উৎপন্নের ধরন অনুযায়ী কয়েকটি ভাগে ভাগ করা যায়; যথা—

(১) যান্ত্রিক ত্রুটি (Instrumental error)
(২) পর্যবেক্ষণমূলক বা ব্যক্তিগত ত্রুটি (Observational or personal error)
(৩) এলোমেলো বা অনিয়মিত ত্রুটি (Random error)
(৪) পুনরাবৃত্তিক বা নিয়মিত ত্রুটি (Systematic error)
(৫) লঘিষ্ঠ গণন ত্রুটি (Least count error)

১. যান্ত্রিক ত্রুটি (Instrumental error) :

ভৌত রাশি পরিমাপে যে সমস্ত যন্ত্র ব্যবহার করা হয়, সেগুলো সঠিক এবং সুবেদী না হলে পরিমাপে ত্রুটি দেখা দেয়। একে যান্ত্রিক ত্রুটি বলে। বিভিন্ন ধরনের যান্ত্রিক ত্রুটিগুলোর মধ্যে উল্লেখযোগ্য হলো— (i) শূন্য ত্রুটি (zero error), (ii) পিছট ত্রুটি (backlash error) ও (iii) লেভেল ত্রুটি (level error)।

(i) শূন্য ত্রুটি (zero error) : সাধারণত ভার্নিয়ার স্কেল, স্ক্রুগজ, স্লাইড ক্যালিপার্স, স্ফেরোমিটার ইত্যাদির প্রধান স্কেলের '0' দাগ ভার্নিয়ার বা বৃত্তাকার স্কেলের '0' দাগের সাথে না মিলে যদি আগে বা পিছনে থাকে, তবে একে শূন্য ত্রুটি বলে।

(ii) পিছট ত্রুটি (backlash error) : নাট-স্ক্রু নীতির উপর ভিত্তি করে যে সকল যন্ত্র তৈরি সেসব যন্ত্রে এই ত্রুটি পরিলক্ষিত হয়। নতুন যন্ত্রের তুলনায় পুরাতন যন্ত্রে এই ত্রুটি বেশি দেখা যায়। কারণ অনেকদিন ব্যবহারের ফলে নাটের গর্ত বড় হয়ে যেতে পারে বা স্ক্রু ক্ষয় হয়ে আলগা হয়ে যায়; ফলে স্ক্রুকে উভয় দিকে ঘুরালে সমান সরণ হয় না। এ ধরনের ত্রুটিকে পিছট ত্রুটি বলে। পাঠ নেওয়ার সময় যন্ত্রকে একই দিকে ঘুরালে এ ত্রুটি দূর হয়।

(iii) লেভেল ত্রুটি (level error) : কতকগুলো পরীক্ষণের ক্ষেত্রে যন্ত্রকে ভালোভাবে লেভেলিং করে না নিলে সঠিক পাঠ পাওয়া যায় না। যেমন নিক্তি, বিক্ষেপ চৌম্বকমান যন্ত্র, ট্যানজেন্ট গ্যালভানোমিটার ইত্যাদি। লেভেলিং স্ক্রু এবং স্পিরিট লেভেলের সাহায্যে লেভেলিং করে নিতে হয়।

২. পর্যবেক্ষণমূলক বা ব্যক্তিগত ত্রুটি (Observational or personal error) :

পর্যবেক্ষকের পর্যবেক্ষণে ভুল এবং সঠিক মূল্যায়নের অভাবে এ ত্রুটি পরিলক্ষিত হয়। একে পর্যবেক্ষণমূলক ত্রুটি বা ব্যক্তিগত ত্রুটি বলে। পর্যবেক্ষণ ত্রুটি বিভিন্নভাবে হতে পারে। যেমন (i) ব্যক্তিগত ত্রুটি, (ii) প্রান্ত দাগ ত্রুটি (iii) লম্বন ত্রুটি (iv) সূচক ত্রুটি (v) পরিবেশগত ত্রুটি। দৃষ্টিভ্রম (Parallax error) এ ধরনের একটি ত্রুটি।

প্রতিকার (Remedy) : পর্যবেক্ষণ সতর্কতার সাথে করে এবং একাধিকবার পাঠ নিয়ে এ ত্রুটি দূর করা যায়।

৩. এলোমেলো বা অনিয়মিত ত্রুটি (Random error) :

ত্রুটির বিভিন্ন বিষয়ে উপযুক্ত সাবধানতা অবলম্বন করা সত্ত্বেও কোনো একটি রাশির পাঠ বার বার ভিন্ন হতে দেখা যায়। পরিমাপে এ ধরনের ভিন্নতা বা পার্থক্য দুই ভাবে হতে পারে। যথা—

(১) পর্যবেক্ষকের পর্যবেক্ষণের ত্রুটির জন্য হতে পারে কিংবা
(২) পরীক্ষাকালে যন্ত্রের অবস্থার পরিবর্তনের জন্য হতে পারে।

উদাহরণস্বরূপ, মাধ্যাকর্ষণজনিত ত্বরণ পরিমাপের ক্ষেত্রে T পরিমাপ করার জন্য স্টপ ওয়াচ (stop watch) এবং *l* মাপার জন্য স্কেল সূচক ব্যবহার করা হয়। T পরিমাপের জন্য যদি ঘড়িটি ঠিকমতো চালানো এবং থামানো না হয় তবে T-এর পরিমাপে ভুল হবে। *l* পরিমাপের সময় সূচক যদি স্কেলের একটি নির্দিষ্ট দাগের সাথে না মিলে দুটি সন্নিহিত দাগের মধ্যে থাকে, তবে পর্যবেক্ষকের পক্ষে সূচকের অবস্থানের নির্ভুল মান স্কেল থেকে নেয়া সম্ভব হয় না। এ ধরনের ভুলগুলোকে অনিয়মিত বা এলোমেলো ত্রুটি বলে। এলোমেলো ত্রুটির ফলে চূড়ান্ত ফলাফল হয়ত অত্যন্ত বেশি অথবা খুব কম হতে পারে।

প্রতিকার (Remedy) : অনিয়মিত ত্রুটি পরিবর্তনশীল। প্রান্ত পাঠ প্রকৃত পাঠ অপেক্ষা বেশি হলে ধনাত্মক এবং কম হলে ঋণাত্মক হবে। এই ত্রুটি এড়াতে হলে সতর্কতার সাথে পাঠ নিতে হয়, এই ত্রুটি কমাতে হলে পরিমাপটি বার বার করতে হয়। অর্থাৎ এই ত্রুটি দূর করতে হলে অধিক সংখ্যক পাঠ গ্রহণ করে তাদের গড় পাঠ বের করতে হবে।

৪. পুনরাবৃত্তিক বা নিয়মিত ত্রুটি (Systematic error) :

পরীক্ষাকালে কোনো কোনো ত্রুটির ফলে পরীক্ষাধীন রাশির পরীক্ষালব্ধ মান সর্বদাই এবং নিয়মিতভাবে রাশিটির প্রকৃত মান অপেক্ষা কম বা বেশি হতে পারে। এ ধরনের ত্রুটিকে নিয়মিত বা পুনরাবৃত্তিক ত্রুটি বলে। মিটার ব্রিজের প্রান্তিক ত্রুটি, পোটেনশিওমিটারের প্রান্তিক ত্রুটি, স্ক্রুগজের শূন্য ত্রুটি এই ত্রুটির অন্তর্গত। অবশ্য পুনরাবৃত্তিক ত্রুটি নির্ণয় করার কোনো যুক্তিযুক্ত বা প্রামাণ্য উপায় নেই।

প্রতিকার (Remedy) : এই ত্রুটি সংশোধনের জন্য বিভিন্ন ক্ষেত্রে বিভিন্ন অবস্থায় পরীক্ষাকার্যটি পুনরাবৃত্তি করা হয়।

পরম ত্রুটি (Absolute error) : কোনো একটি রাশির প্রকৃত মান ও পরিমাপকৃত মানের পার্থক্যকে পরম ত্রুটি বলে। পরম ত্রুটির পরিবর্তে আমরা কখনও কখনও আপেক্ষিক ত্রুটি বা শতকরা ত্রুটি ব্যবহার করে থাকি।

অতএব, পরম ত্রুটি = প্রকৃত মান — পরিমাপ্য মান

$$\text{শতকরা ত্রুটি} : \frac{\text{প্রকৃত মান} \sim \text{পরীক্ষালব্ধ মান}}{\text{প্রকৃত মান}} \times 100\%$$

সামগ্রিক বা মোট ত্রুটি (Gross error) : পর্যবেক্ষকের অসতর্কতা বা অমনোযোগিতার কারণে এ ত্রুটি পরিলক্ষিত হয়। সতর্কতার সঙ্গে পরীক্ষণ কর্ম সম্পাদন করে এ ত্রুটি দূর করা যায়।

৫. লঘিষ্ঠ গণন ত্রুটি (Least count error) :

ন্যূনতম যে পরিমাপ কোনো যন্ত্রের সাহায্যে পরিমাপ করা সম্ভব তাকে ওই যন্ত্রের লঘিষ্ঠ গুণন বলে। যেমন একটি মিটার স্কেলের সাহায্যে 1 mm বা 0·1 cm সূক্ষ্মভাবে পরিমাপ করা যায়। সুতরাং মিটার স্কেলের লঘিষ্ঠ গুণন 1 mm বা 0·1 cm । অনুরূপভাবে স্লাইড ক্যালিপার্সের ক্ষেত্রে লঘিষ্ঠ গুণন 0·01 cm, 0·001 cm। সূক্ষ্ম বা উন্নত মানের যন্ত্র ব্যবহার করে লঘিষ্ঠ গুণন ত্রুটি কমানো যায়। তবে একই পরিমাপ্য রাশির অধিক সংখ্যক পাঠ নিয়ে এবং ওই পাঠসমূহের গড় মান নির্ণয় করে পরিমেয় রাশির সঠিক মানের কাছাকাছি মান পাওয়া যায়। এলোমেলো বা অনিয়মিত এবং পুনরাবৃত্তি বা নিয়মিত ত্রুটির ক্ষেত্রে লঘিষ্ঠ গুণন ত্রুটি লক্ষ করা যায়।

সঠিকতা ও সূক্ষ্মতা (Accuracy and Precision) :

বিভিন্ন ভৌত রাশি পরিমাপের জন্য আমরা বিভিন্ন ধরনের যন্ত্রপাতি ব্যবহার করি। যন্ত্রগুলি ব্যবহারের পূর্বে তাদের সঠিকতা ও সূক্ষ্মতা সম্বন্ধে স্পষ্ট ধারণা থাকা উচিত। এখন আমরা সঠিকতা ও সূক্ষ্মতা বলতে কী বুঝি তা আলোচনা করব।

সঠিকতা (Accuracy) : কোনো যন্ত্রের সঠিকতা বলতে বোঝায় যে ওই যন্ত্র সংশ্লিষ্ট রাশিটির প্রকৃত মানের কত কাছাকাছি পরিমাপ করতে সক্ষম। রাশিটির প্রকৃত মান ও যন্ত্রটি দ্বারা পরিমাপ্য মান যত কাছাকাছি হয় যন্ত্রের সঠিকতা তত বেশি হয়।

ধরা যাক, একটি তুলাযন্ত্র (balance) দ্বারা 50 g ভরের একটি বস্তু পরিমাপ করে 45 g পাওয়া গেল। সুতরাং বলা যায় যে তুলা যন্ত্রটির সঠিকতা ভালো নয়। আবার, অন্য একটি তুলা যন্ত্র দ্বারা ওই বস্তুটি মেপে 49·5 g পাওয়া গেল। অতএব, দ্বিতীয় যন্ত্রটির সঠিকতা অনেক উন্নত মানের।

সূক্ষ্মতা (Precision) : কোনো যন্ত্রের সূক্ষ্মতা বলতে বোঝায় যে ওই যন্ত্র দ্বারা সংশ্লিষ্ট রাশিটি পরিমাপ করতে পরপর (repeatedly) পরিমাপে প্রাপ্ত পাঠগুলি পরস্পরের কত কাছাকাছি হয়। পরপর পাঠগুলির পার্থক্য যত কম হবে যন্ত্রটির সূক্ষ্মতা তত বেশি হবে। উদাহরণ—ধরা যাক একটি বস্তুর ভর 50 g। এটি তুলা যন্ত্রে ছয়বার পাঠ নিয়ে ভর পাওয়া গেল 48 g, 49·2 g, 49 g, 49·2 g, 49·6 g, 49·5 g। এক্ষেত্রে পরপর পাঠগুলোর পার্থক্য কম। তাই যন্ত্রটির সূক্ষ্মতা ভালো।

ত্রুটি গণনা
Calculation of errors

কোনো পরিমাপই সম্পূর্ণ ত্রুটিহীন করা সম্ভব নয়। একটি ভৌত রাশিকে একই পদ্ধতিতে কয়েকবার পরিমাপ করলেও প্রত্যেকবার একই মান পাওয়া যায় না।

সঠিক মান (Actual or true value) : ধরা যাক, একটি ভৌত রাশি একই পদ্ধতিতে n সংখ্যকবার পরিমাপ করে মানগুলো পাওয়া গেল $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$। এই মানগুলোর গড় মান হলো ওই ভৌত রাশির সঠিক মান। সুতরাং,

$$\text{সঠিক মান, } \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots x_n}{n} \quad \dots \quad \dots \quad \text{(i)}$$

ত্রুটি (Error) : কোনো ভৌত রাশির সঠিক মানকে চূড়ান্ত মান হিসেবে লেখা যথেষ্ট নয়। সঠিক মানে কতটুকু ত্রুটি আছে তা উল্লেখ করা একান্ত প্রয়োজন।

সুতরাং, কোনো ভৌত রাশির চূড়ান্ত মান,

$$x = \bar{x} \pm e$$

এখানে e ত্রুটির পরিমাণ প্রকাশ করে। নিম্নোক্ত উপায়ে ত্রুটির পরিমাণ নির্ণয় করা যায় :

$$e = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n} \quad \dots \quad \dots \quad \text{(ii)}$$

এখানে $|x_1 - \bar{x}|$, $|x_2 - \bar{x}|$ ... $|x_n - \bar{x}|$ হলো যথাক্রমে প্রথম পরিমাপের, দ্বিতীয় পরিমাপের ... n তম পরিমাপের ত্রুটির মান। এগুলোকে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, ... n তম চরম ত্রুটি (absolute error) বলা হয়। e-কে গড় চরম ত্রুটি (mean absolute error)-ও বলা হয়।

ভগ্নাংশ ত্রুটি বা আপেক্ষিক ত্রুটি (Fractional error or relative error) : গড় চরম ত্রুটি ও সঠিক মানের অনুপাতকে ভগ্নাংশ বা আপেক্ষিক ত্রুটি বলা হয়। অর্থাৎ ভগ্নাংশ ত্রুটি বা আপেক্ষিক ত্রুটি $= \frac{e}{x}$।

শতকরা ত্রুটি (Percentage of error) : ভগ্নাংশ ত্রুটি বা আপেক্ষিক ত্রুটিকে 100 দ্বারা গুণ করে শতকরা ত্রুটি নির্ণয় করা হয়। অর্থাৎ শতকরা ত্রুটি $= \frac{e}{x} \times 100\% = \frac{\text{প্রকৃত মান} \sim \text{প্রাপ্ত মান}}{\text{প্রকৃত মান}} \times 100\%$।

গাণিতিক উদাহরণ ১.৫

১। একটি দোলকের দৈর্ঘ্য (0·8 ± 0·01) m এবং পর্যায়কাল (2·2 ± 0·10) sec হলে অভিকর্ষজ ত্বরণ পরিমাপে শতকরা ত্রুটি কত ?

আমরা জানি, সরল দোলকের পর্যায়কাল, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

$\therefore \quad g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$

অভিকর্ষজ ত্বরণ পরিমাপে আপেক্ষিক ত্রুটি,

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta T}{T} = \frac{0{\cdot}01}{0{\cdot}6} + \frac{0{\cdot}10}{2{\cdot}2}$$

$$\therefore \quad \text{শতকরা ত্রুটি} = \frac{\Delta g}{g} \times 100 = \frac{0{\cdot}01}{0{\cdot}6} \times 100 + \frac{0{\cdot}10}{2{\cdot}2} \times 100$$
$$= 1{\cdot}667 + 4{\cdot}545 = 6{\cdot}21\%$$

২। একটি ধারকের ধারকত্ব C = (2·5 ± 0·1) μF। ওই ধারককে V = (25 ± 0·2) volt বিভবে আহিত করা হলে ধারকটিতে সঞ্চিত আধান কত ? সঞ্চিত আধানের শতকরা ত্রুটি ও পরম ত্রুটি কত ?

ধারকে সঞ্চিত আধান, $Q = C \times V = 2{\cdot}5 \times 10^{-6} \times 25$ coulomb

$= 62{\cdot}5 \times 10^{-6}\, C = 6{\cdot}25 \times 10^{-5}\, C$

এখন শতকরা ত্রুটি নির্ণয়ের ক্ষেত্রে, $\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta C}{C} + \frac{\Delta V}{V}$

$$\therefore \quad \frac{\Delta Q}{Q} \times 100\% = \frac{\Delta C}{C} \times 100\% + \frac{\Delta V}{V} \times 100\%$$
$$= \frac{0{\cdot}1}{2{\cdot}5} \times 100 + \frac{0{\cdot}2}{25} \times 100$$
$$= 4\% + 0{\cdot}8\% = 4{\cdot}8\%$$

পরম ত্রুটি $= 6{\cdot}25 \times 10^{-5}\, C$ এর $4{\cdot}8\% = 0{\cdot}3 \times 10^{-5}\, C$

$\therefore$ নির্ণেয় সঞ্চিত আধান, $Q = 6{\cdot}25 \times 10^{-5} \pm 4{\cdot}8\%\, C$

$= (6{\cdot}25 \pm 0{\cdot}3) \times 10^{-5}\, C$

১.১৩ পরিমাপ্য রাশির শুদ্ধ মান নির্ধারণ
Determination of correct value of the measurable quantity

কোনো পরিমাপ্য রাশির আনুপাতিক ভুল নির্ধারণ :

ধরা যাক, x একটি পরিমাপ্য ভৌত রাশি এবং এটি y ও z রাশি দুইটির সাথে নিম্নোক্ত সমীকরণের দ্বারা সম্পর্কযুক্ত,

$$x = y^m z^n \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1.4)$$

এখন y, z রাশি দুইটিকে পরিমাপ করতে ভুল হলে x-এর পরিমাপে তা প্রতিফলিত হবে।

সমীকরণ (1.4)-কে লগারিদমিক অবকলন (Logarithmic differentiation) করে পাই,

$$\delta x = m\delta y + n\delta z$$

y, z রাশিগুলোকে পরিমাপ করার সময় সর্বোচ্চ সম্ভাব্য ভুল যথাক্রমে $\pm\,\delta y$ এবং $\pm\,\delta z$; ফলে x-এর সর্বোচ্চ সম্ভাব্য ভুল হবে $\pm\delta x$।

সুতরাং সর্বোচ্চ সম্ভাব্য আনুপাতিক ভুল,

$$\left(\frac{\delta x}{x}\right)_{max} = m\left(\frac{\delta y}{y}\right) + n\left(\frac{\delta z}{z}\right) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1.5)$$

পরিমাপ্য ভৌত রাশি x-এর সাথে যে সকল রাশি জড়িত থাকে (এক্ষেত্রে y ও z) তাদের প্রত্যেকের আনুপাতিক ভুল পৃথকভাবে নির্ণয় করে ওই নির্ণিত ভুলগুলোর পরিমাণকে তাদের সংশ্লিষ্ট রাশিগুলোর শক্তি সংখ্যা (Power number) দ্বারা গুণ করে, গুণফলগুলো যোগ করলে ওই যোগফলই হবে পরিমাপ্য ভৌত রাশির (এক্ষেত্রে x) আনুপাতিক ভুলের সর্বোচ্চ মান। অতএব, যে রাশির শক্তি সংখ্যা বেশি সেটি খুব সতর্কতার সঙ্গে পরিমাপ করলে পরিমাপ্য রাশির আনুপাতিক ভুল কম হবে। যেমন,

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

ওপরে আলোচিত বিষয় অনুসারে g এর সর্বোচ্চ আনুপাতিক ভুল

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta l}{l} + 2\frac{\delta T}{T} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1.6)$$ [শক্তির চিহ্ন বিবেচনা না করে]

সমীকরণ (1.6) হতে দেখা যাচ্ছে যে T পরিমাপে সামান্য ভুল হলেও তা দ্বিগুণ বৃদ্ধি পেয়ে সমীকরণে অন্তর্ভুক্ত হয়।

হাতে কলমে কাজ : একটি সরল দোলকের দোলনকাল $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ মাত্রা সঙ্গতিপূর্ণ কিনা ?

সমাধান : বামপক্ষ, T = [T]

ডানপক্ষ, $\sqrt{\frac{l}{g}} = \left[\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{LT^{-2}}}\right] = [\sqrt{T^2}] = [T]$

সুতরাং বামপক্ষের মাত্রা = ডানপক্ষের মাত্রা

পরীক্ষালব্ধ ফলে তাৎপর্যপূর্ণ সংখ্যার হিসাব
Calculation of significant figure in experimental result

পরিমাপ্য রাশির সূক্ষ্মতা ওই রাশির সঙ্গে সংশ্লিষ্ট অন্যান্য রাশিগুলোর পরিমাপের সূক্ষ্মতার উপর নির্ভর করে। কিন্তু আমরা যখন ক্যালকুলেটরের সাহায্যে হিসাব করি, তখন অনেক ডিজিট পাওয়া যায়। দশমিকের পরের সব ডিজিট ফলাফলে লিপিবদ্ধ করা অর্থহীন। দশমিকের পরে কতকগুলো সংখ্যা রাখতে হবে তা পর্যবেক্ষণ সূক্ষ্মতার উপর নির্ভর করে। কাজেই পরীক্ষালব্ধ ফলে অপ্রয়োজনীয় সংখ্যা বাদ দিয়ে যে সব সংখ্যার পরিমাপ বিশ্বাসযোগ্য তাই রাখতে হবে। যেমন মিটার স্কেল দিয়ে কোনো দৈর্ঘ্য মাপলে এক মিলিমিটারের কম দৈর্ঘ্য সূক্ষ্মভাবে মাপা যায় না। সুতরাং দৈর্ঘ্য পরিমাপের সূক্ষ্মতার পরিমাপ হবে ± 1 mm।

গড় ভুল (Mean error) : বিভিন্ন সতর্কতা অবলম্বন করে পরিমাপ্য কোনো রাশির প্রকৃত মানের কাছাকাছি মান আমরা পেতে পারি, তবে প্রকৃত মান পরিমাপ করতে পারি না। কোনো রাশি অনেকবার পরিমাপের পাঠগুলোর গড় মানকে ওই ভৌত রাশির সঠিক মান বলা সঙ্গত নয়। ওই পরিমাপে ত্রুটি উল্লেখ করা প্রয়োজন। পরিমাপে যে মান পাওয়া যায় তা উভয় পাশে নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে সামান্য পরিমাণ ভুল থাকার সম্ভাবনা আছে, যা ± শতকরা মান দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(i) গড় ভুল বা গড় বিচ্যুতি নির্ণয় (Determination of mean error or mean deviation): ধরা যাক, পরিমাপ্য একটি রাশির কেবল অনিয়মিত ভুল অন্তর্ভুক্ত হচ্ছে। রাশিটি যদি n সংখ্যক বার মাপ নেওয়া হয়ে থাকে এবং এর মান যথাক্রমে $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$ পাওয়া যায়, তবে রাশিগুলোর গড় হবে,

$$A = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_n}{n}$$

এই পরিমাপে কেবল অনিয়মিত ভুলই অন্তর্ভুক্ত থাকায় পরিমাপে প্রাপ্ত গড় মান A প্রকৃত মানের কাছাকাছি হবে। রাশিটির প্রত্যেকটি মাপ এই গড় সংখ্যা A হতে সামান্য বিচ্যুত থাকে বলে ঐ মাপের ভুল ধরা যায়। সুতরাং, রাশিটির বিভিন্ন পরিমাপে যে বিচ্যুতি থাকবে তা যথাক্রমে,

$$d_1 = x_1 - A,\ d_2 = x_2 - A,\ d_3 = x_3 - A,\ \ldots\ \ldots\ d_n = x_n - A$$

এখন বিচ্যুতির চিহ্ন বাদ দিয়ে এগুলোর গড় নিলেই গড় বিচ্যুতি বা গড় ভুল পাওয়া যায়।

অতএব, গড় বিচ্যুতি বা গড় ভুল, $d = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + \ldots\ldots + d_n}{n}$ । সুতরাং পরিমাপ্য রাশিটির প্রকৃত মাপ, $x = (A \pm d)$

(ii) প্রমাণ বিচ্যুতি (Standard deviation) : অনেক সময় এই বিচ্যুতিগুলোর গড় নির্ণয়ের পরিবর্তে তাদের বর্গের গড় বের করে তার বর্গমূল নির্ণয় করা হয়। এই বর্গমূলের পরিমাণকে প্রমাণ বিচ্যুতি বলে।

সুতরাং, প্রমাণ বিচ্যুতি, $D = \sqrt{\dfrac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 .... + d_n^2}{n}} = \sqrt{\dfrac{\Sigma d^2}{n}}$

অতএব, রাশিটির প্রকৃত মাপ হবে, $x = (A \pm D)$

এবার পরিমাপ্য রাশিটির আন্তর্জাতিক স্বীকৃত মান প্রাকৃতিক ধ্রুবক তালিকা (Physical constant table) থেকে সংগ্রহ করে রাশিটির শুদ্ধতার শতকরা হিসাব নিম্নোক্তভাবে নির্ণয় করতে পারি।

$$\text{পরিমাপ্য রাশির শুদ্ধ মান} = \frac{\text{রাশিটির সঠিক মান} \sim \text{প্রাপ্ত মান}}{\text{সঠিক মান}} \times 100\%;$$ ইহাই ভুলের শতকরা হার।

> **নিজে কর :** পদার্থবিজ্ঞানের ল্যাবরেটরিতে তুমি সরল দোলকের সাহায্যে g-এর মান নির্ণয় করে পেয়েছ $9{\cdot}89\ ms^{-2}$। g-এর প্রকৃত মান $9{\cdot}81\ ms^{-2}$ ধরে তোমার প্রাপ্ত মানের শতকরা ত্রুটি নির্ণয় কর।

$$\text{এখানে পরিমাপ্য রাশির শুদ্ধ মান} = \frac{9{\cdot}89 - 9{\cdot}81}{9{\cdot}81} \times 100\%$$
$$= \frac{0{\cdot}08}{9{\cdot}81} \times 100\% = 0{\cdot}815\%$$

অতএব, নির্ণেয় পরীক্ষায় প্রাপ্ত মানের শতকরা ত্রুটি হলো $0{\cdot}815\%$

গাণিতিক উদাহরণ ১.৬

১। একটি গোলকের পরিমাপ্য ব্যাসার্ধ, $R = 5{\cdot}3 \pm 0{\cdot}1$ হলে আয়তনে শতকরা ত্রুটি নির্ণয় কর।

এখানে, $R = 5{\cdot}3$

$\therefore$ পরম ত্রুটি, $\Delta R = 0{\cdot}1$

এখন, গোলকের আয়তন, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

$\therefore$ আয়তনে আপেক্ষিক বা আনুপাতিক ত্রুটি, $\frac{\Delta V}{V} = \frac{3\Delta R}{R}$

$\therefore \frac{\Delta V}{V} = 3 \times \frac{0{\cdot}1}{5{\cdot}3} = \frac{0{\cdot}3}{5{\cdot}3}$

অতএব, আয়তনে ত্রুটি, $\frac{\Delta V}{V} \times 100\% = \frac{0{\cdot}3 \times 100\%}{5{\cdot}3} = 5{\cdot}7\%$

২। একজন ছাত্র পরীক্ষাগারে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান $9{\cdot}81\ ms^{-2}$ নির্ণয় করল। অপরদিকে যখন সে $0{\cdot}01$ kg ভরের কোনো বাটখারাকে স্প্রিং নিক্তিতে ঝুলিয়ে দিল তখন দেখল $0{\cdot}0980$ N বল দেখাচ্ছে। তার পরীক্ষালব্ধ অভিকর্ষজ ত্বরণের শতকরা ত্রুটি নির্ণয় কর।

আমরা জানি, $F = mg$

$\therefore g = \frac{F}{m} = \frac{0{\cdot}0980}{0{\cdot}01} = 9{\cdot}80\ ms^{-2}$

$\therefore$ প্রকৃত মান, $x = 9{\cdot}80\ ms^{-2}$

এখানে,
পরিমাপ্য মান, $y = 9{\cdot}81\ ms^{-2}$
নিক্তিতে চাপানো ভর, $m = 0{\cdot}01$ kg
প্রাপ্ত বল, $F = 0{\cdot}0980$ N

$$\text{আমরা জানি, ত্রুটির শতকরা হার} = \frac{x - y}{x} \times 100\%$$
$$= \frac{9{\cdot}80 - 9{\cdot}81}{9{\cdot}80} \times 100\%$$
$$= -0{\cdot}102\%$$

৩। কোনো একটি পরীক্ষায় বর্তনীতে তড়িৎ প্রবাহের জন্য ৭টি স্বতন্ত্র পাঠ নেয়া যাক। পাঠগুলো নিম্নরূপ :
$I_1 = 5{\cdot}6$ mA, $I_2 = 5{\cdot}8$ mA, $I_3 = 5{\cdot}2$ mA, $I_4 = 5{\cdot}3$ mA, $I_5 = 5{\cdot}5$ mA, $I_6 = 5{\cdot}1$ mA, $I_7 = 5{\cdot}7$ mA.
(i) তড়িৎ প্রবাহের গাণিতিক গড়, (ii) গড় মান হতে বিচ্যুতি (iii) গড় বিচ্যুতি এবং (iv) প্রমাণ বিচ্যুতি নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

(i) গাণিতিক গড় মান, $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_7}{7}$

বা, $\bar{x} = \dfrac{5{\cdot}6 + 5{\cdot}8 + 5{\cdot}2 + 5{\cdot}3 + 5{\cdot}5 + 5{\cdot}1 + 5{\cdot}7}{7}$ mA

$= \dfrac{38{\cdot}2}{7} = 5{\cdot}46$ mA

(ii) গড় মান হতে বিচ্যুতি,

$\delta_1 = x_1 - \bar{x} = 5{\cdot}6 - 5{\cdot}46 = +0{\cdot}14$ mA

$\delta_2 = x_2 - \bar{x} = 5{\cdot}8 - 5{\cdot}46 = +0{\cdot}34$ mA

$\delta_3 = x_3 - \bar{x} = 5{\cdot}2 - 5{\cdot}46 = -0{\cdot}26$ mA

$\delta_4 = x_4 - \bar{x} = 5{\cdot}3 - 5{\cdot}46 = -0{\cdot}16$ mA

$\delta_5 = x_5 - \bar{x} = 5{\cdot}5 - 5{\cdot}46 = +0{\cdot}04$ mA

$\delta_6 = x_6 - \bar{x} = 5{\cdot}1 - 5{\cdot}46 = -0{\cdot}36$ mA

$\delta_7 = x_7 - \bar{x} = 5{\cdot}7 - 5{\cdot}46 = +0{\cdot}24$ mA

(iii) গড় বিচ্যুতি,

$$\bar{\delta} = \frac{|\delta_1| + |\delta_2| + |\delta_3| + |\delta_4| + |\delta_5| + |\delta_6| + |\delta_7|}{7}$$

$$= \frac{0{\cdot}14 + 0{\cdot}34 + 0{\cdot}26 + 0{\cdot}16 + 0{\cdot}04 + 0{\cdot}36 + 0{\cdot}24}{7} = \frac{1{\cdot}54}{7} = 0{\cdot}22 \text{ mA.}$$

(iv) প্রমাণ বিচ্যুতি, $\text{S. D.} = \sqrt{\dfrac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2 + \delta_5^2 + \delta_6^2 + \delta_7^2}{7}}$

$$= \sqrt{\frac{(0{\cdot}14)^2 + (0{\cdot}34)^2 + (0{\cdot}26)^2 + (0{\cdot}16)^2 + (0{\cdot}04)^2 + (0{\cdot}36)^2 + (0{\cdot}24)^2}{7}}$$

$$= \sqrt{\frac{(0{\cdot}0196 + 0{\cdot}1156 + 0{\cdot}0676 + 0{\cdot}0256 + 0{\cdot}0016 + 0{\cdot}1296 + 0{\cdot}0576)}{7}}$$

$$= \sqrt{\frac{0{\cdot}4172}{7}} = \sqrt{0{\cdot}0596} \text{ mA} = 0{\cdot}244 \text{ mA}$$

হিসাব : একটি বস্তুর ভর 100 ± 2 kg এবং আয়তন $= 100 \pm 3$ m³ হলে, ঐ বস্তুর ঘনত্বে (i) শতকরা ত্রুটি (ii) পরম ত্রুটি নির্ণয় কর।

এখানে, $M = 100 \pm 2$ kg, $V = 100 \pm 3$ m³

এখন, ঘনত্বে (i) শতকরা ত্রুটি $= \left(\dfrac{\Delta M}{M} + \dfrac{\Delta V}{V}\right) \times 100\% = \left(\dfrac{2}{100} + \dfrac{3}{100}\right) \times 100\%$

$= \left(\dfrac{5}{100}\right) \times 100\% = 5\%$

(ii) ঘনত্ব, $\rho = \dfrac{M}{V} = \dfrac{100}{100} = 1 \text{ kgm}^{-3}$

পরম ত্রুটি $= \rho\left(\dfrac{\Delta M}{M} + \dfrac{\Delta V}{V}\right) = 1 \times \left(\dfrac{2}{100} + \dfrac{3}{100}\right)$

$= 1 \times (0{\cdot}02 + 0{\cdot}03) = 1 \times 0{\cdot}05 = 0{\cdot}05 \text{ kgm}^{-3}$

তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যা
Significant figures

একটি ভৌত রাশিকে পরিমাপ করে প্রাপ্ত মানে যতগুলি অঙ্কসংখ্যা পর্যন্ত সম্পূর্ণরূপে নিশ্চিত হওয়া যায় তার পরবর্তী অঙ্ক পর্যন্ত অঙ্কগুলোকে তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যা বলে। তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যা বোঝার জন্য নিম্নে একটি উদাহরণ দেওয়া হলো।

মনে করি একটি মিটার স্কেল দিয়ে একটি দণ্ডের দৈর্ঘ্য পরিমাপ করা হলো। দেখা গেল যে দণ্ডটির দৈর্ঘ্য 26·5 cm অপেক্ষা বেশি, কিন্তু 26·6 cm অপেক্ষা কম। যদি পাঠটি 26·5 cm এর কাছাকাছি হয় তবে দণ্ডটির দৈর্ঘ্য ধরা হয় 26·5 cm। লক্ষণীয় যে এই পাঠের শেষ অঙ্কটির পরিমাপে অনিশ্চয়তা (uncertainty) রয়েছে। সুতরাং পরিমাপে প্রাপ্ত পাঠে তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্ক সংখ্যা = 3।

তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যা নির্ণয়ের নিয়ম

তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যা নির্ণয়ের নিয়মগুলি নিম্নে দেখানো হলো :

(i) শূন্য নয় এমন সকল অঙ্কই তাৎপর্যপূর্ণ। যেমন 1657 সংখ্যাটিতে তাৎপর্যপূর্ণ সংখ্যা হলো চারটি।

(ii) অশূন্য (non-zero) দুটি অঙ্কের মাঝখানে অবস্থিত শূন্যগুলো তাৎপর্যপর্ণ। যেমন 38075 সংখ্যাটিতে তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যা হলো পাঁচটি।

(iii) দশমিক বিন্দুর বামদিকে অবস্থিত শূন্যগুলি এবং অশূন্য অঙ্কের বামদিকে শূন্যগুলি তাৎপর্যপূর্ণ নয়। যেমন 0·000385 সংখ্যাটিতে তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যা তিনটি। এই সংখ্যার দশমিক বিন্দুর বামদিকের শূন্য তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্ক নয়। আবার 3-এর বামদিকে অবস্থিত শূন্য তিনটি ও তাৎপর্যপূর্ণ নয়।

(iv) কোনো সংখ্যার বামদিকের প্রথম অশূন্য অঙ্ক থেকে শুরু করে ডানদিকের শেষ অঙ্ক পর্যন্ত সকল অঙ্কই তাৎপর্যপূর্ণ। যেমন 29·570 সংখ্যাটিতে তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যা হলো পাঁচটি।

(v) যদি কোনো সংখ্যার দশমিক বিন্দুর পর প্রথম অশূন্য অঙ্কের পূর্বে কিছু শূন্য থাকে তবে ওই শূন্যগুলি তাৎপর্যহীন। যেমন 0·00569 সংখ্যাটিতে তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যা হলো তিনটি।

(vi) দশমিক বিন্দুর পরের শূন্য অঙ্কগুলি তাৎপর্যপূর্ণ হয় যদি ওই শূন্যগুলির পূর্বে কোনো অশূন্য অঙ্ক থাকে। যেমন 2789·00 সংখ্যাটিতে তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যা ছয়টি।

(vii) যদি কোনো পাঠকে এক একক থেকে অন্য এককে রূপান্তরিত করার সময় দশমিক বিন্দুকে সরিয়ে অতিরিক্ত শূন্য বসানো হয় তবে অতিরিক্ত শূন্য অঙ্কগুলি তাপৎপর্যপূর্ণ হয় না। যেমন 408·0 m কে যদি 40800 cm বা 4·080 km এককে রূপান্তরিত করা হয় তবে তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যা চারই থাকে।

(viii) যোগ ও বিয়োগের ক্ষেত্রে যে সংখ্যাটির দশমিক চিহ্নের পরের অঙ্কগুলির সংখ্যা ন্যূনতম, ফলাফলে দশমিকের পরে অঙ্কসংখ্যা তার সমান রাখতে হয়। যেমন 1·256 + 2·7 = 3·956। যোগফলটির তাৎপর্যপূর্ণ সংখ্যা হবে 3·9।

(ix) গুণ ও ভাগের ক্ষেত্রে উত্তরফলের তাৎপর্যপূর্ণ সংখ্যা হবে সবচেয়ে কম তাৎপর্যপূর্ণ সংখ্যাযুক্ত রাশির সমান। যেমন $\frac{2·312 \times 1·5}{1·32} = 2·627$। এক্ষেত্রে 1·5 এর তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যা দুই। অতএব, উত্তরফলের তাৎপর্যপূর্ণ সংখ্যা হবে 2·6।

(x) Round off প্রক্রিয়ার মাধ্যমে কোনো রাশিকে নিম্নোক্ত উপায়ে তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কবিশিষ্ট রাশিতে প্রকাশ করা হয়।

(ক) নির্দিষ্ট অঙ্কসংখ্যার পরে কোনো অঙ্ক 5-এর বেশি হলে, এর পূর্ববর্তী অঙ্কের সাথে 1 যোগ করে প্রকাশ করা হয়। যেমন 3·78 = 3·8 আবার, 2·23 = 2·2।

(খ) যে অঙ্কটিকে রাউন্ডিং করা হবে সেটি 5 হলে এবং এর পূর্ববর্তী সংখ্যা অযুগ্ম সংখ্যা হলে পূর্ববর্তী অঙ্কের সাথে 1 যোগ করতে হয়। যুগ্ম সংখ্যা হলে অপরিবর্তিত থাকবে। যেমন 2·75 = 2·8, কিন্তু 3·45 = 3·4 হবে।

গাণিতিক উদাহরণ ১.৭

১। 25.65 Ω একটি রোধের মধ্য দিয়ে 2.38 A কারেন্ট প্রবাহিত হচ্ছে। রোধের দুই প্রান্তের বিভব পার্থক্য তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কে নির্ণয় কর।

আমরা জানি, বিভব পার্থক্য, $V = IR$

$\therefore \quad V = 2.38 \times 25.65$

$= 61.0470$ Volt

এখানে,
$I = 2.38$ A
$R = 25.65\ \Omega$

যেহেতু, 2.38 সংখ্যাটিতে তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্ক সংখ্যা তিন। তাই গুণফলে তাৎপর্যপূর্ণ সংখ্যা তিন অপেক্ষা বেশি হবে না।

২। একটি ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 5.22 m, 3.65 m ও 3.92 m। ঘরটির ক্ষেত্রফল, আয়তন তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যায় প্রকাশ কর।

আমরা জানি,

ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ

$= 5.22 \times 3.65 = 19.053$

আয়তন = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা

$= 5.22 \times 3.65 \times 3.92\ m^3$

$= 74.687760\ m^3$

এখানে,
দৈর্ঘ্য, $l = 5.22$ m
প্রস্থ, $b = 3.65$ m
উচ্চতা, $h = 3.92$ m

যেহেতু প্রদত্ত রাশি সব কয়টির তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যা 3, সুতরাং ক্ষেত্রফলের সঠিক তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্ক সংখ্যা হবে 19.1 এবং আয়তনের সঠিক তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যা হবে 74.7 m^3।

৩। পরীক্ষাগারে একজন ছাত্র কাচের প্রতিসরাঙ্ক নির্ণয়ের পরীক্ষায় নিম্নলিখিত মানগুলি লিপিবদ্ধ করে : 1.54, 1.55, 1.52, 1.51, 1.48, 1.46 এবং 1.50। কাচের (i) গড় প্রতিসরাঙ্ক, (ii) প্রত্যেকটা পরিমাপে পরম ত্রুটি, (iii) পরম ত্রুটির গড়, (iv) আপেক্ষিক ত্রুটি ও (v) শতকরা ত্রুটি নির্ণয় কর। পরম ত্রুটি ও শতকরা ত্রুটি সাপেক্ষে প্রতিসরাঙ্কের মান প্রকাশ কর।

(i) প্রতিসরাঙ্কের গড় মান, $\bar{\mu} = \dfrac{1.54 + 1.55 + 1.52 + 1.51 + 1.48 + 1.46 + 1.50}{7}$

$= 1.508 \simeq 1.51$

(ii) গড় মানকে প্রকৃত মান বিবেচনা করলে প্রতিটি পরিমাপে পরম ত্রুটি হলো :

$1.51 - 1.54 = -0.03;$
$1.51 - 1.55 = -0.04;$
$1.51 - 1.52 = -1.01;$
$1.51 - 1.51 = 0.00$
$1.51 - 1.48 = 0.03;$
$1.51 - 1.46 = 0.05;$
$1.51 - 1.50 = 0.01$

(iii) পরম ত্রুটির গড়, $\Delta\bar{\mu} = \dfrac{0.03 + 0.04 + 0.01 + 0.00 + 0.03 + 0.05 + 0.01}{7} = \dfrac{0.17}{7} = 0.024$

(iv) আপেক্ষিক ত্রুটি, $\delta\mu = \dfrac{\Delta\mu}{\mu} = \dfrac{0.024}{1.51} = 0.02644 \simeq 0.03$

(v) শতকরা ত্রুটি = আপেক্ষিক ত্রুটি × 100% = 0.03 × 100% = 3%

পরম ত্রুটি সাপেক্ষে প্রতিসরাঙ্ক, $\mu = 1.51 \pm 0.024$

শতকরা ত্রুটি সাপেক্ষে প্রতিসরাঙ্ক, $\mu = 1.51 \pm 3\%$

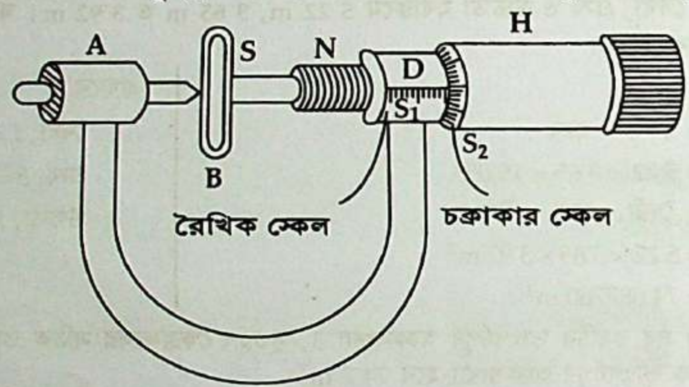
অনুসন্ধানমূলক কাজ : স্ক্রু গেজের বৃত্তাকার স্কেলের ঘরসংখ্যা বৃদ্ধি করে আরও অধিক সূক্ষ্ম পরিমাপ করা সম্ভব কী ? যুক্তিসহ বিশ্লেষণ কর।

স্ক্রু গেজের লঘিষ্ঠ ধ্রুবক (Least count)-এর মান যত কম হবে তত সূক্ষ্ম পাঠ নেওয়া সম্ভব। বৃত্তাকার স্কেলের ঘরসংখ্যা বাড়িয়ে লঘিষ্ঠ ধ্রুবকের মান কমানো যায়। তবে ঘরগুলো এত সূক্ষ্ম হয় যে তা আর খালি চোখে দেখা যায় না।

তাই বৃত্তাকার স্কেলের ঘরসংখ্যা একটি নির্দিষ্ট সীমার বাইরে বৃদ্ধি করা সম্ভব নয়। নিম্নে স্ক্রু গেজ সম্পর্কে আলোচনা করা হলো।

স্ক্রু গেজ
Screw gauge

স্ক্রু গেজ একটি খুব ক্ষুদ্র দৈর্ঘ্য—যেমন কোনো তারের ব্যাস, পাতলা পাতের বেধ ইত্যাদি পরিমাপের জন্য এটি একটি সূক্ষ্ম পরিমাপ যন্ত্র। স্ক্রু গেজে একটি U-আকৃতির মোটা ধাতব নিরেট দণ্ড থাকে। এর বাম বাহুর ওপরের অংশের ভেতর দিকে একটি ছোট দণ্ড A দৃঢ়ভাবে আটকানো থাকে [চিত্র ১·৩] এবং অন্য বাহুটিতে একটি ফাঁপা চোং H আটকানো থাকে যার মধ্য দিয়ে একটি স্ক্রু (S) সহজেই যাতায়াত করতে পারে। স্ক্রু S-এর B পৃষ্ঠটি সমতল। চোং H-এর



চিত্র ১·৩

ওপরের পৃষ্ঠে একটি নির্দেশক রেখা (reference line) D থাকে। ওই রেখার ঠিক লম্বভাবে একটি রৈখিক মিলিমিটারের স্কেল (S_1) অংশাঙ্কিত থাকে। স্ক্রু-এর মাথায় একটি চোঙাকার ঢাকনা D আটকানো থাকে। D ঢাকনার বামদিকের প্রান্তে একটি সুষম চক্রাকার স্কেল (S_2) থাকে। এই স্কেলে 100টি বা 50টি সমদূরবর্তী দাগ কাটা থাকে। স্ক্রুটি এমনভাবে তৈরি করা হয় যেন এর একটি পূর্ণ আবর্তনে এটি রৈখিক স্কেল বরাবর 1 mm সরে যায়। একেই স্ক্রু পিচ (screw pitch) বলা হয়।

সুতরাং স্ক্রু পিচ, $P = 1\,mm = 0{\cdot}1\,cm$

ধরা যাক, চক্রাকার স্কেলের মোট দাগ সংখ্যা, N = 100

অতএব, স্ক্রু গেজের লঘিষ্ঠ ধ্রুবক, $(L.C.) = \frac{P}{N} = \frac{0{\cdot}1}{100}\,cm = 0{\cdot}001\,cm$

সুতরাং স্ক্রু গেজের সাহায্যে 0·001 cm পর্যন্ত ক্ষুদ্র দৈর্ঘ্য সঠিকভাবে পরিমাপ করা যায়।

পরিমাপের পদ্ধতি (Method of measurement) : প্রথমেই খেয়াল করতে হবে যে যন্ত্রটি ত্রুটিমুক্ত কি না। A ও B তলদ্বয় স্পর্শ করলে যদি রৈখিক এবং চক্রাকার উভয় স্কেলের পাঠ শূন্য হয় তবে যন্ত্রটিকে ত্রুটিহীন বলা হয়। যদি যন্ত্রটি ত্রুটিযুক্ত হয় তবে ওই ত্রুটির পরিমাণ নির্ণয় করে পরিমাপের সাথে হিসাব করতে হয়। এবার যে তারের ব্যাস বা ব্যাসার্ধ কিংবা যে পাতের বেধ মাপা হবে সেটিকে স্ক্রু গেজের A ও B-এর মাঝে এমনভাবে স্থাপন করা হয় যাতে A ও B প্রান্ত দুটি তার বা পাতটির পৃষ্ঠ স্পর্শ করে থাকে। এই অবস্থায় দুটি পাঠ নিতে হয়; যথা—

(i) রৈখিক স্কেলের পাঠ (*a*)

(ii) চক্রাকার স্কেলের পাঠ (*b*)

এখানে তারের ব্যাস বা পাতের বেধ,

d = রৈখিক স্কেলের পাঠ (a) + চক্রাকার স্কেলের পাঠ (b) × লঘিষ্ঠ ধ্রুবক (c)

অর্থাৎ, $d = a + b \times c$

উদাহরণ : ধরি স্ক্রু গেজের লঘিষ্ঠ ধ্রুবক, $c = 0{\cdot}001$ cm, রৈখিক স্কেলের পাঠ, $a = 1{\cdot}1$ cm এবং চক্রাকার স্কেলের পাঠ, $b = 32$ ঘর [চিত্র ১·৩]।

∴ তারটির ব্যাস, $d = a + b \times c$

$= 1{\cdot}1 + 32 \times 0{\cdot}001$

$= 1{\cdot}1 + 0{\cdot}032 = 1{\cdot}132$ cm

গাণিতিক উদাহরণ ১.৮

১। একটি স্ক্রু গেজের চক্রাকার স্কেলটি 100টি সমানভাগে বিভক্ত। এর স্ক্রু পিচ 1 mm। দেখা গেল স্ক্রু গেজটির যান্ত্রিক ত্রুটি −0·02 mm। যন্ত্রটির সাহায্যে একটি তারের ব্যাস পরিমাপের সময় দেখা গেল, মূল স্কেলের পাঠ = 2 mm এবং চক্রাকার স্কেলের পাঠ = 28। তারটির সঠিক ব্যাস কত ?

স্ক্রু গেজটির লঘিষ্ঠ ধ্রুবক $= \frac{\text{স্ক্রু পিচ}}{\text{মোট দাগ সংখ্যা}}$

$$= \frac{1\text{mm}}{100} = 0·01\text{ mm} = 0·001\text{ cm}$$

তারের ব্যাস, $d' = a + b \times c = 2\text{ mm} + 28 \times 0·01 = 2·28\text{ mm} = 0·228\text{ cm}$

স্ক্রু গেজটির যান্ত্রিক ত্রুটি − 0·02 mm। এই ত্রুটি মোট পাঠের সাথে যোগ করতে হবে। অতএব, তারটির প্রকৃত ব্যাস $d = d' + 0·02\text{ mm} = 2·28 + 0·02 = 2·30\text{ mm} = 0·230\text{ cm}$

২। স্ক্রু গেজের সাহায্যে একটি ক্ষুদ্র গোলকের ব্যাস পরিমাপ করে পাওয়া গেল 0·11 cm। গোলকটির আয়তন নির্ণয়ে সর্বোচ্চ ত্রুটি নির্ণয় কর।

আমরা জানি, গোলকের আয়তন,

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}D^3$$ এখানে, D = গোলকের ব্যাস

উভয় পক্ষের লগারিদম নিয়ে পাই,

$$\ln V = \ln\left(\frac{\pi}{6}D^3\right) = \ln\left(\frac{\pi}{6}\right) + 3\ln D$$

অবকলন করে পাই, $\frac{\Delta V}{V} = \frac{3\Delta D}{D}$ [$\because \frac{\pi}{6}$ = ধ্রুবক, তাই এর অবকলন শূন্য]

এখন, D = 0·11 cm এবং ΔD = ব্যাস পরিমাপে ত্রুটি = স্ক্রু গেজের লঘিষ্ঠ ধ্রুবক = 0·001 cm

∴ গোলকটির আয়তন পরিমাপে আনুপাতিক ত্রুটি হলো,

$$\frac{\Delta V}{V} = 3 \times \frac{0·001}{0·11} = 0·027$$

∴ গোলকটির আয়তন নির্ণয়ে সর্বোচ্চ ত্রুটির পরিমাণ = 0·027 × 100% = 2·7%

৩। একটি বস্তুর ভর পরিমাপ করে পাওয়া গেল (90 ± 0·001) g এবং আয়তন পরিমাপ করে পাওয়া গেল (9 ± 0·1) cm³। বস্তুটির ঘনত্ব কত ? বস্তুটির ঘনত্ব নির্ণয়ে পরম ত্রুটির পরিমাণ কত ? ঘনত্ব নির্ণয়ে আনুপাতিক ও শতকরা ত্রুটি নির্ণয় কর।

আমরা জানি, বস্তুর ঘনত্ব,

$$\rho = \frac{\text{ভর (M)}}{\text{আয়তন (V)}} = \frac{90}{9}\text{ gcm}^{-3} = 10\text{ gcm}^{-3}$$

উভয় পক্ষের লগারিদম নিয়ে অবকলন করে পাই,

আনুপাতিক ত্রুটি $= \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dM}{M} + \frac{dV}{V}$

$$\therefore\ d\rho = \rho\left(\frac{dM}{M} + \frac{dV}{V}\right) = 10\left(\frac{0·001}{90} + \frac{0·1}{9}\right)\text{ gcm}^{-3}$$

$$= 10\,(0·000011 + 0·011) = 10 \times 0·011011 = 0·11011\text{ gcm}^{-3}$$

∴ বস্তুটির ঘনত্ব নির্ণয়ে পরম ত্রুটি = $0·11011\text{ gcm}^{-3}$

আনুপাতিক ত্রুটি $= \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dM}{M} + \frac{dV}{V} = \frac{0·001}{90} + \frac{0·1}{9} = 0·011011$

ঘনত্ব নির্ণয়ে শতকরা ত্রুটি $= \frac{d\rho}{\rho} \times 100\% = 0·011011 \times 100\% = 1·1011\%$

১.১৪ ব্যবহারিক
Experimental

স্ফেরোমিটারের ব্যবহার (Use of spherometer)

পরীক্ষণের নাম :	স্ফেরোমিটারের সাহায্যে গোলীয় তলের বক্রতার ব্যাসার্ধ নির্ণয়
পিরিয়ড : ২.৫	Determination of the radius of curvature of a spherical surface by a spherometer

মূলতত্ত্ব (Theory) : কোনো বক্রতল যে গোলকের অংশবিশেষ, ওই গোলকের ব্যাসার্ধকে বক্রতলের বক্রতার ব্যাসার্ধ বলা হয়। একে R দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$\therefore$ বক্রতার ব্যাসার্ধ, $R = \left(\frac{d^2}{6h} + \frac{h}{2}\right)$

এখানে, d = স্ফেরোমিটারের তিন পায়ের গড় দূরত্ব

এবং h = তিনটি পায়ের তল হতে বক্রতলের উচ্চতা কিংবা নিম্নতা।

স্ফেরোমিটারের পাঠ = প্রধান স্কেলের পাঠ + বৃত্তাকার স্কেলের পাঠ × লঘিষ্ঠ মান

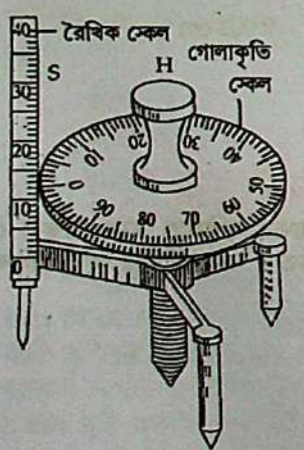
যন্ত্রপাতি (Apparatus): (১) স্ফেরোমিটার, (২) সমতল প্লেট, (৩) বক্রতল, (৪) মিটার স্কেল ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি বা কাজের ধারা (Working procedure) :

(১) স্ফেরোমিটারের ক্ষুদ্রতম ভাগের মান ও গোলাকৃতি স্কেলের মোট ভাগ সংখ্যা জেনে যন্ত্রের পীচ ও লঘিষ্ঠ ধ্রুবক বের করা হয়।

(২) যন্ত্রের ত্রুটি আছে কি-না তাও বের করা হয়।

(৩) স্ফেরোমিটারটি সমতল পাতের ওপর স্থাপন করা হয়। স্ক্রুর মাথা এমনভাবে ঘুরানো হয় যেন তার অগ্রভাগ সমতল পাত স্পর্শ করে।



চিত্র ১.৪

(৪) রৈখিক ও গোলাকৃতি স্কেলের পাঠ নেয়া হয়। গোলাকৃতি স্কেলের পাঠকে লঘিষ্ঠ ধ্রুবক দ্বারা গুণ করে খণ্ড অংশ বা ভগ্নাংশ বের করা হয়। রৈখিক স্কেলের পাঠের সাথে ভগ্নাংশ যোগ করে মোট পাঠ বের করা হয়।

(৫) উপরোক্ত প্রক্রিয়ায় কয়েকবার পাঠ নিয়ে তার গড় মান বের করা হয়।

(৬) এখন স্ফেরোমিটারটি বক্রতলের উপর স্থাপন করা হয়। স্ক্রুর মাথা আস্তে আস্তে উপরে উঠান হয় এবং এমনভাবে স্থাপন করা হয় যেন তার অগ্রভাগ বক্রতলের সর্বোচ্চ/সর্বনিম্ন বিন্দু স্পর্শ করে। উপরের নিয়ম অনুযায়ী রৈখিক স্কেল ও গোলাকৃতি স্কেলের পাঠ নিয়ে মোট পাঠ বের করা হয়। কয়েকবার পাঠ নিয়ে গড় মান নির্ণয় করা হয়। এই দুই পাঠের অন্তরফলই হলো h।

(৭) মিটার স্কেলের সাহায্যে তিনটি পায়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব মেপে তাদের গড় মান বের করা হয়। এটাই হলো d-এর মান।

(৮) এখন h এবং d-এর মান তালিকাভুক্ত করে R-এর মান বের করা হয়।

লঘিষ্ঠ ধ্রুবক নির্ণয় :

রৈখিক স্কেলের ক্ষুদ্রতম ভাগের মান = x মিমি

পীচ = x মিমি

গোলাকৃতি স্কেলের মোট ভাগ সংখ্যা = y

লঘিষ্ঠ ধ্রুবক, K = $\frac{\text{পীচ}}{\text{গোলাকৃতি স্কেলের মোট ভাগ সংখ্যা}}$

$= \frac{x}{y}$ মিমি = ... মিমি

স্ফেরোমিটারের পা তিনটির মধ্যবর্তী দূরত্ব = d = ... মিমি।

পর্যবেক্ষণ ও সন্নিবেশন (Observation and manipulation) :

ছক ১ : সমতল কাচ প্লেটে পাঠ

পর্যবেক্ষণ সংখ্যা	রৈখিক স্কেল পাঠ = M মিমি	গোলাকার স্কেল পাঠ = C	লঘিষ্ঠ ধ্রুবক = K মিমি	খণ্ড অংশ বা ভগ্নাংশ F = C×K মিমি	মোট পাঠ = M + F মিমি	গড় পাঠ X মিমি	যান্ত্রিক ত্রুটি = $\pm x$ মিমি	শুদ্ধ পাঠ $X' = X-(\pm x)$ মিমি
1								
2								
3								

ছক ২ : বক্রতলে পাঠ

পর্যবেক্ষণ সংখ্যা	রৈখিক স্কেল পাঠ = M মিমি	গোলাকার স্কেল পাঠ = C	লঘিষ্ঠ ধ্রুবক = K মিমি	খণ্ড অংশ বা ভগ্নাংশ F = C×K মিমি	মোট পাঠ = M + F মিমি	গড় পাঠ X মিমি	যান্ত্রিক ত্রুটি = $\pm x$ মিমি	শুদ্ধ পাঠ $X' = X-(\pm x)$ মিমি
1								
2								
3								

হিসাব বা গণনা (Calculation) :

$R = \frac{d^2}{6h} + \frac{h}{2}$; এখানে $d = \ldots$ মিমি

এবং $h = (Y' - X') = \ldots$ মিমি

$\therefore$ R = ... সেমি = ... মিটার (m)

ফলাফল (Result) : নির্ণেয় বক্রতার ব্যাসার্ধ, R = ... সেমি = ... m

সতর্কতা (Precautions) : (১) পিছট ত্রুটি দূর করার জন্য স্ক্রুর মাথা সর্বদা একই দিকে ঘুরানো উচিত।

(২) সমতল কাচ পাতের উপর ও পরীক্ষণীয় কাচ পাতের উপর স্ক্রুর মিলন তার ছায়া দ্বারা নির্ণয় করা হয়।

(৩) স্ক্রুর প্রান্ত বক্রতল ও কাচ পাতের গায়ে আলতোভাবে স্পর্শ করেছে কিনা তা সতর্কতার সাথে নির্ণয় করতে হবে।

আলোচনা (Discussion) : বক্রতল সুষম না হওয়ায় নির্ণেয় বক্রতার ব্যাসার্ধে ত্রুটি দৃষ্ট হয়।

উদাহরণ : একটি স্ফেরোমিটারের গোলাকার স্কেল 100টি দাগে সমানভাবে চিহ্নিত করা রয়েছে এবং গোলাকার স্কেলের একবার পূর্ণ আবর্তনে রৈখিক স্কেল 0·01 cm এগিয়ে যায়। স্ফেরোমিটারের লঘিষ্ঠ ধ্রুবক নির্ণয় কর।

এখানে রৈখিক স্কেলের ক্ষুদ্রতম ভাগের মান = 0·01 cm

গোলাকার স্কেলের মোট পাঠ সংখ্যা = 100

$\therefore$ লঘিষ্ঠ ধ্রুবক, $K = \frac{0\cdot01}{100}\text{ cm} = 10^{-4}\text{ cm}$

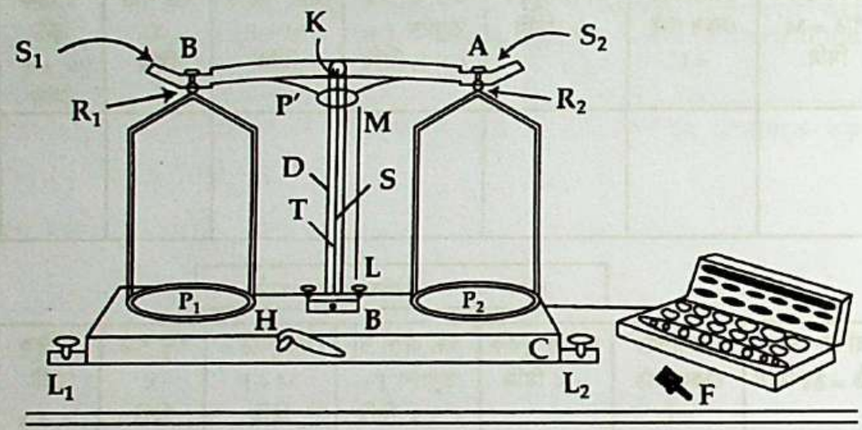
পরীক্ষণের নাম : **পিরিয়ড : ২.৫**	**নিক্তির সাহায্যে দোলন পদ্ধতিতে বস্তুর ভর নির্ণয়** **Determination of mass of a body by the method of oscillation using a balance**

পরীক্ষাগারে সাধারণত যে নিক্তি ব্যবহার করা হয় তা নিম্নের চিত্রে দেখানো হলো।

নিক্তির বিবরণ (Description of the balance) :

নিক্তির ভিত্তি হিসেবে একটি কাঠের পাটাতন B থাকে। পাটাতনের নিম্নাংশে লেবেল স্ক্রু L_1, L_2 যুক্ত থাকে। স্ক্রু দুটি ঘুরিয়ে নিক্তি স্তম্ভকে উল্লম্ব করা যায়। T হচ্ছে কাঠ ফলকের উপর লম্বভাবে দণ্ডায়মান ধাতু নির্মিত একটি ফাঁপা স্তম্ভ। একে নিক্তির পিলার (pillar) বলে। এর সাথে একটি ধাতব ফ্রেম যুক্ত থাকে। একটি হাতল H-এর সাহায্যে

একটি ধাতব নির্মিত দৃঢ় শলাকা D-কে এই স্তম্ভের মাধ্যমে খাড়াভাবে উঠানো-নামানো যায়। নিক্তি দণ্ড D-এর উপর একটি এগেট পাথরের প্লেট (P′) আটকানো থাকে। নিক্তি দণ্ড AB একটি দৃঢ় ধাতব দণ্ড। এই দণ্ডের ভারকেন্দ্র বরাবর একটি এগেট পাথরের ত্রিশিরা টুকরা (K) যুক্ত থাকে। নিক্তি শলাকা D-কে ওপরে উঠালে নিক্তি দণ্ড নিক্তি স্তম্ভের ফ্রেম



চিত্র ১·৫

থেকে মুক্ত হয়। এ অবস্থায় দণ্ডের ধারাল এগেট খণ্ডটি একটি সমতল এগেট খণ্ডের ওপরে অবস্থান করে। এর ফলে নিক্তি দণ্ড বাধাহীনভাবে দুলতে থাকে। নিক্তি দণ্ডের ভারকেন্দ্রের ঠিক ওপরে একটি লম্বা সরু কাঁটা লাগানো থাকে। একে নিক্তির সূচক কাঁটা বলে। এই কাঁটাটি নিক্তি স্তম্ভ T-এর পাদদেশে সংযুক্ত একটি স্কেল S-এর ওপরে মুক্তভাবে চলাচল করতে পারে।

P_1, P_2 দুটি পাল্লা নিক্তি দণ্ডের দুই প্রান্তে সংযুক্ত ধারাল ইস্পাত খণ্ডের ওপরে বসানো স্টিরাপ R_1, R_2 হতে হুকের সাহায্যে ঝুলানো থাকে। নিক্তি দণ্ডের দুই প্রান্তে দুটি স্ক্রু S_1, S_2 রয়েছে। এই স্ক্রু দুটিকে ঘুরিয়ে নিক্তি দণ্ডের ভারকেন্দ্রকে এগেট খণ্ডের ওপর রাখা হয়। নিক্তি স্তম্ভ উল্লম্ব আছে কিনা দেখার জন্য একটি ওলন সুতা ML লাগানো থাকে।

সঠিক ওজন নির্ণয় করতে যাতে অসুবিধা না হয় সেজন্য পাল্লাযুক্ত একটি কাচের বাক্সের মধ্যে নিক্তিটি স্থাপন করা হয়। পাল্লা ইচ্ছেমতো খোলা বা বন্ধ করা যায়।

তত্ত্ব (Theory) : নিক্তি দ্বারা ওজন নেবার সময় নিক্তি শলাকাটি ওপরে উঠালে সূচক কাঁটা ডানে-বামে দুলতে থাকে। ধীরে ধীরে দোলনের বিস্তার কমতে থাকে এবং এক সময় এটি স্থিতি অবস্থায় আসে।

মনে করা যাক, উভয় পাল্লায় বাটখারা শূন্য অবস্থায় সূচক কাঁটার স্থিতি বিন্দু X। যে বস্তুটির ওজন নেয়া হবে সেটি বাম পাল্লায় এবং প্রয়োজনীয় বাটখারা ডান পাল্লায় স্থাপন করা হয়। বাম পাল্লায় বস্তু স্থাপন এবং ডান পাল্লায় বাটখারা (W_1 + 10 মিলিগ্রাম) থাকা অবস্থায় সূচক কাঁটার স্থিতি বিন্দু Y। এবার বাম পাল্লায় পূর্বোক্ত বস্তু এবং ডান পাল্লায় বাটখারা (W_1 + 20 মিলিগ্রাম) থাকা অবস্থায় স্থিতি বিন্দু Z হলে, অতিরিক্ত 10 মিলিগ্রাম ওজনের জন্য সূচক কাঁটার স্থিতি বিন্দুর অবস্থানের পরিবর্তন হয় Z — Y ঘর বা ভাগ সংখ্যা (divisions)।

সুতরাং, স্থিতি বিন্দুর এক ভাগ সংখ্যা পরিবর্তনের জন্য ওজনের পরিবর্তন হবে,

$$\frac{10}{Z-Y} \text{ মিলিগ্রাম} = \frac{10}{Z-Y} \times \frac{1}{1000} \text{ গ্রাম} = \frac{1}{(Z-Y) \times 100} \text{ গ্রাম}$$

∴ স্থিতি বিন্দুর (Z — X) ভাগ সংখ্যা পরিবর্তনের জন্য ওজনের পরিবর্তন হবে,

$$\frac{1}{(Z-Y) \times 100}(Z-X) = \frac{(Z-X)}{(Z-Y) \times 100}$$

অতএব, বস্তুটির প্রকৃত ওজন

$$W = \left[W_1 + \frac{(Z-X)}{(Z-Y) \times 100}\right] \text{ গ্রাম} \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

যন্ত্রপাতি (Apparatus) : সাধারণ নিক্তি, ওজন বাক্স, ওজন নির্ণীতব্য বস্তু ইত্যাদি।

কার্যপ্রণালি (Working procedure) :

(১) পাল্লা দুটিকে নরম ব্রাশ দিয়ে পরিষ্কার করতে হবে।

(২) স্টিরাপ ও পাল্লা দুটি সঠিকভাবে স্থাপন করতে হবে।

(৩) লেবেল স্ক্রুর সাহায্যে নিক্তিকে অনুভূমিক করতে হবে। এ অবস্থায় ওলন m_1 নিম্ন প্রান্ত m_2 এর মাথা বরাবর অবস্থান করবে।

(৪) কোনো পাল্লায় কিছু না রেখে স্থিতি বিন্দু X-এর অবস্থান নির্ণয়ের জন্য নিক্তি শলাকাটি ওপরে উঠাতে হবে। এতে সূচক কাঁটা ডানে-বামে দুলতে থাকে। এ অবস্থায় বামদিকে পরপর তিনটি এবং ডানদিকে পরপর দুটি সূচক কাঁটার দিক পরিবর্তন বিন্দুর জন্য স্কেল পাঠ নিতে হবে। এখন বামদিকের জন্য প্রাপ্ত তিনটির গড় এবং ডানদিকের জন্য প্রাপ্ত দুটির গড় নিয়ে ডান ও বামের প্রাপ্ত গড়ের আবার গড় নিয়ে স্থিতি বিন্দু X এর গড় পাওয়া যাবে।

(৫) বামদিকের পাল্লায় বস্তু নিয়ে ডানদিকের পাল্লায় ওজন W_1 রেখে সূচক কাঁটার দোলন লক্ষ করে ওপরের নিয়মে পাঠ নিতে হবে। এভাবে সূচক কাঁটার স্থিতি বিন্দুর গড় অবস্থান Y পাওয়া যাবে।

(৬) বামদিকের পাল্লায় বস্তুটিকে না সরিয়ে এবার ডানদিকের পাল্লায় ওজনের সাথে আরও 10 মিলিগ্রাম ওজন দিয়ে ওপরের পদ্ধতি অনুসরণ করে সূচক কাঁটার স্থিতি বিন্দুর গড় অবস্থান Z নির্ণয় করতে হবে।

(৭) সমীকরণ (i) ব্যবহার করে বস্তুটির নির্ণেয় ওজন বের করতে হবে।

পরীক্ষালব্ধ ছক–১

পর্যবেক্ষণ সংখ্যা	বাম পাল্লায় ভর (g)	ডান পাল্লায় ভর (g)	প্রত্যাবর্তন বিন্দুর (Turning Point) অবস্থান				স্থিতি বিন্দু $=\frac{1}{2}(x+y)$
			বাম	গড় (x)	ডান	গড় (y)	
1 2 3	0	0	....		....		X =
1 2 3	বস্তু	$W_1 = \ldots(g)$	....		....		Y =
1 2 3	বস্তু	$W_1 + 0{\cdot}01 = \ldots(g)$	....		....		Z =

হিসাব : বস্তুর প্রকৃত ওজন, $W_1 = \left[W_1 + \frac{(Z-X)}{(Z-Y)\times 100}\right]$ গ্রাম

ফলাফল : নির্ণেয় বস্তুর প্রকৃত ভর, W = ... গ্রাম

সতর্কতা (Precautions) :

(১) পাটাতনের স্ক্রুগুলোকে যথাযথ দিকে ঘুরিয়ে নিক্তি স্তম্ভকে উল্লম্ব করতে হবে।

(২) স্টিরাপকে আবদ্ধ না করে পাল্লায় ওজন রাখা বা ওজন সরানো উচিত নয়।

(৩) নিক্তি শলাকাকে ওপরে উঠাবার পূর্বে কাচবাক্সের ঢাকনা বন্ধ করা উচিত।

(৪) পাল্লাসহ পুরা নিক্তি ধুলাবালিমুক্ত তথা পরিষ্কার রাখতে হবে।

(৫) লম্বন ত্রুটি পরিহার করে পাঠ নিতে হবে।

(৬) নিক্তি দণ্ড ও সূচকের মুক্ত দোলন তথা অবাধ চলাচল নিশ্চিত করতে হবে।

প্রয়োজনীয় গাণিতিক সূত্রাবলি

পরম ত্রুটি = প্রকৃত মান − পরিমাপ্য মান ... ... (1)

$$\text{শতকরা ত্রুটি} = \frac{\text{প্রকৃত মান} \sim \text{পরীক্ষালব্ধ মান}}{\text{প্রকৃত মান}} \times 100\% = \text{ভুলের হার} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$\text{প্রমাণ বিচ্যুতি, } D = \frac{\sqrt{\sum d^2}}{n} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$$\text{বক্রতার ব্যাসার্ধ, } R = \left(\frac{d^2}{6h} + \frac{h}{2}\right) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

$$\text{লঘিষ্ঠ ধ্রুবক, } k = \frac{S}{n} = \frac{\text{যন্ত্রের পিচ}}{\text{বৃত্তাকার স্কেলের ভাগ সংখ্যা}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

$$E = m_0c^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (7)$$

$$\text{গোলকের ক্ষেত্রফল } = 4\pi r^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8)$$

$$\text{গোলকের আয়তন, } V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9)$$

$$\text{সিলিন্ডারের আয়তন, } V = \pi r^2 l \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (10)$$

$$\text{প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল, } A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (11)$$

উচ্চতর দক্ষতাভিত্তিক নমুনার গাণিতিক উদাহরণ

১। সজিব ঢাকা থেকে কুমিল্লা যাচ্ছিল। কুমিল্লা শহরে পৌঁছানোর পূর্বে মাইল পোস্টে কুমিল্লার দূরত্ব 1 km দেখতে পেল। 1 মাইলের সাথে উক্ত কিলোমিটারের দূরত্বের পার্থক্য মিটারে (m) প্রকাশ কর।

আমরা জানি,

$$1 \text{ mile} = 1760 \times 3 \times 12 \text{ inch} = 1760 \times 3 \times 12 \times 2{\cdot}54 \text{ cm}$$

$$= \frac{1760 \times 3 \times 12 \times 2{\cdot}54}{100} \text{ m} = \frac{1760 \times 3 \times 12 \times 2{\cdot}54}{100 \times 1000} \text{ km}$$

$$= 1{\cdot}609 \text{ km} = 1{\cdot}61 \text{ কিমি (km) (প্রায়)}$$

$$\therefore \quad 1 \text{ mile} - 1 \text{ km} = (1{\cdot}609 - 1) \text{ km} = 0{\cdot}609 \text{ km} = 0{\cdot}609 \times 1000 \text{ m} = 609 \text{ m}$$

২। একটি পরীক্ষায় কিছু মৌলিক কণার ভর 10 amu পাওয়া গেল। উক্ত ভর কয়টি ইলেকট্রনের ভরের সমান হবে ? উক্ত সংখ্যক ইলেকট্রন মৌলিক কণায় থাকতে পারে কী ?

আমরা জানি, 1 amu বা $1 \text{ u} = 1{\cdot}66 \times 10^{-27}$ kg ও 1টি ইলেকট্রনের ভর $= 9{\cdot}1 \times 10^{-31}$ kg

ধরি, nটি ইলেকট্রন ভরের সমান হবে 10 amu

$\therefore$ $10 \text{ amu} = n \times$ 1টি ইলেকট্রনের ভর

বা, $10 \times 1{\cdot}66 \times 10^{-27} \text{ kg} = n \times 9{\cdot}1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

$$\therefore \quad n = \frac{10 \times 1{\cdot}66 \times 10^{-27}}{9{\cdot}1 \times 10^{-31}} = 1{\cdot}82 \times 10^4 \text{ টি।}$$

উক্ত সংখ্যক ইলেকট্রন মৌলিক কণায় থাকা সম্ভব।

৩। আনিস স্ফেরোমিটারের সাহায্যে একটি উত্তল লেন্সের উচ্চতা পরিমাপ করে গড় উচ্চতা 5·21 cm এবং সমতল কাচ প্লেটের উচ্চতা 0·25 cm পেল। স্ফেরোমিটারের তিন পায়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব যথাক্রমে 6·3 cm, 6·5 cm ও 6·4 cm।

(ক) প্রমাণ বিচ্যুতি কী ?

(খ) সকল তত্ত্বই অনুকল্প কিন্তু সকল অনুকল্প তত্ত্ব নয়—ব্যাখ্যা কর।

(গ) উত্তল লেন্সটির বক্রতার ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। লেন্সের গভীরতা ও কাচ প্লেটের উচ্চতা একই।

(ঘ) লেন্সটি উত্তল না হয়ে অবতল লেন্স হলে বক্রতার ব্যাসার্ধের কোনো পরিবর্তন পরিলক্ষিত হতো কী ? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

(ক) প্রমাণ বিচ্যুতি : অনেক সময় বিচ্যুতিগুলির গড় নির্ণয়ের পরিবর্তে তাদের বর্গের গড় বের করে তার বর্গমূল নির্ণয় করা হয়। এই বর্গমূলের পরিমাণকে প্রমাণ বিচ্যুতি বলে।

(খ) বিজ্ঞানীরা তাঁদের পর্যবেক্ষিত ঘটনার কারণ সম্বন্ধে ব্যাখ্যা প্রদানের জন্য অনেক সময় পূর্বে আবিষ্কৃত প্রাকৃতিক নিয়মের সাথে সামঞ্জস্য রেখে কিছু অনুমান করেন। এই অনুমানগুলোকে বলা হয় **অনুকল্প**। অনুকল্পগুলোর সত্যতা যাচাইয়ের জন্য পরীক্ষা সম্পাদন করা হয় এবং পরীক্ষায় প্রমাণিত হলে তা তত্ত্বে পরিণত হয়। পরীক্ষণ বা পর্যবেক্ষণ দ্বারা অনুকল্প সমর্থিত হতেও পারে আবার বাতিলও হতে পারে। সুতরাং **সকল তত্ত্বই অনুকল্প, কিন্তু সকল অনুকল্প তত্ত্ব নয়।**

(গ) মনে করি লেন্সটির বক্রতার ব্যাসার্ধ R। এখানে স্ফেরোমিটারের পা-গুলোর মধ্যবর্তী দূরত্ব, $d_1 = 6{\cdot}3$ cm, $d_2 = 6{\cdot}5$ cm, $d_3 = 6{\cdot}4$ cm।

সুতরাং, স্ফেরোমিটারের পা-গুলোর মধ্যবর্তী গড় দূরত্ব,

$$d = \frac{d_1 + d_2 + d_3}{3} = \frac{6{\cdot}3 + 6{\cdot}5 + 6{\cdot}4}{3} = 6{\cdot}4 \text{ cm}$$

তলের উচ্চতা, $h = 5{\cdot}21 \text{ km} - 0{\cdot}25 \text{ cm} = 4{\cdot}96 \text{ cm}$

আমরা জানি,

$$R = \frac{d^2}{6h} + \frac{h}{2} = \frac{(6{\cdot}4)^2}{6 \times 4{\cdot}96} + \frac{4{\cdot}96}{2} = 3{\cdot}86 \text{ cm}$$

$\therefore \quad R = 3{\cdot}86$ cm

(ঘ) লেন্সটি উত্তল না হয়ে অবতল হলেও বক্রতার ব্যাসার্ধের কোনো পরিবর্তন হবে না। এর সপক্ষে মতামত নিম্নরূপ :

এখানে, স্ফেরোমিটারের পা-গুলোর মধ্যবর্তী দূরত্ব,

$$d = \frac{d_1 + d_2 + d_3}{3} = \frac{6{\cdot}3 + 6{\cdot}5 + 6{\cdot}4}{3} = 6{\cdot}4 \text{ cm}$$

অবতল লেন্সের গভীরতা $= 5{\cdot}21$ cm

কাচ প্লেটের উচ্চতা $= 0{\cdot}25$ cm

$\therefore$ বক্রতলের উচ্চতা, $h = 0{\cdot}25 \text{ cm} - 5{\cdot}21 \text{ cm} = -4{\cdot}96 \text{ cm}$

ঋণাত্মক চিহ্ন অবতল লেন্সের নিচের দিকে সরণ নির্দেশ করে।

আমরা জানি,

$$R = \frac{d^2}{6h} + \frac{h}{2} = \frac{(6{\cdot}4)^2}{6 \times 5{\cdot}21} + \frac{5{\cdot}21}{2} = 3{\cdot}86 \text{ cm}$$

$\therefore \quad R = 3{\cdot}86$ cm

সুতরাং, দেখা যাচ্ছে যে বক্রতার ব্যাসার্ধ উভয় ক্ষেত্রে একই। অর্থাৎ লেন্স উত্তল বা অবতল যাই হোক না কেন বক্রতার ব্যাসার্ধের কোনো পরিবর্তন হবে না।

৪। একটি স্ফেরোমিটারের পরিধি 100টি সমান দাগে চিহ্নিত করা হয়েছে এবং গোলাকৃতি স্কেলের একটি পূর্ণ আবর্তনে প্রধান স্কেল 1 mm এগিয়ে যায়।

(ক) মৌলিক বা প্রাথমিক একক কী ?

(খ) পরিমাপের সকল যন্ত্রে পিছট ত্রুটি থাকবে কি–না ব্যাখ্যা কর।

(গ) স্ফেরোমিটারের লঘিষ্ঠ ধ্রুবক নির্ণয় কর।

(ঘ) এই স্ফেরোমিটারের সূক্ষ্মতা বাড়াতে গিয়ে গোলাকৃতি স্কেলের ঘরসংখ্যা ইচ্ছেমতো বাড়ানো সম্ভব কী? যুক্তি দাও।

(ক) মৌলিক বা প্রাথমিক একক : যে একক অন্য কোনো এককের ওপর নির্ভর করে না এবং একেবারে সম্পর্কশূন্য বা স্বাধীন তাকে মৌলিক একক বা প্রাথমিক একক বলে।

(খ) সকল যন্ত্রে এই ত্রুটি পরিলক্ষিত হয় না। নাট-স্ক্রু নীতির ওপর ভিত্তি করে যে সমস্ত যন্ত্র তৈরি হয় সেসব যন্ত্রে এই ত্রুটি পরিলক্ষিত হয়। নতুন যন্ত্রের তুলনায় পুরাতন যন্ত্রে এই ত্রুটি বেশি দেখা যায়। কারণ অনেক দিন

ব্যবহারের ফলে নাটের গর্ত বড় হয়ে যেতে পারে বা স্ক্রু ক্ষয় হয়ে আলগা বা ঢিলে হয়ে যায়; ফলে স্ক্রুকে উভয়দিকে ঘুরালে সমান সরণ হয় না। এ ধরনের ত্রুটিকে পিছট ত্রুটি বলে।

(গ) এখানে $P = 1\ mm = 0{\cdot}1\ cm$ এবং $N = 100$

$\therefore$ লঘিষ্ঠ ধ্রুবক $= \frac{P}{N} = \frac{0{\cdot}1}{100}\ cm = 0{\cdot}001\ cm$ বা, $10^{-3}\ cm$

(ঘ) আমরা জানি, স্ফেরোমিটারের লঘিষ্ঠ ধ্রুবক যত কম হবে এর সূক্ষ্মতা তত বাড়বে। চক্রাকার স্কেলের ঘর-সংখ্যা বৃদ্ধি করে এই লঘিষ্ঠ ধ্রুবক কমানো যায়; কিন্তু এর ফলে ঘরগুলিকে খালি চোখে আলাদা করা সম্ভব হয় না; তাই ঘরসংখ্যা ইচ্ছেমতো বৃদ্ধি করা সম্ভব নয়।

৫। একটি সরল দোলকের দৈর্ঘ্য $(0{\cdot}6 \pm 0{\cdot}01)$ m এবং পর্যায়কাল $(2{\cdot}4 \pm 0{\cdot}12)$ sec।

(ক) পরম ত্রুটি কী ?

(খ) কোনো পরিমাপ্য রাশির আনুপাতিক ভুল কীভাবে নির্ধারণ করবে ?

(গ) উদ্দীপকে উল্লেখিত সরল দোলকের সাহায্যে অভিকর্ষজ ত্বরণ পরিমাপে শতকরা ত্রুটি নির্ণয় কর।

(ঘ) একজন ছাত্র আইনস্টাইনের বিখ্যাত ভরের আপেক্ষিকতা সমীকরণটি লিখতে ভুলক্রমে $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}}$ লিখে ফেলে। এখানে সমীকরণে আলোর বেগ রাশি c সে লিখতে ভুলে যায়। সমমাত্রিক নীতির সাহায্যে দেখাও যে ছাত্রটি সমীকরণে কোথায় c লিখতে ভুল করেছিল।

(ক) পরম ত্রুটি : কোনো একটি রাশির প্রকৃত মান ও পরিমাপকৃত মানের পার্থক্যকে পরম ত্রুটি বলে।

(খ) আনুপাতিক ভুল নির্ধারণ : যখন একটি পরীক্ষণে বেশ কয়েকটি রাশির মান পরিমাপ করতে হয়, তখন পরিমাপ্য রাশিগুলোর পরিমাপের শুদ্ধতার মাত্রা কতদূর পর্যন্ত উন্নত করা যায় তা যাচাই করা প্রয়োজন।

ধরা যাক x একটি পরিমাপ্য ভৌত রাশি এবং এটি y ও z রাশি দুটির সাথে নিম্নোক্ত সমীকরণের দ্বারা সম্পর্কযুক্ত :

$$x = y^m z^n \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \text{(i)}$$

এখন, y, z রাশি দুটিকে পরিমাপ করতে ভুল হলে x-এর পরিমাপে তা প্রতিফলিত হবে।

সমীকরণ (i)-কে লগারিদমিক অবকলন করে পাই,

$$\delta x = m\delta y + n\delta z$$

y, z রাশিগুলোকে পরিমাপ করার সময় সর্বোচ্চ সম্ভাব্য ভুল যথাক্রমে $\pm\,\delta y$ এবং $\pm\,\delta z$; ফলে x এর সর্বোচ্চ সম্ভাব্য ভুল হবে $\pm\,\delta x$।

সুতরাং সর্বোচ্চ সম্ভাব্য আনুপাতিক ভুল,

$$\left(\frac{\delta x}{x}\right)_{max} = m\left(\frac{\delta y}{y}\right) + n\left(\frac{\delta z}{z}\right) \quad \dots \quad \text{(ii)}$$

পরিমাপ্য ভৌত রাশি x-এর সাথে যে সকল রাশি জড়িত থাকে (এক্ষেত্রে y ও z) তাদের প্রত্যেকের আনুপাতিক ভুল পৃথকভাবে নির্ণয় করে ওই নির্ণীত ভুলগুলোর পরিমাণকে তাদের সংশ্লিষ্ট রাশিগুলির শক্তিসংখ্যা (power number) দ্বারা গুণ করে, গুণফলকে যোগ করলে ওই যোগফলই হবে পরিমাপ্য ভৌত রাশির (এক্ষেত্রে x) আনুপাতিক ভুলের সর্বোচ্চ মান। অতএব, যে রাশির শক্তিসংখ্যা বেশি সেটি খুব সতর্কতার সঙ্গে পরিমাপ করলে পরিমাপ্য রাশির আনুপাতিক ভুল কম হবে।

(গ) আমরা জানি, সরল দোলকের পর্যায়কাল, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

$\therefore \quad g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$

অভিকর্ষজ ত্বরণ পরিমাপে আপেক্ষিক ত্রুটি

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{2\times\Delta T}{T} = \frac{0{\cdot}01}{0{\cdot}6} + 2\times\frac{0{\cdot}12}{2{\cdot}4}$$

$$= \frac{0{\cdot}04 + 0{\cdot}24}{2{\cdot}4} = \frac{0{\cdot}28}{2{\cdot}4}$$

$\therefore$ শতকরা ত্রুটি, $\frac{\Delta g}{g} \times 100 = \frac{0{\cdot}28}{2{\cdot}4} \times 100 = 11{\cdot}67\%$

(ঘ) সমমাত্রিক নীতি অনুসারে সঠিক সম্পর্ক বা সমীকরণের উভয় দিকের মাত্রা সব সময় অভিন্ন হবে। তাই সমীকরণ,

$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}}$–এ সমমাত্রিক নীতি অনুসারে $(1-v)^{\frac{1}{2}}$–এর মাত্রা থাকবে না। সুতরাং, v^2-কে c^2 দ্বারা ভাগ করতে হবে।

সুতরাং সঠিক সমীকরণটি হলো, $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

৬। কাচের প্রতিসরাঙ্ক নির্ণয়ের একটি পরীক্ষায় বিভিন্ন পরিমেয় মানগুলো হলো 1·53, 1·55, 1·56, 1·54, 1·48, 1·49, 1·51।

(ক) অনুকল্প কাকে বলে ?

(খ) মাত্রা সমীকরণের প্রয়োজনীয়তা উল্লেখ কর। সমমাত্রিক নীতি কী ?

(গ) উদ্দীপকে উল্লেখিত কাচের প্রতিসরাঙ্কের আপেক্ষিক ত্রুটি ও শতকরা ত্রুটি নির্ণয় কর।

(ঘ) কোনো গ্যাসীয় মাধ্যম শব্দের বেগ (v), মাধ্যমের ঘনত্ব (ρ) এবং স্থিতিস্থাপকতা (E)-এর ওপর নির্ভর করে। গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বেগের সমীকরণ গাণিতিকভাবে প্রতিষ্ঠা কর।

(ক) অনুকল্প : বিজ্ঞানীরা তাঁদের পর্যবেক্ষিত ঘটনার কারণ সম্বন্ধে ব্যাখ্যা প্রদানের জন্য অনেক সময় পূর্বে আবিষ্কৃত প্রাকৃতিক নিয়মের সাথে সামঞ্জস্য রেখে কিছু অনুমান করেন। এই অনুমানগুলোকে অনুকল্প বলা হয়।

(খ) মাত্রা সমীকরণের প্রয়োজনীয়তা :

পদার্থবিজ্ঞানে মাত্রা সমীকরণের ভূমিকা অপরিসীম। নিম্নে এর ভূমিকা বা প্রয়োজনীয়তা উল্লেখ করা হলো :

(১) এক পদ্ধতির একককে অন্য পদ্ধতির এককে রূপান্তর করা যায়।

(২) সমীকরণের নির্ভুলতা যাচাই করা যায়।

(৩) বিভিন্ন রাশির সমীকরণ গঠন করা যায়।

(৪) কোনো ভৌত রাশির একক নির্ণয় করা যায়।

(৫) কোনো ভৌত সমস্যার সমাধান করা যায়।

সমমাত্রিক নীতি (Principle of dimensional homogeneity) : কোনো সঠিক সম্পর্ক বা সমীকরণের দুটি দিকের মাত্রা সব সময় অভিন্ন হবে। এটিই সমমাত্রিক নীতি।

(গ) প্রতিসরাঙ্কের গড় মান, $\bar{\mu} = \frac{1·53 + 1·55 + 1·56 + 1·54 + 1·48 + 1·49 + 1·51}{7}$

$= \frac{10·66}{7} = 1·54$

গড় মানকে প্রকৃত মান ধরলে পরিমাপে পরম ত্রুটিসমূহ—

(i) 1·54 − 1·53 = 0·01, (ii) 1·54 − 1·55 = − 0·01 (iii) 1·54 − 1·56 = − 0·02

(iv) 1·54 − 1·54 = 0·00 (v) 1·54 − 1·48 = 0·06 (vi) 1·54 − 1·49 = 0·05

(vii) 1·54 − 1·51 = 0·03

পরম ত্রুটির গড়, $\Delta\bar{\mu} = \frac{0·01 + 0·01 + 0·02 + 0·00 + 0·06 + 0·05 + 0·03}{7}$

$\Delta\bar{\mu} = 0·0257$

প্রতিসরাঙ্ক μ পরিমাপে আপেক্ষিক ত্রুটি, $\delta\mu = \frac{\Delta\vec{\mu}}{\mu} = \frac{0·0257}{1·54} = 0·017$

(ঘ) ধরা যাক, $v \propto \rho^x$ এবং $v \propto E^y$

$\therefore \quad v \propto \rho^x E^y = K\rho^x E^y \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (i)

[এখানে K হলো একটি মাত্রাহীন ধ্রুবক]

এখন, v, ρ ও E এর মাত্রা হলো,

v এর মাত্রা $= [LT^{-1}]$

ρ এর মাত্রা $= [ML^{-3}]$

E এর মাত্রা $= [ML^{-1}T^{-2}]$

সমীকরণ (i)-এর উভয় পক্ষের রাশিগুলির মাত্রা বসিয়ে পাই,

$$[LT^{-1}] = [ML^{-3}]^x [ML^{-1}T^{-2}]^y$$
$$= M^{x+y} L^{-3x-y} T^{-2y} \ldots \quad \ldots \quad (ii)$$

এখন সমীকরণ (ii) এর উভয় পক্ষের M, L, T এর ঘাত সমান করে পাই,

$$x + y = 0, \quad -3x - y = 1 \quad \text{এবং} \quad -2y = -1$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{2} \text{ এবং } x = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad v = K\rho^{-\frac{1}{2}}E^{\frac{1}{2}} = K\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

পরীক্ষা থেকে পাওয়া যায় K = 1

∴ বায়ু মাধ্যমে বা অন্য কোনো গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বেগ, $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ, $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

সার-সংক্ষেপ

ভৌত জগৎ : যে সব জিনিসের জীবন নেই, তার নাম ভৌত জগৎ।

জীব জগৎ : যার জীবন আছে তা হলো জীব জগৎ।

পরিমাপ : কোনো কিছুর মাপজোখের নাম পরিমাপ।

রাশি : যে সব জিনিসের পরিমাপ করা যায়, তার নাম রাশি।

একক : কোনো একটি রাশিকে পরিমাপ করতে হলে তার একটি নির্দিষ্ট অংশকে আদর্শ হিসেবে ধরে নিয়ে রাশিটি পরিমাপ করা হয়। পরিমাপের এই আদর্শকে একক বলা হয়।

এককের প্রকারভেদ : একক তিন প্রকার, যথা—
(ক) মৌলিক একক
(খ) লব্ধ, প্রাপ্ত বা যৌগিক একক
(গ) ব্যবহারিক একক
মৌলিক একক তিনটি, যথা— দৈর্ঘ্যের একক, ভরের একক এবং সময়ের একক।

মৌলিক একক : যে একক অন্য কোনো এককের ওপর নির্ভর করে না এবং একেবারে স্বাধীন তাকে মৌলিক একক বলে।

লব্ধ বা যৌগিক একক : তিনটি মৌলিক একককে ভিত্তি করে যে একক গঠন করা হয় বা মৌলিক একক হতে যে একক পাওয়া যায় তাকে লব্ধ বা যৌগিক একক বলে।

ব্যবহারিক একক : কোনো কোনো মৌলিক একক খুব বড় বা ছোট হওয়ায় ব্যবহারিক কাজে তাদের উপগুণিতক (ভগ্নাংশ) বা গুণিতককে একক হিসেবে ব্যবহার করা হয়। এর নাম ব্যবহারিক একক।

মাত্রা : কোনো একটি রাশি এবং তার মৌলিক এককের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপনের জন্য যে সঙ্কেত ব্যবহার করা হয় তাকে উক্ত রাশির মাত্রা বলে।

মাত্রা সমীকরণ : কোনো ভৌত রাশি যদি একাধিক রাশির ওপর নির্ভর করে, তবে দুই পাশের রাশিগুলোর মান না লিখে কেবলমাত্র মাত্রা লিখলে যে সমীকরণ পাওয়া যায় তাকে রাশিগুলোর মাত্রা সমীকরণ বলে।

নিয়মিত ত্রুটি : পরীক্ষাকালে কোনো কোনো ত্রুটির ফলে পরীক্ষাধীন রাশির পরীক্ষালব্ধ মান সর্বদাই এবং নিয়মিতভাবে রাশিটির প্রকৃত মান অপেক্ষা কম বা বেশি হতে পারে। এ ত্রুটিকে নিয়মিত ত্রুটি বলে।

অনিয়মিত ত্রুটি : ত্রুটির বিভিন্ন বিষয়ে উপযুক্ত সাবধানতা অবলম্বন করা সত্ত্বেও কোনো একটি রাশির পাঠ বারবার ভিন্ন হতে দেখা যায়। এ ধরনের ত্রুটিকে অনিয়মিত ত্রুটি বলে।

বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তরের জন্য প্রয়োজনীয় বিষয়াবলির সার-সংক্ষেপ

১। যাদের জীবন নেই তা নিয়ে ভৌত জগৎ। বিজ্ঞানের প্রাচীন ও আধুনিক শাখা হলো ভৌতবিজ্ঞান। স্থান, কাল, ভর ও শক্তি এই চারটি উপাদানের সমন্বয়ে ভৌতবিজ্ঞান। ভৌতবিজ্ঞানের অন্যান্য শাখার ভিত্তি রচনা করেছে পদার্থবিজ্ঞান। ইহা মৌলিক বিজ্ঞান। মহাবিশ্ব সৃষ্টির কারণ ব্যাখ্যা করা যায় মহাবিস্ফোরণ তত্ত্বের সাহায্যে। মানুষ ভৌত জগতের মাত্র 4% জানতে সক্ষম হয়েছে। বিংশ শতাব্দিতে ভৌত জগৎ সম্পর্কে ব্যাপক গবেষণা করা হয়েছে; বর্তমান শতাব্দিতেও গবেষণা চলছে এবং ভবিষ্যতেও চলবে।

২। বেগ, বল লব্ধ একক। ভর, তাপমাত্রা, দৈর্ঘ্য, সময় মৌলিক একক। কয়েকটি মৌলিক একক মিলে লব্ধ একক হয়। পরীক্ষার মাধ্যমে ঘটনা যাচাই করাই হলো সূত্র। পরীক্ষা দ্বারা প্রমাণিত অনুকল্পকে তত্ত্ব বলে।

৩। মাত্রা সমীকরণ লব্ধ একক এবং মৌলিক এককের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করে। অনুমিতির ওপর ভিত্তি করে তত্ত্ব গড়ে ওঠে। $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ সমীকরণে r এর মান পরিমাপে 2% ত্রুটি থাকলে V পরিমাপে ত্রুটি হবে 6%।

৪। 1 গ্যালন = $4{\cdot}54 \times 10^{-3}$ m^3; 1 মেট্রিক টন = 1000 kg, 1 মাইল = 1·61 কিমি। আলোকবর্ষ > পারসেক > মেগামিটার > এ্যাংস্ট্রম। স্ক্রু পীচকে চক্রাকার স্কেলের ঘরসংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে লঘিষ্ঠ ধ্রুবক পাওয়া যায়।

৫। আইনস্টাইন নোবেল পুরস্কার পান ফটোতড়িৎ ক্রিয়ার জন্য। তিনি ব্রাউনীয় গতি এবং আপেক্ষিক তত্ত্বের স্রষ্টা। প্রতিফলক টেলিস্কোপ নির্মাণ করেন নিউটন। স্থান, কাল, ভর ও শক্তি হলো ভৌত জগতের উপাদান।

৬। ফ্যারাডে তড়িৎ বিশ্লেষণের সূত্র এবং জেনারেটর আবিষ্কার করেন। 1704 সালে অপটিক্স নামে যে বইটি প্রকাশিত হয় তার লেখক ছিলেন নিউটন। তিনি ছিলেন ব্রিটেনের বিজ্ঞানী। সূর্যকেন্দ্রিক সৌরজগতের ধারণা দেন কোপারনিকাস। মৌলিক একক হলো—মিটার, কেলভিন, সেকেন্ড, অ্যাম্পিয়ার, ক্যান্ডেলা, মোল।

৭। 1900 সালে প্ল্যাঙ্ক আলোর কোয়ান্টাম তত্ত্ব দেন এবং কৃষ্ণবস্তু বিকিরণ ব্যাখ্যা করেন। $\pi = \frac{22}{7}$ নির্ণয় করেন ভাস্করাচার্য। স্ফেরোমিটারের স্ক্রু পীচকে চক্রাকার স্কেলের ঘরসংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে লঘিষ্ঠ ধ্রুবক পাওয়া যায়।

৮। 1610 সালে গ্যালিলিও যৌগিক অণুবীক্ষণ যন্ত্র আবিষ্কার করেন। তিনি ছিলেন আধুনিক বিজ্ঞানের জনক।

৯। তারের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে যন্ত্রের স্ক্রু-পীচ এবং লঘিষ্ঠ গণন নির্ণয় করতে হয়।

১০। রাশির মান = সংখ্যা × একক। এটিই হলো পরিমাপের মূলনীতি। আলোকবর্ষ হলো দূরত্বের একক।

১১। বিজ্ঞানী নিউটন মহাকর্ষ সূত্র, ক্যালকুলাস, বলবিদ্যা, লেন্সের সূত্র এবং প্রতিফলক টেলিস্কোপ আবিষ্কার করেন। ফ্যারাডে আবিষ্কার করেন তড়িৎ চৌম্বক আবেশের সূত্র।

১২। 1 গিগা = 10^9, 1 মেগা = 10^6, 1 টেরা = 10^{12}, 1 মাইক্রো = 10^{-6}, 1 ন্যানো = 10^{-9}, 1 পিকো = 10^{-12}, 1 ফেমটো = 10^{-15}, 1 মিলি = 10^{-3}।

১৩। ফলাফলে অনিশ্চয়তাকে পরিমাপের ত্রুটি বলে। স্ফেরোমিটারে পিছট (ডানে) ত্রুটি ঘটে।

১৪। বৃত্তাকার স্কেলের শূন্য দাগ রৈখিক স্কেলের অনুভূমিক দাগের উপরে থাকলে ঋণাত্মক ত্রুটি হয়। আর নিচে থাকলে ধনাত্মক ত্রুটি হয়।

১৫। নাট-স্ক্রু নীতিভিত্তিক যন্ত্রে পিছট ত্রুটি দেখা যায়। স্ক্রু ক্ষয় হয়ে ঢিলা হয়ে গেলে এবং বিক্ষেপ চৌম্বক মাপক যন্ত্রে এই ত্রুটি ঘটে। গোলীয় তলে বক্রতার ব্যাসার্ধের সমীকরণ হলো $R = \frac{d^2}{6h} + \frac{h}{2}$.

১৬। নিক্তি অনুভূমিক না থাকলে লেভেল ত্রুটি হয়। নিক্তির সাহায্যে ভর পরিমাপের ত্রুটি হলো লেভেল ত্রুটি।

১৭। **পুনরাবৃত্তি বা নিয়মিত ত্রুটি :** মিটার ব্রীজের প্রান্তিক ত্রুটি, পটেনশিওমিটারের প্রান্তিক ত্রুটি এবং স্ক্রু-গজের শূন্য ত্রুটি এই ত্রুটির অন্তর্ভুক্ত।

১৮। পর্যবেক্ষণের অসতর্কতা বা অমনোযোগিতার জন্য সামগ্রিক বা মোট ত্রুটি দেখা দেয়। পরম ত্রুটি = প্রকৃত মান ~ পরিমাপ্য মান।

১৯। শূন্য ত্রুটি, পিছট ত্রুটি, লেভেল ত্রুটি হলো যান্ত্রিক ত্রুটি। নিক্তি, চৌম্বক মাপন যন্ত্রে, গ্যালভানোমিটারে লেভেল ত্রুটি দেখা যায়।

২০। লম্বন ত্রুটি হলো পর্যবেক্ষণ ত্রুটি। পর্যবেক্ষণের জন্য পাঠে যে ত্রুটি আসে তা ব্যক্তিগত ত্রুটি।

২১। পিছট ত্রুটি যান্ত্রিক এলোমেলো ত্রুটি। 'g' নির্ণয়ে থামা ঘড়ির সাহায্যে T নির্ণয় ও স্কেলের সাহায্যে l নির্ণয়ে এই ত্রুটি দেখা দেয়। কোনো কিছু ব্যাখ্যার জন্য যে আনুষ্ঠানিক চিন্তাধারা তাকে অনুকল্প বলে।

২২। শতকরা ত্রুটি = $\frac{x \sim y}{x} \times 100\%$ বা $\frac{\text{প্রকৃত মান} \sim \text{প্রাপ্ত মান}}{\text{প্রকৃত মান}} \times 100\%$, শতকরা ত্রুটি = আপেক্ষিক ত্রুটি $\times 100\%$

২৩। দীর্ঘদিন ব্যবহারের ফলে যন্ত্রের ক্ষয়জনিত কারণে যে ত্রুটি হয় তাকে প্রান্ত দাগ ত্রুটি বলে।

২৪। দৃষ্টির দিক পরিবর্তনের সাথে সাথে কোনো লক্ষ্যবস্তুর অবস্থানের আপাত পরিবর্তনের জন্য যে ত্রুটি তাকে লম্বন ত্রুটি বলে। স্লাইড ক্যালিপার্সের ক্ষেত্র $L = M + V \times V_c$

২৫। আলোক বেঞ্চে সূচক ত্রুটি দেখা যায়। তড়িৎ বিভব মৌলিক রাশি নয়। পদার্থ পরিমাপের এসআই একক কিলোগ্রাম।

২৬। তাপমাত্রা, আর্দ্রতা, ভূ-পৃষ্ঠ থেকে উচ্চতা নির্ণয়ে পরিবেশগত ত্রুটি দেখা যায়। ঘরের দৈর্ঘ্য পরিমাপে যে ত্রুটি তাকে এলোমেলো ত্রুটি বলে। পরিমাপে যন্ত্রের ধনাত্মক ও ঋণাত্মক উভয় প্রকার ত্রুটি হয় যন্ত্রের কারণে।

২৭। পরীক্ষণের কার্যধারা ও যন্ত্রপাতির ত্রুটিজনিত যে ত্রুটি তাকে পুনরাবৃত্তিক বা ব্যবস্থাগত ত্রুটি বলে।

২৮। কোনো কিছু সম্পর্কে সঠিক উপলব্ধি বা বোধগম্যতাকে ধারণা বলে। সাধারণভাবে কোনো নির্দিষ্ট শর্তে সব সময় কী ঘটবে তার বর্ণনাকে সূত্র বলে।

২৯। N, J, W, K এর মধ্যে K হলো মৌলিক একক। স্বীকার্য তত্ত্বের ভিত্তি প্রদান করে।

৩০। তাপমাত্রা, দীপন তীব্রতা, পদার্থের পরিমাণ মৌলিক রাশি কিন্তু তড়িৎ বিভব মৌলিক রাশি নয়।

৩১। আলো সম্পর্কিত সর্বশেষ মতবাদ হলো কোয়ান্টাম মতবাদ। কোয়ান্টাম তত্ত্বের ধারণাকে সম্প্রসারিত করেন আলবার্ট আইনস্টাইন। "ভর ও শক্তি সমতুল" এটি আইনস্টাইনের আবিষ্কার। কোয়ান্টাম তত্ত্বের ধারণা দেন ম্যাক্স প্লাঙ্ক।

৩২। তড়িৎ চুম্বকীয় তত্ত্ব আবিষ্কার করেন ম্যাক্সওয়েল।

৩৩। বিজ্ঞানীরা তাঁদের পর্যবেক্ষিত ঘটনার কারণ সম্বন্ধে ব্যাখ্যা প্রদানের জন্য অনেক সময় পূর্বে আবিষ্কৃত প্রাকৃতিক নিয়মের সাথে সামঞ্জস্য রেখে কিছু অনুমান করেন। এই অনুমানগুলোকে বলা হয় অনুকল্প।

অনুশীলনী

(ক) বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। স্বতঃসিদ্ধ বা স্বীকার্য কী ?
ⓚ গাণিতিক যুক্তি
ⓖ কোনো ধারণা বা তত্ত্ব
ⓖ বৈজ্ঞানিক পরীক্ষায় প্রমাণিত
ⓖ পরীক্ষণের সার-সংক্ষেপ

২। তত্ত্ব কী বিষয়ের ওপর ভিত্তি করে গড়ে ওঠে ?
ⓚ নীতি
ⓖ অনুকল্প
ⓖ অনুমিতি
ⓖ পদ্ধতি

৩। নিম্নলিখিত রাশিগুলোর মধ্যে কোনটি মৌলিক একক?
(i) দৈর্ঘ্যের একক ও শক্তির একক
(ii) দৈর্ঘ্যের ও ভরের একক
(iii) সময়ের ও ভরের একক
নিচের কোনটি সঠিক ?
ⓚ i ও ii
ⓖ i ও iii
ⓖ ii ও iii
ⓖ i, ii ও iii

৪। নিচের কোনটি লব্ধ রাশি ? [চ. বো. ২০১৯; সি. বো. ২০১৯; ঢা. বো. ২০১৫]
ⓚ তাপমাত্রা
ⓖ ভর
ⓖ সময়
ⓖ কম্পাঙ্ক

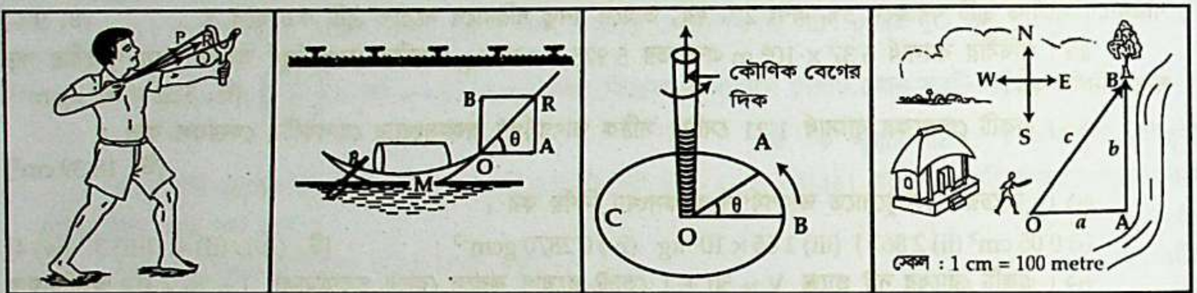
৫। 1 মাইল ও 1 কিলোমিটার দূরত্বের পার্থক্য মিটারে কত হবে ? [Medical Admission Test, 2017-18]
ⓚ 0.609 m
ⓖ 6.09 m
ⓖ 60.9 m
ⓖ 609 m

৬। পরমাণুর সমস্ত ধন আধান এবং ভর এর কেন্দ্রে অবস্থিত—এই তত্ত্ব কে উপস্থাপন করেন ?
ⓚ রাদারফোর্ড
ⓖ গ্যালিলিও
ⓖ আইনস্টাইন
ⓖ ম্যাক্স প্ল্যাঙ্ক

৭। তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গ তত্ত্ব আবিষ্কার করেন—
ⓚ রাদারফোর্ড
ⓖ নিউটন
ⓖ ম্যাক্সওয়েল
ⓖ আইনস্টাইন

২
ভেক্টর
VECTOR

প্রধান শব্দ (Key Words) : ভেক্টর রাশি, স্কেলার রাশি, একক ভেক্টর, লব্ধি ও অংশক বা উপাংশ, অবস্থান ভেক্টর, নাল বা শূন্য ভেক্টর, আয়ত একক ভেক্টর, ভেক্টর রাশির বিভাজন ও উপাংশ, ত্রিভুজ সূত্র, সামান্তরিক সূত্র, স্কেলার গুণন বা ডট গুণন, ভেক্টর বা ক্রস গুণন, অপারেটর, গ্রেডিয়েন্ট, ডাইভারজেন্স, কার্ল।



সূচনা
Introduction

বিজ্ঞানের বিভিন্ন বিষয় সুনির্দিষ্টভাবে জানতে হলে কোনো না কোনো ধরনের পরিমাপের প্রয়োজন হয়। পদার্থের যে সব ভৌত বৈশিষ্ট্য পরিমাপ করা যায় তাদের প্রত্যেককে রাশি (quantity) বলে। যেমন দৈর্ঘ্য, ভর, সময়, আয়তন, বেগ, কাজ ইত্যাদি প্রত্যেকে এক একটি রাশি। পদার্থবিজ্ঞানের অন্তর্গত যে কোনো রাশিকে ভৌত রাশি (physical quantity) বলে। কিছু কিছু ভৌত রাশিকে শুধুমাত্র মান দ্বারা সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায়। আবার অনেক ভৌত রাশি রয়েছে যাদেরকে সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করার জন্য মান ও দিক উভয়ই প্রয়োজন হয়। তাই ধর্ম বা বৈশিষ্ট্য অনুসারে ভৌত রাশিগুলোকে আমরা দুই ভাগে বিভক্ত করতে পারি; যথা—

(ক) স্কেলার রাশি বা অদিক রাশি (Scalar quantity)।

(খ) ভেক্টর রাশি বা দিক রাশি বা সদিক রাশি (Vector quantity)।

যে সব ভৌত রাশির শুধু মান আছে, কিন্তু দিক নেই, তাদেরকে স্কেলার রাশি বা অদিক রাশি বলে। যেমন দৈর্ঘ্য, ভর, সময়, জনসংখ্যা, তাপমাত্রা, তাপ, বৈদ্যুতিক বিভব, দ্যুতি, কাজ ইত্যাদি স্কেলার বা অদিক রাশি।

যে সব ভৌত রাশির মান এবং দিক দুই-ই আছে, তাদেরকে ভেক্টর রাশি বা দিক রাশি বলে। যেমন সরণ, বেগ, ত্বরণ, মন্দন, বল, ওজন ইত্যাদি ভেক্টর বা দিক রাশি।

এ অধ্যায় পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা—

- ভেক্টরের ধর্ম ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- পদার্থবিজ্ঞানের বিভিন্ন ভৌত রাশি ভেক্টররূপে প্রকাশ ও ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- কতিপয় বিশেষ ভেক্টর ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ভেক্টর রাশির জ্যামিতিক যোজন নিয়ম ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- লম্বাংশের সাহায্যে ভেক্টর রাশির যোজন ও বিয়োজন বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- একটি ভেক্টরকে ত্রিমাত্রিক আয়তাকার বিস্তারের ক্ষেত্রে লম্বাংশে বিভাজন করতে পারবে।
- দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার ও ভেক্টর গুণের সংজ্ঞার্থ ও এদের ব্যবহার করতে পারবে।
- পদার্থবিজ্ঞানে ক্যালকুলাসের ব্যবহার ও গুরুত্ব ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ভেক্টর ক্যালকুলাসের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ভেক্টর অপারেটর ব্যবহার করতে পারবে।

২·১ ভেক্টর (ধর্ম ও চিহ্ন)
Vector (Properties and symbols)

কোনো কোনো ভৌত রাশিকে বর্ণনার জন্য মানের সাথে দিক নির্দেশের প্রয়োজন হয়। এই সকল ভৌত রাশিই ভেক্টর রাশি। বস্তুজগতের এ ধরনের রাশি মান ও দিক দ্বারা প্রকাশিত না হলে তা ওই রাশির বর্ণনায় অসম্পূর্ণ থেকে যায়। ভেক্টর রাশি কতগুলো নিয়ম মেনে চলে। যথা—

১। ভেক্টর রাশির মান ও অভিমুখ আছে।

২। দুই বা ততোধিক সমজাতীয় ভেক্টরকে যোগ করা যায়। ভিন্ন প্রকৃতির ভেক্টরকে যোগ করা যায় না।

৩। দুই বা ততোধিক ভেক্টর যোগ করলে যে ভেক্টর পাওয়া যায় তা প্রথমোক্ত ভেক্টর দুটির সম্মিলিত ক্রিয়ার ফলাফলের সমান হয়।

৪। দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল একটি ভেক্টর রাশি হয়।

৫। দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল একটি স্কেলার রাশি।

৬। কোনো ভেক্টর রাশি ও তার মানের অনুপাত দ্বারা ভেক্টরটির দিক নির্দেশিত হয়।

৭। ভেক্টর রাশি যোগ সংযোজন ও বণ্টন সূত্র (rules of addition and distribution) মেনে চলে।

৮। ভেক্টর রাশিকে উপাংশে বিভক্ত করা যায়।

কোনো একটি ভেক্টর রাশিকে চিহ্ন দ্বারা দুভাবে প্রকাশ করা হয়ে থাকে; যথা—**অক্ষর দ্বারা** এবং **সরলরেখা দ্বারা।** অক্ষর দ্বারা কোনো একটি ভেক্টর রাশিকে চারভাবে প্রকাশ করা হয়, যথা—

ক. কোনো অক্ষরের উপর তীর চিহ্ন দ্বারা রাশিটির ভেক্টর রূপ এবং এর দুই পাশের দুটি খাড়া রেখা দ্বারা এর মান নির্দেশ করা হয়। সাধারণভাবে শুধু অক্ষর দ্বারাও রাশিটির মান নির্দেশ করা হয়।

$\therefore$ A অক্ষরের ভেক্টর রূপ $\vec{A}$ এবং মান রূপ $|\vec{A}|$ বা A

খ. কোনো অক্ষরের উপর রেখা চিহ্ন দ্বারা রাশিটির ভেক্টর রূপ এবং এর দুই পাশের দুটি খাড়া রেখা দ্বারা এর মান নির্দেশ করা হয়।

$\therefore$ A অক্ষরের ভেক্টর রূপ $\bar{A}$ এবং মান রূপ $|\bar{A}|$

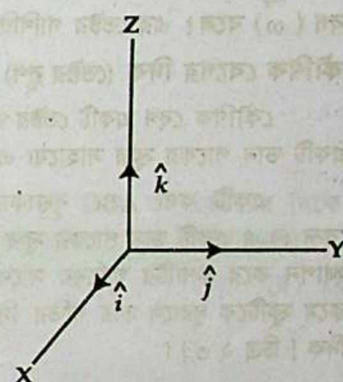
গ. কোনো অক্ষরের নিচে রেখা চিহ্ন দ্বারা রাশিটির ভেক্টর রূপ এবং এর দুই পাশের দুটি খাড়া রেখা দ্বারা এর মান নির্দেশ করা হয়।

$\therefore$ A অক্ষরের ভেক্টর রূপ $\underline{A}$ এবং মান রূপ $|\underline{A}|$

ঘ. মোটা হরফের অক্ষর দিয়ে ভেক্টর রাশি প্রকাশ করা হয়। যেমন A অক্ষরের ভেক্টর রূপ **A** এবং এর মান A।

ভেক্টর রাশি নির্দেশের ক্ষেত্রে ক-এ ব্যবহৃত চিহ্নই শ্রেয়। তাই এই বইতে আমরা এই পদ্ধতিই ব্যবহার করব।

ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় ধনাত্মক X, Y এবং Z অক্ষের দিকে ব্যবহৃত যথাক্রমে $\hat{i}$, $\hat{j}$ এবং $\hat{k}$ চিহ্ন দ্বারা আয়ত একক ভেক্টর দেখানো হয়েছে [চিত্র ২·১]।



চিত্র ২·১

কাজ : মান ও অভিমুখ আছে এমন সকল রাশিই কী ভেক্টর রাশি ? ব্যাখ্যা কর।

মান ও অভিমুখ যুক্ত সকল রাশিই ভেক্টর রাশি নয়। যেমন তড়িৎ প্রবাহ রাশিটির মান ও অভিমুখ থাকলেও দুটি নির্দিষ্ট তড়িৎ প্রবাহ ভেক্টর যোগের বিনিময় সূত্র মেনে চলে না। তাই এই রাশিটির মান ও অভিমুখ থাকলেও এটি ভেক্টর রাশি নয়।

২·২ ভেক্টর প্রকাশ
Vector representation

বিভিন্ন ভেক্টর রাশিকে ভেক্টররূপে গাণিতিকভাবে প্রকাশ করা যায়। ফলে রাশিটির মান ও দিক স্পষ্ট হয়। নিম্নে কয়েকটি ভৌত রাশির ভেক্টর প্রকাশ দেখানো হলো।

বল
Force

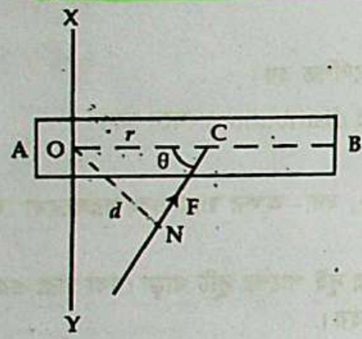
যে বাহ্যিক কারণ বস্তুর গতি বা স্থিতি অবস্থার পরিবর্তন ঘটায় বা ঘটাতে চায় তাকে বল বলে।

বল একটি ভেক্টর রাশি। এর মান ও দিক আছে। কোনো একটি গতিশীল বস্তুর ভর 'm', ত্বরণ $\vec{a}$ এবং বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল বল $\vec{F}$ হলে, এর ভেক্টর প্রকাশ হলো,

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

ঘূর্ণন বল বা টর্ক
Rotational force or torque

ঘূর্ণন বল বলতে টর্ককে বুঝানো হয়। ঘূর্ণনশীল বস্তুর ক্ষেত্রে বলের সমতুল্য রাশি হলো টর্ক।



চিত্র ২.২

কোনো অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণনরত বস্তুর ওপর যে বিন্দুতে বল ক্রিয়াশীল ওই বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর ও প্রযুক্ত বলের গুণফলকে ঘূর্ণন বল বা টর্ক বলে।

অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$ এবং প্রযুক্ত বল $\vec{F}$ হলে,

টর্ক, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ [চিত্র ২.২]

টর্ক একটি ভেক্টর রাশি। $\vec{r}$ এবং $\vec{F}$ যে তলে অবস্থিত τ ওই তলের অভিলম্ব বরাবর। টর্কের একক N-m।

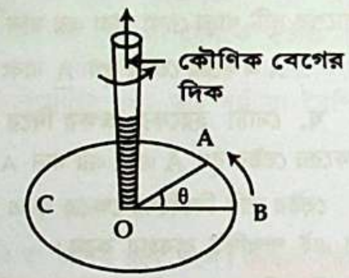
কৌণিক বেগ
Angular velocity

সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে কৌণিক সরণের পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক কৌণিক বেগ বা কৌণিক বেগ ($\vec{\omega}$) বলে। এর ভেক্টর গাণিতিক প্রকাশ হলো $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

কৌণিক বেগের দিক (ভেক্টর রূপ) :

কৌণিক বেগ একটি ভেক্টর রাশি। এর মান ও দিক দুই-ই আছে। একটি ডান পাকের স্ক্রুর সাহায্যে এর দিক নির্দেশ করা যায়।

একটি কণা ABC বৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকলে ওই বৃত্তের কেন্দ্র O-এ একটি ডান পাকের স্ক্রুর অগ্রভাগ বৃত্ত-তলের অভিলম্বভাবে স্থাপন করে কণাটির ঘূর্ণনের সাথে এবং কণাটি যে ক্রমে ঘুরছে সেই ক্রমে স্ক্রুটিকে ঘুরালে তার গতির দিকই হবে কণাটির কৌণিক বেগের দিক [চিত্র ২৩]।



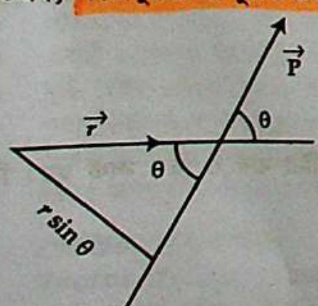
চিত্র ২৩

কৌণিক ভরবেগ
Angular momentum

ঘূর্ণনরত কোনো বস্তুকণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর ও রৈখিক ভরবেগের ভেক্টর গুণফলকে কৌণিক ভরবেগ বলে।

মনে করি $\vec{r}$ = ঘূর্ণন কেন্দ্রের সাপেক্ষে কোনো বস্তুকণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর এবং $\vec{P}$ = বস্তুর রৈখিক ভরবেগ। অতএব, সংজ্ঞানুসারে বস্তুটির কৌণিক ভরবেগ,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$$



চিত্র ২.৪

এটি একটি ভেক্টর রাশি। এর একক kgm^2s^{-1}

মান ও দিক : কৌণিক ভরবেগের মান

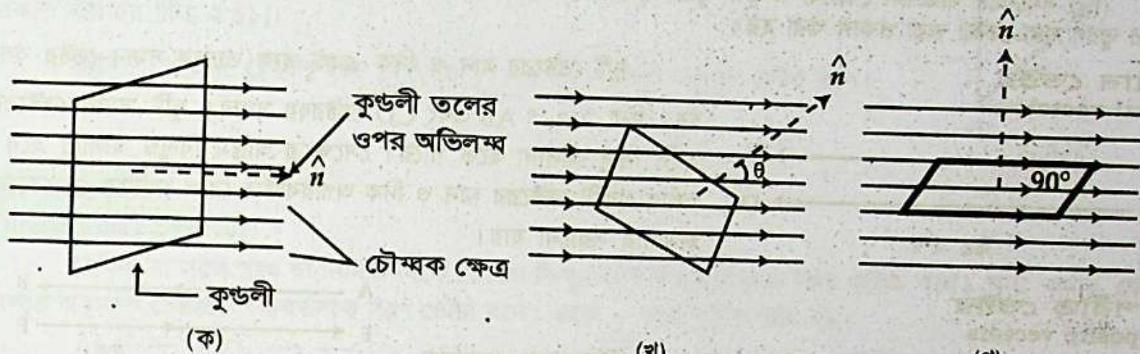
$$L = rP\sin\theta$$

এখানে θ হচ্ছে $\vec{r}$ ও $\vec{P}$-এর মধ্যবর্তী কোণ [চিত্র ২.৪]। ঘূর্ণন কেন্দ্র হতে ভরবেগের ক্রিয়ারেখার লম্ব দূরত্ব হচ্ছে $r\sin\theta$। অতএব, কোনো বস্তুকণার ভরবেগ ও ঘূর্ণন কেন্দ্র হতে ভরবেগের ক্রিয়া রেখার লম্ব দূরত্বের গুণফল কৌণিক ভরবেগের মান নির্দেশ করে।

$\vec{r}$ ও $\vec{P}$ যে তলে অবস্থিত $\vec{L}$ এর দিক হবে ঐ তলের লম্ব বরাবর। ক্রস গুণনের নিয়ম দ্বারা $\vec{L}$-এর দিক নির্ধারিত হবে।

তল
Surface

কোনো একটি পৃষ্ঠের বা সমতলের উপর অভিলম্ব অঙ্কন করলে যে দিক নির্দেশিত হয় তা ওই তলের ভেক্টর। এক্ষেত্রে পৃষ্ঠটিই হবে তল। তবে কোনো বস্তুর তল বা পৃষ্ঠ একটি স্কেলার রাশি। যে কোনো সমতলের উপর অঙ্কিত অভিলম্বকে ওই তলের তল ভেক্টর বলে। নিচের চিত্রে ড্যাস লাইন যুক্ত তীর চিহ্ন দ্বারা তল ভেক্টর ($\hat{n}$) দেখানো হলো। চিত্রের কুণ্ডলীটি হলো তল।



চিত্র ২.৫

২.৩ বিশেষ ভেক্টর
Special Vectors

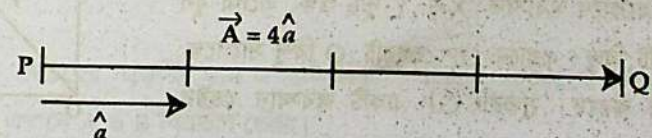
একক ভেক্টর
Unit vector

যে সকল ভেক্টরের মান শূন্য নয় এরূপ একটি ভেক্টরকে এর মান দ্বারা ভাগ করলে ওই ভেক্টরের দিকে বা সমান্তরালে একটি একক ভেক্টর পাওয়া যাবে। অর্থাৎ যে ভেক্টর রাশির মান এক একক তাকে একক ভেক্টর বলে।

একক ভেক্টরকে প্রকাশ করতে সাধারণত ছোট অক্ষরের উপর একটি টুপি চিহ্ন (^) দেয়া হয়। যেমন $\hat{i}, \hat{a}, \hat{n}$ ইত্যাদি দ্বারা একক ভেক্টর প্রকাশ করা হয়।

ধরি, $\vec{A}$ একটি ভেক্টর যার মান, $A \neq 0$

$\therefore \frac{\vec{A}}{A} = \vec{A}$-এর দিকে একক ভেক্টর $= \hat{a}$ (ধরি)।



চিত্র ২.৬

কাজেই কোনো একটি ভেক্টর $\vec{A}$-এর মান, $A = 4$ একক এবং $\vec{A}$-এর দিকে একক ভেক্টর $\hat{a}$ হলে, $\vec{A} = 4\hat{a}$ [চিত্র ২.৬]। অর্থাৎ কোনো ভেক্টরের মানকে ঐ ভেক্টরের একক ভেক্টর দ্বারা গুণ করলে ভেক্টরটি পাওয়া যায়।

নাল বা শূন্য ভেক্টর
Null or zero vector

মনে কর, একটি রশির দুই প্রান্তে দুইজন লোক একসাথে একই পরিমাণ বলে টানছে। তাহলে এই টানের লব্ধি একটি শূন্য ভেক্টর হবে। অন্যভাবে বলা যায়, যে ভেক্টর রাশির মান শূন্য এবং যার কোনো নির্দিষ্ট দিক থাকে না, তাকে নাল বা শূন্য ভেক্টর বলে। শূন্য ভেক্টরের পাদবিন্দু এবং শীর্ষবিন্দু একই। একে $\vec{0}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। একটি ভেক্টরের সাথে তার বিপরীত ভেক্টর যোগ করে বা দুটি সমান ভেক্টর বিয়োগ করে নাল ভেক্টর পাওয়া যায়। এর কোনো নির্দিষ্ট দিক নেই। দুটি সমান ও বিপরীত ভেক্টর কোনো বিন্দুতে একই সাথে ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধি একটি নাল ভেক্টর হয়।

শূন্য ভেক্টরের গুরুত্ব
Importance of zero or null vector

পদার্থবিজ্ঞানে শূন্য ভেক্টরের নিম্নোক্ত তাৎপর্য রয়েছে :

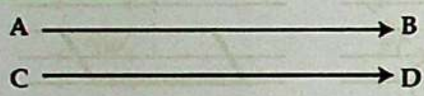
(i) দুটি সমান ভেক্টরের বিয়োগফল বোঝাতে শূন্য ভেক্টর প্রয়োজন।

(ii) দুটি সমান্তরাল ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল প্রকাশ করার জন্য শূন্য ভেক্টর প্রয়োজন। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় সমান্তরাল হলে $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ হবে।

(iii) সমবেগে গতিশীল কোনো বস্তুর ত্বরণ শূন্য। ত্বরণ যেহেতু একটি ভেক্টর রাশি সুতরাং, সমবেগে গতিশীল বস্তুর ত্বরণ শূন্য ভেক্টর দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সমান ভেক্টর
Equal vectors

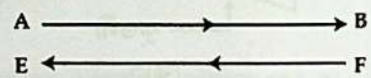
দুটি ভেক্টরের মান ও দিক একই হলে তাদের সমান ভেক্টর বলা হয়। চিত্র ২.৭-এ $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{CD}$ ভেক্টরদ্বয় সমান। দুটি সমান ভেক্টরের আদি বিন্দু আলাদা হতে পারে। সেক্ষেত্রে অন্তিম বিন্দুও আলাদা হবে। অর্থাৎ একটি ভেক্টরের মান ও দিক অপরিবর্তিত রেখে সেটিকে যে কোনো জায়গায় সরানো যায়।



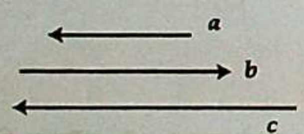
চিত্র ২.৭

বিপরীত ভেক্টর
Opposite vectors

দুটি ভেক্টরের পরম মান সমান কিন্তু অভিমুখ বিপরীত হলে তাদেরকে বিপরীত ভেক্টর বলা হয়। চিত্র ২.৮-এ $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{EF}$ বিপরীত ভেক্টর।



চিত্র ২.৮



চিত্র ২.৯

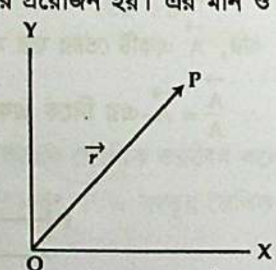
একরেখীয় ভেক্টর
Collinear vectors

একাধিক সমান্তরাল ভেক্টর (সমান বা অসমান) একমুখি বা বিপরীতমুখি হলে তাদেরকে একরেখীয় ভেক্টর বলা হয়। চিত্র ২.৯-এ একরেখীয় ভেক্টর দেখানো হয়েছে।

অবস্থান ভেক্টর
Position vector

প্রসঙ্গ কাঠামোতে একটি বিন্দুর অবস্থান জানার জন্য একটি ভেক্টর রাশির প্রয়োজন হয়। এর মান ও দিকের সাহায্যে বস্তুটির অবস্থান নির্ণয় করা যায়। অর্থাৎ প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টরের সাহায্যে নির্ণয় বা নির্দেশ করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে।

মনে করি পরস্পর সমকোণে অবস্থিত X ও Y দুটি অক্ষ, এদের মূল বিন্দু O। P যে কোনো একটি বিন্দু। এখানে $\overrightarrow{OP}$ ভেক্টরটি O বিন্দু সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করছে। সুতরাং $\overrightarrow{OP}$ একটি অবস্থান ভেক্টর [চিত্র ২.১০]।



চিত্র ২.১০

গাণিতিক উদাহরণ ২.১

১। P এবং Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (–3, 4, 5) এবং (3, –2, 4) হলে স্থানাঙ্কের সাহায্যে $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরকে প্রকাশ কর। এর মান কত ?

এখানে, P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\vec{r_1} = -3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$

এবং Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\vec{r_2} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$$\therefore \quad \overrightarrow{PQ} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}) - (-3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k})$$
$$= 6\hat{i} - 6\hat{j} - \hat{k}$$

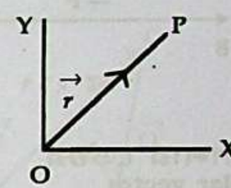
অতএব, $\overrightarrow{PQ}$ এর মান $= |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{6^2 + 6^2 + 1^2} = \sqrt{73}$

ব্যাসার্ধ ভেক্টর
Radius vector

অবস্থান ভেক্টরকে অনেক সময় ব্যাসার্ধ ভেক্টর (radius vector) বলে এবং $\vec{r}$ দিয়ে প্রকাশ করা হয়। সুতরাং OP $= \vec{r}$। ব্যাসার্ধ ভেক্টরের সংজ্ঞা নিম্নরূপ :

মূলবিন্দু হতে কোনো বিন্দুর অবস্থানের দূরত্বকে ব্যাসার্ধ ভেক্টর বলে। একে $\vec{r}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় [চিত্র ২.১১]।

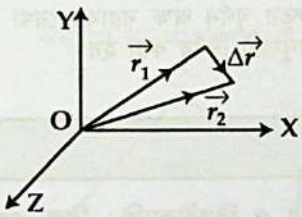
ব্যাখ্যা : এখানে O বিন্দু হতে P বিন্দুর অবস্থানের দূরত্বকে ব্যাসার্ধ ভেক্টর বলে।



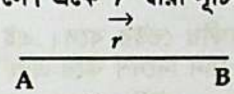
চিত্র ২.১১

সরণ ভেক্টর
Displacement vector

রৈখিক বা সরল পথে বা নির্দিষ্ট দিকে কোনো বিন্দুর অতিক্রান্ত দূরত্বকে সরণ ভেক্টর বলে। অন্য কথায় কোনো বস্তুর অবস্থান ভেক্টরের পরিবর্তনকে সরণ ভেক্টর বলে। একে $\vec{r}$ দ্বারা সূচিত করা হয়।



চিত্র ২.১২

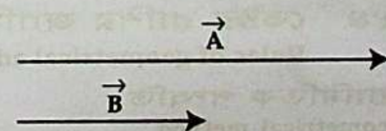


চিত্র ২.১৩

ব্যাখ্যা : ধরি, সরল পথে কোনো বিন্দুর অতিক্রান্ত দূরত্ব AB $= r$। অতএব $\vec{r}$ হলো সরণ ভেক্টর [চিত্র ২.১২]। অন্যভাবে বলা যায় একটি বস্তুর আদি অবস্থান $\vec{r_1}$ (x_1, y_1, z_1) এবং পরিবর্তিত অবস্থান $\vec{r_2}$ (x_2, y_2, z_2) হলে সরণ ভেক্টর $\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$ [চিত্র ২.১৩]।

সদৃশ ভেক্টর
Like vectors

সমজাতীয় অসম মানের দুটি ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ যদি একই দিকে ক্রিয়া করে তবে তাদেরকে সদৃশ ভেক্টর বলে [চিত্র ২.১৪]। উদাহরণ, $\vec{A} = 2\vec{B}$



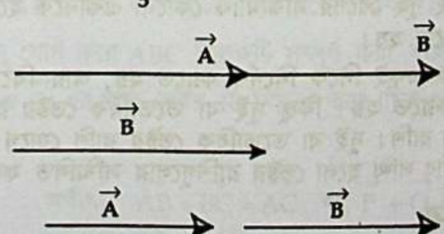
চিত্র ২.১৪

বিপ্রতীপ ভেক্টর
Reciprocal vectors

দুটি সমান্তরাল ভেক্টরের একটির মান অপরটির বিপ্রতীপ হলে তাদেরকে বিপ্রতীপ ভেক্টর বলে। উদাহরণ, $\vec{A} = 5\hat{i}$ ও $\vec{B} = \frac{1}{5}\hat{i}$। এখানে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ বিপ্রতীপ ভেক্টর।

সমরেখ ভেক্টর
Collinear vectors

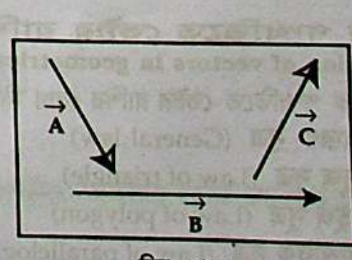
দুই বা ততোধিক ভেক্টর যদি এমন হয় যে তারা একই রেখায় বা সমান্তরালে ক্রিয়া করে, তাদেরকে সমরেখ ভেক্টর বলে [চিত্র ২.১৫]।



চিত্র ২.১৫

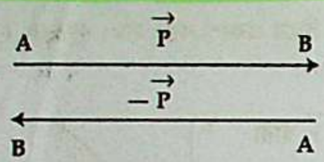
সমতলীয় ভেক্টর
Coplanar vectors

দুই বা ততোধিক ভেক্টর একই তলে অবস্থান করলে তাদেরকে সমতলীয় ভেক্টর বলে [চিত্র ২.১৬]।



চিত্র ২.১৬

বিপরীত বা ঋণ ভেক্টর এবং সমভেক্টর
Negative vector and Equal vector



চিত্র ২.১৭

বিপরীত দিকে ক্রিয়ারত দুটি সমজাতীয় ভেক্টরের মান সমান হলে তাদেরকে একে অপরের বিপরীত বা ঋণ ভেক্টর বলে।

আর দুটি সমজাতীয় ভেক্টরের মান সমান ও দিক একই দিকে হলে তাদেরকে সমভেক্টর বলে।

২.১৭ চিত্রে $\vec{AB} = \vec{P}$ এর বিপরীত ভেক্টর $\vec{BA} = -\vec{P}$

এখানে $\vec{AB} = \vec{BA}$

পোলার ভেক্টর
Polar vector

বস্তুর ঘূর্ণনের সঙ্গে যুক্ত নয় এমন ভেক্টরকে তীর চিহ্নযুক্ত সরলরেখা দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এই রেখার দৈর্ঘ্য ভেক্টরের মান এবং তীর চিহ্ন দিক নির্দেশ করে। এদের পোলার ভেক্টর বলে।

উদাহরণ : বল, ভরবেগ, সরণ, গতিবেগ প্রভৃতি।

অক্ষীয় ভেক্টর
Axial vector

বস্তুর ঘূর্ণনের সঙ্গে যুক্ত ভেক্টরকে অক্ষীয় ভেক্টর বলে। এই ভেক্টরগুলিকে বস্তুর ঘূর্ণন অক্ষ বরাবর রেখা দ্বারা প্রকাশ করা হয়। রেখা ভেক্টরটির দৈর্ঘ্য রাশির মান নির্দেশ করে এবং দিক স্ক্রু নিয়ম অনুযায়ী নির্ণয় করা হয়।

উদাহরণ : কৌণিক বেগ, কৌণিক ত্বরণ, কৌণিক ভরবেগ প্রভৃতি।

কাজ : $|\vec{A}| \neq |\vec{B}|$ হলে $\vec{A} + \vec{B} = 0$ হওয়া সম্ভব কিনা ব্যাখ্যা কর।

$\vec{A} + \vec{B} = 0$ হলে $\vec{A} = -\vec{B}$ হবে। অর্থাৎ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ হবে সমমানের ও বিপরীতমুখি। কিন্তু এখানে $|\vec{A}| \neq |\vec{B}|$; অর্থাৎ এদের মান সমান নয়। অতএব, $\vec{A} + \vec{B} = 0$ হতে পারে না।

২.৪ ভেক্টর রাশির জ্যামিতিক যোজন নিয়ম
Rules of geometrical addition of vectors

জ্যামিতিক পদ্ধতি
Geometrical method

একই জাতীয় দুটি ভেক্টর রাশিকে যোগ বা বিয়োগ করা যায়। যেমন সরণের সাথে কেবল সরণই যোগ বা বিয়োগ করা চলে। সরণের সাথে বেগের যোগ বা বিয়োগের প্রশ্নই ওঠে না। ভেক্টর রাশির মান ও দিক দুই-ই আছে। এই কারণে ভেক্টর রাশির যোগ-বিয়োগ সাধারণ বীজগণিতের নিয়মানুযায়ী করা হয় না। ভেক্টর রাশির দিকই এ সব ক্ষেত্রে বিঘ্ন ঘটায়। যেমন ধরা যাক, একটি নৌকায় দাঁড়ের বেগ ঘণ্টায় 8 কিলোমিটার এবং একটি নদীর পানির স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 6 কিলোমিটার। নৌকাটিকে ওই নদীর এক পাড় হতে সোজা অপর পাড়ের দিকে চালালে, নৌকাটির উপর যে দুটি বেগ ক্রিয়া করবে এদের বীজগাণিতিক যোগফল $(8 + 6) = 14$ কিলোমিটার/ঘণ্টা দ্বারা নৌকাটির প্রকৃত বেগ পাওয়া যাবে না—প্রকৃত বেগ সম্পূর্ণ আলাদা হবে। আবার নৌকাটির গতিমুখ ওই দুই বেগের মাঝামাঝি কোনো একদিকে হবে। এই কারণে ভেক্টর রাশির যোগ-বিয়োগ জ্যামিতিক পদ্ধতি অনুসারে করতে হয়।

একই অভিমুখি দুটি ভেক্টর রাশি যোগ করতে হলে রাশি দুটিকে একই দিকে নির্দেশ করতে হয়, আর বিয়োগ করতে হলে একটি ভেক্টর রাশিকে অপরটির বিপরীত দিকে নির্দেশ করতে হয়। কিন্তু দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশি একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করলে এদের যোগফল হবে আর একটি নতুন ভেক্টর রাশি। দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশি যোগে যে একটি নতুন ভেক্টর রাশি হয় তাকে এদের **লব্ধি** (Resultant) বলে। অর্থাৎ লব্ধি হলো ভেক্টর রাশিগুলোর সম্মিলিত ফল।

জ্যামিতিক পদ্ধতিতে ভেক্টর রাশির যোগের সূত্র
Laws of addition of vectors in geometrical method

জ্যামিতিক পদ্ধতিতে ভেক্টর রাশির যোগ নিম্নলিখিত পাঁচটি সূত্রের সাহায্যে করা যায়; যথা—

(১) **সাধারণ সূত্র** (General law)
(২) **ত্রিভুজ সূত্র** (Law of triangle)
(৩) **বহুভুজ সূত্র** (Law of polygon)
(৪) **সামান্তরিক সূত্র** (Law of parallelogram) এবং
(৫) **উপাংশ সূত্র** (Law of components)।

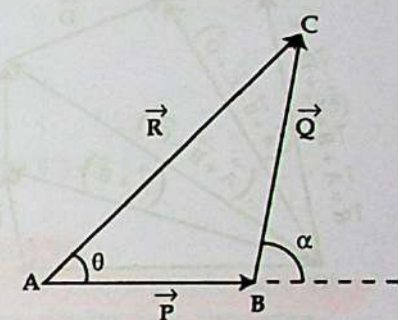
এই অনুচ্ছেদে প্রথম চারটি সূত্র আলোচনা করা হলো।

১. সাধারণ সূত্র

সমজাতীয় দুটি ভেক্টরের প্রথমটির শীর্ষ বা শেষ বিন্দু এবং দ্বিতীয়টির আদি বিন্দু একই বিন্দুতে স্থাপন করে প্রথম ভেক্টরের আদি বিন্দু ও দ্বিতীয় ভেক্টরের শীর্ষবিন্দুর মধ্যে সংযোগকারী সরলরেখার দিকে লব্ধি ভেক্টরের দিক নির্দেশ করবে এবং ওই সরলরেখার দৈর্ঘ্য ভেক্টর দুটির লব্ধির মান নির্দেশ করবে।

ধরা যাক একই বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়াশীল দুটি ভেক্টর রাশি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$-এর লব্ধি $\vec{R}$ নির্ণয় করতে হবে।

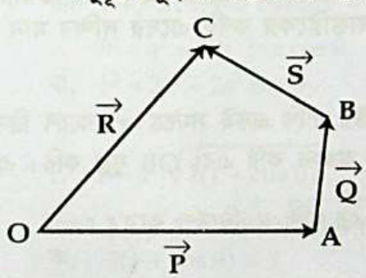
$\vec{P}$ নির্দেশী সরলরেখা AB-এর শীর্ষবিন্দু B-তে $\vec{Q}$ নির্দেশী সরলরেখার আদি বিন্দু থাকে। এরূপে BC রেখা দ্বারা $\vec{Q}$ নির্দেশ করে $\vec{P}$-এর আদিবিন্দু A এবং $\vec{Q}$-এর শীর্ষবিন্দু C যুক্ত করি এবং রেখাটিকে A হতে C অভিমুখে তীর চিহ্নিত করি [চিত্র ২.১৮]। তা হলে তীর চিহ্নিত AC রেখাই লব্ধি $\vec{R}$ নির্দেশ করবে। এখানে রাশি দুটির যোগফল নিম্ন উপায়ে লেখা হয়—



চিত্র ২.১৮

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.1)$$

অনুরূপে দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশি যোগ করা যায়।



চিত্র ২.১৯

২.১৯ চিত্রে তিনটি ভেক্টর রাশি $\vec{P}, \vec{Q}$ ও $\vec{S}$ যথাক্রমে তীর চিহ্নিত OA, AB ও BC সরলরেখায় নির্দেশ করে OC সরলরেখা দ্বারা এদের লব্ধি $\vec{R}$ সূচিত হয়েছে।

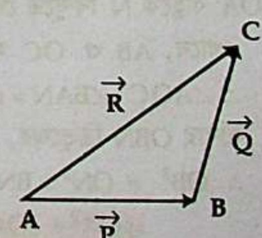
এখানে লব্ধি, $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{S}$

আবার $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ একই ত্রিভুজের তিনটি বাহু বরাবর ক্রিয়াশীল হলে $\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = 0$ হয়।

২. ত্রিভুজ সূত্র

দুটি ভেক্টর কোনো ত্রিভুজের সন্নিহিত বাহু দ্বারা একই ক্রমে মানে ও দিকে সূচিত করা হলে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুটি বিপরীতক্রমে ভেক্টর দুটির লব্ধি নির্দেশ করবে।

ব্যাখ্যা : মনে করি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর যোগ করতে হবে। প্রথমে $\vec{P}$-এর প্রান্ত বা শীর্ষবিন্দুর সাথে $\vec{Q}$-এর আদি বিন্দু যুক্ত করে ভেক্টর দুটি মানে ও দিকে বাহু AB ও BC দ্বারা সূচিত করা হলো। এখন $\vec{P}$-এর আদি বিন্দু ও $\vec{Q}$-এর শেষ বিন্দু যোগ করে ABC ত্রিভুজটি সম্পূর্ণ করা হলো। AC বাহুটিই দিকে ও মানে $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$-এর লব্ধি ভেক্টর $\vec{R}$ নির্দেশ করে [চিত্র ২.২০]।



চিত্র ২.২০

অর্থাৎ, $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ বা, $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{R} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.2)$

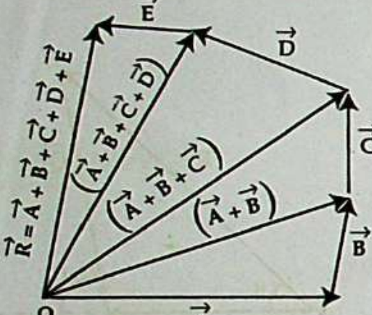
পুনঃ, $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} = -\vec{CA} \quad [\because \vec{AC} = -\vec{CA}]$

বা, $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.3)$

সিদ্ধান্ত : একই বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত তিনটি সমজাতীয় সমতলীয় ভেক্টর রাশিকে কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা একই ক্রমে নির্দেশ করলে এদের লব্ধি শূন্য হবে।

৩. বহুভুজ সূত্র

দুই-এর অধিক ভেক্টর রাশির ক্ষেত্রে ভেক্টর রাশিগুলোকে একই ক্রমে সাজিয়ে প্রথম ভেক্টর রাশির পাদবিন্দু এবং শেষ ভেক্টর রাশির শীর্ষবিন্দু যোগ করলে যে বহুভুজ পাওয়া যায় এর শেষ বাহুটি বিপরীতক্রমে ভেক্টর রাশিগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।



চিত্র ২.২১

ব্যাখ্যা : মনে করি, $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}, \vec{E}$ পাঁচটি ভেক্টর রাশি [চিত্র ২.২১]; এদের লব্ধি নির্ণয় করতে হবে। এখন প্রথম ভেক্টর রাশির শীর্ষবিন্দুর উপর দ্বিতীয় ভেক্টর রাশির পাদবিন্দু, দ্বিতীয় ভেক্টর রাশির শীর্ষবিন্দুর উপর তৃতীয় ভেক্টর রাশির পাদবিন্দু স্থাপন করি এবং এমনিভাবে ভেক্টর রাশিগুলোকে পর পর স্থাপন করি। তাহলে বহুভুজ সূত্রানুসারে প্রথম ভেক্টর রাশির আদি বিন্দু এবং শেষ ভেক্টর রাশির শীর্ষবিন্দুর সংযোজক ভেক্টর রাশি $\vec{R}$-ই উল্লিখিত ভেক্টর রাশিগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করবে।

$\therefore$ লব্ধি, $\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}+\vec{E}$

৪. সামান্তরিক সূত্র

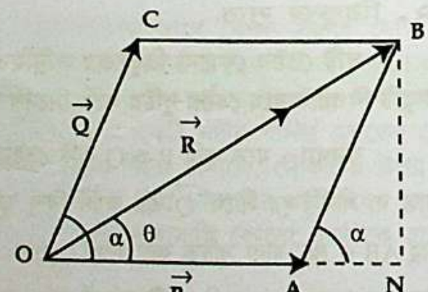
কোনো সামান্তরিকের একই বিন্দু হতে অঙ্কিত সন্নিহিত বাহু দুটি যদি কোনো কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়ারত দুটি ভেক্টর রাশির মান ও দিক নির্দেশ করে, তা হলে ওই বিন্দু হতে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণই এদের লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।

মনে করি O বিন্দুতে একটি কণার উপর $\vec{OA}=\vec{P}$ ও $\vec{OC}=\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি একই সময়ে α কোণে ক্রিয়া করছে [চিত্র ২.২২]। OA ও OC-কে সন্নিহিত বাহু ধরে OABC সামান্তরিকটি অঙ্কন করি এবং OB যুক্ত করি। এই সূত্রানুসারে উভয় ভেক্টরের ক্রিয়াবিন্দু O থেকে অঙ্কিত কর্ণ $\vec{OB}$-ই ভেক্টর $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$-এর লব্ধি $\vec{R}$ নির্দেশ করে।

অর্থাৎ, $\vec{OA}+\vec{OC}=\vec{OB}$

বা, $\vec{P}+\vec{Q}=\vec{R}$

লব্ধির মান নির্ণয়



চিত্র ২.২২

মনে করি লব্ধির মান R এবং $\angle AOC=\alpha$ কোণটি সূক্ষ্মকোণ। এখন B বিন্দু হতে OA-এর বর্ধিত অংশের উপর BN লম্ব টানি যা বর্ধিত OA বাহুকে N বিন্দুতে ছেদ করল।

এখানে, AB ও OC সমান্তরাল।

$\therefore \angle AOC = \angle BAN = \alpha$।

আবার OBN ত্রিভুজের, $\angle ONB$ = এক সমকোণ $= 90°$

$$\therefore OB^2 = ON^2 + BN^2 = (OA+AN)^2 + BN^2$$
$$= OA^2 + 2OA.AN + AN^2 + BN^2$$

চিত্র ২.২২ থেকে ΔABN এ $\sin\alpha = \frac{BN}{AB}$

$\therefore BN = AB\sin\alpha = Q\sin\alpha$

এবং $\cos\alpha = \frac{AN}{AB}$ $\therefore AN = AB\cos\alpha = Q\cos\alpha$

$$OB^2 = OA^2 + 2OA.Q\cos\alpha + Q^2\cos^2\alpha + Q^2\sin^2\alpha$$
$$= P^2 + 2PQ\cos\alpha + Q^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$$

বা, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$$\therefore R = \sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.4)$$

লব্ধির দিক নির্ণয়

মনে করি P-এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে লব্ধি R ক্রিয়া করছে, অর্থাৎ $\angle AOB = \theta$।

সুতরাং OBN সমকোণী ত্রিভুজে,

$$\tan\theta = \frac{BN}{ON} = \frac{BN}{(OA + AN)}$$

$$= \frac{AB\sin\alpha}{(OA + AB\cos\alpha)}$$

$$= \frac{Q\sin\alpha}{(P + Q\cos\alpha)} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2.5)$$

BAN সমকোণী ত্রিভুজে, $\sin\alpha = \frac{BN}{AB}$

$\therefore BN = AB\sin\alpha$

∴ সমীকরণ (2.4) এবং সমীকরণ (2.5) হতে যথাক্রমে R এবং θ পাওয়া যায়।

জেনে রাখ :

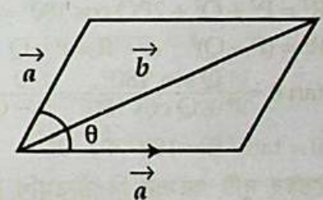
I. দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 0°$ হলে, ভেক্টরদ্বয় সমান্তরাল হবে।

II. দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 120°$ হলে, দুটি ভেক্টরের লব্ধি প্রত্যেক ভেক্টরের সমান হবে।

III. দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 180°$ হলে, ভেক্টরদ্বয় পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করবে।

অনুসন্ধান : দুটি সমান মানের ভেক্টরের লব্ধির মান কোন অবস্থায় ওদের প্রত্যেকের মানের সমান হতে পারে ?

ধরা যাক, প্রত্যেকটি ভেক্টরের মান a, ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ এবং ভেক্টর দুটির লব্ধির মান b।



$\therefore \quad b^2 = a^2 + a^2 + 2a.a\cos\theta$

বা, $b^2 = 2a^2 + 2a^2\cos\theta$

বা, $b^2 = 2a^2(1 + \cos\theta)$

$\therefore \quad b = a\sqrt{2(1 + \cos\theta)}$

এখন $b = a$ হবে যদি $\sqrt{2(1 + \cos\theta)} = 1$ হয়

বা, $2(1 + \cos\theta) = 1$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} = \cos 120°$

বা, $\theta = 120°$ হয়।

অতএব, মূল ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণ 120° হলে লব্ধির মান ওদের প্রত্যেকের মানের সমান হয়।

কাজ : দুটি সমান ভেক্টরকে যোগ করলে কোন অবস্থায় ওদের লব্ধি একটি ভেক্টরের মানের $\sqrt{2}$ গুণ হবে ?

ধরা যাক, সমান ভেক্টরদ্বয়ের প্রত্যেকের মান A এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ θ।

প্রশ্নানুসারে, এদের লব্ধি ভেক্টরের পরম মান $= \sqrt{2}A$

$\therefore \quad (\sqrt{2}A)^2 = A^2 + A^2 + 2A.A.\cos\theta$

বা, $2A^2 = 2A^2 + 2A^2.\cos\theta$

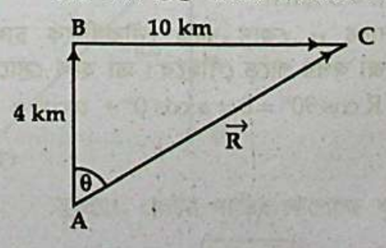
বা, $\cos\theta = 0 = \cos 90°$

$\therefore \quad \theta = 90°$

সুতরাং, ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ 90° হলে তাদের লব্ধি একটি ভেক্টরের মানের $\sqrt{2}$ গুণ হবে।

হিসাব কর : একটি কণার উত্তর ও পূর্ব দিকে যথাক্রমে 4 km এবং 10 km সরণ হলে, লব্ধি সরণ নির্ণয় কর।

$\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টর যথাক্রমে উত্তর ও পূর্ব দিকে 4 km এবং 10 km সরণ সূচিত করে। ত্রিভুজের সূত্র অনুযায়ী লব্ধি $\overrightarrow{AC}$ সরণ ভেক্টর আঁকা হলো। $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AC}$-এর অন্তর্বর্তী কোণ θ এবং লব্ধি ভেক্টরের মান R হলে,



$$R = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116} = 10{\cdot}78 \text{ km}$$

এবং $\tan\theta = \frac{10}{4} = 2{\cdot}5$

$\therefore \theta = 68{\cdot}2°$

কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্র (Some special cases)

(i) $\alpha = 0$ হলে অর্থাৎ ভেক্টরদ্বয় একই দিকে ক্রিয়াশীল হলে বা ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হলে,

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 0^\circ = P^2 + Q^2 + 2PQ = (P+Q)^2 \quad [\because \cos 0^\circ = 1]$$

$\therefore \quad R = P + Q$

এবং $\tan\theta = \dfrac{Q\sin 0^\circ}{P + Q\cos 0^\circ} = \dfrac{0}{P+Q} = 0 \quad [\because \sin 0^\circ = 0]$

$\therefore \quad \theta = \tan^{-1} 0 = 0^\circ$

$\therefore \quad \theta = 0^\circ$

সুতরাং দুটি ভেক্টর একই দিকে ক্রিয়াশীল হলে এদের লব্ধির মান হবে ভেক্টরদ্বয়ের যোগফল এবং দিক হবে ভেক্টরদ্বয় যেদিকে ক্রিয়া করে সেই দিকে।

(ii) $\alpha = 90^\circ$ হলে, অর্থাৎ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 90^\circ$ বা, $R^2 = P^2 + Q^2$

$R = \sqrt{P^2 + Q^2}$ এবং $\tan\theta = \dfrac{Q\sin 90^\circ}{P + Q\cos 90^\circ}$

$\tan\theta = \dfrac{Q}{P}$ বা, $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{Q}{P}\right)$

অর্থাৎ দুটি ভেক্টর পরস্পর সমকোণে ক্রিয়াশীল হলে এদের লব্ধির মান হবে রাশিদ্বয়ের বর্গের যোগফলের বর্গমূলের সমান।

(iii) $\alpha = 180^\circ$ হলে অর্থাৎ ভেক্টর দুটি পরস্পর বিপরীতমুখি হলে,

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 180^\circ = P^2 + Q^2 - 2PQ$$

বা, $R^2 = (P \sim Q)^2 \quad \therefore \quad R = P \sim Q$

এবং $\tan\theta = \dfrac{Q\sin 180^\circ}{P + Q\cos 180^\circ} = \dfrac{0}{P - Q} = 0$

$\therefore \quad \theta = \tan^{-1} 0 = 180^\circ$ বা, 0°

অর্থাৎ ভেক্টর দুটি পরস্পর বিপরীতমুখি হলে তাদের লব্ধির মান হবে ভেক্টর দুটির বিয়োগফল এবং দিক হবে বৃহত্তর ভেক্টরটির দিকে। ভেক্টর দুটি সমান ও বিপরীতমুখি হলে, লব্ধি হবে শূন্য।

উপরোক্ত ক্ষেত্রসমূহ বিবেচনা করে নিম্নের ফলাফল পাওয়া যায়। যখন a ও b দুটি ভেক্টরের মান এবং c উহাদের লব্ধির মান প্রকাশ করে।

(i) দুটি ভেক্টরের লব্ধির সর্বোচ্চ মান হলো $c = a + b$, যখন মূল ভেক্টর দুটি সমমুখি।

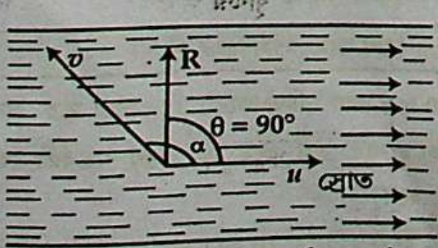
(ii) দুটি ভেক্টরের লব্ধির সর্বনিম্ন মান হলো $c = a \sim b$ যখন মূল ভেক্টর দুটি বিপরীতমুখি।

(iii) মূল ভেক্টর দুটি সমান ও বিপরীতমুখি হলে তাদের লব্ধির মান শূন্য হয়।

ক্রিয়াকর্ম : 3F এবং 3F ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি ভেক্টর R। প্রথম ভেক্টরকে দ্বিগুণ করলে লব্ধি ভেক্টরও দ্বিগুণ হয়। ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্বর্তী কোণ নির্ণয় কর। [উ. 163·73°]

গাণিতিক উদাহরণ ২.২

১। কোনো একটি নদীতে একটি দাঁড়ের নৌকার বেগ স্রোতের অনুকূলে ঘণ্টায় 18 km এবং প্রতিকূলে ঘণ্টায় 6 km। নৌকাটিকে কোন দিকে চালনা করলে তা সোজা অপর পাড়ে পৌঁছবে এবং নৌকাটি কত বেগে চলবে?



ধরা যাক স্রোতের বেগ $= u$ এবং দাঁড়ের বেগ $= v$। তা হলে, $u + v = 18$ এবং $v - u = 6$.

$\therefore$ সমীকরণ দুটির যোজন ও বিয়োজনে পাওয়া যায়,

$v = 12 \text{ km h}^{-1}$ এবং $u = 6 \text{ km h}^{-1}$

ধরা যাক স্রোতের সাথে α কোণ করে নৌকাটিকে চালনা করলে তা R বেগে চলে সোজা অপর পাড়ে পৌঁছবে। তা হলে স্রোতের গতি বরাবর R-এর অংশ, $R\cos 90^\circ = 0 = u\cos 0^\circ + v\cos\alpha$

$\therefore \quad \cos\alpha = -\dfrac{u}{v} = -\dfrac{6}{12} = -\dfrac{1}{2} = \cos 120^\circ$

বা, $\alpha = 120^\circ$

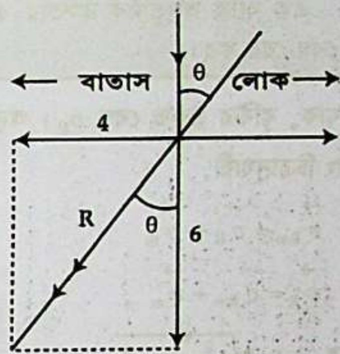
আবার, স্রোতের গতিমুখের লম্ব দিক বরাবর R-এর অংশ,

$$R \sin 90° = R = u \sin 0° + v \sin \alpha$$

$$\therefore \quad R = v \sin \alpha = v\sqrt{1-\cos^2\alpha} = 12\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 6\sqrt{3} = 10{\cdot}39 \text{ km h}^{-1}$$

২। 4 ms^{-1} বেগে দৌড়ে যাবার সময় একজন লোক 6 ms^{-1} বেগে লম্বভাবে পতিত বৃষ্টির সম্মুখীন হলো। বৃষ্টি হতে রক্ষা পেতে হলে তাকে কত কোণে ছাতা ধরতে হবে ?

মনে করি বৃষ্টির লব্ধি বেগ উল্লম্ব দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।



$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{4 \text{ ms}^{-1}}{6 \text{ ms}^{-1}} = 0{\cdot}666$$

বা, $\tan\theta = \tan 33{\cdot}7°$

$\therefore \quad \theta = 33{\cdot}7°$

সুতরাং লোকটিকে উল্লম্ব দিকের সাথে $33{\cdot}7°$ কোণে ছাতা ধরতে হবে।

৩। একটি বস্তুকে 50 N বল দ্বারা পশ্চিম দিকে এবং 20 N বল দ্বারা উত্তর দিকে টানা হচ্ছে। লব্ধি বলের মান ও দিক নির্ণয় কর।

আমরা জানি

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$$
$$= \sqrt{(50)^2 + (20)^2 + 2\times 50 \times 20 \cos 90°}$$
$$= \sqrt{(50)^2 + (20)^2} = \sqrt{2500 + 400}$$
$$= \sqrt{2900} \text{ N} = 53{\cdot}85 \text{ N}$$

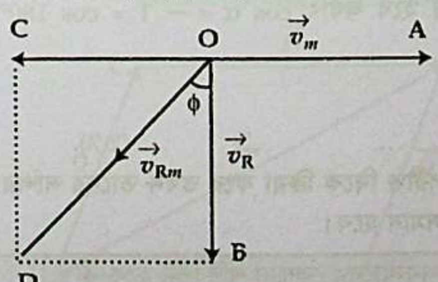
এখানে,
$P = 50$ N
$Q = 20$ N
$\alpha = 90°$
$R = ?$
$\theta = ?$

আবার $\tan\theta = \dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha} = \dfrac{20\sin 90°}{50 + 20\cos 90°} = \dfrac{20}{50} = \dfrac{2}{5}$

$$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}\frac{2}{5} = 21{\cdot}80°$$

অনুধাবনমূলক কাজ : মোটর গাড়ির wiper দণ্ডগুলি সব ক্ষেত্রেই গাড়ির সামনের কাচে লাগানো থাকে কেন ? ব্যাখ্যা কর।

মনে করি, একটি গাড়ি v_m বেগে সামনের দিকে গতিশীল [চিত্র দ্রষ্টব্য]। চিত্রে $\overrightarrow{OA}$ মোটর গাড়ির বেগ নির্দেশ করছে। উল্লম্বভাবে আপতিত বৃষ্টির গতিবেগ $\overrightarrow{OB}$ রেখা দ্বারা নির্দেশ করা হয়েছে। $\overrightarrow{OC}$ রেখা গাড়ির ঋণাত্মক বেগ নির্দেশ করে $(-v_m)$। সুতরাং আয়তক্ষেত্র OCDB-এর কর্ণ $\overrightarrow{OD}$ মোটর গাড়ির সাপেক্ষে বৃষ্টির গতিবেগ নির্দেশ করে।



সুতরাং, মোটর গাড়ির সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক গতিবেগ,

$$v_{Rm} = \vec{v}_R - \vec{v}_m$$

এখন, চিত্র থেকে পাই,

$$v_{Rm} = \sqrt{v_R^2 + v_m^2 + 2v_R.v_m\cos 90°}$$
$$= \sqrt{v_R^2 + v_m^2}$$

সুতরাং, মোটর গাড়ির সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক গতিবেগের মান হবে,

$$v_{Rm} = \sqrt{v_R^2 + v_m^2}$$

এই আপেক্ষিক বেগ উল্লম্বের সাথে φ কোণ উৎপন্ন করলে আমরা পাই,

$$\tan \varphi = \frac{v_m}{v_R}$$

যেহেতু v_{Rm} -এর অভিমুখ উল্লম্বের সাথে আনতভাবে হয় তাই বৃষ্টির মধ্য দিয়ে অনুভূমিকভাবে গতিশীল গাড়ির নিকট বৃষ্টি তির্যকভাবে পড়ছে বলে মনে হবে। ফলে বৃষ্টির মধ্য দিয়ে চলমান গাড়ির সামনের কাচ পিছনের কাচ অপেক্ষা বেশি ভেজে। এই কারণেই গাড়ির wiper দণ্ডগুলি গাড়ির সামনের কাচে লাগানো হয়।

হিসাব কর : এক ব্যক্তি অনুভূমিক রাস্তায় 4 km বেগে হাঁটছে। মনে হচ্ছে বৃষ্টি উল্লম্বভাবে 3 km বেগে পড়ছে। বৃষ্টির প্রকৃত বেগ বের কর।

ধরা যাক, বৃষ্টির প্রকৃত বেগ v_R। অনুভূমিক রাস্তায় ব্যক্তির বেগ $\vec{v}_m$ এবং ওই ব্যক্তি সাপেক্ষে বৃষ্টির বেগ $\vec{v}_{Rm}$। সুতরাং চিত্রানুযায়ী,

$$\vec{v}_{Rm} = \vec{v}_R - \vec{v}_m$$

বা, $\vec{v}_R = \vec{v}_{Rm} + \vec{v}_m$

আবার, $v_R = \sqrt{v_{Rm}^2 + v_m^2}$

∴ $v_R = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = 5\ \text{kmhr}^{-1}$

∴ বৃষ্টির প্রকৃত বেগের মান $5\ \text{kmhr}^{-1}$।

লব্ধির সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান
Maximum and minimum values of the resultant

মনে করি দুটি ভেক্টর রাশি $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ একই সময়ে কোনো বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়া করছে। ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্রানুসারে এদের লব্ধির মান, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

(ক) উপরোক্ত সমীকরণ হতে বলা যায় লব্ধি $\vec{R}$-এর মান $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$-এর মধ্যবর্তী কোণের ওপর নির্ভর করে। $\vec{R}$-এর মান সর্বাধিক হবে যখন $\cos\alpha$-এর মান সর্বাধিক হবে অর্থাৎ $\cos\alpha = 1 = \cos 0°$

বা, $\alpha = 0°$ হবে

∴ **লব্ধির সর্বোচ্চ মান**

$$R_{max} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 0°}$$
$$= \sqrt{(P+Q)^2} = (P+Q) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.6)$$

অতএব, দুটি ভেক্টর যখন একই সরলরেখা বরাবর পরস্পর একই দিকে ক্রিয়া করে তখন তাদের লব্ধির মান সর্বোচ্চ হবে এবং এই সর্বোচ্চ মান ভেক্টর রাশি দুটির যোগফলের সমান হবে। অন্যভাবে বলা যায়, দুটি ভেক্টর রাশির লব্ধির মান এদের যোগফল অপেক্ষা বড় হতে পারে না।

(খ) লব্ধি R-এর সর্বনিম্ন মান হবে যখন $\cos\alpha$-এর মান সর্বনিম্ন হবে অর্থাৎ $\cos\alpha = -1 = \cos 180°$ বা, $\alpha = 180°$ হবে।

∴ **লব্ধির সর্বনিম্ন মান,**

$$R_{min} = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ} = \sqrt{(P \sim Q)^2} = P \sim Q \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.7)$$

অতএব, দুটি ভেক্টর রাশি যখন একই সরলরেখা বরাবর পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে তখন তাদের লব্ধির মান সর্বনিম্ন হবে এবং লব্ধির সর্বনিম্ন মান ভেক্টর রাশি দুটির বিয়োগফলের সমান হবে।

কাজ : একটি রশির দুই প্রান্তে দুই জন ধরে সমান বলে টান দাও। দুই জনের অবস্থানের কোনো পরিবর্তন হবে কী?

দুটি সমান ও বিপরীতমুখি বল একটি সরলরেখার দুই প্রান্তে ক্রিয়াশীল হলে লব্ধি শূন্য হয়, তাই দুইজনের অবস্থানের কোনো পরিবর্তন হবে না।

অনুধাবনমূলক কাজ : দুটি সমমান সমজাতীয় ভেক্টরের লব্ধি শূন্য হতে পারে কিনা ব্যাখ্যা কর।

গাণিতিক উদাহরণ ২.৩

১। দুটি বলের বৃহত্তম লব্ধি 10 N এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি 4 N; বল দুটি পরস্পরের সাথে 90° কোণে একটি কণার উপর ক্রিয়া করলে লব্ধির মান কত হবে?

আমরা জানি

$R_{max} = P + Q$

বা, $10 = P + Q$ ... ... (i)

আবার $R_{min} = P - Q$

বা, $4 = P - Q$ ... ... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$2P = 14\,N \quad \therefore \; P = 7\,N$

আবার সমীকরণ (i) হতে (ii) বিয়োগ করে পাই

$2Q = 6\,N \quad \therefore \; Q = 3\,N$

আবার $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 90° \quad [\because \cos 90° = 0]$

$= P^2 + Q^2 + 0 = (7)^2 + (3)^2 = 49 + 9 = 58$

$\therefore \quad R = \sqrt{58}\,N$

এখানে

$R_{max} = 10\,N$

$R_{min} = 4\,N$

$\alpha = 90°$

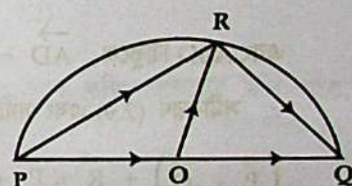
$R = ?$

২। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ।

ধরা যাক, PQR একটি অর্ধবৃত্তস্থ ত্রিভুজ [চিত্র দ্রষ্টব্য]। $\angle PRQ$ হলো অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle PRQ = 1$ সমকোণ।

এখন, $\angle PRQ$ সমকোণ হলে PQ এবং RQ পরস্পরের ওপর লম্ব হবে।



ধরি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= r \;\therefore\; PO = OQ = r$ এবং $OR = s$ (ধরি)

$\therefore \quad |\vec{r}| = |\vec{s}| = r =$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

এখন, ΔPOR-এর ক্ষেত্রে লেখা যায়, $\vec{PR} = \vec{PO} + \vec{OR} = \vec{r} + \vec{s}$

আবার, ΔQRO-এর জন্য লেখা যায়, $\vec{OR} + \vec{RQ} = \vec{OQ}$

বা, $\vec{RQ} = \vec{OQ} - \vec{OR} = \vec{r} - \vec{s}$

$\therefore \quad \vec{PR}\cdot\vec{RQ} = (\vec{r} + \vec{s})\cdot(\vec{r} - \vec{s}) = \vec{r}\cdot\vec{r} - \vec{r}\cdot\vec{s} + \vec{s}\cdot\vec{r} - \vec{s}\cdot\vec{s}$

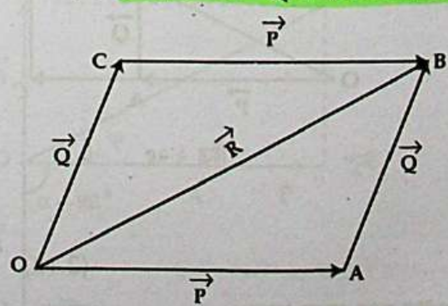
$= r^2 - s^2 = r^2 - r^2 = 0$

$\therefore \quad PR \perp RQ$

অতএব, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ $\angle PRQ = 1$ সমকোণ। (প্রমাণিত)

২·৫ ভেক্টর যোগের কয়েকটি সূত্র
Some laws of vector addition

ক. বিনিময় সূত্র (Commutative law) : $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{Q} + \vec{P}$



চিত্র ২·২৩

প্রমাণ : মনে করি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি এবং $\vec{R}$ রাশি দুটির লব্ধি [চিত্র ২·২৩]।

ত্রিভুজ সূত্র অনুসারে, OAB ত্রিভুজে,

$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$

অর্থাৎ $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$

এখন OABC সামান্তরিক অঙ্কন করি এবং OC ও CB-কে যথাক্রমে AB ও OA-এর ন্যায় তীর চিহ্নিত করি। OCB ত্রিভুজে,

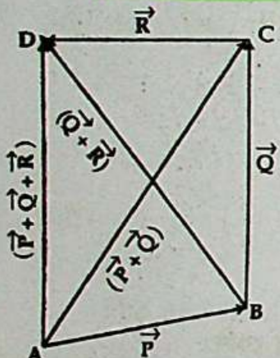
$\vec{OB} = \vec{OC} + \vec{CB}$ (ত্রিভুজ সূত্র অনুসারে)

$\therefore \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OC} + \vec{CB}$

অর্থাৎ $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{Q} + \vec{P}$ ... ... (2.8)

এটিই হলো বিনিময় সূত্র। অর্থাৎ ভেক্টর রাশির যোগ বিনিময় সূত্র মেনে চলে। তেমনি স্কেলার রাশিও বিনিময় সূত্র মেনে চলে।

খ. সংযোজন সূত্র (Associative law) : $(\vec{P} + \vec{Q}) + \vec{R} = \vec{P} + (\vec{Q} + \vec{R})$



চিত্র ২.২৪

মনে করি $\vec{P}$, $\vec{Q}$ এবং $\vec{R}$ তিনটি ভেক্টর রাশি [চিত্র ২.২৪]। এদেরকে যথাক্রমে $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ এবং $\vec{CD}$ রেখা দ্বারা সূচিত করা হয়েছে। এখন AC, BD এবং AD যোগ করি। অতএব ত্রিভুজের সূত্র হতে পাই,

ABC ত্রিভুজে, $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{P} + \vec{Q}$

ACD ত্রিভুজে, $\vec{AD} = \vec{AC} + \vec{CD}$

$= \left(\vec{P} + \vec{Q}\right) + \vec{R}$ ... ... (2.9)

আবার, BCD ত্রিভুজে,

$\vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{Q} + \vec{R}$

এবং ABD ত্রিভুজে, $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{P} + \left(\vec{Q} + \vec{R}\right)$ ... ... (2.10)

$\therefore$ সমীকরণ (2.9) এবং সমীকরণ (2.10) হতে পাই,

$$\left(\vec{P} + \vec{Q}\right) + \vec{R} = \vec{P} + \left(\vec{Q} + \vec{R}\right)$$

এটিই হলো ভেক্টর রাশির যোগের সংযোজন সূত্র অর্থাৎ ভেক্টর রাশির যোগ সংযোজন সূত্র মেনে চলে।

গ. বণ্টন সূত্র (Distributive law) : $m(\vec{P} + \vec{Q}) = m\vec{P} + m\vec{Q}$

মনে করি, $\vec{OA} = \vec{P}$ এবং $\vec{AB} = \vec{Q}$ [চিত্র ২.২৫]। OB যোগ করি। এখন ত্রিভুজ সূত্রানুসারে,

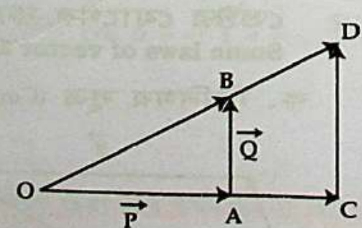
$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB} = \vec{P} + \vec{Q}$

মনে করি, OA ও OB-এর বর্ধিতাংশের উপর C ও D দুটি বিন্দু নেয়া হলো যাতে $\vec{OC} = m\vec{OA} = m\vec{P}$ এবং $\vec{CD} = m\vec{AB} = m\vec{Q}$

এখন, OAB এবং OCD সদৃশকোণী ত্রিভুজ বলে,

$$\frac{\vec{OC}}{\vec{OA}} = \frac{\vec{OD}}{\vec{OB}} = \frac{\vec{CD}}{\vec{AB}} = \frac{m\vec{Q}}{\vec{Q}} = m$$

$\therefore \vec{OD} = m\vec{OB} = m(\vec{P} + \vec{Q})$ ... ... (2.11)



চিত্র ২.২৫

আবার, ত্রিভুজ সূত্রানুসারে,

$\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{CD} = m\vec{P} + m\vec{Q}$

$\therefore m(\vec{P} + \vec{Q}) = m\vec{P} + m\vec{Q}$ ... ... (2.12)

এটিই হলো ভেক্টর যোগের বণ্টন সূত্র। অর্থাৎ ভেক্টর রাশির যোগ বণ্টন সূত্র মেনে চলে।

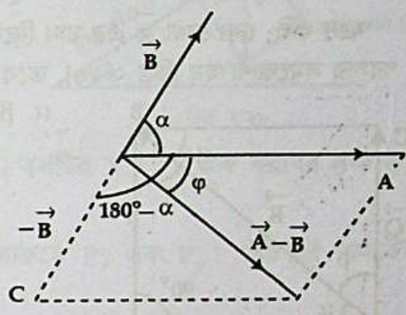
ভেক্টরের বিয়োগ
Subtraction of vectors

দুটি সমজাতীয় ভেক্টরের বিয়োগফল বলতে একটি ভেক্টরের সাথে অপরটির বিপরীত ভেক্টরের যোগফল বোঝায়।

ব্যাখ্যা : $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি সমজাতীয় ভেক্টরের বিয়োগ $\vec{A} - \vec{B}$ হলো $\vec{A} + (-\vec{B})$ এর সমান।

$\therefore \quad \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

ধরা যাক, $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ ভেক্টর দুটির অন্তর্ভুক্ত কোণ α হলে $\vec{A}$ এবং $(-\vec{B})$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ হবে $(180° - \alpha)$ [চিত্র ২.২৫ক দ্রষ্টব্য]।



চিত্র ২.২৫ক

সুতরাং, $\vec{A}$ এবং $(-\vec{B})$ এর লব্ধির মান হবে,

$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos(180° - \alpha)}$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\alpha} \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

$\vec{A}$ এর সঙ্গে $(\vec{A} - \vec{B})$-এর সৃষ্ট কোণ φ হলে,

$$\tan\varphi = \frac{B\sin(180° - \alpha)}{A + B\cos(180° - \alpha)}$$

$$= \frac{B\sin\alpha}{A - B\cos\alpha} \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

বিশেষ ক্ষেত্রসমূহ : (i) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\alpha = 90°$ হলে লব্ধি ভেক্টরের মান হবে, $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ [সামান্তরিকের সূত্রানুসারে] এবং ভেক্টরদ্বয়ের বিয়োগফলের মান হবে, $S = \sqrt{A^2 + B^2}$ [সমীকরণ (ii) ব্যবহার করে]। অতএব, $R = S = \sqrt{A^2 + B^2}$। এক্ষেত্রে লব্ধি এবং বিয়োগফলের মান সমান।

(ii) $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের মান সমান হলে এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ $\alpha = 90°$ হলে,

$$R = S = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{2A^2} = \sqrt{2}\,A$$

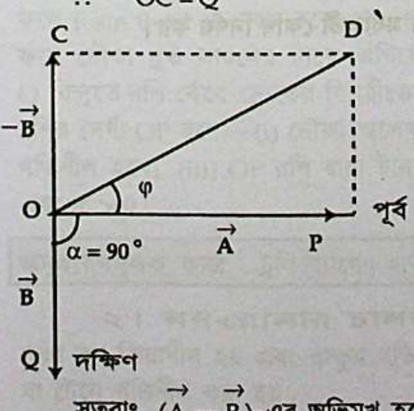
গাণিতিক উদাহরণ ২.৪

১। দুটি ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ যথাক্রমে পূর্ব ও দক্ষিণ দিকে ক্রিয়াশীল। এদের মান হলো যথাক্রমে $4a$ ও $3a$। $(\vec{A} - \vec{B})$-এর মান ও অভিমুখ নির্ণয় কর।

প্রশ্নানুসারে, $A = 4a$ এবং $B = 3a$ এবং $\alpha = 90°$

চিত্রে $\vec{OP} = \vec{A}$ এবং $\vec{OQ} = \vec{B}$

$\therefore \quad \vec{OC} = \vec{Q}$



$$\therefore \quad |\vec{A} - \vec{B}| = OD = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\alpha}$$

$$= [(4a)^2 + (3a)^2 - 2.4a.3a\cos 90°]^{\frac{1}{2}}$$

$$= (16a^2 + 9a^2)^{\frac{1}{2}} = (25a^2)^{\frac{1}{2}} = 5a$$

ধরা যাক, $(\vec{A} - \vec{B})$ ভেক্টরটি পূর্ব দিকের সাথে φ কোণে আনত।

$$\therefore \quad \tan\varphi = \frac{B}{A} = \frac{3a}{4a} = \frac{3}{4}$$

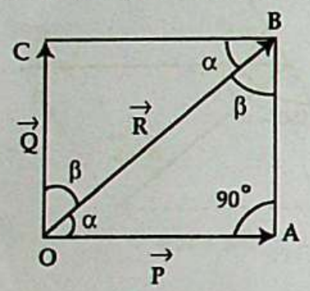
$$\therefore \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{3}{4} = 36.9°$$

সুতরাং, $(\vec{A} - \vec{B})$-এর অভিমুখ হবে পূর্ব দিকের সাথে 36.9° কোণে উত্তর দিকে।

২.৬ লম্বাংশের সাহায্যে ভেক্টর রাশির যোজন ও বিয়োজন
Vector addition and subtraction in terms of normal components

একটি ভেক্টর রাশিকে সামান্তরিক সূত্রের দ্বারা বহুভাবে দুটি ভেক্টর রাশিতে বিভক্ত করা যায়। একটি ভেক্টর রাশিকে দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশিতে বিভক্ত করার প্রক্রিয়াই হলো ভেক্টর রাশির বিভাজন বা বিশ্লেষণ। একটি ভেক্টর রাশি $\vec{R}$ কে লম্ব উপাংশে বিভাজন করা যায় এবং এর সাহায্যে ভেক্টর রাশির যোজন ও বিয়োজন করা যায়। এই বিভাজিত ভেক্টর রাশিগুলোর প্রত্যেকটিকে মূল ভেক্টর রাশির এক একটি অংশক বা উপাংশ (Component) বলে।

মনে করি, OB রেখা $\vec{R}$ এর মান নির্দেশ করে। যদি $\vec{R}$ সমকোণে বিভাজিত করা হয় অর্থাৎ, P এবং Q উপাংশ দুটি পরস্পর সমকোণী হয় [চিত্র ২.২৬], তবে $(\alpha + \beta) = 90°$। এক্ষেত্রে OB এর সাথে উপাংশ দুটি যথাক্রমে উৎপন্ন কোণ α, β। এখন OABC সামান্তরিকটি অঙ্কন করা হলো।



চিত্র ২.২৬

$\therefore \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin 90° = 1$ এবং

$\sin\beta = \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$

ত্রিকোণমিতির ত্রিভুজ সূত্র অনুযায়ী OAB ত্রিভুজ থেকে আমরা পাই,

$$\frac{OA}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{OB}{\sin 90°}$$

$$\therefore \quad \frac{P}{\cos\alpha} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin 90°}$$

$\therefore \quad P = R\cos\alpha$ এবং $Q = R\sin\alpha$ ... ... (2.13)

P এবং Q উপাংশ দুটিকে মূল ভেক্টর রাশি R-এর লম্বাংশ বলে। P-কে অনুভূমিক উপাংশ (Horizontal component) এবং Q-কে উল্লম্ব উপাংশ (Tangential component) বলা হয়।

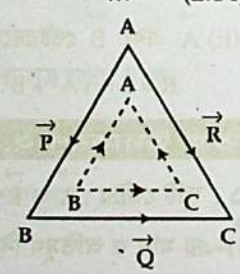
উপাংশ দুটির ভেক্টর রূপ হলো—

$$\vec{P} = R\cos\alpha\,\hat{i} \text{ এবং } \vec{Q} = R\sin\alpha\,\hat{j}$$

অতএব, এদের ভেক্টর যোজন $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} = R\cos\alpha\hat{i} + R\sin\alpha\hat{j}$ ... ... (2.14)

ত্রিভুজের তিনটি বাহুর সাহায্যে যোজন ও বিয়োজন ব্যাখ্যা করা যায়। মনে করি একটি ত্রিভুজের AB বাহু বরাবর $\vec{P}$ এবং BC বাহু বরাবর $\vec{Q}$ ক্রিয়াশীল [চিত্র ২.২৭ সলিড রেখাচিত্র]। তাহলে এদের ভেক্টর যোজন $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$ কে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহু AC দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

আবার $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি BA এবং BC বরাবর ক্রিয়াশীল হলে ভেক্টর রাশির বিয়োজন $\vec{R} = \vec{P} - \vec{Q}$ কে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহু CA দ্বারা প্রকাশ করা যায় [চিত্র ২.২৪ ড্যাশ রেখাচিত্র]।



চিত্র ২.২৭

গাণিতিক উদাহরণ ২.৫

১। যদি $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ এবং $A + B = C$ হয় তাহলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

ধরা যাক, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ.

অতএব, $|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} = |\bar{C}| = C$

$\therefore \quad C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$

বা, $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB = C$ $\quad [\because A + B = C]$

বা, $A^2 + B^2 + 2AB = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$

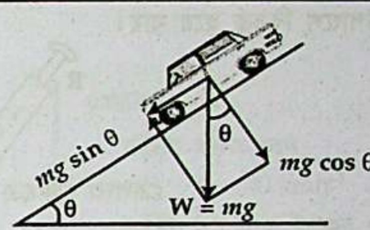
বা, $2AB = (\cos\theta - 1) = 0$

$\therefore \quad \cos\theta = 1, \quad \therefore \theta = 0°$

সুতরাং, ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $= 0°$

কাজ : ২·২৮ চিত্রের দিকে লক্ষ কর। গাড়িটি ইঞ্জিন বন্ধ করে নিচে নামছে। কেবলমাত্র গাড়িটির ওজন নিচের দিকে ক্রিয়াশীল। ঘর্ষণ উপেক্ষা করে নত তল বরাবর এবং নত তলের লম্ব দিকে দুটি উপাংশ ব্যাখ্যা কর।

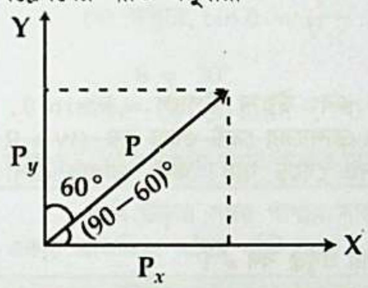
বস্তুর ওজন mg নিচের দিকে উল্লম্বভাবে ক্রিয়া করে। mg কে নত তল বরাবর এবং নত তলের লম্ব দিকে দুটি উপাংশে বিভাজন করা যায়। নত তলটি অনুভূমিক তলের সাথে θ কোণে আনত হওয়ায় উপাংশ দুটির মান যথাক্রমে $mg \sin\theta$ এবং $mg \cos\theta$ চিত্র অনুযায়ী ক্রিয়াশীল হয়। $mg \cos\theta$ নত তলের লম্ব প্রতিক্রিয়া দ্বারা প্রশমিত হয়। কেবলমাত্র $mg \sin\theta$ বলের প্রভাবে গাড়িটি নিচের দিকে নামতে থাকে।



চিত্র ২·২৮

উদাহরণ : ১। 30 N একটি বল Y-অক্ষের সঙ্গে 60° কোণে আনত। বলটির X ও Y অক্ষ বরাবর লম্ব উপাংশ দুটি নির্ণয় কর এবং উহাদের যোগফল ও বিয়োগফল নির্ণয় কর।

মনে করি, P= 30 N বলের X- এবং Y-অক্ষ বরাবর উপাংশ যথাক্রমে P_x এবং P_y। ভেক্টরের সমকৌণিক বিশ্লেষণের নীতি অনুযায়ী



চিত্র ২·২৯

$$P_x = P\sin 60° = 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2} N = 15\sqrt{3}\, N$$

$$P_y = P\cos 60° = 30 \times \frac{1}{2} N = 15\, N$$

এদের যোগফল $= P_x + P_y = (15\sqrt{3} + 15)\, N$

$= 15\,(\sqrt{3}+1)\, N$

এবং বিয়োগফল $= P_x - P_y = (15\sqrt{3} - 15)\, N$

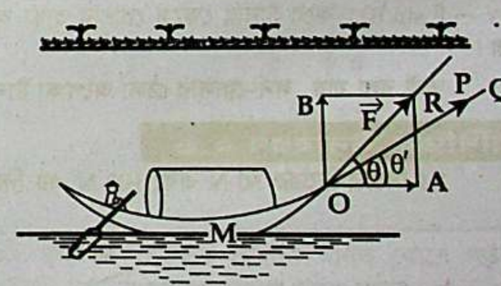
$= 15\,(\sqrt{3}-1)\, N$

১। **নৌকার গুণ টানা :** মনে করি M একটি নৌকা। এর O বিন্দুতে গুণ বেঁধে OR বরাবর নদীর পাড় দিয়ে $\vec{F}$ বলে টেনে নেওয়া হচ্ছে। বিভাজন পদ্ধতি দ্বারা O বিন্দুতে F-কে দুটি উপাংশে বিভাজিত করা যায়; যথা— অনুভূমিক উপাংশ ও উল্লম্ব উপাংশ।

অনুভূমিক উপাংশ = $F\cos\theta$, এর দিক OA বরাবর।

উল্লম্ব উপাংশ = $F\sin\theta$, এর দিক OB বরাবর।

বলের অনুভূমিক উপাংশ $F\cos\theta$ নৌকাকে সামনের দিকে এগিয়ে নিয়ে যায় এবং উল্লম্ব উপাংশ $F\sin\theta$ নৌকাটিকে পাড়ের দিকে টানে। কিন্তু নৌকার হাল দ্বারা উল্লম্ব উপাংশ $F\sin\theta$ প্রতিহত করা হয়। গুণ যত লম্বা হবে, θ-এর মান তত কম হবে; ফলে $F\sin\theta$-এর মান কম হবে এবং $F\cos\theta$-এর মান বেশি হবে।



চিত্র ২·৩০

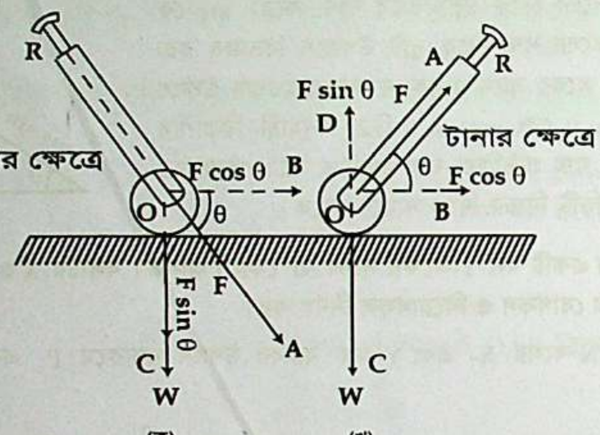
ফলে নৌকা দ্রুত সামনের দিকে এগিয়ে যাবে। অর্থাৎ গুণের রশি বেশি লম্বা হলে নৌকা বেশি দ্রুত চলবে। আবার O বিন্দুতে রশি বেঁধে স্রোতের বিপরীতে অনুভূমিকের সাথে θ কোণে নৌকাটিকে $\vec{F}$ বলে সামনের দিকে টানলে এবং রশির দৈর্ঘ্য OP হলে—(i) নৌকা অপেক্ষাকৃত দ্রুত চলবে; (ii) $F\sin\theta$ এর মান কম হলে নৌকা সামনের দিকে বেশি গতিশীল হবে; (iii) OP রশি দ্বারা টানলে নৌকার গতি OQ রশি দ্বারা টানার চেয়ে কম হবে। কারণ OQ রশি লম্বা এবং $\theta' > \theta$।

অনুধাবনমূলক কাজ : ট্রলি ব্যাগের হাতল লম্বা রাখা হয় কেন ?

২। **লন-রোলার চালনা :** তলের উপর দিয়ে কোনো বস্তুকে ঠেলা বা টানা হলে তল ও বস্তুর মধ্যে ঘর্ষণ বল ক্রিয়াশীল হয় এবং বস্তুর গতিকে বাধা দেয়। বস্তুর ওজন বেশি হলে ঘর্ষণ বলও বেশি হয়। রোলারকে ঠেলে বা টেনে গতিশীল করা হয়।

ঠেলার ক্ষেত্রে : ধরা যাক, রোলারের ওজন = $\vec{W}$ এবং রোলারের হাতলের ওপর প্রযুক্ত বল = $\vec{F}$

F বল রোলারের O বিন্দুতে অনুভূমিকের সাথে θ কোণে ক্রিয়াশীল [চিত্র ২.৩১ (ক)]। O বিন্দুতে এই বল দুটি লম্ব উপাংশে বিভক্ত হয়ে যায়।



চিত্র ২.৩১

বলের অনুভূমিক উপাংশ = F cos θ, এর দিক OB বরাবর সামনের দিকে এবং উল্লম্ব উপাংশ = F sin θ, এর দিক OC বরাবর নিচের দিকে ক্রিয়াশীল যা রোলারের ওজন বৃদ্ধি করে। সুতরাং রোলারের মোট ওজন হয় (W + R sin θ)। ফলে রোলার প্রকৃত ওজনের চেয়ে ভারী হয়ে যায় বলে ঘর্ষণ বলের মানও বেড়ে যায়। তাই রোলার ঠেলা কষ্টকর হয়।

টানার ক্ষেত্রে : ধরা যাক, রোলারের ওজন = $\vec{W}$ এবং রোলারের হাতলের ওপর প্রযুক্ত বল = $\vec{F}$

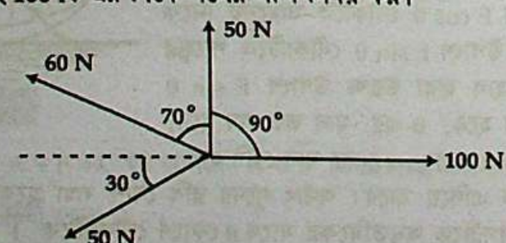
F বল O বিন্দুতে অনুভূমিক রেখা OB-এর সাথে θ কোণে ক্রিয়াশীল [চিত্র ২.৩১ (খ)]। F বল দুটি লম্ব উপাংশে বিভাজিত হয়ে যায়।

অনুভূমিক উপাংশ = F cos θ; এর ক্রিয়ায় রোলারটি সামনের দিকে এগিয়ে যাবে এবং উল্লম্ব উপাংশ = F sin θ; এর ক্রিয়া OD বরাবর উপরের দিকে হওয়ায় রোলারের মোট ওজন W-কে প্রশমিত করে। ফলে রোলারের ওজন হয় (W – F sin θ)। ফলে টানার ক্ষেত্রে রোলার হাল্কা অনুভূত হয় এবং ঘর্ষণ বলও হ্রাস পায়। ফলে রোলার টানা সহজতর হয়।

তাই বলা যায়, লন-রোলার ঠেলা অপেক্ষা টানা সহজতর।

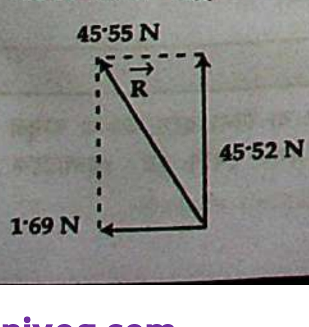
গাণিতিক উদাহরণ ২.৬

১। নিচের চিত্রের 50 N এবং 100 N এর দিকে বলের লব্ধি নির্ণয় কর।



50 N বলের লম্ব দিকে মোট বল = 50 sin 90° + 60 sin (90° + 70°) + 50 sin (180° + 30°) = 45.52 N

100 N বলের অনুভূমিক দিকে মোট বল = 100 cos 0° + 60 cos (90° + 70°) + 50 cos (180° + 30°) = 1.69 N



এদের লব্ধি ($\vec{R}$) চিত্রে দেখানো হলো

$R^2 = \{(45.52)^2 + (1.69)^2\}$ N = 2074.92 N

∴ R = 45.55 N

২। ঘণ্টায় 40 km বেগে পূর্বদিকে চলমান একটি গাড়ির চালক ঘণ্টায় $40\sqrt{3}$ km বেগে একটি ট্রাককে উত্তর দিকে চলতে দেখল। (ক) ট্রাকটির প্রকৃত বেগ কত এবং (খ) ট্রাকটি কোন দিকে চলছে ?

[রা. বো. ২০১১; চ. বো. ২০০২]

(ক) মনে করি ট্রাকটি উত্তর দিকের সাথে θ কোণে পূর্বদিকে চলছে।

ত্রিভুজ সূত্রানুসারে আমরা পাই,

$$\vec{V}_T = \vec{V}_{TC} + \vec{V}_C$$

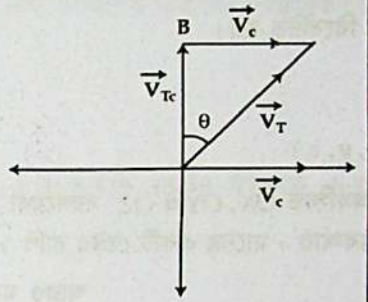
$$\therefore \; V_T^2 = V_{TC}^2 + V_C^2$$

$$\text{বা, } V_T = \sqrt{V_{TC}^2 + V_C^2}$$

$$= \sqrt{(40\sqrt{3})^2 + (40)^2}$$

$$= \sqrt{40^2(4)} = 2 \times 40$$

$$= 80 \text{ kmh}^{-1}$$



এখানে,
গাড়ির প্রকৃত বেগ,
$V_C = 40 \text{ kmh}^{-1}$
গাড়ির সাপেক্ষে ট্রাকের বেগ,
$V_{TC} = 40\sqrt{3} \text{ kmh}^{-1}$
ট্রাকের প্রকৃত বেগ,
$V_T = ?$

(খ) আবার, $\tan\theta = \dfrac{V_C}{V_{TC}} = \dfrac{40}{40\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30°$

$\therefore \; \theta = 30°$

উত্তর : (ক) 80 kmh^{-1}, (খ) 30° কোণে পূর্বদিকে

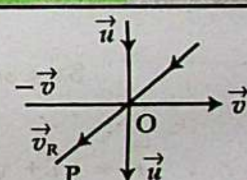
কাজ I : পাখি উড়ার সময় পাখার সাহায্যে দুই পাশের বাতাসকে আঘাত করে কিন্তু পাখি সামনের দিকে উড়ে কী করে?

পাখি উড়ার সময় পাখার সাহায্যে বাতাসকে আঘাত করে। ফলে দুটি পাখার লব্ধি বলের বিপরীত দিকে বাতাস একটি প্রতিক্রিয়া বলের সৃষ্টি করে। এজন্য পাখি সামনের দিকে উড়ে যায়।

কাজ II : বৃষ্টির ফোঁটা চলন্ত গাড়ির সামনের কাঁচকে ভিজিয়ে দেয়, পেছনের কাঁচকে ভিজায় না কেন?

মনে করি গাড়ির বেগ $\vec{v}$ এবং বৃষ্টির বেগ $\vec{u}$

∴ লব্ধি বেগ $\vec{v}_R = \vec{u} + (-\vec{v})$, OP বরাবর ক্রিয়াশীল হয় অর্থাৎ গাড়ির গতির দিকে ক্রিয়া করে [চিত্র ২.৩২]। এক্ষেত্রে গাড়ির সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগের দিক সামনের দিকে তির্যকভাবে ক্রিয়াশীল। কাজেই বৃষ্টির ফোঁটা চলন্ত গাড়ির পিছনের কাঁচকে না ভিজিয়ে সামনের কাঁচকে ভিজায়।

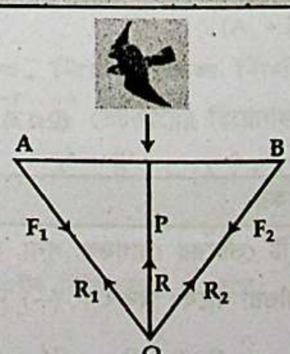


চিত্র ২.৩২

কাজ : বৃষ্টির ফোঁটা ভূপৃষ্ঠের ওপর লম্বভাবে পড়লেও একজন পথচারী তার ছাতাটিকে বৃষ্টির ফোঁটার অভিমুখের সাথে সামান্য কোণে আনত রাখেন কেন ?

বৃষ্টির ফোঁটা লম্বভাবে মাটিতে পড়লেও পথচারী তাঁর গতির জন্য ফোঁটাগুলিকে সামান্য আনত কোণে পড়তে দেখেন। তাই বৃষ্টি থেকে রক্ষা পাওয়ার জন্য ওই পথচারী তাঁর ছাতাটিকে সামান্য আনত কোণে মেলে ধরেন।

অনুসন্ধান : পাখির আকাশে ওড়ার নীতিটি উল্লেখ কর এবং তা ভেক্টরের কোন সূত্র মেনে চলে ?



পাখি ওড়ার সময় ভেক্টরের সামান্তরিক সূত্র মেনে চলে। যদি A ও B বিন্দু দুটি পাখির ডানার প্রান্ত নির্দেশ করে, তবে ডানা দুটি দিয়ে পাখিটি যথাক্রমে F_1 ও F_2 বল প্রয়োগ করে। বল দুটির বিপরীত প্রতিক্রিয়া বল R_1 ও R_2, এর লব্ধি R-এর অভিমুখে ক্রিয়া করে যা পাখিটিকে আকাশে উড়তে সাহায্য করে। ডানা দিয়ে পাখিটি F_1 ও F_2 বল প্রয়োগ করে এবং বল দুটির ক্রিয়ারেখা (line of action) O বিন্দুতে মিলিত হয়। নিউটনের তৃতীয় সূত্র অনুসারে বায়ু সমান বিপরীত প্রতিক্রিয়া বল R_1 ও R_2 এর লব্ধি R পাখিটিকে বায়ুতে ভেসে থাকতে সাহায্য করে।

২.৭ ত্রিমাত্রিক আয়তাকার স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় ভেক্টরের বিভাজন

Resolution of vector in three dimensional rectangular co-ordinate system

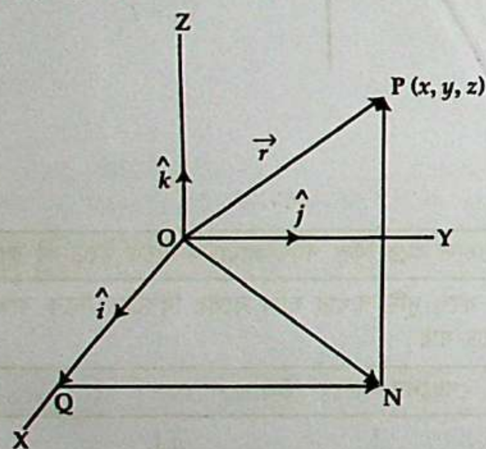
একটি ভেক্টর রাশিকে একক ভেক্টর রাশির সাহায্যে প্রকাশ করতে গিয়ে আমরা কেবল ত্রিমাত্রিক আয়তাকার বিস্তারের ভেক্টরের বিভাজন বিবেচনা করব।

ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় কোনো অবস্থান ভেক্টরকে নিম্নলিখিত উপায়ে লেখা যায় যা ত্রিমাত্রিক আয়তাকার বিস্তারের ভেক্টরের বিভাজন হিসেবে বিবেচিত হয়।

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

এখানে P-এর অবস্থানাঙ্ক (x, y, z)

ধরা যাক, পরস্পর সমকোণে অবস্থিত OX, OY ও OZ সরলরেখা তিনটি যথাক্রমে X, Y ও Z অক্ষ নির্দেশ করছে [চিত্র ২.৩৩]। OP রেখাটি এই অক্ষ ব্যবস্থায় r মানের একটি ভেক্টর রাশি $\vec{r}$ নির্দেশ করছে।



চিত্র ২.৩৩

আরও মনে করি $\overrightarrow{OP}$ ভেক্টরের শীর্ষবিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক (x, y, z) এবং ধনাত্মক X, Y ও Z অক্ষে একক ভেক্টর রাশি যথাক্রমে $\hat{i}$, $\hat{j}$ ও $\hat{k}$। PN রেখাটি হলো XY সমতলের ওপর এবং NQ রেখাটি হলো OX-এর উপর লম্ব।

চিত্র হতে ভেক্টর যোগের নিয়ম অনুসারে পাই,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP} \text{ এবং}$$

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QN}$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{NP}$$

কিন্তু $\overrightarrow{OQ} = x\hat{i}$, $\overrightarrow{QN} = y\hat{j}$,

$\overrightarrow{NP} = z\hat{k}$ ও $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$

$$\therefore \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.15)$$

এখানে x, y ও z হলো যথাক্রমে X, Y ও Z অক্ষ বরাবর $\vec{r}$ ভেক্টরের উপাংশের মান এবং $\vec{r}$ হলো ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার অবস্থান ভেক্টর। সমীকরণ (2.15) হলো নির্ণেয় অবস্থান ভেক্টর।

ভেক্টরের মান

চিত্র ২.৩৩ হতে, $OP^2 = ON^2 + NP^2$ এবং $ON^2 = OQ^2 + QN^2$

$\therefore OP^2 = OQ^2 + QN^2 + NP^2$ বা, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$\therefore r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, নির্ণেয় অবস্থান ভেক্টরের মান ... ... (2.16)

$\vec{r}$ বরাবর বা $\vec{r}$-এর সমান্তরাল একক ভেক্টর রাশি

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.17)$$

কাজ : তিনটি একক ভেক্টর যোগ করলে একটি একক ভেক্টর পাওয়া যায় কী ? ব্যাখ্যা কর।

তিনটি একক ভেক্টরের মধ্যে যদি দুটি সমান ও বিপরীতমুখি হয় তবে ওই দুটি ভেক্টরের যোগফল শূন্য হবে। তৃতীয় একক ভেক্টরটি ওই দুটির সঙ্গে যোগ করলে যোগফল হিসেবে তৃতীয় ভেক্টরটি পাওয়া যাবে। অর্থাৎ $\hat{i}$, $(-\hat{i})$ ও $\hat{j}$ এই তিনটি একক ভেক্টরের যোগফল হলো, $\hat{i} + (-\hat{i}) + \hat{j} = \hat{j}$ = একক ভেক্টর।

লম্ব উপাংশে বিভাজিত ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগ

Vector addition and subtraction of resolved normal components

দুই বা ততোধিক ভেক্টর যদি লম্ব উপাংশে বিভাজিত থাকে, তবে তাদের যোগফল বা বিয়োগফলকে লম্ব উপাংশের সাহায্যে নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায়।

ক. যোগফল নির্ণয়

ধরি, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুইটি ভেক্টর রাশি যাদেরকে লম্ব উপাংশের সাহায্যে নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায় :

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

এবং $$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

এখানে A_x, A_y, A_z এবং B_x, B_y, B_z, X, Y ও Z-অক্ষ বরাবর যথাক্রমে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর দুটির উপাংশের মান নির্দেশ করে।

এখন $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ যোগ করে পাই,

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) + (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$
$$= (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.18)$$

এখন $\vec{A} + \vec{B} = \vec{R}$ হলে এবং X, Y ও Z-অক্ষ বরাবর R-এর উপাংশের মান যথাক্রমে R_x, R_y ও R_z হলে,

$$\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}$$

$$\therefore \vec{A} + \vec{B} = \vec{R} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}$$
$$= R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.19)$$

জেনে রাখ : $\vec{A} = 2\vec{B}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় বিসদৃশ হবে।

লব্ধির মান : সমীকরণ (2.18) ও (2.19) থেকে পাই,

$$R_x = A_x + B_x,\ R_y = A_y + B_y,\ R_z = A_z + B_z$$

$$\therefore |\vec{R}| = |\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$
$$= \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2 + (A_z + B_z)^2}$$

$\vec{R}$ বরাবর $\vec{R}$-এর সমান্তরাল একক ভেক্টর $\hat{r}$ হলে,

$$\hat{r} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}}$$
$$= \frac{(A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}}{\sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2 + (A_z + B_z)^2}}$$

খ. বিয়োগফল নির্ণয়

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের বিয়োগফল নিম্নোক্তভাবে নির্ণয় করা যায় :

$$\vec{A} - \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) - (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$
$$= (A_x - B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j} + (A_z - B_z)\hat{k} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.20)$$

এখন বিয়োগফল $\vec{R}$ হলে,

$$\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}$$

এখানে R_x, R_y ও R_z হলো X, Y ও Z-অক্ষ বরাবর R-এর উপাংশের মান

$$\therefore \vec{A} - \vec{B} = \vec{R} = (A_x - B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j} + (A_z - B_z)\hat{k}$$
$$= R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2.21)$$

লব্ধির মান : সমীকরণ (2.20) ও (2.21) থেকে পাই,

$$R_x = A_x - B_x,\ R_y = A_y - B_y,\ R_z = A_z - B_z$$

$$\therefore |\vec{R}| = |\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2}$$
$$= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$\vec{R}$ বরাবর $\vec{R}$-এর সমান্তরাল একক ভেক্টর $\hat{r}$ হলে,

$$\hat{r} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}}$$
$$= \frac{(A_x - B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j} + (A_z - B_z)\hat{k}}{\sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2}}$$

গাণিতিক উদাহরণ ২.৭

১। $(2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k})$ এবং $(\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$ ভেক্টরদ্বয়ের সাথে কী ভেক্টর যোগ করলে লব্ধি হিসেবে $\hat{j}$ পাওয়া যাবে ?

ধরা যাক, প্রদত্ত ভেক্টরদ্বয়ের সাথে $\vec{A}$ ভেক্টর যোগ করতে হবে।

প্রশ্নানুসারে,

$$\vec{A} + (2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) + (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) = \hat{j}$$

বা, $\vec{A} + 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} = \hat{j}$

বা, $\vec{A} = -3\hat{i} + 2\hat{k}$

২। একটি কণার অবস্থান ভেক্টর, $\vec{r} = (t^2 - 1)\hat{i} + 2t\hat{j}$। দেখাও যে, XY তলে কণাটির সঞ্চারপথ একটি অধিবৃত্ত।

এখানে, $\vec{r} = (t^2 - 1)\hat{i} + 2t\hat{j} \quad \dots \quad \dots \quad (i)$

আমরা জানি, XY তলে কণার অবস্থান ভেক্টর,

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \quad \dots \quad \dots \quad (ii)$

সমীকরণ (i) ও (ii) তুলনা করে পাই,

$x = t^2 - 1$ এবং $y = 2t$ বা, $t = \frac{y}{2}$

বা, $x = \left(\frac{y}{2}\right)^2 - 1 = \frac{y^2}{4} - 1$

বা, $y^2 = 4(x + 1) \quad \dots \quad \dots \quad (iii)$

সমীকরণ (iii) একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

অতএব, কণাটির সঞ্চারপথ একটি অধিবৃত্ত। (প্রমাণিত)

২·৮ দুটি দিক রাশি বা ভেক্টর রাশির গুণফল
Multiplications of two vector quantities

দুটি দিক রাশি বা ভেক্টর রাশির গুণফল সাধারণত দুই প্রকার, যথা—

(১) স্কেলার গুণন বা ডট গুণন (Scalar product or Dot product)

(২) ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন (Vector product or Cross product)

এই দুটি গুণন বা গুণফল নিম্নে পৃথক পৃথকভাবে আলোচনা করা হলো।

২·৮·১ স্কেলার গুণন বা ডট গুণন
Scalar product or Dot product

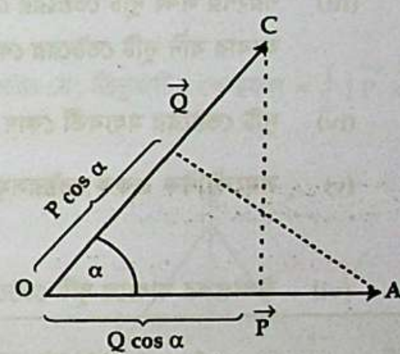
দুটি ভেক্টর রাশির গুণনে গুণফল একটি স্কেলার রাশি হলে এই গুণনকে স্কেলার গুণন বলে। এই গুণনে গুণফলের মান ভেক্টর দুটির মানের গুণফল এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণের কোসাইনের (cosine) গুণফলের সমান হয়। দুটি ভেক্টরকে স্কেলার গুণন করতে হলে উহাদের মাঝে একটি ডট (·) চিহ্ন দিতে হয়। এই জন্য এ গুণনের অপর নাম ডট গুণন।

ব্যাখ্যা : মনে করি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি। তীর চিহ্নিত OA ও OC সরলরেখা রাশি দুটির মান ও দিক নির্দেশ করছে [চিত্র ২·৩৪]। এরা পরস্পরের সাথে α কোণে আনত। তাদের স্কেলার বা ডট গুণফল = $\vec{P} \cdot \vec{Q}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয় এবং পড়তে হয় $\vec{P}$ ডট $\vec{Q}$। কাজেই সংজ্ঞা অনুসারে পাই,

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = |\vec{P}|\,|\vec{Q}| \cos\alpha, \quad \pi \geq \alpha \geq 0$$

বা, $\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ\cos\alpha = QP\cos\alpha$ ... (2.22)

এখানে $0 \leq \alpha \leq \pi$



চিত্র ২·৩৪

$Q\cos\alpha$ হচ্ছে $\vec{P}$ এর দিকে $\vec{Q}$ এর উপাংশ বা $\vec{P}$ এর উপর $\vec{Q}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ এবং $P\cos\alpha$ হচ্ছে $\vec{Q}$ এর দিকে $\vec{P}$ এর উপাংশ [চিত্র ২·৩৪]।

আবার, (2.22) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ\cos\alpha = Q(P\cos\alpha) \quad \ldots \quad \ldots \quad [2.22(a)]$$

এখানে $P\cos\alpha$ হচ্ছে $\vec{Q}$ এর দিকে $\vec{P}$ এর উপাংশ বা $\vec{Q}$ এর উপর $\vec{P}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ।

সুতরাং যে কোনো দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল বলতে যে কোনো একটি ভেক্টরের মান এবং সেই ভেক্টরের দিকে অপর ভেক্টরের উপাংশের বা সেই ভেক্টরের উপর অপর ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপের গুণফলকে বুঝায়।

বিশেষ ক্ষেত্র :

(ক) যদি $\alpha = 0°$ হয়, তবে $\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ\cos 0° = PQ$। এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পরের সমান্তরাল হবে।

(খ) যদি $\alpha = 90°$ হয়, তবে $\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ\cos 90° = 0$। এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব হবে।

(গ) যদি $\alpha = 180°$ হয়, তবে $\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ\cos 180° = -PQ$। এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পরের সমান্তরাল এবং বিপরীতমুখি হবে।

[উল্লেখ্য : $\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ\cos\alpha = P \times Q\cos\alpha = Q \times P\cos\alpha$; এখানে, $Q\cos\alpha = \vec{P}$ বরাবর Q-এর লম্ব অভিক্ষেপ এবং $P\cos\alpha = \vec{Q}$ বরাবর $\vec{P}$-এর লম্ব অভিক্ষেপ।]

স্কেলার গুণনের উদাহরণ : বল $\vec{F}$ এবং সরণ $\vec{s}$ উভয়েই ভেক্টর রাশি। কিন্তু এদের স্কেলার গুণফল কাজ (W) একটি স্কেলার রাশি, অর্থাৎ

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs\cos\alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.23)$$

স্থিতিশক্তি, বৈদ্যুতিক বিভব ইত্যাদিও ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণফলের উদাহরণ।

স্কেলার গুণনের নিয়মানুসারে,

(i) $\vec{P}.\vec{Q} = \vec{Q}.\vec{P}$

(ii) $\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$

(iii) $\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = \hat{i}.\hat{k} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{j} = 0$

অনুধাবনমূলক কাজ : $\hat{i}.\hat{i} = 1$ কিন্তু $\hat{i}.\hat{j} = 0$ হয় কেন ?

স্কেলার গুণফলের কয়েকটি ধর্ম (Some properties of scalar product)

(i) $\vec{A}.\vec{A} = A^2$, অর্থাৎ একই ভেক্টরকে দুবার নিয়ে স্কেলার গুণ করলে ভেক্টরটির মানের বর্গ পাওয়া যায়।

(ii) $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$ অর্থাৎ স্কেলার গুণফল বিনিময় নিয়ম মেনে চলে।

(iii) পরস্পর লম্ব দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল শূন্য হয়। অর্থাৎ $\vec{A}.\vec{B} = 0$

আবার যদি দুটি ভেক্টরের কোনোটির মানই শূন্য না হয় $(A \neq 0, B \neq 0)$, তবে $\vec{A}.\vec{B} = 0$ হলে $\vec{A} \perp \vec{B}$

(iv) দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}\right)$

(v) সমকৌণিক একক ভেক্টরসমূহের স্কেলার গুণফল $\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$

$\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{i} = \hat{i}.\hat{k} = 0$

(vi) উপাংশের মাধ্যমে দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল $\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

কাজ : $\vec{F} = (5\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})$ N বল একটি বস্তুর উপর ক্রিয়া করে $\vec{r} = (3\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k})$ m সরণ সৃষ্টি করল।
Hints : কাজ $W = \vec{F}.\vec{r}$ নির্ণয় করতে হবে।

গাণিতিক উদাহরণ ২.৮

১। $\vec{A} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ ও $\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টর দুটির স্কেলার গুণফল নির্ণয় কর এবং দেখাও যে ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব। [য. বো. ২০১১; ব. বো. ২০০৯; ঢা. বো. ২০০৪; রা. বো. ২০০১]

আমরা জানি, $\vec{A}.\vec{B} = 0$ হলে ভেক্টর রাশি দুটি পরস্পরের উপর লম্ব হবে।

প্রশ্নানুযায়ী, $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta = 0$ হতে হবে।

$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

$\therefore \vec{A}.\vec{B} = (9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}).(4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k})$

$= 9 \times 4 + (1 \times -6) + (-6 \times 5) = 36 - 6 - 30 = 0$

যেহেতু $\vec{A}.\vec{B} = 0$, কিন্তু $A \neq 0$ ও $B \neq 0$; $\therefore \cos\theta = 0 = \cos 90°$

অতএব ভেক্টর দুটি পরস্পরের উপর লম্ব।

২। ভেক্টর $\vec{P} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$-এর উপর $\vec{Q} = 4\hat{j} + 5\hat{k}$-এর লম্ব অভিক্ষেপের মান নির্ণয় কর।

$\vec{P}$ ও $\vec{Q}$-এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে $\vec{P}$-এর উপর $\vec{Q}$-এর লম্ব অভিক্ষেপ $= Q\cos\theta$

আমরা জানি, $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos\theta$

$\therefore Q\cos\theta = \dfrac{\vec{P}.\vec{Q}}{P} = \dfrac{\vec{P}.\vec{Q}}{|\vec{P}|}$

এখন, $\vec{P}.\vec{Q} = (2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}).(4\hat{j} + 5\hat{k})$

$= 2 \times 0 + (-3) \times (4) + (1) \times (5)$

$= -12 + 5 = -7$

এবং $|\vec{P}| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (1)^2}$

$= \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$

$\therefore \quad Q\cos\theta = \dfrac{-7}{\sqrt{14}}$

৩। m এর মান কত হলে $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = m\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ পরস্পর লম্ব হবে ?

আমরা জানি দুটি ভেক্টর পরস্পর লম্ব হলে,

$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos 90° = 0$ হবে।

$\therefore \quad \vec{A}.\vec{B} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}).(m\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) = 0$

বা, $2m + 6 - 8 = 0$

বা, $2m - 2 = 0$

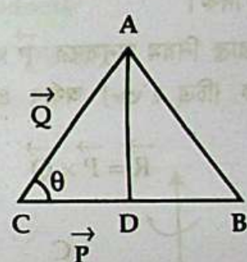
$\therefore \quad m = 1$

৪। কোনো ত্রিভুজের দুটি বাহুকে $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দ্বারা সূচিত করা হলে দেখাও যে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\,|\vec{P} \times \vec{Q}|$

ABC ত্রিভুজে, $\vec{CB} = \vec{P}$

$\vec{CA} = \vec{Q}$

এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ θ [চিত্র দ্রষ্টব্য]।



ত্রিভুজটির উচ্চতা, AD $= AC\cos\theta = Q\sin\theta$

$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা $= \frac{1}{2}(BC)(AD)$

$= \frac{1}{2}PQ\sin\theta = \frac{1}{2}|\vec{P} \times \vec{Q}|$

৫। একটি কণার ওপর $\vec{F} = (3\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k})$ N বল প্রয়োগ করায় কণাটি Z-অক্ষ বরাবর 8 m সরে গেল। কণার ওপর কৃত কাজ নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

কৃত কাজ, $W = \vec{F}.\vec{s}$ [এখানে, $\vec{F} = (3\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k})$ N এবং $\vec{s} = (8\hat{k})$m

$\therefore \quad W = \vec{F}.\vec{s} = (3\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k}).(8\hat{k})$

$= 40$ J

২.৮.২ ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন
Vector product or Cross product

দুটি ভেক্টর রাশির গুণফল যদি একটি ভেক্টর রাশি হয়, তবে ওই গুণনকে ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন বলে। এই ভেক্টর গুণফলের মান ভেক্টর রাশি দুটির মান এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণের সাইন (sine) এর গুণফলের সমান। দুটি ভেক্টরকে ভেক্টর গুণন করতে হলে উহাদের মাঝে একটি ক্রস (×) চিহ্ন দিতে হয় এজন্য এই গুণনের অপর নাম ক্রস গুণন। ভেক্টর গুণফলের দিক উভয় ভেক্টরের ওপর লম্ব বরাবর ক্রিয়াশীল। এই দিক ডানহাতি স্ক্রু নিয়মে নির্ণয় করা হয়।

ব্যাখ্যা : মনে করি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি। এরা পরস্পরের সাথে α কোণে O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। অতএব এদের ভেক্টর গুণফল বা ক্রস গুণফল—

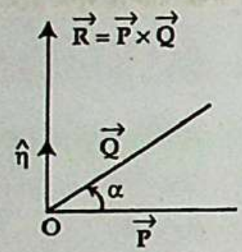
$$\vec{R} = \vec{P} \times \vec{Q} = \hat{\eta}\,|\vec{P}|\,|\vec{Q}|\sin\alpha, \quad 0 \le \alpha \le \pi \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad [2.24(a)]$$

এখানে $\hat{\eta}$ গুণফলের দিক নির্দেশ করে [চিত্র ২.৩৫]

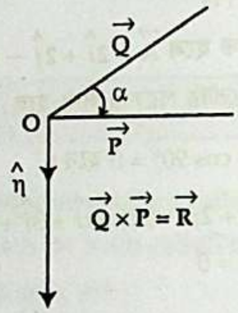
বা, $\vec{R} = \vec{Q} \times \vec{P}$

$= \hat{\eta}\, QP \sin\alpha,\ 0 \le \alpha \le \pi$ ... ... [2.24(b)]

এখানে $\hat{\eta}$ গুণফলের দিক নির্দেশ করে [চিত্র ২·৩৬]



চিত্র ২·৩৫

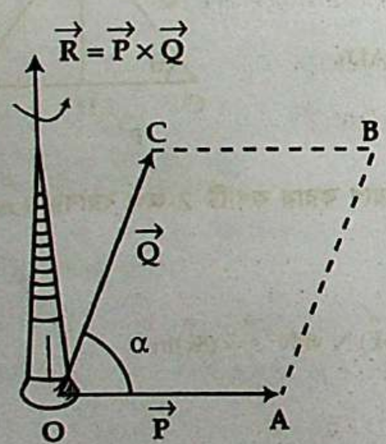


চিত্র ২·৩৬

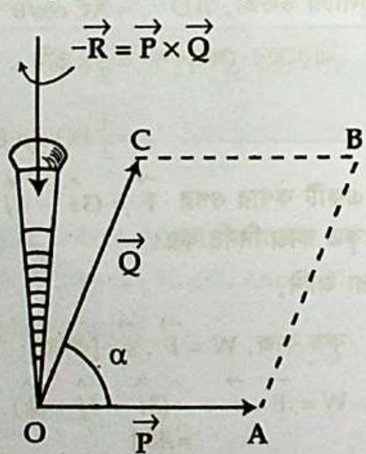
দুটি ভেক্টরের গুণফলের দিক ডান হাতি কর্ক স্ক্রু সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

ডান হাতি স্ক্রু নিয়ম : ভেক্টর দুটি যে সমতলে অবস্থিত সেই সমতলের ওপর লম্বভাবে একটি ডান হাতি স্ক্রুকে রেখে প্রথম ভেক্টর হতে দ্বিতীয় ভেক্টরের দিকে ক্ষুদ্রতম কোণে ঘুরালে স্ক্রুটি যেদিকে অগ্রসর হয় সেই দিকই হবে $\vec{R}$ তথা $\hat{\eta}$ এর দিক।

উপরোক্ত নিয়ম অনুসারে $\vec{P} \times \vec{Q}$ এর অভিমুখ হবে ওপরের দিকে [চিত্র ২·৩৭] এবং $\vec{Q} \times \vec{P}$ এর অভিমুখ হবে নিচের দিকে [চিত্র ২·৩৮] অর্থাৎ প্রথম ক্ষেত্রে ডান হাতি স্ক্রুর দিক হবে ঘড়ির কাঁটার বিপরীতমুখি (Anticlockwise)



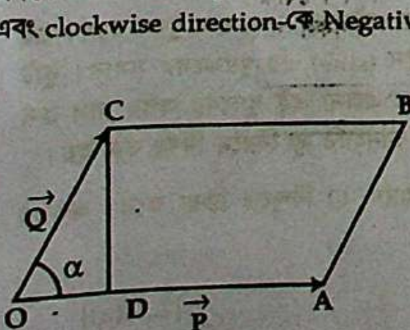
চিত্র ২·৩৭



চিত্র ২·৩৮

এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ঘড়ির কাঁটার দিকে (Clockwise)। Anti-clockwise direction-কে positive (ধনাত্মক) ধরা হয় এবং clockwise direction-কে Negative (ঋণাত্মক) ধরা হয়।

বিশেষ ক্ষেত্র :



চিত্র ২·৩৯

ক. যদি $\alpha = 0°$ হয়, তবে $\vec{R} = \vec{P} \times \vec{Q} = \hat{\eta}\, PQ \sin 0° = 0$
এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পরের সমান্তরাল হবে।

খ. যদি $\alpha = 90°$, তবে $\vec{R} = \vec{P} \times \vec{Q} = \hat{\eta}\, PQ \sin 90° = PQ$
এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব হবে।

গ. যদি $\alpha = 180°$, তবে $\vec{R} = \vec{P} \times \vec{Q} = \hat{\eta}\, PQ \sin 180° = 0$
এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পর সমান্তরাল এবং বিপরীতমুখি হবে।

উদাহরণ : মনে করি দুটি ভেক্টর $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ পরস্পরের সাথে α কোণ উৎপন্ন করেছে। OABC সামান্তরিকের $\vec{OA} = \vec{P}$ এবং $\vec{OC} = \vec{Q}$ এখন C হতে OA এর উপর CD লম্ব টানি [চিত্র ২.৩৯]।

$\therefore$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= OA \times CD = OA \times OC \sin\alpha = PQ \sin\alpha = |\vec{P} \times \vec{Q}|$

সিদ্ধান্ত : সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল দুটি ভেক্টরের ক্রস গুণফলের মানের সমান।

ভেক্টর গুণনের নিয়মানুসারে,

(i) $\vec{P} \times \vec{Q} = -\vec{Q} \times \vec{P}$

(ii) $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$

(iii) $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} = -(\hat{j} \times \hat{i})$

(iv) $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} = -(\hat{k} \times \hat{j})$

(v) $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} = -(\hat{i} \times \hat{k})$

হিসাব : একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু বরাবর দুটি ভেক্টর $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 5\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ ক্রিয়াশীল হলে সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [উ. 7.64 একক]

Hints: $\vec{A} \times \vec{B}$ নির্ণয় করে $|\vec{A} \times \vec{B}|$ এর মান বের করতে হবে।

ভেক্টর গুণফলের কয়েকটি ধর্ম (Some properties of vector product)

(i) $\vec{A} \times \vec{A} = 0$, **অর্থাৎ একই ভেক্টরকে দুবার নিলে তাদের ভেক্টর গুণফল শূন্য হয়।**

(ii) $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ **অর্থাৎ ভেক্টর গুণফল বিনিময় নিয়ম মেনে চলে না।**

(iii) $\vec{A} \perp \vec{B}$ **হলে** $\vec{A} \times \vec{B}$ **এর মান** $= |\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin 90° = AB.$

$\vec{A}$, $\vec{B}$ এবং $\vec{A} \times \vec{B}$ এই তিনটি ভেক্টরই পরস্পরের উপর লম্ব।

(iv) সমকৌণিক একক ভেক্টরসমূহের ভেক্টর গুণফল

$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k},\ \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i},\ \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k},\ \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i},\ \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$

(v) স্থানাঙ্কের মাধ্যমে দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল

$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{i}\,(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{j}\,(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{k}\,(A_xB_y - A_yB_x)$

(vi) $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ **সমতলীয় হবার শর্ত হলো** $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = 0$

কাজ : কোন ক্ষেত্রে স্কেলার ও ভেক্টর যোগফলের মান সমান হয় ?

স্কেলারের শুধু মান থাকে। তাই স্কেলার যোগফল বলতে শুধুমাত্র মানের যোগফল বোঝায়। তেমনি একাধিক ভেক্টরের অভিমুখ যদি একই দিকে হয়, তবে শুধুমাত্র মানগুলি যোগ করে ভেক্টরগুলির যোগফল পাওয়া যায়। অর্থাৎ এই যোগফল হবে স্কেলার যোগফলের সমান।

অনুসন্ধান : দুটি অসমান ভেক্টরের লব্ধি কী শূন্য হতে পারে ?

ধরি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ $= \theta$

এদের লব্ধির মান, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta}$

যখন $\theta = 180°$, তখন R ন্যূনতম হয়। অর্থাৎ, $R_{min} = P - Q$

এখন দেখা যাচ্ছে, P এবং Q সমান হলে R শূন্য হয়। কিন্তু P ও Q অসমান হলে R-এর ন্যূনতম মান শূন্য হতে পারে না। সুতরাং, দুটি অসমান ভেক্টরের লব্ধি কখনও শূন্য হতে পারে না।

নিজে কর : $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ 45° হলে দেখাও যে, $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A} \times \vec{B}|$

গাণিতিক উদাহরণ ২.৯

১। $\vec{A} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = m\hat{i} + 6\hat{j} - 10\hat{k}$। m-এর মান কত হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে ?

যদি $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ হয়, তবে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর সমান্তরাল হবে।

এখানে, $\vec{A} \times \vec{B} = (\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) \times (m\hat{i} + 6\hat{j} - 10\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -3 & 5 \\ m & 6 & -10 \end{vmatrix} = \hat{i}(30-30) - \hat{j}(-10-5m) + \hat{k}(6+3m)$$
$$= \hat{j}(10+5m) + \hat{k}(6+3m)$$

∴ শর্ত অনুসারে,

$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{i}(10+5m) + \hat{k}(6+3m) = 0$

উভয় পাশে, $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর সহগ তুলনা করে পাই,

$10 + 5m = 0$ এবং $6 + 3m = 0$

বা, $5m = -10$ বা, $3m = -6$

∴ $m = -\frac{10}{5} = -2$ ∴ $m = -\frac{6}{3} = -2$

সুতরাং, $m = -2$ হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে।

২। প্রমাণ কর যে, $(\vec{A} \cdot \vec{B})^2 + (\vec{A} \times \vec{B})^2 = A^2B^2$

আমরা জানি,

$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$ [এখানে, θ হলো ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ]

এবং $\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta$

$$\therefore (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 + (\vec{A} \times \vec{B})^2 = (AB\cos\theta)^2 + (AB\sin\theta)^2$$
$$= A^2B^2\cos^2\theta + A^2B^2\sin^2\theta$$
$$= A^2B^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = A^2B^2 \text{ (প্রমাণিত)}$$

৩। $\vec{P} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = -2\hat{j} + \hat{i} + 3\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় যে তলে অবস্থান করে তার উল্লম্ব দিকে একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০৯, ২০০৬, ২০০৪; কু. বো. ২০০৮; চ. বো. ২০০৮]

$\vec{P} \times \vec{Q}$ একটি ভেক্টর যা $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$-এর তলে লম্ব।

$$\therefore \vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(9-8) + \hat{j}(-4-6) + \hat{k}(-4-3) = \hat{i} - 10\hat{j} - 7\hat{k}$$

মনে করি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ যে তলে অবস্থিত তার লম্ব অভিমুখে একক ভেক্টর রাশি $= \hat{n}$

$$\therefore \hat{n} = \frac{\vec{P} \times \vec{Q}}{|\vec{P} \times \vec{Q}|} = \frac{\hat{i} - 10\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{(1)^2 + (-10)^2 + (-7)^2}} = \frac{\hat{i} - 10\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{1 + 100 + 49}} = \frac{\hat{i} - 10\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{150}}$$

৪। $|\vec{A}+\vec{B}|=|\vec{A}-\vec{B}|$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করে দেখাও যে, ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব।

মনে করি, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ

$\therefore \quad |\vec{A}+\vec{B}|=|\vec{A}-\vec{B}|$

বা, $|\vec{A}+\vec{B}|^2=|\vec{A}-\vec{B}|^2$

বা, $(\vec{A}+\vec{B}).(\vec{A}+\vec{B})=(\vec{A}-\vec{B}).(\vec{A}-\vec{B})$

বা, $\vec{A}.\vec{A}+\vec{B}.\vec{A}+\vec{A}.\vec{B}+\vec{B}.\vec{B}=\vec{A}.\vec{A}-\vec{B}.\vec{A}-\vec{A}.\vec{B}+\vec{B}.\vec{B}$

বা, $2(\vec{A}.\vec{B})=-2(\vec{A}.\vec{B}), \quad (\because \vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A})$

বা, $4(\vec{A}.\vec{B})=0$ বা, $\vec{A}.\vec{B}=0, (A\neq 0, B\neq 0)$

বা, $AB\cos\theta=0 \quad \therefore \cos\theta=0$ বা, $\theta=90° \; (A\neq 0, B\neq 0)$

$\therefore$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 90°; কাজেই ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব।

৫। $\vec{P}+\vec{Q}+\vec{R}=0$ হলে প্রমাণ কর যে $\vec{P}\times\vec{Q}=\vec{Q}+\vec{R}=\vec{R}+\vec{P}$.

$\vec{P}+\vec{Q}+\vec{R}=0$

$\therefore \quad \vec{P}=-(\vec{Q}+\vec{R})$

$\therefore \quad \vec{P}\times\vec{Q}=-(\vec{Q}+\vec{R})\times\vec{Q}=-\vec{R}+\vec{Q}=\vec{Q}+\vec{R} \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (i)

আবার, $\vec{R}\times\vec{P}=-R\times(Q+R)=-\vec{R}\times\vec{Q}=\vec{Q}\times\vec{R} \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (ii)

$\therefore$ (i) এবং (ii) থেকে পাই,

$\vec{P}\times\vec{Q}=\vec{Q}\times\vec{R}=\vec{R}\times\vec{P}$ (প্রমাণিত)

৬। 3 kg ভরের একটি গতিশীল কণার গতিবেগ $\vec{v}=2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$। কণার অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}=\hat{i}+\hat{j}$ হলে মূলবিন্দু সাপেক্ষে এর কৌণিক ভরবেগ নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

রৈখিক ভরবেগ, $\vec{P}=m\vec{v}$

$\therefore \quad \vec{P}=3(2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})$

$=6\hat{i}+6\hat{j}-3\hat{k}$

এখানে,
$m=3$ kg
$\vec{v}=2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$
$\vec{r}=\hat{i}+\hat{j}$

আবার, কৌণিক ভরবেগ, $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}$

$\therefore \quad \vec{L}=(\hat{i}+\hat{j})\times(6\hat{i}+6\hat{j}-3\hat{k})$

$$=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \hat{i}(-3-6\times 0)+\hat{j}\{6\times 0-1\times(-3)\}+\hat{k}(6-6) = -3\hat{i}+3\hat{j}$$

$=-3\hat{i}+3\hat{j}$

৭। একটি ঘূর্ণনরত কণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর $\vec{r} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$m এবং প্রযুক্ত বল $\vec{F} = (6\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k})$N হলে টর্কের মান ও দিক নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০১৫]

এখানে,

ব্যাসার্ধ ভেক্টর, $\vec{r} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$m

বল, $\vec{F} = (6\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k})$N

টর্ক, $\vec{\tau} = ?$

টর্কের মান, $\tau = ?$

আমরা জানি, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-6+3) - \hat{j}(-6+6) + \hat{k}(6-12)$$

$$= -3\hat{i} - 6\hat{k}$$

$$\therefore \quad \vec{\tau} = -(3\hat{i} + 6\hat{k})\text{N-m}$$

τ-এর মান $= \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$

উত্তর : $-(3\hat{i} + 6\hat{k})$ N-m, $\sqrt{45}$

৮। $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণ α হলে প্রমাণ কর—

$$\tan\alpha = \frac{|\vec{P} \times \vec{Q}|}{\vec{P} \cdot \vec{Q}}.$$

আমরা জানি,

$|\vec{P} \times \vec{Q}| = PQ\sin\alpha$ এবং $\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ\cos\alpha$

$\therefore \quad \dfrac{|\vec{P} \times \vec{Q}|}{\vec{P} \cdot \vec{Q}} = \dfrac{PQ\sin\alpha}{PQ\cos\alpha} = \tan\alpha$. (প্রমাণিত)

৯। একটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর যার কর্ণ দুইটি যথাক্রমে $\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$

আমরা জানি,

সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times |\vec{A} \times \vec{B}|$

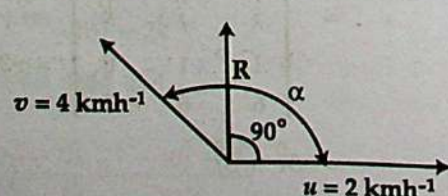
$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \hat{i}(4-6) - \hat{j}(12+2) + \hat{k}(-9-1) = -2\hat{i} - 14\hat{j} - 10\hat{k}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} \times |\vec{A} \times \vec{B}| = \frac{1}{2}(\sqrt{(-2)^2 + (-14)^2 + (-10)^2})$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{300} = 8.66$$

১০। স্রোত না থাকলে একজন সাঁতারু 4 kmh⁻¹ বেগে সাঁতার কাটতে পারেন। 2 kmh⁻¹ বেগে সরলরেখা বরাবর প্রবাহিত একটি নদীর এপার থেকে ওপারের ঠিক বিপরীত বিন্দুতে যেতে হলে সাঁতারুকে কোন দিকে সাঁতার কাটতে হবে ?

মনে করি, স্রোতের বেগ u এবং সাঁতারুর বেগ v এবং বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α। নদীটিকে সোজাসুজি অতিক্রম করতে সাঁতারুর লব্ধি বেগ R স্রোতের বেগ u এর সাথে $\theta = 90°$ কোণ তৈরি করে সাঁতার কাটতে হবে।



এখানে,
$u = 2\ \text{kmh}^{-1}$
$v = 4\ \text{kmh}^{-1}$
$\theta = 90°$
$\alpha = ?$

আমরা জানি,

$$\tan\theta = \frac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$$

বা, $\tan 90° = \dfrac{4\times\sin\alpha}{2+4\cos\alpha}$

বা, $\infty = \dfrac{4\times\sin\alpha}{2+4\cos\alpha}$

বা, $\dfrac{1}{0} = \dfrac{4\times\sin\alpha}{2+4\cos\alpha}$

বা, $2+4\cos\alpha = 0$

বা, $4\cos\alpha = -2$

বা, $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \alpha = 120°$

অর্থাৎ সাঁতারুকে স্রোতের সাথে 120° কোণে সাঁতার কাটতে হবে।

হিসাব কর : $\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\vec{C} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ হলে ভেক্টর তিনটি সমতলীয় কিনা প্রমাণ কর।

আমরা জানি,

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = 0$ হলে ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হবে।

২.৯ পদার্থবিজ্ঞানে ক্যালকুলাস
Calculus in physics

ক্যালকুলাস হলো পরিবর্তনের গাণিতিক অধ্যয়ন। এর দুটি প্রধান শাখা রয়েছে—ডিফারেনসিয়াল ক্যালকুলাস (Differential calculus) ও ইন্টিগ্রাল ক্যালকুলাস (Integral calculus)। বিজ্ঞানী নিউটন সর্বপ্রথম তাত্ত্বিক পদার্থবিজ্ঞানে ডিফারেনসিয়াল ক্যালকুলাস প্রয়োগ করেন।

গুরুত্ব : পদার্থবিজ্ঞানে ক্যালকুলাস-এর গুরুত্ব অপরিহার্য। অনেক বাস্তব প্রক্রিয়া ডেরিভেটিভস যুক্ত সমীকরণ দ্বারা ব্যাখ্যা করা হয়। সেই সমীকরণগুলোকে ব্যবকলনীয় (ডিফারেনসিয়াল) সমীকরণ বলে। পদার্থবিজ্ঞান সময়ের সাথে রাশির পরিবর্তন ও বিকাশের পদ্ধতির সাথে সম্পর্কিত। কতিপয় গুরুত্বপূর্ণ ধারণার সম্যক জ্ঞানের জন্য time derivative-এর ধারণা থাকা আবশ্যক। বিশেষত নিউটনীয় পদার্থবিদ্যায় একটি বস্তুর অবস্থানের time derivative গুরুত্বপূর্ণ।

বেগ বস্তুর সরণের time derivative

ত্বরণ বস্তুর বেগের time derivative

ব্যবহার :

I. বেগ, ত্বরণ, বক্ররেখার ঢাল ইত্যাদি হিসাবের জন্য ডিফারেনসিয়াল ক্যালকুলাস প্রয়োগ করা হয়।

II. ক্ষেত্রফল, আয়তন, ভরকেন্দ্র, কাজ এবং চাপ ইত্যাদি হিসাবের জন্য ইন্টিগ্রাল ক্যালকুলাস ব্যবহার করা হয়। স্থান, কাল এবং গতির প্রকৃতি সম্বন্ধে সম্যক জ্ঞান অর্জনের জন্যও ক্যালকুলাস ব্যবহার করা হয়।

উদাহরণ :

দেয়া আছে, একটি সরলরেখার উপর বস্তুর অবস্থান

$$x(t) = -16t^2 + 16t + 32$$

তাহলে বস্তুর বেগ, $v = \dfrac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = -32t + 16$

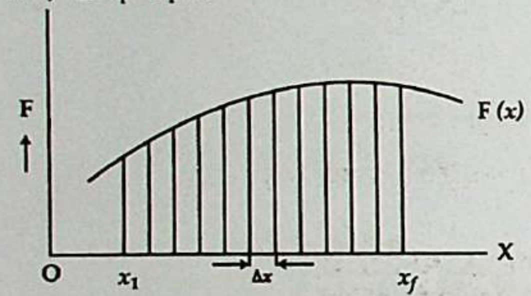
এবং ত্বরণ, $a = \dfrac{dv}{dt} = \ddot{x}(t) = -32$

নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র সাধারণ ব্যবকলনীয় (ডিফারেনসিয়াল) সমীকরণের মাধ্যমে নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায়

$$F(t) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

ইন্টিগ্রাল ক্যালকুলাস-এর সাহায্যে পরিবর্তী বল দ্বারা কাজ নির্ণয় : ধরি, একটি বস্তুর ওপর একটি পরিবর্তনশীল বল x-অক্ষ বরাবর ক্রিয়াশীল। বলটির মান বস্তুটির অতিক্রান্ত দূরত্ব x-এর ওপর নির্ভর করে অর্থাৎ F হলো দূরত্ব x-এর একটি অপেক্ষক। চিত্র ২.৪০-এ x-এর বিভিন্ন মানের জন্য $F(x)$-এর আনুষঙ্গিক মান নিয়ে লেখ দেখানো হয়েছে।

মোট সরণ Δx প্রস্থের ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র n সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত, যেখানে x_i থেকে $x_i + \Delta x$ পর্যন্ত ক্ষুদ্র সরণ হচ্ছে Δx। এই ক্ষুদ্র সরণকালে বলের মান প্রায় ধ্রুব থাকে এবং এই ধ্রুব মান F_1। সুতরাং এই অংশে এই বল দ্বারা সম্পন্ন ক্ষুদ্র কাজ, $\Delta W_1 = F_1 \Delta x$



চিত্র ২.৪০

অনুরূপভাবে দ্বিতীয় অংশে $x_i + \Delta x$ থেকে $x_i + 2\Delta x$ পর্যন্ত ক্ষুদ্র সরণ Δx। এই ক্ষুদ্র সরণকালে ধ্রুব বল F_2। সুতরাং দ্বিতীয় অংশে বল দ্বারা কৃত কাজ, $\Delta W_2 = F_2 \Delta x$। বস্তুটিকে x_i থেকে x_f পর্যন্ত সরাতে $F(x)$ বল দ্বারা কৃত মোট কাজ,

$$W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3 + \ldots + \Delta W_N$$

$$= F_1\Delta x + F_2\Delta x + F_3\Delta x + \ldots + F_N\Delta x$$

$$= \sum_{K=1}^{N} F_K \Delta x \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.25)$$

Δx-কে যত ক্ষুদ্র থেকে ক্ষুদ্রতর তথা N-এর মান যত বেশি হবে হিসাবকৃত কাজের মান তত সঠিক হবে। আমরা বল $F(x)$ দ্বারা কৃত কাজের সঠিক মান পেতে পারি যদি পরিমাপের সীমার মধ্যে Δx শূন্য থাকে এবং N অসীম হয়। তাহলে সঠিক ফল হবে,

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{K=1}^{N} F_K \Delta x \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.26)$$

কিন্তু ক্যালকুলাসের ভাষায় $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum\limits_{K=1}^{N} F_K \Delta x$ রাশিটি হচ্ছে

$\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx$ যা x_i থেকে x_f পর্যন্ত x-এর সমাকলন (Integration) নির্দেশ করে।

সুতরাং সমীকরণ (2.26) দাঁড়ায়,

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.27)$$

সংখ্যাগতভাবে এই রাশিটি হচ্ছে বল বক্ররেখা এবং x_i ও x_f সীমার মধ্যে অবস্থিত x-অক্ষের অন্তর্গত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল। সুতরাং সমাকলনের সাহায্যে কাজ এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়।

২.১০ ভেক্টর ক্যালকুলাস
Vector calculus

২.১০.১ ভেক্টর অন্তরীকরণ বা অবকলন বা ভেক্টর ডেরিভেটিভ
Vector differentiation or vector derivatives

ভেক্টর অন্তরীকরণ বা অবকলন বা ভেক্টর ডেরিভেটিভ আলোচনার পূর্বে কয়েকটি প্রয়োজনীয় বিষয় জানা দরকার।

(ক) ক্যালকুলাস (Calculus) : বিজ্ঞানের ভাষায় ক্যালকুলাস হলো অবিরত পরিবর্তনশীল ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র অংশ গণনার একটি শাস্ত্র। আধুনিক গণিতে এটি একটি গুরুত্বপূর্ণ শাখা।

ক্যালকুলাস দুভাগে বিভক্ত—

(১) অন্তরীকরণ বা অবকলন ক্যালকুলাস (Differential calculus),

(২) যোগজীকরণ বা সমাকলন ক্যালকুলাস (Integral calculus)

(খ) অপারেটর (Operator) : অপারেটর একটি ইংরেজি শব্দ। এর অভিধানগত অর্থ হলো 'চলক' বা 'সংঘটক' বা 'কার্যকারক'। কিন্তু বিজ্ঞানের ভাষায় অপারেটর এক ধরনের প্রতীক বা সংকেত। এর নিজস্ব কোনো মান নেই। যেমন বর্গ (^{2}), ঘন (^{3}), বর্গমূল ($\sqrt{}$), sine, log ইত্যাদি। তবে এরা যখন অন্য কোনো রাশির সাথে যুক্ত হয় তখন একটি নির্দিষ্ট মান বহন করে। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $\sqrt{25} = 5$, $\sin 30° = 0.5$ ইত্যাদি। আরও সোজা কথায় বলা যেতে পারে ($10\times$) চিহ্নটির কোনো মান হয় না। কিন্তু (10×5) চিহ্নটির মান $= 50$। এর অর্থ 10-কে

5 দ্বারা গুণ করা। এখন যদি $(10\times)$ চিহ্নকে C দ্বারা সূচিত করা হয়, তবে $10\times 5 = C5$ হয়। অতএব C একটি অপারেটর। যোগজীকরণও একটি অপারেটর। এর চিহ্ন $\int$ অথবা $\sum$।

সংজ্ঞা : যে গাণিতিক প্রকাশ বা চিহ্নের দ্বারা একটি রাশিকে অন্য একটি রাশিতে রূপান্তর করা যায় বা কোনো পরিবর্তনশীল রাশির ব্যাখ্যা দেয়া যায় তাকে অপারেটর বলে।

ভেক্টর ডিফারেনশিয়াল অপরারেটরকে $\vec{\nabla}$ বা ∇ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এর অপর নাম ন্যাবলা। ইহা এক ধরনের গাণিতিক প্রকাশ। t-সাপেক্ষে এই অপারেটর $\frac{d}{dt}$, x-সাপেক্ষে $\frac{d}{dx}$, y-সাপেক্ষে $\frac{d}{dy}$ ইত্যাদি। বিভিন্ন উপাংশের সাহায্যে ভেক্টর অন্তরীকরণ অপারেটরকে নিম্নলিখিতভাবে লেখা যায়,

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

যেহেতু স্কেলার এবং ভেক্টর উভয় প্রকার রাশিকেই অন্তরীকরণ করা যায়, সেহেতু অন্তরীকরণ অপারেটর স্কেলার এবং ভেক্টর উভয় প্রকার রাশির ক্ষেত্রেই কার্যকর।

২·১০·২ ভেক্টর অন্তরক অপারেটরকে উপাংশের সাহায্যে প্রকাশ

Representation of vector differential operator in terms of components

বিভিন্ন উপাংশের সাহায্যে ভেক্টর অন্তরক অপারেটরকে লেখা যায়—

$\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}$ এবং $\frac{d}{dz}$ আকারে। এখানে $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}$ এর কোনো অর্থ নেই। কিন্তু যখন ইহা x, y, z এর ওপর ক্রিয়া করে তখন $\frac{dx}{dx}, \frac{dy}{dy}$ এবং $\frac{dz}{dz}$ আকারে লেখা হয় এবং ইহা অর্থপূর্ণ হয়। এখন y যদি একটি রাশি হয় যার মান x এর উপর নির্ভরশীল অর্থাৎ $y\,x$ এর অপেক্ষক $y(x)$, তাহলে x এর সাপেক্ষে y কে অন্তরীকরণ করা যাবে এবং পাওয়া যাবে $\frac{dy}{dx}$। এখানে $\frac{dy}{dx}$ হচ্ছে x এর ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য x এর সাপেক্ষে y এর পরিবর্তনের হার। একে x এর সাপেক্ষে y এর অন্তরকও বলে। আবার Δt এর মান শূন্যের কাছাকাছি হলে x এর ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য t এর সাপেক্ষে x এর পরিবর্তনের হারকে x এর সাপেক্ষে t এর অন্তরক $\frac{dx}{dt}$ বলে। অর্থাৎ

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

এখন $\vec{x}$-কে উপাংশে প্রকাশ করলে লেখা যায়,

$\vec{x} = \hat{i}x_1 + \hat{j}y_1 + \hat{k}z_1$; এখানে x_1, y_1, z_1 হলো যথাক্রমে X, Y ও Z অক্ষের দিকে $\vec{x}$ ভেক্টরের উপাংশের মান। x_1, y_1, z_1 উপাংশগুলো সময় t-এর অপেক্ষক কিন্তু $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ধ্রুবক এবং সময়ের সাপেক্ষে এদের কোনো পরিবর্তন নাই; অর্থাৎ এদের পরিবর্তনের হার শূন্য। অতএব $\vec{x}$-কে উপাংশে প্রকাশ করলে এর ব্যবকলন হবে,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \hat{i}\frac{dx_1}{dt} + \hat{j}\frac{dy_1}{dt} + \hat{k}\frac{dz_1}{dt} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.28)$$

২·১০·৩ অবস্থান ভেক্টর হতে বেগ ও ত্বরণ প্রতিপাদন

Derivation of velocity and acceleration from position vector

ধরা যাক, $\vec{r}$ একটি অবস্থান ভেক্টর। $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$

অতি ক্ষুদ্র সময়ে $\vec{r}$-এর পরিবর্তনের হারকে বেগ $\vec{v}$ বলা হয়।

সুতরাং, $$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i}\frac{dx}{dt} + \hat{j}\frac{dy}{dt} + \hat{k}\frac{dz}{dt} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.29)$$

আবার, অতি ক্ষুদ্র সময়ে বেগ $\vec{v}$-এর পরিবর্তনের হার হলো ত্বরণ,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)\hat{i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\hat{j} + \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right)\hat{k}$$

$$\therefore \vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} \quad \ldots \quad (2.30)$$

কোনো স্কেলার রাশিকে অন্তরীকরণ করার সাধারণ নিয়ম নিম্নরূপ :

(ক) প্রথমে চল রাশিটির সহগ সংখ্যাকে ঘাত দ্বারা গুণ করতে হবে।

(খ) পরে চল রাশির ঘাতের মান হতে '1' বিয়োগ করতে হবে।

উদাহরণ : মনে করি, দূরত্ব $s = 16t^2$। এখানে সহগ 16, t চল রাশি এবং 2 হলো ঘাত। ওপরের নিয়ম অনুসারে প্রথমে সহগ 16-কে ঘাত 2 দ্বারা গুণন করে পাওয়া যাবে 32 এবং চল রাশির ঘাত 2 হতে 1 বিয়োগ করলে পাওয়া যাবে 1।

$$\therefore \frac{ds}{dt} = v = 32t$$

গাণিতিক উদাহরণ ২.১০

১। অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$-কে অবকলন করে কীভাবে বেগ ও ত্বরণ পাওয়া যায় ?

এখানে, অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

আমরা জানি, অতি ক্ষুদ্র সময়ে r-এর পরিবর্তনের হারকে বেগ বলা হয়। সুতরাং

বেগ, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$

অতি ক্ষুদ্র সময়ে $\vec{v}$-এর পরিবর্তনের হারকে ত্বরণ বলা হয়।

সুতরাং ত্বরণ, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}\right)$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$$

২। দুটি ভেক্টর $\vec{A} = \hat{i}t^2 - \hat{j}t + (2t+1)\hat{k}$ ও $\vec{B} = 5\hat{i}t + \hat{j}t - \hat{k}t^3$ হলে $\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B})$ ও $\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B})$ নির্ণয় কর।

প্রশ্নানুযায়ী, $(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \{\hat{i}t^2 - \hat{j}t + (2t+1)\hat{k}\}\cdot(5\hat{i}t + \hat{j}t - \hat{k}t^3)$

$$= 5t^3 - t^2 - (2t+1)t^3$$

$$= 5t^3 - t^2 - 2t^4 - t^3$$

$$= 4t^3 - 2t^4 - t^2$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{d}{dt}(4t^3 - 2t^4 - t^2)$$

$$= 12t^2 - 8t^3 - 2t$$

পুনরায়, $(\vec{A}\times\vec{B}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ t^2 & -t & (2t+1) \\ 5t & t & -t^3 \end{vmatrix}$

$$= \hat{i}\begin{vmatrix} -t & (2t+1) \\ t & -t^3 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} t & (2t+1) \\ 5t & -t^3 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} t^2 & -t \\ 5t & t \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(t^4 - 2t^2 - t) - \hat{j}(-t^5 - 10t^2 - 5t) + \hat{k}(t^3 + 5t^2)$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \hat{i}(4t^3 - 4t - 1) + \hat{j}(5t^4 + 20t + 5) + \hat{k}(3t^2 + 10t)$$

৩। $\vec{A}$ একটি ধ্রুবক মানের ভেক্টর হলে দেখাও যে $\frac{d\vec{A}}{dt}$, $\vec{A}$-এর সঙ্গে লম্বভাবে আছে।

$|\vec{A}|$ = ধ্রুবক

$\therefore \quad \vec{A}\cdot\vec{A} = A^2$ = ধ্রুবক

$\therefore \quad \frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{A}) = 0$

বা, $\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{A} = 0$

বা, $2\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt} = 0$ বা $\frac{d\vec{A}}{dt}\cdot(\vec{A}+\vec{A}) = 0$

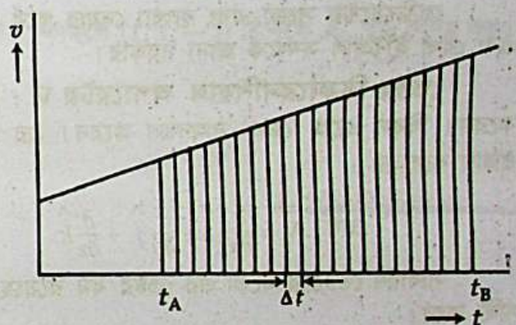
সুতরাং, $\frac{d\vec{A}}{dt}$ ভেক্টরটি $\vec{A}$ ভেক্টরের সঙ্গে লম্বভাবে আছে।

যোগজীকরণ বা সমাকলন
Integration

মনে করি, একটি বস্তু নির্দিষ্ট দিকে গতিশীল অর্থাৎ এটি সরলরেখা বরাবর চলছে। বেগের দিক নির্দিষ্ট হলেও এর মান ভিন্ন। ধরা যাক, বেগের মান v সময় t-এর ওপর নির্ভরশীল। অর্থাৎ v সময় t-এর অপেক্ষক (function)। একে $v(t)$ হিসেবে প্রকাশ করা হয়।

ধরা যাক, আদি সময় t_A এবং শেষ সময় t_B। এই সময় ব্যবধানে বস্তুটির অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় করব। এখন আমরা সময় ব্যবধান $t_B - t_A$ কে N সংখ্যক অতি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সমান অংশ Δt এ বিভক্ত করি। ধরি আদি সময় t_A হতে প্রথম ক্ষুদ্রাংশ $t_A + \Delta t$ এর মধ্যে সময় ব্যবধান Δt। এই সময় ব্যবধান এত ক্ষুদ্র যে এই অংশে $v(t)$ এর পরিবর্তন অতি নগণ্য; সুতরাং এই ক্ষুদ্র সময় ব্যবধানকালে $v(t)$ এর মান প্রায় ধ্রুব থাকে। ধরা যাক $v(t)$-এর এই ধ্রুব মান v_1। Δt সময় ব্যবধানে অতিক্রান্ত দূরত্ব Δs_1 হলে আমরা পাই,

$$\Delta s_1 = v_1 \Delta t$$



চিত্র ২.৪১

অনুরূপভাবে দ্বিতীয় অংশ, তৃতীয় অংশের জন্য সময় ব্যবধান হবে Δt এবং অতিক্রান্ত দূরত্ব হবে যথাক্রমে $\Delta s_2 = v_2\Delta t$, $\Delta s_3 = v_3\Delta t$। N সংখ্যক অংশের জন্য অতিক্রান্ত দূরত্ব হবে $\Delta s_N = v_N \Delta t$। এখন t_A হতে t_B সময় ব্যবধানে বস্তুটির অতিক্রান্ত দূরত্ব s হবে, $\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3$ ……… Δs_N পদগুলোর সমষ্টি।

সুতরাং, $s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3 + \ldots + \Delta s_N$

বা, $s = v_1\Delta t + v_2\Delta t + v_3\Delta t + \ldots + v_N\Delta t$

বা, $$s = \sum_{n=1}^{N} v_n \Delta t \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (2.31)$$

এখানে লক্ষণীয় যে আমরা ক্ষুদ্র সময় ব্যবধান Δt এর জন্য বেগের মান ধরেছি প্রায় ধ্রুব। এই Δt সময়ে বেগের মান যদি পুরোপুরি ধ্রুব থাকত তবে সমীকরণ (2.31) হতে আমরা সঠিক দূরত্ব নির্ণয় করতে পারতাম। এখন সময় ব্যবধান Δt যত ক্ষুদ্রতর হবে v-এর মান ততই ধ্রুব মানের খুবই কাছাকাছি হবে। অতিক্রান্ত দূরত্বের মান সঠিক পেতে পারি যদি পরিমাপের সীমার মধ্যে Δt-কে শূন্য এবং ক্ষুদ্র অংশগুলোর সংখ্যা N অসীম হয়। সেক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি,

$$s = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{n=1}^{N} v_n \Delta t$$

ক্যালকুলাসে $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \sum\limits_{n=1}^{N} v_n \Delta t$ রাশিকে লেখা হয় $\int_{t_A}^{t_B} v(t)dt$

$\int_{t_A}^{t_B} v(t)dt$ রাশিটি t_A হতে t_B পর্যন্ত t-এর সাপেক্ষে $v(t)$ এর সমাকলন নির্দেশ করে। সমাকলন এক ধরনের যোগজীকরণ $\sum$ বা $\int$ চিহ্ন সমষ্টিকরণ বা যোগজীকরণ বুঝায়।

অতএব, $s = \int_{t_A}^{t_B} v(t)dt$ ... ... (2.32)

$v(t)$ কে যোজ্য রাশি (Integrand) বলা হয়। $v(t)$ এর পরে dt দ্বারা বুঝানো হয়েছে যে, যোগজীকরণটি করতে হবে t-এর সাপেক্ষে।

অন্তরীকরণ বা অবকলন ও যোগজীকরণ পরস্পর বিপরীত ক্রিয়া। যেমন—

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

আবার, $\int \cos x\, dx = \sin x$

অর্থাৎ $\sin x$-কে অন্তরীকরণ করলে $\cos x$ পাওয়া যায়, আবার $\cos x$-কে যোগজীকরণ করলে $\sin x$ পাওয়া যায়।

২·১১ ভেক্টর অপারেটরের ব্যবহার
Uses of vector operators

গ্রেডিয়েন্ট (Gradient)

গ্রেডিয়েন্টের সংজ্ঞা এবং ব্যাখ্যা দেয়ার পূর্বে ভেক্টর ডিফারেনশিয়াল অপারেটর ডেল $(\vec{\nabla})$, স্কেলার ও ভেক্টর ক্ষেত্র এবং রেখা ইন্টিগ্রাল সম্পর্কে জানা দরকার।

ভেক্টর ডিফারেনশিয়াল অপারেটর ∇ : ভেক্টর ডিফারেনশিয়াল অপারেটরটি স্যার হ্যামিলটন প্রথম আবিষ্কার করেন। গিব্‌স একে 'ডেল' নামকরণ করেন। এর অন্য নাম ন্যাবলা। ভেক্টর ডিফারেনশিয়াল অপারেটর নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা হয় :

$$\text{ডেল, } \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

সাধারণ ভেক্টরের মতো এর ভেক্টর ধর্ম রয়েছে। ইহা কোনো একটি রাশির ওপর ক্রিয়া করে নতুন একটি রাশির সৃষ্টি করে।

$$\text{তবে, } \vec{\nabla}.\vec{\nabla} = \nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, একটি স্কেলার রাশি। এখানে $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ আংশিক অন্তরীকরণ বুঝায়।

স্কেলার ফাংশনের গ্রেডিয়েন্ট, ভেক্টর ফাংশনের ডাইভারজেন্স বা ভেক্টর ফাংশনের কার্ল সংজ্ঞায়িত করার জন্য এই অপারেটরটি ব্যবহার করা হয়।

স্কেলার ক্ষেত্র ও ভেক্টর ক্ষেত্র

স্কেলার ক্ষেত্র : যেকোনো ক্ষেত্র বিবেচনা করা হোক না কেন, ক্ষেত্রের প্রতিটি বিন্দুর সাথে একটি ভৌত গুণ (physical property) যুক্ত থাকে। ক্ষেত্রের সাথে সংশ্লিষ্ট ভৌত গুণ যদি স্কেলার হয়, তবে ওই ক্ষেত্রকে স্কেলার ক্ষেত্র বলে। ঘনত্ব, উষ্ণতা, বিভব ইত্যাদি স্কেলার ক্ষেত্রের উদাহরণ। গাণিতিকভাবে, $\varphi(x, y, z) = 3x^2yx + 2xy^2x + 5zy^2$) স্কেলার ক্ষেত্র নির্দেশ করে।

ভেক্টর ক্ষেত্র : ক্ষেত্রের সাথে সংশ্লিষ্ট ভৌত গুণ যদি ভেক্টর হয়, তবে ওই ক্ষেত্রকে ভেক্টর ক্ষেত্র বলে। বেগ, তড়িৎ প্রাবল্য, মহাকর্ষ প্রাবল্য ইত্যাদি ভেক্টর ক্ষেত্রের উদাহরণ।

$\vec{F}(x, y, z) = ax^2y\,\hat{i} + bx^2yz^2\,\hat{j} + 4zx^2\,\hat{k}$ ভেক্টর ক্ষেত্র নির্দেশ করে।

রেখা ইন্টিগ্রাল : $\vec{V}(x, y, z)$ একটি ভেক্টর ক্ষেত্র হলে কোনো আবদ্ধ পথে ভেক্টরের রেখাজনিত ইন্টিগ্রাল $\oint \vec{V}.\vec{dl}$; এখানে $\vec{dl}$ আবদ্ধ পথের একটি অংশ যার পরিমাণ dl এবং অভিমুখ ওই অংশের স্পর্শক বরাবর।

স্কেলার ক্ষেত্রের গ্রেডিয়েন্ট

ধরা যাক, $\varphi(x, y, z)$ একটি ব্যবকলনযোগ্য স্কেলার ক্ষেত্র নির্দেশ করে। তাহলে φ-এর গ্রেডিয়েন্টকে $\vec{\nabla}\varphi$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অর্থাৎ, $\text{grad}\,\varphi = \vec{\nabla}\varphi = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = \frac{\hat{i}\,\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\hat{j}\,\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\hat{k}\,\partial\varphi}{\partial z}$

সংজ্ঞা : গ্রেডিয়েন্ট হলো একটি ভেক্টর ক্ষেত্র যা অদিক রাশির সর্বাধিক বৃদ্ধির হার প্রকাশ করে। একে স্কেলার অপেক্ষকও বলে।

গ্রেডিয়েন্টের ভৌত তাৎপর্য (Physical significances of gradient)

(i) স্কেলার রাশির গ্রেডিয়েন্ট একটি ভেক্টর ক্ষেত্র অর্থাৎ একটি ভেক্টর রাশি।

(ii) উক্ত ভেক্টর রাশির মান ওই স্কেলার রাশির সর্বাধিক বৃদ্ধির হারের সমান।

(iii) স্কেলার রাশির পরিবর্তন শুধু বিন্দুর স্থানাঙ্কের ওপরই নির্ভর করে না, যেদিকে এর পরিবর্তন দেখানো হয় সেদিকের ওপরও নির্ভর করে।

গাণিতিক উদাহরণ ২.১১

১। যদি $\vec{A} = 2x^2\,\hat{i} + 3yz\,\hat{j} - xz^2\,\hat{k}$ এবং $\varphi = 2z - x^3 y$ হয়, তাহলে $(1, 1, -1)$ বিন্দুতে $\vec{A}\,.\,\nabla\varphi$ নির্ণয় কর।

আমরা পাই,

$$\vec{\nabla}\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)(2z - x^3y)$$

$$= -3x^2y\,\hat{i} - x^3\,\hat{j} + 2\hat{k}$$

এখন, $\vec{A}\,.\,\vec{\nabla}\varphi = (2x^2\,\hat{i} + 3yz\,\hat{j} - xz^2\,\hat{k})\,.\,(-3x^2y\,\hat{i} - x^3\,\hat{j} + 2\hat{k})$

$$= -6x^4y - 3x^3yz - 2xz^2$$

$(1, 1, -1)$ বিন্দুতে

$$\vec{A}\,.\,\vec{\nabla}\varphi = -6(1)^4(1) - 3(1)^3(1)(-1) - 2(1)(-1)^2$$

$$= -6 + 3 - 2 = -5.$$

ডাইভারজেন্স (Divergence)

মনে করি, ত্রিমাত্রিক ব্যবস্থায় R অঞ্চলে কোনো একটি ভেক্টর ক্ষেত্রের অবস্থান ভেক্টর

$\vec{V}(x, y, z) = v_1(x, y, z)\,\hat{i} + v_2(x, y, z)\,\hat{j} + v_3(x, y, z)\,\hat{k}$, তাহলে ডেল ($\nabla$) অপারেটরের সাথে $\vec{V}$ এর স্কেলার গুণফলকে ওই ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স বলে। ডাইভারজেন্সকে $\vec{\nabla}\,.\,\vec{V}$ বা div. $\vec{V}$ লিখে প্রকাশ করা হয়। গাণিতিকভাবে লেখা যায়,

$$\vec{\nabla}\,.\,\vec{V} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k})$$

$$= \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$ এটি স্কেলার রাশি।

সংজ্ঞা : ভেক্টর ফাংশন বা ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্সগুলো একটি স্কেলার ফাংশন বা ক্ষেত্র যা দ্বারা ভেক্টর ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে ফ্লাক্সের প্রকৃতি (বহিঃ/অন্ত) জানা যায়।

ডাইভারজেন্সের ভৌত ধর্ম (Physical properties of divergence)

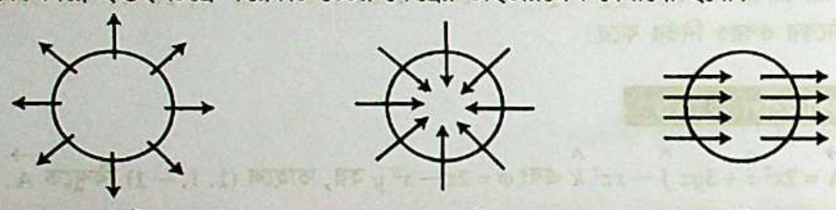
(i) ডাইভারজেন্স দ্বারা একক আয়তনে কোনো দিক রাশির মোট কতটুকু ফ্লাক্স কোনো বিন্দু অভিমুখি বা অপসারিত হচ্ছে তা প্রকাশ করে। $\vec{\nabla}.\vec{V}$ বা div.$\vec{V}$ দ্বারা একক সময়ে কোনো তরল পদার্থের ঘনত্বের পরিবর্তনের হার বুঝায়।

(ii) মান ধনাত্মক হলে, তরল পদার্থের আয়তন বৃদ্ধি পায়; ঘনত্বের হ্রাস ঘটে। অর্থাৎ $\vec{\nabla}.\vec{V}$ = '+' ve [চিত্র ২·৩৯(ক)]।

(iii) মান ঋণাত্মক হলে, আয়তনের সংকোচন ঘটে; ঘনত্ব বৃদ্ধি পায়। অর্থাৎ $\vec{\nabla}.\vec{V}$ = '—' ve [চিত্র ২·৩৯(খ)]।

(iv) মান শূন্য হলে, আগত ও নির্গত ফ্লাক্স সমান হয়। অর্থাৎ $\vec{\nabla}.\vec{V} = 0$ [চিত্র ২·৩৯(গ)]।

(v) কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স শূন্য হলে অর্থাৎ $\vec{\nabla}.\vec{V} = 0$ হলে, ওই ভেক্টর ক্ষেত্রকে সলিনয়ডাল (solenoidal) বলে। নিম্নে ২·৪২ চিত্রে কয়েকটি ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স দেখানো হলো।



(ক) ধনাত্মক ডাইভারজেন্স (খ) ঋণাত্মক ডাইভারজেন্স (গ) শূন্য ডাইভারজেন্স

চিত্র ২·৪২

গাণিতিক উদাহরণ ২.১২

১। (1, − 1, 1) অবস্থানে $\vec{A} = 3xyz^3\,\hat{i} + 2xy^2\,\hat{j} - x^3y^2z\,\hat{k}$-এর ডাইভারজেন্স নির্ণয় কর।

আমরা পাই, $\vec{\nabla}.\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot(3xyz^3\,\hat{i} + 2xy^2\,\hat{j} - x^3y^2z\,\hat{k})$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(3xyz^3) + \frac{\partial}{\partial y}(2xy^2) + \frac{\partial}{\partial z}(-x^3y^2z)$$

$$= 3yz^3 + 4xy - x^3y^2$$

(1, − 1, 1) অবস্থানে,

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = 3(-1)(1)^3 + 4(1)(-1) - (1)^3(-1)^2$$
$$= -3 - 4 - 1 = -8$$

২। p এর মান কত হলে $\vec{r} = (x + 3y)\,\hat{i} + (py - z)\hat{j} + (x - 2z)\,\hat{k}$ সলিনয়েড হবে ?

আমরা জানি, $\vec{\nabla}.\vec{r} = 0$ হলে $\vec{r}$ সলিনয়েড হবে।

$$\vec{\nabla}.\vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot[(x + 3y)\,\hat{i} + (py - z)\hat{j} + \hat{k}\,(x - 2z)]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x + 3y) + \frac{\partial}{\partial y}(py - z) + \frac{\partial}{\partial z}(x - 2z) = 1 + p - 2 = p - 1$$

$\therefore\ \vec{\nabla}.\vec{r} = p - 1 = 0$ বা, $p = 1$

কার্ল (Curl)

ধরা যাক, কোনো ত্রিমাত্রিক স্থানে কোনো বিন্দুর যথার্থ ভেক্টর ফাংশন $\hat{V}(x, y, z) = v_1\,\hat{i} + v_2\,\hat{j} + v_3\,\hat{k}$।

তাহলে অপারেটর ∇ এবং $\vec{V}$ এর ক্রস বা ভেক্টর গুণন দ্বারা তাৎক্ষণিকভাবে ঘূর্ণন অক্ষের দিকে একটি ভেক্টর পাওয়া যায়। এ জাতীয় গুণনকে কার্ল বলে।

সুতরাং

$$\text{curl}\,\vec{V} = \vec{\nabla}\times\vec{V} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(v_1\hat{i}+v_2\hat{j}+v_3\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

সংজ্ঞা : কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল একটি ভেক্টর রাশি যা ওই ক্ষেত্রের ঘূর্ণনের সাথে সম্পর্কিত। ভেক্টর ক্ষেত্রে অবস্থিত একটি বিন্দুর চারদিকে এর লাইন ইনটিগ্রালের মান প্রতি একক ক্ষেত্রফলে সর্বোচ্চ হলে তা উক্ত বিন্দুতে ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল প্রকাশ করে।

কার্লের ভৌত তাৎপর্য (Physical significances of curl)

(i) কার্ল একটি ভেক্টর রাশি। এর মান ওই ভেক্টর ক্ষেত্রে একক ক্ষেত্রের জন্য সর্বাধিক রেখা ইন্টিগ্রালের সমান। (রেখা ইন্টিগ্রালের সংজ্ঞা ২.১০ অনুচ্ছেদে দেওয়া আছে)

(ii) ভেক্টরটির দিক ওই ক্ষেত্রের ওপর অঙ্কিত লম্ব বরাবর ক্রিয়া করে।

(iii) কার্ল এর মাধ্যমে প্রাপ্ত ভেক্টরটির মান ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে কৌণিক বেগের দ্বিগুণ হয়। অর্থাৎ

$\vec{V} = \vec{\omega}\times\vec{r}$ হলে, $\vec{\nabla}\times\vec{V} = 2\vec{\omega}$ হবে। এখানে $\vec{\omega}$ একটি ধ্রুব ভেক্টর।

(iv) কোনো ভেক্টরে কার্ল ওই ভেক্টরের ঘূর্ণন নির্দেশ করে। কোনো বিন্দুর চারদিকে ভেক্টরটি কতবার ঘুরে কার্ল তা নির্দেশ করে।

(v) কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল-এর নতিমাত্রা (gradient) শূন্য। অর্থাৎ $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{V}) = 0.$

(vi) কোনো ভেক্টরের কার্ল শূন্য হলে ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল হয়। অর্থাৎ $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ হলে $\vec{F}$ অঘূর্ণনশীল হয়।

গাণিতিক উদাহরণ ২.১৩

১। (1, 1, − 1) বিন্দুতে $\vec{A} = xz^2\,\hat{i} - 2x^3yz\,\hat{j} + 3yz^3\,\hat{k}$ এর কার্ল নির্ণয় কর।

আমরা পাই,

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz^2 & -2x^3yz & 3yz^3 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(3yz^3)+\frac{\partial}{\partial z}(2x^3yz)\right]\hat{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(xz^2)-\frac{\partial}{\partial x}(3yz^3)\right]\hat{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(-2x^3yz)-\frac{\partial}{\partial y}(xz^2)\right]\hat{k}$$

$$= (3z^3+2x^3y)\,\hat{i} + (2xz)\,\hat{j} + (-6x^2yz)\,\hat{k}$$

$$= (3z^3+2x^3y)\,\hat{i} + 2xz\,\hat{j} - 6x^2yz\,\hat{k}$$

(1, 1, − 1) বিন্দুতে

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = [3(-1)^3+2(1)^3(1)]\,\hat{i} + 2(1)(-1)\,\hat{j} - 6(1)^2(+1)(-1)\,\hat{k}$$

$$= (-3+2)\,\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k} = -\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$$

২। $\vec{A} = (6xy + z^3)\hat{i} + (3x^2 - z)\hat{j} + (3xz^2 - y)\hat{k}$। প্রমাণ কর যে, ভেক্টর $\vec{A}$ অঘূর্ণনশীল।

আমরা জানি, ভেক্টর $\vec{A}$ অঘূর্ণনশীল হবে, যদি $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ হয়।

এখন,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (6xy + z^3) & (3x^2 - z) & (3xz^2 - y) \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(3xz^2 - y) - \frac{\partial}{\partial z}(3x^2 - z)\right\} - \hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(3xz^2 - y) - \frac{\partial}{\partial z}(6xy + z^3)\right\}$$
$$+ \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - z) - \frac{\partial}{\partial y}(6xy + z^3)\right\}$$

$$= \hat{i}\{(0-1)-(0-1)\} - \hat{j}\{(3z^2-0)-(0+3z^2)\} + \hat{k}\{(6x-0)-(6x+0)\}$$

$$= \hat{i}(-1+1) - \hat{j}(3z^2 - 3z^2) + \hat{k}(6x - 6x) = 0$$

$\therefore \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$

$\therefore \vec{A}$ ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল।

প্রয়োজনীয় গাণিতিক সূত্রাবলি

$\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$ ... ... (1)

$\hat{i}.\hat{j} = \hat{i}.\hat{k} = \hat{j}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = \hat{k}.\hat{j} = 0$ ... ... (2)

$\hat{i} \times \hat{j} \times \hat{k} = 0$ ... ... (3)

$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$ ... ... (4)

$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$ ... ... (5)

$\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$ ... ... (6)

$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$ ... ... (7)

$\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$ ... ... (8)

$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$ ... ... (9)

$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$ ... ... (10)

$R_{max} = P + Q$ ... ... (11)

$R_{min} = P \sim Q$ ... ... (12)

$\vec{A}.\vec{B} = 0$ (লম্বের শর্ত) ... ... (13)

$\vec{A} \times \vec{B} = 0$ (সমান্তরালের শর্ত) ... ... (14)

$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$ ... ... (15)

$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{n}AB\sin\theta$ ... ... (16)

$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB\sin\theta$ ... ... (17)

একক ভেক্টর, $\hat{n} = \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$ ... ... (18)

ভেক্টরের মান, $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ ... ... (19)

লম্ব একক ভেক্টর, $\hat{n} = \dfrac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$ ... ... (20)

লম্ব অভিক্ষেপ A এর দিকে, $B\cos\theta = \dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|}$ ... ... (21)

কাজ, $W = \vec{F}.\vec{s}$ ... ... (22)

টর্ক, $\vec{\tau} = \vec{P} \times \vec{r}$ ... ... (23)

সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= |\vec{A} \times \vec{B}|$ ... ... (24)

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা ... ... (25)

$\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = 0$ (তিনটি ভেক্টর সমতলীয় শর্ত) ... ... (26)

$\vec{F}$ এর উপাংশে বিভাজন, $F_x = F\cos\theta$ এবং $F_y = F\sin\theta$ ... ... (27)

$\vec{\nabla}.\vec{V} = 0$ (সলিনয়েডের শর্ত) ... ... (28)

$\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ (অঘূর্ণনশীলের শর্ত) ... ... (29)

উচ্চতর দক্ষতাভিত্তিক নমুনার গাণিতিক উদাহরণ

১। তমাল সাইকেলে করে বাড়ি থেকে স্কুলে যাচ্ছিল। হঠাৎ করে বৃষ্টি নামল। বৃষ্টির ফোঁটা $6\ ms^{-1}$ তার গায়ে পড়া শুরু করল। বায়ুর প্রবাহ খুব বেশি ছিল না। তবুও বৃষ্টির ফোঁটা তার গায়ে 45° কোণে পড়ছে।

(ক) সাইকেলের বেগ নির্ণয় কর।

(খ) স্কুলে তাড়াতাড়ি পৌঁছানোর জন্য তমাল দ্বিগুণ বেগে সাইকেল চালালে বৃষ্টি থেকে রক্ষা পেতে তাকে কত কোণে ছাতা ধরতে হবে ?

(ক) আমরা জানি,

$$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$$

বা, $\tan\theta = \dfrac{Q\sin 90°}{P + Q\cos 90°}$

বা, $\tan 45° = \dfrac{6\sin 90°}{P + 6\cos 90°}$

$\therefore$ $P = 6\ ms^{-1}$

$\therefore$ সাইকেলের বেগ $6\ ms^{-1}$

এখানে,
বৃষ্টির বেগ, $Q = 6\ ms^{-1}$
সাইকেলের বেগ $= P$
$\theta = 45°$
$\alpha = 90°$

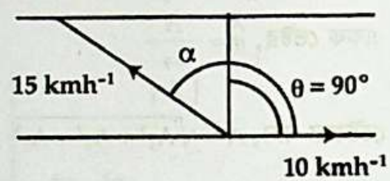
(খ) দ্বিগুণ বেগে সাইকেল চালালে পরিবর্তিত বেগ,

$P' = (6 \times 2) = 12\ ms^{-1}$

বা, $\tan\theta = \dfrac{6\sin 90°}{12 + 6\cos 90°} = \dfrac{6}{12 + 0} = \dfrac{1}{2} = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$\therefore$ $\theta = 26.57°$, অর্থাৎ তাকে 26.57° কোণে ছাতা ধরতে হবে।

২। সোজা অপর পাড়ে যাওয়ার জন্য স্বপন ফেরিতে করে 15 kmh^{-1} বেগে নদী পার হওয়ার সময় দেখল, ফেরিটি সোজাসুজি রওনা না দিয়ে স্রোতের প্রতিকূলে তির্যকভাবে যাচ্ছে। [স্রোতের বেগ =10 kmh^{-1}]



(ক) লব্ধির সর্বোচ্চ মান সর্বনিম্ন মানের কতগুণ নির্ণয় কর।

(খ) ফেরিটির দিক পরিবর্তনের কারণ বিশ্লেষণ কর।

(ক) আমরা জানি,

$R_{max} = v + u$

$= 15 + 10 = 25\ kmh^{-1}$

আবার, $R_{min} = v - u$

$= 15 - 10 = 5\ kmh^{-1}$

$\therefore \dfrac{R_{max}}{R_{min}} = = \dfrac{25}{5}$

বা, $R_{max} = 5\ R_{min}$

এখানে,

ফেরির বেগ, $v = 15\ kmh^{-1}$

স্রোতের বেগ, $u = 10\ kmh^{-1}$

$\dfrac{R_{max}}{R_{min}} = ?$

অর্থাৎ, লব্ধির সর্বোচ্চ মান, লব্ধির সর্বনিম্ন মানের 5 গুণ।

(খ) যেহেতু নদীতে স্রোত আছে সেহেতু সোজা অপর পাড়ে যাওয়ার জন্য ফেরিটিকে তির্যকভাবে রওনা দিতে হবে।

ধরি, ফেরিটিকে স্রোতের প্রতিকূলে α কোণে রওনা দিতে হবে। সেক্ষেত্রে, স্রোতের বেগ, $u = 10\ kmh^{-1}$, ফেরির বেগ, $v = 15\ kmh^{-1}$ এবং স্রোতের দিকের সাথে লব্ধিবেগের দিক, $\theta = 90°$ হবে।

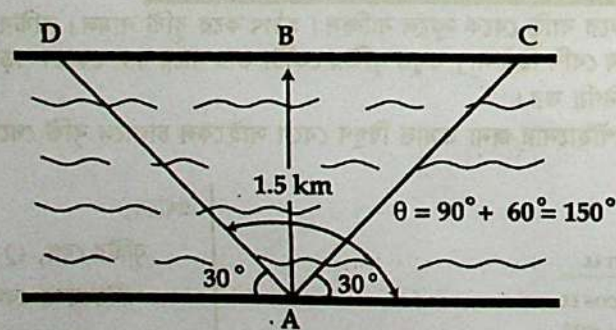
আমরা জানি, $\tan\theta = \dfrac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$ বা, $\tan 90° = \dfrac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$

বা, $\dfrac{1}{0} = \dfrac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$ বা, $u + v\cos\alpha = 0$

বা, $\cos\alpha = -\dfrac{u}{v} = -\dfrac{10}{15}$ $\therefore \alpha = 131.8°$

যেহেতু $\alpha > 90°$, সেহেতু ফেরিটিকে সোজাসুজি রওনা না দিয়ে তির্যকভাবে রওনা দিতে হয়েছে।

৩।



চিত্রে স্রোতযুক্ত একটি নদী যার প্রস্থ 1.5 km অতিক্রম করার জন্য পিন্টু A বিন্দু হতে সোজা অপর পারে B বিন্দুতে সাঁতার কেটে পৌঁছানোর সিদ্ধান্ত নিল। ওই নদীতে স্রোতের বেগ 3 kmh^{-1} এবং সাঁতারুর বেগ ছিল 4 kmh^{-1}। স্রোতের কারণে পিন্টু AB বরাবর রওয়ানা হওয়া সত্ত্বেও AC বরাবর ওপারে পৌঁছাল। [ঢা. বো. ২০১৫]

(ক) AC বরাবর অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর।

(খ) AD বরাবর পিন্টু সাঁতার কেটে কী B বিন্দুতে পৌঁছাতে পারবে ? গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক তোমার মতামত দাও।

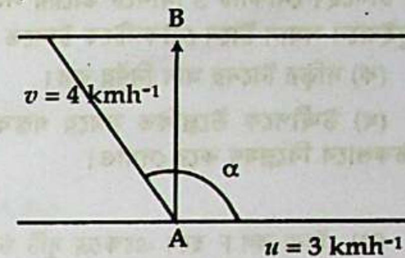
(ক) উদ্দীপকে $AB = 1.5\ km$, AB-কে AC বরাবর বিভাজন করে পাই,

$AC \sin 30° = AB$

$\therefore$ অতিক্রান্ত দূরত্ব, $AC = \dfrac{AB}{\sin 30°} = \dfrac{1.5}{0.5} = 3\ km$

(খ) ধরি, পিন্টু স্রোতের প্রতিকূলে α কোণে রওনা দিলে B বিন্দুতে পৌঁছবে। এখানে স্রোতের বেগ $u = 3\ kmh^{-1}$ এবং সাঁতারুর বেগ $v = 4\ kmh^{-1}$ এবং স্রোতের দিকের সাথে লব্ধিবেগের দিক, $\theta = 90°$।

আমরা জানি,



$$\tan 90° = \frac{v \sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$$

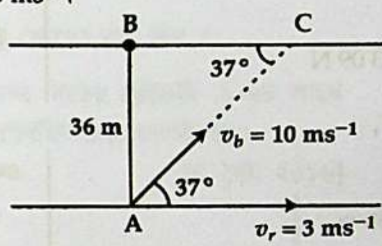
বা, $\frac{1}{0} = \frac{v \sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$

বা, $u + v\cos\alpha = 0$ বা, $v\cos\alpha = -u$

বা, $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{u}{v}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) = 138.59°$

যেহেতু AD বরাবর স্রোতের সাথে উৎপন্ন কোণ $\theta = 150°$। সুতরাং AD বরাবর সাঁতার কেটে পিন্টু B বিন্দুতে পৌঁছতে পারবে না। তাই পিন্টুকে A বিন্দু হতে স্রোতের সাথে $138.59°$ কোণে সাঁতার কেটে B বিন্দুতে পৌঁছাতে হবে।

৪। 36 m চওড়া একটি নদীতে $10\ ms^{-1}$ বেগে একটি নৌকা চলছে। নৌকাটি নদী পার হয়ে বিপরীত তীরের C বিন্দুতে পৌঁছাল। নদীতে স্রোতের বেগ $3\ ms^{-1}$। [কু. বো. ২০১৫]



(ক) নদীর বিপরীত পাড়ের BC দূরত্ব নির্ণয় কর এবং নদী পার হতে কত সময় লাগবে?

(খ) নদীর বিপরীত পাড়ের B বিন্দুতে নৌকাটিকে সরাসরি পৌঁছাতে হলে মাঝির কী ব্যবস্থা নিতে হবে?

(ক) নদীর প্রস্থ বরাবর বেগের উপাংশ $= v_b \sin 37° = 10 \sin 37° = 6.02\ ms^{-1}$

নদী পার হতে সময় লাগবে, $t = \frac{d}{6.02} = \frac{36}{6.02} = 5.982$ sec

চিত্র অনুযায়ী, $\sin 37° = \frac{AB}{AC} = \frac{36}{AC}$

বা, $AC = \frac{36}{\sin 37°} = 59.81$ m

ABC সমকোণী ত্রিভুজ থেকে পাই,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

বা, $BC^2 = AC^2 - AB^2 = (59.81)^2 - (36)^2$

বা, $BC^2 = 2282.318$

$\therefore$ $BC = 47.77$ m

(খ) নৌকাটিকে A থেকে সরাসরি B বিন্দুতে পৌঁছাতে হলে নৌকা ও স্রোতের বেগের লব্ধি এবং স্রোতের বেগের মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 90°$ হতে হবে। নৌকা ও স্রোতের বেগের মধ্যবর্তী কোণ α হলে আমরা পাই,

$$\tan 90° = \frac{v_b \sin\alpha}{v_r + v_b\cos\alpha}$$

বা, $\frac{1}{0} = \frac{v_b \sin\alpha}{v_r + v_b\cos\alpha}$

বা, $v_r + v_b\cos\alpha = 0$

বা, $\cos\alpha = \frac{-v_r}{v_b}$

$\therefore$ $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-v_r}{v_b}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{3}{10}\right)$

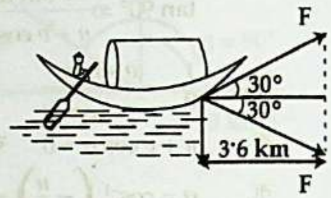
$= \cos^{-1}(-0.3) = 107.45°$

সুতরাং A থেকে B বিন্দুতে সরাসরি পৌঁছাতে হলে নৌকাটিকে স্রোতের দিকের সাথে $107.45°$ কোণে চালনা করতে হবে।

৫। কানন ও রাজন স্থির পানিতে 500 kg ভরের একটি স্থির নৌকাকে নদীর দুই তীর থেকে দড়ি দিয়ে 30° কোণে টানছে। নৌকাটি 5 মিনিটে তীরের সমান্তরালে 3·6 km পথ অতিক্রম করে। 5 মিনিটে গন্তব্যস্থলে পৌঁছাবার জন্য দুইজনে সমান টানে নৌকাটিকে টানতে লাগল। (ঘর্ষণ বল উপেক্ষণীয়)

(ক) দড়ির টানের মান নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকে উল্লেখিত সময়ে গন্তব্যস্থলে পৌঁছানো সম্ভব কি-না?—গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ করে দেখাও।



(ক) টানা বল F হলে এক্ষেত্রে দুটি উপাংশের যোগফল

$F\cos\theta + F\cos\theta = ma$

বা, $2F\cos\theta = m \times \frac{2s}{t^2}$

$\therefore F = \frac{m \times 2s}{t^2 \times 2\cos\theta}$

$= \frac{500 \times 2 \times 3{\cdot}6 \times 10^3}{(300)^2 \times 2\cos 60^\circ} = 23{\cdot}09$ N

এখানে,
$\theta = 30^\circ$
দূরত্ব, $s = 3{\cdot}6 \times 10^3$ m
$t = 5 \times 6 = 300$ s
নৌকার ভর, $m = 500$ kg
টান, F = ?

(খ) টান সমান হলে মোট টানা বল,

$F + F = ma$

বা, $2F = ma = m \times \frac{2s}{t^2}$

বা, $t^2 = \frac{2 \times 500 \times 3{\cdot}6 \times 10^3}{2 \times 23{\cdot}09} = 77955{\cdot}825$

$\therefore t = 279{\cdot}20$ sec $= 4{\cdot}65$ min

এখানে $t < 5$ min

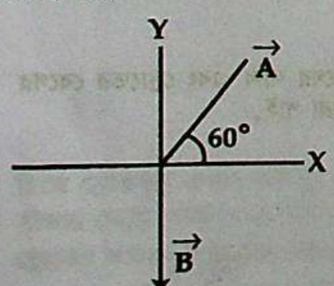
অতএব তারা উক্ত সময়ে গন্তব্যস্থলে পৌঁছাতে পারবে।

এখানে,
$s = vt + \frac{1}{2}at^2$
বা, $s = \frac{1}{2}at^2$ $[\because v = 0]$
$\therefore a = \frac{2s}{t^2}$

৬। চিত্রে $|\vec{A}| = 5$ এবং $|\vec{B}| = 6$

(ক) $(\vec{A} - \vec{B})$ এর মান কত?

(খ) $(\vec{A} \times \vec{B})$ ভেক্টরটি $(\vec{A} + \vec{B})$ এর উপর লম্বভাবে অবস্থিত—গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে এর সত্যতা যাচাই কর। [ঢা. বো. ২০১৬]



(ক) আমরা জানি, $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

এখানে, $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = 90 - 60^\circ = 30^\circ$

$|\vec{A}| = 5, |\vec{B}| = 6$

এখন সামন্তরিকের সূত্রানুসারে,

$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha}$

$= \sqrt{5^2 + 6^2 + 2 \times 5 \times 6\cos 30^\circ}$

$= 10{\cdot}63$

(খ) আমরা জানি, দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল শূন্য হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হয়।

সুতরাং $(\vec{A} \times \vec{B})$ এবং $(\vec{A} + \vec{B})$ এর স্কেলার গুণফল অর্থাৎ $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B})$ শূন্য হয় তবে $(\vec{A} \times \vec{B})$ ভেক্টরটি $(\vec{A} + \vec{B})$ এর ওপর লম্ব হবে।

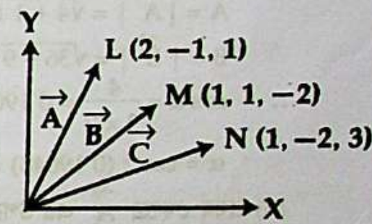
$$\vec{A}+\vec{B} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} + B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$
$$= (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\,(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{j}\,(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{k}\,(A_xB_y - A_yB_x)$$

এখন $(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{A}+\vec{B}) = (A_yB_z - A_zB_y)(A_x + B_x) + (A_zB_x - A_xB_z)(A_y + B_y)$
$+ (A_xB_y - A_yB_x)(A_z + B_z) = 0$ (প্রমাণিত)

৭।



(ক) $\vec{C}$, X অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণের মান কত ?

(খ) $\vec{B}$ এবং $\vec{C}$ ভেক্টরদ্বয়ের লম্ব দিকের ভেক্টরটি $\vec{A}$ এর সাথে একই সমতলে অবস্থান করে কি-না গাণিতিকভাবে যাচাই কর। [কু. বো. ২০১৬]

(ক) আমরা জানি,

$\vec{C}$ ভেক্টর X অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্ন করলে

এখানে,
$\vec{C} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$$\cos\alpha = \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+4+9}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{14}} = 0.26726$$

$\therefore \cos\alpha = 0.26726$

$\therefore \alpha = \cos^{-1}(0.26726) = 74.5°$

(খ) আমরা জানি, দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল একটি ভেক্টর রাশি যার দিক ভেক্টরদ্বয়ের লম্ব দিকে।

ধরি, $\vec{D} = \vec{B}\times\vec{C}$

এখানে,
$\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$
$\vec{B} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$
$\vec{C} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$$\vec{D} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\,(3-4) + \hat{j}\,(-2-3) + \hat{k}\,(-2-1)$$
$$= -\hat{i} - 5\hat{j} - 3\hat{k}$$

এখন, $\vec{D}$ এবং $\vec{A}$ একই সমতলে থাকবে যদি ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হয়।

অর্থাৎ তাদের স্কেলার গুণফল শূন্য হয়।

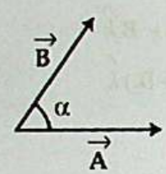
এখন, $\vec{D}.\vec{A} = D_xA_x + D_yA_y + D_zA_z$
$$= (-1)\times 2 + (-5)\times(-1) + (-3)\times 1$$
$$= -2 + 5 - 3 = 0$$

যেহেতু $\vec{D}$ এবং $\vec{A}$ পরস্পর লম্ব সুতরাং তারা অবশ্যই একই সমতলে অবস্থিত।

৮।

$\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$



(ক) α এর মান কত ?

(খ) α এর মানের পরিবর্তন কত হলে $\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর অভিক্ষেপ এক-চতুর্থাংশ হবে ? গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও। [চ. বো. ২০১৬]

(ক) আমরা জানি,

$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\alpha$

$\therefore \cos\alpha = \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$

এখানে,

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

$= 2\times6 + 2\times(-3) + (-1)\times2$

$= 12 - 6 - 2 = 4$

$A = |\vec{A}| = \sqrt{4+4+1} = 3$

$B = |\vec{B}| = \sqrt{36+9+4} = 7$

$\therefore \cos\alpha = \dfrac{4}{3\times7} = 0{\cdot}19048$

$\alpha = \cos^{-1}(0{\cdot}19048) = 79{\cdot}02°$

(খ) প্রথম ক্ষেত্রে $\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ

$B_1 = B\cos\alpha = 7\cos 79{\cdot}02° = 1{\cdot}33$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে অভিক্ষেপ B_2 হলে

$B_2 = \frac{1}{4}B_1 = \frac{1}{4}\times 1{\cdot}33 = 0{\cdot}3325$

এখানে,

$A = 3$

$B = 7$

$\alpha = 79{\cdot}02°$

আবার $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ β হলে

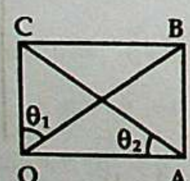
অভিক্ষেপ $B\cos\beta = B_2$

$\therefore \cos\beta = \dfrac{B_2}{B} = \dfrac{0{\cdot}3325}{7} = 0{\cdot}0475$

$\therefore \beta = \cos^{-1}(0{\cdot}0475) = 87{\cdot}28°$

$\therefore$ কোণ বৃদ্ধি করতে হবে $87{\cdot}28° - 79{\cdot}02° = 8{\cdot}26°$

৯।



উপরের চিত্র অনুযায়ী OABC একটি আয়তক্ষেত্র। এর OA এবং OB বাহু দ্বারা দুটি ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{P} = \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ নির্দেশিত হয়েছে।

(ক) উদ্দীপক অনুসারে ΔOAB এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপক অনুসারে θ_1 ও θ_2 এর মধ্যে কোনটি বড় তা গাণিতিক বিশ্লেষণের সাহায্যে বের কর। [ঢা. বো. ২০১৭]

(ক) দেওয়া আছে,

OA বাহু দ্বারা নির্দেশিত ভেক্টর, $\vec{P} = \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$

এবং OB বাহু দ্বারা নির্দেশিত ভেক্টর, $\vec{Q} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

এখন, $\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(-4-3) - \hat{j}(2+2) + \hat{k}(-3+4)$

$= -7\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$

$\therefore |\vec{P} \times \vec{Q}| = \sqrt{(-7)^2 + (-4)^2 + (1)^2} = \sqrt{66}$

$\therefore$ ΔOAB এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times |\vec{P} \times \vec{Q}| = \frac{1}{2} \times \sqrt{66} = 4.062$ বর্গ একক

(খ) আমরা ওপরের (ক) থেকে পাই,

$|\vec{P} \times \vec{Q}| = \sqrt{66}$

বা, $PQ \sin\theta = \sqrt{66}$

বা, $(\sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \times \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (2)^2}) \sin\theta = \sqrt{66}$

বা, $(\sqrt{6} \times \sqrt{17}) \sin\theta = \sqrt{66}$

বা, $\sqrt{102} \sin\theta = \sqrt{66}$

বা, $\sin\theta = \frac{\sqrt{66}}{\sqrt{102}}$

$\therefore \theta = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{66}}{\sqrt{102}}\right) = \sin^{-1}(0.804) = 53.55°$

$\therefore$ OA এবং OB এর অন্তর্গত কোণ, $\theta = 53.55°$

$\because$ OABC একটি আয়তক্ষেত্র,

$\therefore \angle AOC = 90°$

$\therefore \theta_1 = 90° - \theta = 90° - 53.55°$

$\boxed{\theta_1 = 36.45°}$

আবার, ΔAOC এবং ΔOAB সর্বসম

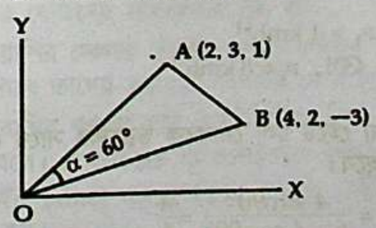
অতএব, $\angle AOB = \angle OAC$

$\therefore \theta_2 = \theta$

$\therefore \boxed{\theta_2 = 53.55°}$

যেহেতু $\theta_2 > \theta_1$, তাই θ_1 অপেক্ষা θ_2 বড়।

১০। নিচের চিত্রে দুটি বিন্দু A ও B স্থানাঙ্ক দেয়া আছে—



(ক) AB সংযোগকারী ভেক্টরের মান নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের ত্রিভুজ সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করবে কী ? বিশ্লেষণপূর্বক মতামত দাও। [ব. বো. ২০১৭]

(ক) এখানে,

$\vec{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$

এবং $\vec{OB} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

দেওয়া আছে,

A এর স্থানাঙ্ক (2, 3, 1)

B এর স্থানাঙ্ক (4, 2, −3)

AB সংযোগকারী ভেক্টর $\vec{AB} = ?$

আমরা জানি, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$$= (4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) - (2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$$
$$= 2\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}$$

সুতরাং, AB সংযোগকারী ভেক্টরের মান $= |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}$

(খ) উপরের (ক) হতে পাই,

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}$

$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (1)^2} = \sqrt{14}$

$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{(4)^2 + (2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{29}$

দেওয়া আছে,

$\overrightarrow{AB} = 2\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}$

$\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$

$\overrightarrow{OB} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

এখানে, $|\overrightarrow{OB}|^2 = \sqrt{(29)^2} = 29$

$|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 = (\sqrt{(14)})^2 + (\sqrt{(21)})^2 = 35$

অর্থাৎ $|\overrightarrow{OB}|^2 \neq |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2$

অতএব উদ্দীপকের ত্রিভুজ সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করবে না।

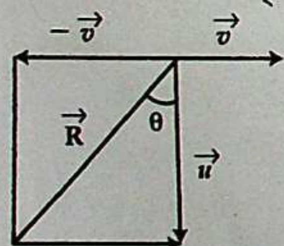
১১। কোনো এক বৃষ্টির দিনে নাফিসা জানালার পাশে দাঁড়িয়ে দেখছিল বৃষ্টি উল্লম্বভাবে 6 kmh^{-1} বেগে পতিত হচ্ছে। নাফিসা লক্ষ করল, রাস্তায় একজন লোক 4kmh^{-1} বেগে হাঁটছে এবং অপর একজন লোক 8 kmh^{-1} বেগে সাইকেলে যাচ্ছে। তাদের উভয়ের ছাতা ভিন্ন ভিন্ন কোণে বাঁকাভাবে ধরা।

(ক) উদ্দীপকে হেঁটে চলা লোকটির সাপেক্ষে পড়ন্ত বৃষ্টির লব্ধি বেগ কত ?

(খ) হেঁটে চলন্ত লোকটির এবং সাইকেলে চলন্ত লোকটির ছাতা একই রকমভাবে বাঁকানো নয়—নাফিসার পর্যবেক্ষণটি গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। [রা. বো. ২০১৭]

(ক) মনে করি বৃষ্টির বেগ, $u = 6$ kmh^{-1} এবং লোকটির বেগ, $v = 4$ kmh^{-1}

লোকটির সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ, $v_r = ?$



ধরা যাক, বৃষ্টির ফোঁটার বেগ $\vec{u}$, সাইকেলের বেগ $\vec{v}$। সুতরাং সাইকেলের সাপেক্ষে বৃষ্টির ফোঁটার বেগ v_r হলে,

$$v_r = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos 90^\circ} = \sqrt{(6)^2 + (4)^2 + 2(6)(4)\cos 90^\circ}$$
$$= \sqrt{36 + 16 + 0} = \sqrt{52} = 7{\cdot}21 \text{ kmh}^{-1}$$

আবার, $\tan\theta = \dfrac{v\sin 90^\circ}{u + v\cos 90^\circ} = \dfrac{4\sin 90^\circ}{6 + 4\cos 90^\circ} = \dfrac{4}{6}$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{6}\right) = 33{\cdot}69^\circ$$

সুতরাং, লোকটির সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ 7·21 kmh^{-1}। এই বেগ উল্লম্বের সাথে 33·69° কোণ উৎপন্ন করে।

(খ) উদ্দীপক অনুযায়ী,

হেঁটে চলা লোকটির বেগ, $v_1 = 4$ kmh^{-1}

সাইকেলে চলন্ত লোকটির বেগ, $v_2 = 8$ kmh^{-1}

বৃষ্টির বেগ, $u = 6$ kmh^{-1}

মনে করি বৃষ্টি হতে রক্ষার জন্য হেঁটে চলা লোককে উল্লম্বের সাথে θ_1 কোণে এবং সাইকেলে চলা লোকটিকে উল্লম্বের সাথে θ_2 কোণে ছাতা ধরতে হবে।

$$\therefore \tan\theta_1 = \frac{v_1\sin 90^\circ}{u + v_1\cos 90^\circ} = \frac{4\sin 90^\circ}{6 + 4\cos 90^\circ} = \frac{4}{6}$$

$$\therefore \theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{4}{6}\right) = 33{\cdot}69^\circ$$

এবং $\tan\theta_2 = \dfrac{v_2\sin 90^\circ}{u + v_2\cos 90^\circ} = \dfrac{8\sin 90^\circ}{6 + 8\cos 90^\circ} = \dfrac{8}{6}$

$$\therefore \theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{8}{6}\right) = 53{\cdot}13^\circ$$

সার-সংক্ষেপ

ভেক্টর রাশি : যে সব ভৌত রাশির দিক ও মান উভয়ই আছে তাদেরকে ভেক্টর রাশি বলা হয়।

স্কেলার রাশি : যে সব ভৌত রাশির মান আছে কিন্তু দিক নেই তাদেরকে স্কেলার রাশি বলা হয়।

একক ভেক্টর রাশি : যে ভেক্টর রাশির মান এক একক তাকে একক ভেক্টর রাশি বলে।

লব্ধি ও অংশক বা উপাংশ : দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশির যোগফলকে লব্ধি এবং রাশিগুলোকে লব্ধির অংশক বা উপাংশ বলা হয়।

অবস্থান ভেক্টর : কোনো বিন্দুর সাপেক্ষে অন্য কোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টরের সাহায্যে নির্ণয় করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে।

নাল বা শূন্য ভেক্টর : যে ভেক্টর রাশির মান শূন্য তাকে নাল বা শূন্য ভেক্টর বলে। শূন্য ভেক্টরের পাদবিন্দু ও শীর্ষবিন্দু একই।

আয়তাকার বা আয়ত একক ভেক্টর : ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় ধনাত্মক X, Y এবং Z অক্ষের দিকে ব্যবহৃত যথাক্রমে $\hat{i}$, $\hat{j}$ এবং $\hat{k}$ একক ভেক্টরগুলোকে আয়তাকার বা আয়ত একক ভেক্টর বলে।

সরণ ভেক্টর : রৈখিক বা সরল পথে বা নির্দিষ্ট দিকে কোনো বিন্দুর অতিক্রান্ত দূরত্বকে সরণ ভেক্টর বলে।

ব্যাসার্ধ ভেক্টর : মূল বিন্দু হতে কোনো বিন্দুর অবস্থানের দূরত্বকে ব্যাসার্ধ ভেক্টর বলে।

সদৃশ ভেক্টর : সমজাতীয় অসম মানের দুটি ভেক্টর যদি একই দিকে ক্রিয়া করে তবে তাদেরকে সদৃশ ভেক্টর বলে।

বিপ্রতীপ ভেক্টর : দুটি সমান্তরাল ভেক্টরের একটির মান অপরটি বিপ্রতীপ হলে তাদেরকে বিপ্রতীপ ভেক্টর বলে।

সমরেখ ভেক্টর : দুই বা ততোধিক ভেক্টর যদি এমন হয় যে তারা একই রেখায় বা সমান্তরালে ক্রিয়া করে তবে তাদেরকে সমরেখ ভেক্টর বলে।

সমতলীয় ভেক্টর : দুই বা ততোধিক ভেক্টর একই তলে অবস্থান করলে তাদেরকে সমতলীয় ভেক্টর বলে।

স্কেলার ক্ষেত্র : ক্ষেত্রের সাথে সংশ্লিষ্ট ভৌত গুণ যদি স্কেলার হয়, তবে ওই ক্ষেত্রকে স্কেলার ক্ষেত্র বলে।

ভেক্টর ক্ষেত্র : ক্ষেত্রের সাথে সংশ্লিষ্ট ভৌত গুণ যদি ভেক্টর হয়, তবে ওই ক্ষেত্রকে ভেক্টর ক্ষেত্র বলে।

ভেক্টর রাশির বিভাজন বা বিশ্লেষণ ও উপাংশ : একটি ভেক্টর রাশিকে দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশিতে বিভক্ত করার প্রক্রিয়াকে ভেক্টর রাশির বিভাজন বা বিশ্লেষণ বলে। এই বিভক্ত ভেক্টর রাশিগুলোর প্রত্যেকটিকে মূল ভেক্টর রাশির এক একটি উপাংশ বা অংশক বলে।

ত্রিভুজ সূত্র : দুটি ভেক্টর কোনো ত্রিভুজের সন্নিহিত বাহু দ্বারা একই ক্রমে মানে ও দিকে সূচিত করা হলে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুটি বিপরীত ক্রমে ভেক্টর দুটির লব্ধি নির্দেশ করে।

ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্র : কোনো সামান্তরিকের একই বিন্দু হতে অঙ্কিত সন্নিহিত বাহু দুটি যদি কোনো কণার উপরে একই সময়ে ক্রিয়ারত দুটি ভেক্টর রাশির মান ও দিক নির্দেশ করে তা হলে ওই বিন্দু হতে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণই এদের লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করবে। একে ভেক্টর রাশির যোজনের সামান্তরিক সূত্র বলে।

স্কেলার গুণন বা ডট গুণন : দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণফল একটি স্কেলার রাশি হবে যার মান রাশি দুটির মানের গুণফলের সাথে তাদের মধ্যবর্তী কোণের কোসাইনের (cosine) গুণফলের সমান।

ভেক্টর বা ক্রস গুণন : দুটি ভেক্টর রাশির গুণফল যদি একটি ভেক্টর রাশি হয় তবে ওই গুণনকে ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন বলে। এ ভেক্টরের গুণফলের মান ভেক্টর রাশি দুটির মান এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণের সাইন (sine)-এর গুণফলের সমান। ভেক্টর গুণফলের দিক ডানহাতি স্ক্রু নিয়মে নির্ণয় করা হয়।

অপারেটর : যে গাণিতিক চিহ্নের দ্বারা একটি রাশিকে অন্য একটি রাশিতে রূপান্তর করা যায় বা কোনো পরিবর্তনশীল রাশির ব্যাখ্যা দেওয়া যায় তাকে অপারেটর বলে।

ডাইভারজেন্স : ত্রিমাত্রিক ব্যবস্থায় R অঞ্চলে কোনো একটি ভেক্টর ক্ষেত্রের অবস্থান ভেক্টর $\vec{V}(x, y, z) = v_1(x, y, z)\hat{i} + v_2(x, y, z)\hat{j} + v_3(x, y, z)\hat{k}$, তাহলে ডেল ($\nabla$) অপারেটরের সাথে $\vec{V}$ এর স্কেলার গুণফলকে ওই ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স বলে।

কার্ল : কোনো ত্রিমাত্রিক স্থানে কোনো বিন্দুর যথার্থ ভেক্টর ফাংশন $\vec{V}(x, y, z) = v_1 \hat{i} + v_2 \hat{j} + v_3 \hat{k}$। তাহলে অপারেটর ∇ এবং $\vec{V}$ এর ক্রস বা ভেক্টর গুণন দ্বারা তাৎক্ষণিকভাবে ঘূর্ণন অক্ষের দিকে একটি ভেক্টর পাওয়া যায়। এ জাতীয় গুণকে কার্ল বলে।

বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তরের জন্য প্রয়োজনীয় বিষয়াবলির সার-সংক্ষেপ

১। $\vec{A}.\vec{B} = 0$ হলে বোঝায়—

(ক) $\vec{A} = 0$ (খ) $\vec{B} = 0$ (গ) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ একে অপরের উপর লম্ব।

২। $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = 0$ হলে ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হয়। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর লব্ধির সর্বোচ্চ মান $\vec{A} + \vec{B}$ এবং সর্বনিম্ন মান $\vec{A} - \vec{B}$।

৩। যদি $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ এবং $\vec{D} = \vec{B} \times \vec{A}$ হয় তাহলে $\vec{C}$ এবং $\vec{D}$ এর মধ্যবর্তী কোণ হবে $180°$।

৪। যদি $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ হয় তবে $\vec{\nabla}.\vec{r}$ এর মান হবে 3। $2\hat{i} + 3\hat{j}$ ভেক্টর এর মান $\sqrt{13}$, ইহা XY তলে অবস্থিত, Z অক্ষের সাথে $90°$ কোণ করে।

৫। $\vec{A}$ এবং এর একক ভেক্টরের ($\hat{n}$) মধ্যবর্তী কোণ $0°$। $Q(x, y) = 3x^2y$ হলে $(1, -2)$ বিন্দুতে $\vec{\nabla} = -12\hat{i} + 3\hat{j}$.

৬। $\vec{A} = \hat{i}$ এবং $\vec{B} = \hat{j} + \hat{k}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $90°$। $|\vec{A} . \vec{B}| = |\vec{A} \times \vec{B}|$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $45°$। $\vec{F}$ ও $\vec{s}$ মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 90°$ হলে কাজ শূন্য হয়।

৭। $\hat{i} \times (\hat{j} \times \hat{k})$ এর মান শূন্য হয়। $\hat{j} \times (\hat{j} \times \hat{k})$ এর মান $-\hat{k}$ হয়। $\vec{P} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$ এর ওপর লম্ব ভেক্টর হলো $3\hat{i} - 4\hat{j}$.

৮। দুটি ভেক্টর পরস্পর $45°$ কোণে ক্রিয়া করলে এদের স্কেলার ও ভেক্টর গুণফলের মান সমান হয়।

৯। X-অক্ষের সমান্তরাল ভেক্টর হলো $(\hat{i} \times \hat{j}) \times \hat{j}$। YZ সমতলে $3\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$ ভেক্টরের দৈর্ঘ্য $\sqrt{50}$।

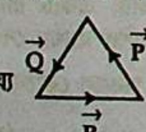
১০। দুটি ভেক্টরের লব্ধির মান সর্বোচ্চ হবে যখন এদের মধ্যবর্তী কোণ $0°$ হয়।

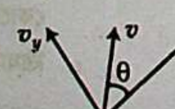
১১। $|\vec{A} \times \vec{A}| = 0$ হয়। $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ হলে $\vec{A}, \vec{B}$ পরস্পর সমান্তরাল হয়। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ বিপ্রতীপ হবে, যখন $\vec{A} = 2\hat{i}$ এবং $\vec{B} = \frac{1}{2}\hat{i}$ হয়। $\hat{i} \times \hat{j}$ ভেক্টরের গুণফলের দিক $\hat{k}$ বরাবর।

১২। একটি সামান্তরিকের কর্ণ $2\hat{i}$ ও $2\hat{j}$ হলে তার ক্ষেত্রফল হবে 2 বর্গ একক। স্কেলার ফাংশনকে ভেক্টর রাশিতে রূপান্তর করে গ্রেডিয়েন্ট।

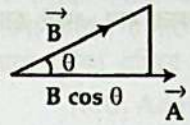
১৩। $\vec{A}$ বরাবর $\vec{B}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $B \cos\theta$। $\vec{A} \times \vec{B}$ ও $(\vec{A} + \vec{B})$ এর মধ্যবর্তী কোণ $90°$।

১৪। দুটি সমান বলের এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণ $60°$ এর জন্য লব্ধির বর্গ হবে তাদের মানের 3 গুণ।

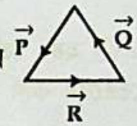
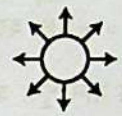
১৫। $\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = 0$ সম্পর্কটি চিত্রের সাহায্যে 

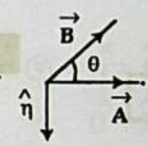
প্রকাশ করা যায়। 

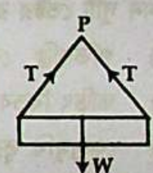
$\theta = 45°$ হলে v_x ও v_y এর উপাংশ সমান হয়। শক্তি ও বিভব স্কেলার রাশি।

১৬। (ক)  এখানে $B\cos\theta$ হলো $\vec{A}$ এর দিকে $\vec{B}$ এর লম্ব উপাংশ বা অভিক্ষেপ।

(খ) কোনো ভেক্টরের পাদবিন্দু ও শীর্ষবিন্দু একই হলে ভেক্টরটি নাল ভেক্টর হবে।

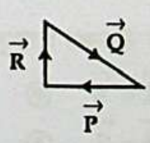
১৭। $\vec{P}+\vec{Q}=\vec{R}$ কে প্রকাশ করা হয়  চিত্রের সাহায্যে। মান শূন্য নয় এমন একটি ভেক্টরকে তার মান দ্বারা ভাগ করলে একক ভেক্টর পাওয়া যায়।  চিত্রটি একটি ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স ফলে $\vec{\nabla}.\vec{V}=$ '+'ve;  চিত্রটি একটি ভেক্টর ডাইভারজেন্স, ফলে $\vec{\nabla}.\vec{V}=$ '–' ve;  চিত্রটি শূন্য ডাইভারজেন্স, ফলে $\vec{\nabla}.\vec{V}=0$।

১৮। লম্ব একক ভেক্টর $\hat{\eta}=\dfrac{\vec{B}\times\vec{A}}{|\vec{B}\times\vec{A}|}$ এর জন্য চিত্র হলো—  $|\vec{A}\times\vec{B}|=\vec{A}.\vec{B}$ হলে এদের মধ্যবর্তী কোণ $\frac{\pi}{4}$। চিত্রে W ওজনের একটি আয়তাকার ফ্রেমের দুই প্রান্ত সুতা দিয়ে বেঁধে সুতার মধ্য বিন্দুটি দেওয়ালের সাথে আটকানো আছে। তাহলে W এর মান হবে, $W=2T\cos\theta$।



১৯। $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টরটির মান হবে $\sqrt{3}$। $\hat{j}\times(\hat{j}\times\hat{k})=-\hat{k}$; $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ একটি ত্রিভুজের তিন বাহু বরাবর একই ক্রমের জন্য $\vec{P}+\vec{Q}+\vec{R}=0$ হয়।

২০। $\vec{A}.\vec{A}=A^2$, $\hat{i}+\hat{j}$ ভেক্টরটি X-Y তলে অবস্থিত। $\vec{A}=5\hat{i}$, $\vec{B}=\frac{1}{5}\hat{i}$ হলে ভেক্টরদ্বয় বিপ্রতীপ হয়।

২১।  চিত্রে $\vec{R}$ ভেক্টরটি $\vec{P}-\vec{Q}$ ভেক্টরের মান ও দিক নির্দেশ করে। দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হবে যখন $\vec{A}\times\vec{B}=0$ হয়। স্কেলার বা ভেক্টর গুণনে দুটি ভেক্টরের অন্তর্ভুক্ত কোণের সম্পর্ক হলো $0°\le\theta\le180°$।

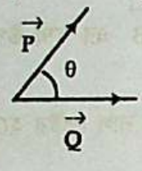
২২। $\vec{A}=-\vec{B}$ হলে $\vec{A}\times\vec{B}=0$ হয়। $\vec{A}+\vec{B}$ ও $\vec{A}-\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান হওয়ার শর্ত হলো $\vec{B}=0$।

২৩। দুটি ভেক্টরের যোগফল ও বিয়োগফলের মান সমান হয় যখন তাদের মধ্যবর্তী কোণ 90° হয়।

২৪। $\vec{\nabla}\times\vec{V}=0$ হলো অঘূর্ণনশীলের শর্ত, $\vec{\nabla}.\vec{V}=0$ হলো সলিনয়েডের শর্ত এবং কোনো পদার্থ আগত ও নির্গত ফ্লাক্স সমান হয়। স্কেলার ফাংশনকে ভেক্টর রাশিতে রূপান্তর করে গ্র্যাডিয়েন্ট।

২৫। $\vec{A}=2\vec{B}$ হলে $\vec{A}, \vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় (i) সদৃশ ভেক্টর, (ii) একই দিকে ক্রিয়া করে, (iii) সমজাতীয় ভেক্টর।

২৬। $\vec{P} = \vec{Q}$ হলে $\vec{P} \times (\vec{Q} \times \vec{P})$ এর মান শূন্য হয়। দুটি ভেক্টরের সমষ্টি ও পার্থক্যের মান একই হয় যখন ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণ 90°।



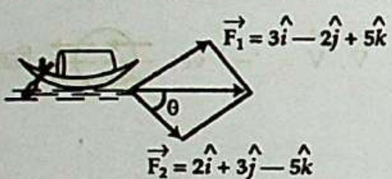
চিত্রে $\vec{Q}$ এর দিকে $\vec{P}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ P cos θ.

২৭। $\hat{i}$ এবং $-\hat{i}$ এর মধ্যকার কোণ 180°, $|-\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}| = \sqrt{3}$ হয়। ভেক্টর ডাইভারজেন্স স্কেলার রাশি।

২৮। কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল একটি ভেক্টর রাশি। কোনো ভেক্টরের কার্ল শূন্য হলে সেটি অঘূর্ণনশীল।

২৯। $2\hat{i} + 3\hat{j}$ ভেক্টরটি X—Y সমতলে অবস্থিত। $\vec{A} = -3\vec{B}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় সমজাতীয় ও পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে। $\vec{A} = -\vec{B}$ হলে, $\vec{A} \times \vec{B}$ এর মান শূন্য হবে।

৩০।



$\vec{F_1}$ ও $\vec{F_2}$ ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধির মান 11.22। এই নৌকায় দাড় টানার ক্ষেত্রে রাশির দৈর্ঘ্য T cos θ এর মান বেশি হলে নৌকা দ্রুত চলবে এবং T sin θ এর মান কম হলে নৌকা সামনের দিকে বেশি গতিশীল হবে। T sin θ নৌকার হাল দ্বারা প্রশমিত হয়।

অনুশীলনী

(ক) বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। কোন দুটি ভেক্টর রাশি ?
ⓚ গতিশক্তি, বেগ
ⓛ তড়িৎ বিভব, ত্বরণ
ⓖ কেন্দ্রমুখি ত্বরণ, তাপমাত্রা
ⓘ তড়িৎ ক্ষেত্র, বল

২। দুটি ভেক্টর $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ পরস্পর সমান্তরালে ক্রিয়া করছে। ভেক্টরদ্বয় হবে—
(i) সমতলীয় ভেক্টর
(ii) সমরেখ ভেক্টর
(iii) পরস্পর বিপরীত ভেক্টর
নিচের কোনটি সঠিক ?
ⓚ i
ⓛ i ও ii
ⓖ i ও iii
ⓘ i, ii ও iii

৩। দুটি দিক রাশির সর্বোচ্চ মান 12 একক এবং সর্বনিম্ন মান 2 একক। রাশিদ্বয়ের মান নির্ণয় কর। [R. U. Admission Test, 2017-18]
ⓚ 6 একক ও 8 একক
ⓛ 7 একক ও 5 একক
ⓖ 9 একক ও 10 একক
ⓘ 7 একক ও 11 একক

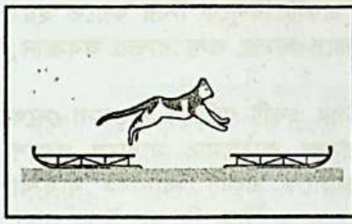
৪। আয়ত একক ভেক্টর $\hat{j}$ এর অভিমুখ হচ্ছে—
(i) X-অক্ষের লম্ব বরাবর
(ii) Y-অক্ষের লম্ব বরাবর
(iii) যে-কোনো দিকে
নিচের কোনটি সঠিক ?
ⓚ i ও ii
ⓛ ii ও iii
ⓖ i ও iii
ⓘ i, ii ও iii

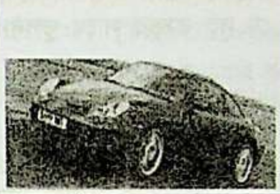
৫। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ এবং $\vec{A}$ এর দিকে একটি একক ভেক্টর $\hat{a}$ হলে $\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ হলো—
(i) A cos θ
(ii) B cos θ
(iii) $\vec{B} \cdot \hat{a}$
নিচের কোনটি সঠিক ?
ⓚ i
ⓛ ii
ⓖ i ও ii
ⓘ ii ও iii

৬। যদি দুটি সমান ভেক্টরের লব্ধি এদের যে-কোনো একটির সমান হয় তবে ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ হবে—
ⓚ 0°
ⓛ 180°
ⓖ 90°
ⓘ 120°

৩ গতিবিদ্যা
DYNAMICS

প্রধান শব্দ (Key Words) : প্রসঙ্গ কাঠামো, সরণ, গড় দ্রুতি, তাৎক্ষণিক দ্রুতি বা দ্রুতি, গড় বেগ, তাৎক্ষণিক বেগ বা বেগ, সমবেগ, গড় ত্বরণ, তাৎক্ষণিক ত্বরণ বা ত্বরণ, সমত্বরণ, পড়ন্ত বস্তুর সূত্র, প্রক্ষেপক, বিচরণ কাল, পাল্লা, বৃত্তাকার গতি, সুষম বৃত্তাকার গতি, কেন্দ্রমুখি বা অভিকেন্দ্র ত্বরণ।





সূচনা
Introduction

গতিবিদ্যা হলো গতি সংক্রান্ত বিজ্ঞান। পদার্থবিজ্ঞানে গতিবিদ্যা একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ শাখা। এই শাখায় বলের ক্রিয়ায় বস্তুর গতিই প্রধান আলোচ্য বিষয়। গতিবিদ্যা কোনো বস্তুর ওপর আরোপিত অথবা প্রয়োগকৃত বলের ফলে সৃষ্ট গতির অনুসন্ধান, প্রকৃতি এবং সম্পর্ক স্থাপন করে। সমত্বরণযুক্ত অসমবেগে চলমান বস্তুর গতিই মূলত এখানে বিবেচনা করা হয়। বস্তুর গতি আলোচনায় বস্তুর আকার, আয়তন এবং আকৃতি উপেক্ষা করে বস্তুটিকে কণা হিসেবে বিবেচনা করা শ্রেয়। কণা বলতে এমন একটি বস্তু বুঝায় যার ভর একটি বিন্দুতে সংহত আছে ধরা হয়। অর্থাৎ কণার ভর আছে কিন্তু আয়তন নগণ্য। যেমন একটি মোটর গাড়ির দ্রুতি, ত্বরণ, অবস্থান ইত্যাদি নির্ণয় করতে গাড়ির আকার বা আয়তন বিবেচনা করা হয় না। এক্ষেত্রে গাড়িটিকে কণা বিবেচনা করা হয়।

এ অধ্যায় পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা—

- জড় কাঠামোর ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- পরম গতি ও আপেক্ষিক গতি বর্ণনা করতে পারবে।
- গতি বর্ণনায় অন্তরীকরণ ও যোগজীকরণের প্রাথমিক ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- অবস্থান-সময় ও বেগ-সময় লেখচিত্র বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- প্রক্ষেপকের গতি বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- পড়ন্ত বস্তুর সূত্র ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সুষম বৃত্তীয় গতি ব্যাখ্যা করতে পারবে।

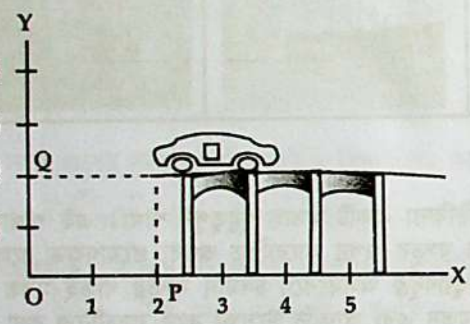
৩.১ প্রসঙ্গ কাঠামো
Frame of reference

যেকোনো সরলরেখা বরাবর গতিশীল একটি বস্তুর সরণ, বেগ, ত্বরণ ইত্যাদিকে স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় যেকোনো একটি অক্ষ বরাবর বিবেচনা করে বস্তুটির গতিকে সম্পূর্ণভাবে বর্ণনা করা যায়। কোনো গতির বর্ণনার জন্য একটি প্রসঙ্গ কাঠামোর প্রয়োজন হয় যার সাপেক্ষে গতি বিবেচনা করা হয়। একটি বস্তু X-অক্ষ বরাবর গতিশীল হলে তার সরণ, বেগ, ত্বরণ যথাক্রমে x, v_x, a_x হবে। এক্ষেত্রে দেখা যায় কোনো বস্তুর গতির সম্যক অবস্থা বা গতিশীল বস্তুর অবস্থান নির্ণয়ের জন্য প্রয়োজন হয় কোনো না কোনো প্রসঙ্গ স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা (coordinate system)। এই স্থানাঙ্ক ব্যবস্থাকে বলা হয় প্রসঙ্গ কাঠামো (reference frame)। সবচেয়ে সহজ এবং পরিচিত প্রসঙ্গ কাঠামো হলো কার্তেসীয় অক্ষ পদ্ধতি (Cartesian coordinate system)। এর দ্বারা একটি বস্তুকণার অবস্থান তিনটি পরস্পর লম্ব অক্ষ X, Y, Z দ্বারা নির্দিষ্ট করা যায়।

তোমার পড়ার ঘরে একটি প্রজাপতি প্রবেশের পর এদিক-ওদিক উড়তে দেখ। এখন মনে কর প্রজাপতিটি তোমার পড়ার ঘরে বুক সেলফ-এর ওপর এসে বসল। প্রজাপতিটিকে নির্দিষ্ট করতে ঘরের যেকোনো কোণাকে মূলবিন্দু (origin) ধরে দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা বরাবর নির্দিষ্ট পরিমাণ স্থান, ফিতা দিয়ে পরিমাপ করে প্রজাপতির অবস্থান নির্দিষ্ট করা যায়। মনে করা যাক ঘরের কোণা থেকে দৈর্ঘ্য বরাবর 5m, প্রস্থ বরাবর 3m এবং উচ্চতা বরাবর 2m মেপে প্রজাপতিটিকে নির্দিষ্ট করা হলো। এক্ষেত্রে প্রজাপতির স্থানাঙ্ক হবে (5, 3, 2); আবার তুমি যদি ঘরের বাইরের কোনো বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরে প্রজাপতির অবস্থান নির্ণয় করতে যাও তাহলে স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা পরিবর্তিত হবে। কার্তেসীয় পদ্ধতি ছাড়াও বস্তুর অবস্থান অন্যভাবে নির্ণয় করা যায়। যেমন গোলকভিত্তিক (spherical) বা সিলিন্ডারভিত্তিক (cylindrical)

স্থানাঙ্ক নির্দেশ পদ্ধতি। অর্থাৎ কোনো বস্তুর গতির বর্ণনার জন্য ত্রিমাত্রিক স্থানে যে সুনির্দিষ্ট স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা বিবেচনা করা হয় এবং যার সাপেক্ষে বস্তুটির গতি বর্ণনা করা হয় তাকে প্রসঙ্গ কাঠামো বলে। ভূপৃষ্ঠ, গ্রহ, সূর্য, কোনো বিন্দু ইত্যাদিকে প্রসঙ্গ কাঠামো হিসেবে বিবেচনা করতে পার। তবে এদের সব সময়ই সুনির্দিষ্ট করতে হবে। কোনো বস্তুর স্থানাঙ্ক সময় ও প্রসঙ্গ কাঠামোর সাপেক্ষে পরিবর্তিত অথবা স্থির থাকতে পারে। কোনো বস্তুর সকল বিন্দুর স্থানাঙ্ক যদি সময় ও প্রসঙ্গ কাঠামোর সাপেক্ষে স্থির থাকে তাহলে বস্তুর এই অবস্থাকে **স্থিতি** বলে। বস্তুটির যেকোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক যদি সময় ও প্রসঙ্গ কাঠামোর সাপেক্ষে পরিবর্তিত হয় তাহলে বস্তুর এই অবস্থাকে **গতি** বলে।

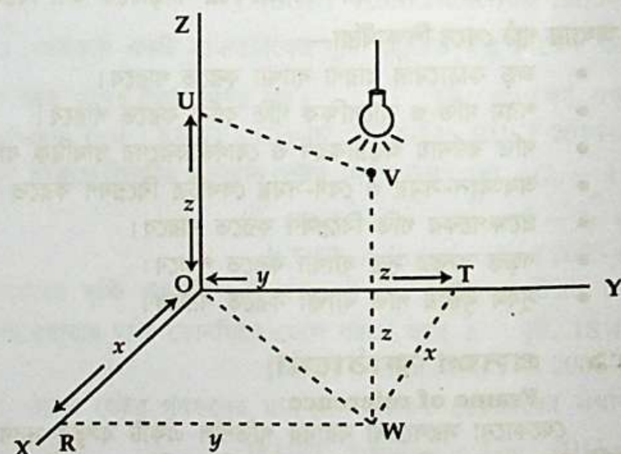
পৃথিবী পৃষ্ঠে বা মহাবিশ্বে কোনো কিছুর অবস্থান নির্দেশ করার জন্য আমাদের একটি বিন্দুকে স্থির করতে হয়। এই বিন্দুকে আমরা **মূলবিন্দু বা প্রসঙ্গ বিন্দু** বলি, আর যে দৃঢ় বস্তুর সাথে তুলনা করে আমরা অন্য বস্তুর অবস্থান, স্থিতি ও গতি নির্ণয় করি তাকে **প্রসঙ্গ কাঠামো** বলে।



চিত্র ৩.১

তুমি ব্রিজের উপর একটি গাড়িকে দাঁড়ানো দেখে তার অবস্থান যদি প্রসঙ্গ কাঠামোর মাধ্যমে প্রকাশ করতে চাও তবে তোমাকে একটি স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা বিবেচনা করতে হবে। ৩.১ চিত্রে ব্রিজের উপর রাখা একটি গাড়ির অবস্থান দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় X অক্ষের দিকে OP দূরত্ব এবং Y অক্ষের দিকে OQ দূরত্ব প্রকাশের মাধ্যমে মূলবিন্দুর সাপেক্ষে গঠিত প্রসঙ্গ কাঠামোতে গাড়িটির অবস্থান নির্দেশ করছে। এক্ষেত্রে $OP = x = 2$ একক এবং $OQ = y = 2$ একক নির্দেশ করে অর্থাৎ গাড়িটির অবস্থানের স্থানাঙ্ক হবে চিত্র ৩.১ অনুযায়ী (2, 2)।

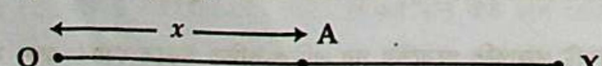
তুমি যখন ডাইনিং টেবিলে খেতে বস তখন যদি টেবিলের উপর ঝুলন্ত বালব দেখতে পাও তাহলে বালবের অবস্থান বুঝাতে তুমি কী করবে? বালবটি যেহেতু মেঝেতে নেই আবার দেওয়ালের উপরও নেই, আছে ঝুলন্ত অবস্থায়, তাই তোমাকে পরস্পর লম্ব তিনটি সরল-রেখা রেখা OX, OY, OZ অঙ্কন করে বালবটি নির্দিষ্ট করতে হবে। এখানে মূলবিন্দু এবং অক্ষত্রয় সমন্বয়ে একটি ত্রিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো (Three dimensional reference frame) গঠিত হয়েছে। ৩.২ চিত্রে V দ্বারা বালবের অবস্থান নির্দেশ করা হয়েছে। চিত্র অনুযায়ী $OR = WT = x$, $OT = RW = y$ এবং $OU = VW = z$। তাহলে বালবটির অবস্থানের স্থানাঙ্ক হবে (x, y, z)। আপেক্ষিক স্থিতি এবং আপেক্ষিক গতি নির্ণয়ের জন্যে প্রসঙ্গ বিন্দু (বা প্রামাণ্য বিন্দু) ও প্রসঙ্গ কাঠামো (বা প্রামাণ্য কাঠামো)-এর প্রয়োজন।



চিত্র ৩.২

(১) একমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো (One dimensional reference frame)

মনে করি একটি কণা একটি সরল-রেখা OX-বরাবর গতিশীল। বিভিন্ন সময়ে কণাটির অবস্থান একটি বিন্দু সাপেক্ষে নির্ণয় করতে হয়। যে বিন্দুর সাপেক্ষে কণাটির অবস্থান নির্ণয় করা হয়, তাকে **প্রসঙ্গ বিন্দু বা নির্দেশ বিন্দু** বলে। চিত্রে O-কে প্রসঙ্গ বিন্দু ধরে নেয়া হয়েছে।



চিত্র ৩.৩

OX সরলরেখাকে X-অক্ষ বলা হয়। প্রসঙ্গ বিন্দু O এবং X-অক্ষ নিয়ে গঠিত হয়েছে একটি একমাত্রিক কাঠামো। এ কাঠামোর সাহায্যে কণার যেকোনো সময়ের অবস্থান নির্ণয় করা হয় [চিত্র ৩.৩]।

মনে করি একটি নির্দিষ্ট সময়ে কণাটি A অবস্থানে আছে। উক্ত সময়ে O বিন্দু হতে কণাটির দূরত্ব $= OA = x$। কণাটি স্থিতিশীল হলে x-এর একটিমাত্র মান থাকবে। আর কণাটি গতিশীল হলে x-এর মান বিভিন্ন হবে। এখানে

x-কে স্থানাঙ্ক বলা হয়। একটিমাত্র স্থানাঙ্ক দ্বারা কণাটির অবস্থান নির্দেশিত হওয়ায় কণাটি একমাত্রিক স্থানে অবস্থিত। **যে বস্তুর বিভিন্ন কণার অবস্থান একটিমাত্র স্থানাঙ্ক দ্বারা নির্দেশ করা হয় তাকে একমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো বলে।**

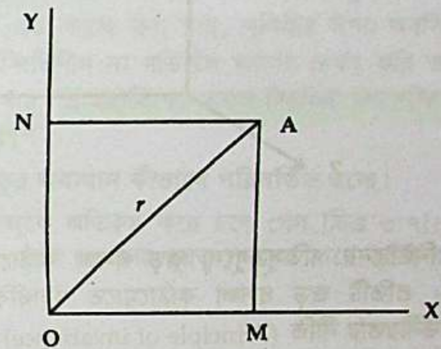
মুক্তভাবে পড়ন্ত একটি বস্তুর গতি আলোচনা করলে দেখা যাবে বিভিন্ন সময়ে বস্তুর অবস্থান বিভিন্ন হবে। এর গতি একটি একমাত্রিক কাঠামো দ্বারা প্রকাশ করা যাবে। যে বিন্দু হতে বস্তুটি পড়তে শুরু করে তাকে **প্রসঙ্গ বিন্দু** বলে এবং এর গতিপথ X-অক্ষ ধরা হবে।

উদাহরণ : একটি দীর্ঘ সরু দণ্ড, একটি দীর্ঘ সরু সূতা, ঝুলন্ত সুতা ইত্যাদি একমাত্রিক বস্তু ভাবা যায়।

(২) দ্বিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো (Two dimensional reference frame)

মনে করি একটি কণা একটি সমতলে অবস্থিত। ধরি কণাটি গতিশীল। সেজন্য বিভিন্ন সময়ে এর অবস্থান বিভিন্ন হবে। এর অবস্থান সূচিত করার লক্ষ্যে পরস্পর দুটি লম্বিক সরলরেখার দরকার। চিত্রে OX ও OY এরূপ দুটি সরলরেখা। এই দুটি সরলরেখা পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। অতএব O হলো **প্রসঙ্গ বিন্দু** বা **মূলবিন্দু** (reference or origin)। এখানে OX-কে X অক্ষ ও OY-কে Y অক্ষ বলা হয়। প্রসঙ্গ বিন্দু এবং অক্ষ দুটি মিলে একটি কাঠামো তৈরি হয়েছে। এর নাম **দ্বিমাত্রিক কাঠামো** [চিত্র ৩.৪]।

মনে করি একটি নির্দিষ্ট সময়ে একটি কণা A অবস্থানে আছে। A হতে OX-এর উপর AM এবং OY-এর উপর AN লম্ব টানি। তা হলে $OM = AN = x$; $AM = ON = y$। এখানে A-এর অবস্থান x ও y দুইটি স্থানাঙ্ক দ্বারা সূচিত হয়েছে। অন্যভাবে বলা যায় A হলো একটি বিন্দু যার স্থানাঙ্ক x ও y। অতএব **কোনো একটি বস্তুর বিভিন্ন কণার অবস্থান দুটি স্থানাঙ্ক দ্বারা নির্দেশ করা হলে উক্ত বস্তুটিকে দ্বিমাত্রিক বস্তু বলে।** OA যুক্ত করি। $OA = r$ হলে, O হতে ঐ কণার দূরত্ব হবে r।

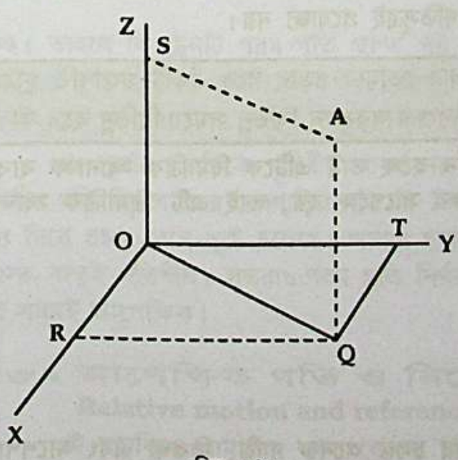


চিত্র ৩.৪

উদাহরণ : ফুটবল খেলার মাঠে একটি গতিশীল ফুটবল দ্বিমাত্রিক স্থানে দৌড়াচ্ছে। পাতলা কাগজ, পাতলা ধাতব পাত ইত্যাদি দ্বিমাত্রিক বস্তু।

(৩) ত্রিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো (Three dimensional reference frame)

মনে করি বায়ুভর্তি কামরার মধ্যে একটি কণা অবস্থিত। কণাটির অবস্থান নির্দেশ করার জন্য পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত তিনটি সরলরেখা দরকার। ধরি সরলরেখা তিনটি যথাক্রমে OX, OY এবং OZ। সরলরেখা তিনটি পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। অতএব O বিন্দু হলো **মূল বিন্দু** বা **প্রসঙ্গ বিন্দু**। এখানে OX কে X অক্ষ, OY কে Y-অক্ষ এবং OZ কে Z-অক্ষ বলা হয়। মূল বিন্দু O এবং তিনটি অক্ষ মিলে যে কাঠামো তৈরি হয়েছে তার নাম **ত্রিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো** [চিত্র ৩.৫]।



চিত্র. ৩.৫

মনে করি কোনো নির্দিষ্ট সময়ে কণাটি A অবস্থানে আছে। A হতে XY তলের উপর AQ লম্ব টানি। Q হতে OX-এর উপর QR এবং OY-এর উপর QT লম্ব টানি। A হতে OZ-এর উপর AS লম্ব টানি।

তাহলে $OR = QT = x$

$OT = RQ = y$

এবং $OS = AQ = z$

এখানে A-এর অবস্থান x, y এবং z এই তিনটি স্থানাঙ্ক দ্বারা নির্দেশ করা হয়েছে। মূল বিন্দু O এবং এই তিনটি স্থানাঙ্ক-সহ এই কাঠামোকে ত্রিমাত্রিক কাঠামো বলে। **কোনো একটি বস্তুর বিভিন্ন কণা এই কাঠামোয় অবস্থান করলে বস্তুটিকে ত্রিমাত্রিক বস্তু বলে।**

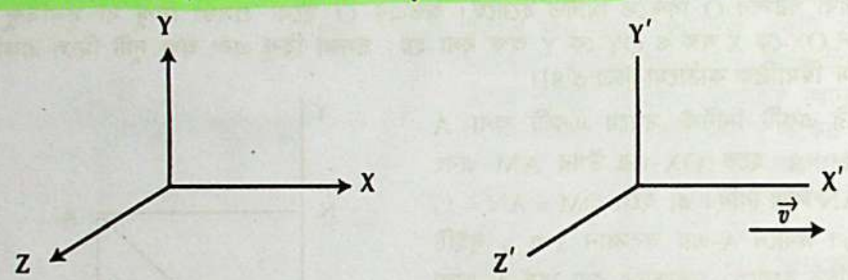
উদাহরণ : টেবিল, চেয়ার, ইট, পাথর ইত্যাদি ত্রিমাত্রিক বস্তু।

৩·২ জড় ও অজড় প্রসঙ্গ কাঠামো
Inertial and non-inertial frame of reference

৩·২·১ জড় প্রসঙ্গ কাঠামো
Inertial frame of refernece

ভূপৃষ্ঠে বা তার কাছাকাছি অবস্থানে কোনো বস্তুর গতি বর্ণনার সময় ভূপৃষ্ঠকে স্থির প্রসঙ্গ কাঠামো ধরা হয়। এখন ভূপৃষ্ঠে অবস্থিত কোনো একটি পাথরখণ্ডে যতক্ষণ পর্যন্ত কোনো বাহ্যিক বল প্রয়োগ না করা হয় ততক্ষণ পর্যন্ত পাথরখণ্ডটি স্থির থাকে। আবার অন্যদিকে সমবেগে গতিশীল একটি ট্রেনের কামরায় একটি বল মেঝেতে পড়ে থাকলে বাহ্যিক কোনো বল প্রয়োগ না করলে সেটি স্থির থাকে। সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে স্থির বা সমবেগে গতিশীল প্রসঙ্গ কাঠামোতে নিউটনের প্রথম গতিসূত্র প্রযোজ্য হয়। এই প্রসঙ্গ কাঠামোকে জড় প্রসঙ্গ কাঠামো বলে।

সংজ্ঞা : যে প্রসঙ্গ কাঠামোর কোনো ধরনের ত্বরণ বা মন্দন থাকে না, অর্থাৎ যে প্রসঙ্গ কাঠামো স্থির বা সমবেগে সরলরেখায় গতিশীল সেই প্রসঙ্গ কাঠামোকে জড় প্রসঙ্গ কাঠামো বলে।



চিত্র ৩·৬

নিউটনের গতিসূত্রগুলো জড় প্রসঙ্গ কাঠামোতে প্রযোজ্য হয়। চিত্র ৩·৬-এ জড় প্রসঙ্গ কাঠামো দেখানো হয়েছে। প্রতিটি জড় প্রসঙ্গ কাঠামোতে পদার্থবিজ্ঞানের সকল সূত্র অপরিবর্তিত থাকে। **এই নীতিকে নিউটনের অপরিবর্তনীয়তার নীতি** (Principle of invariance) বলা হয়।

৩·২·২ অজড় প্রসঙ্গ কাঠামো
Non-inertial frame of refernece

সংজ্ঞা : জড় প্রসঙ্গ কাঠামোর সাপেক্ষে ত্বরণ বা মন্দনসহ গতিশীল প্রসঙ্গ কাঠামোকে অজড় প্রসঙ্গ কাঠামো বলা হয়।

নিউটনের গতিসূত্রগুলো অজড় প্রসঙ্গ কাঠামোতে প্রযোজ্য হয় না।

উদাহরণ : ধরা যাক, একটি স্থির ট্রেনের কামরায় একটি বল স্থির অবস্থায় রয়েছে। এখন ট্রেনটি ত্বরণসহ চলতে শুরু করল। দেখা যাবে বলটি পিছনের দিকে গতিশীল হয়েছে। এক্ষেত্রে বলটির ওপর বাহ্যিক কোনো বল প্রয়োগ করা হয়নি। কিন্তু স্থির বলটি চলতে শুরু করেছে। সুতরাং, এখানে নিউটনের প্রথম গতিসূত্র প্রযোজ্য নয়। ত্বরণসহ গতিশীল ট্রেনটি একটি অজড় প্রসঙ্গ কাঠামো। সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে অজড় প্রসঙ্গ কাঠামোতে নিউটনের প্রথম গতিসূত্র প্রযোজ্য নয়। প্রকৃতপক্ষে অজড় প্রসঙ্গ কাঠামোতে নিউটনের কোনো গতিসূত্রই প্রযোজ্য নয়।

হাতে কলমে কাজ: ফুটবল মাঠে দুই দল ছেলে ফুটবল খেলছে, আবার তোমার পড়ার ঘরে একটি প্রজাপতি ছুটাছুটি করছে। এই দুটি ঘটনাকে প্রসঙ্গ কাঠামো ব্যবস্থায় উপস্থাপন কর। ফুটবলের অবস্থান বিভিন্ন সময়ে বিভিন্ন হবে কী ?

ফুটবল খেলার সময় সমতলের ওপর ফুটবলের অবস্থান পরিবর্তন হচ্ছে তাই এটিকে দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা বলা হয়। অন্যদিকে প্রজাপতির অবস্থান প্রতিটি স্থানে তিনটি অক্ষের সাপেক্ষে হয়, তাই এটি ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় ঘটে। ফুটবলের অবস্থান সময়ের সাথে পরিবর্তিত হবে।

৩·৩ পরম গতি ও আপেক্ষিক গতি
Absolute motion and Relative motion

৩·৩·১ পরম গতি
Absolute motion

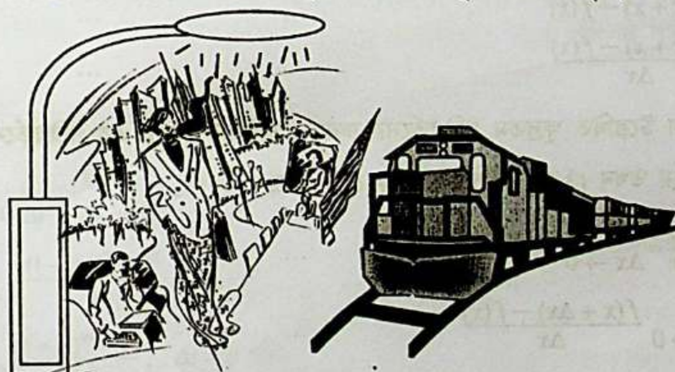
তুমি যখন রাস্তা দিয়ে হেঁটে কলেজে যাও তখন রাস্তার ওপর চলন্ত অনেক গাড়ি, রিকশা এবং আশেপাশে অনেক গাছ দেখতে পাও। এক্ষেত্রে গাড়ি ও রিকশা গতিশীল আর গাছ স্থির। আবার ভ্যাকুয়াম ক্লিনার দিয়ে যখন মেঝে পরিষ্কার করতে দেখ তখন ভ্যাকুয়াম ক্লিনারের আশেপাশের প্রত্যেকটি বস্তু থেকে ভ্যাকুয়াম ক্লিনারের দূরত্ব এবং দিক

ক্রমাগত পরিবর্তন হয়। অর্থাৎ সময়ের সাথে সাথে ভ্যাকুয়াম ক্লিনারের অবস্থানের পরিবর্তন হয়। এক্ষেত্রে আমরা বলি পরিপার্শ্বের সাপেক্ষে ভ্যাকুয়াম ক্লিনারটি গতিশীল। সময়ের সাথে সাথে পরিপার্শ্বের সাপেক্ষে যখন কোনো বস্তুর অবস্থানের পরিবর্তন ঘটে তখন তাকে গতিশীল বস্তু বলি। কোনো বস্তু স্থির না গতিশীল তা বুঝার জন্য প্রসঙ্গ বস্তু তথা প্রসঙ্গ কাঠামো বিবেচনা করতে হয়। যেমন গাছের তুলনায় রিকশাটি যদি গতিশীল হয় তখন আলোচ্য বস্তু বা রিকশাকে গতিশীল ধরা হয়। আবার রিকশা ও গাড়ি যদি একই দিকে একই বেগে চলতে থাকে তাহলে সময়ের সাথে তাদের মধ্যবর্তী দূরত্বের কোনো পরিবর্তন হবে না। এক্ষেত্রে একটির তুলনায় অপরটি গতিশীল ধরা হয়। আবার চলন্ত উড়োজাহাজে দুই বন্ধু যদি মুখোমুখি বসে গল্প করতে থাকে তাহলে সময়ের পরিবর্তনের সাথে সাথে তাদের অবস্থানের কোনো পরিবর্তন হবে না। সুতরাং বলা যায় একজনের সাপেক্ষে অপরজন স্থির। আমরা দেখতে পাচ্ছি কোনো বস্তু প্রকৃতপক্ষে স্থির না গতিশীল তা নির্ণয়ে একটি প্রসঙ্গ বস্তু নির্ধারণ করে নিতে হয়।

প্রসঙ্গ বস্তু যদি প্রকৃতপক্ষে স্থির হয় তাহলে তার সাপেক্ষে যে বস্তু স্থিতিশীল রয়েছে সেও প্রকৃতপক্ষে স্থির। এ ধরনের স্থিতিকে আমরা পরম স্থিতি বলি। প্রসঙ্গ বস্তুটি যদি পরম স্থিতিতে থাকে তাহলেই কোনো বস্তু তার সাপেক্ষে স্থির থাকলে সে বস্তুকে পরম স্থিতিশীল বলি। আবার **প্রসঙ্গ বস্তুটি যখন পরম স্থিতিতে থাকে তখন তার সাপেক্ষে অন্য কোনো বস্তু গতিশীল থাকলে তাকে পরম গতি বলি**। এই মহাবিশ্বে আমরা যা কিছু দেখি যেমন চন্দ্র, গ্রহ, উপগ্রহ, পৃথিবী সবই প্রতিনিয়ত সূর্যের চারদিকে ঘুরছে। তাই এক কথায় বলা যায়, পৃথিবীর উপর অবস্থিত সকল বস্তু স্থির নয়—সকল বস্তু গতিশীল। আমরা যখন কোনো বস্তু স্থিতিশীল না গতিশীল জানার চেষ্টা করি তা কোনো আপাত স্থিতিশীল বস্তুর সাপেক্ষে বিবেচনা করি। এক কথায় বলা যায় **"এ মহাবিশ্বের সকল স্থিতিই আপেক্ষিক, সকল গতিই আপেক্ষিক। কোনো গতিই পরম নয়, পরম নয় কোনো স্থিতি।"**

নিচের উদাহরণগুলি লক্ষ করে দেখ সময়ের সাথে সাথে বস্তুর অবস্থান কীভাবে পরিবর্তিত হচ্ছে।

(ক) রাজু স্টেশনের প্লাটফর্মে দাঁড়িয়ে দেখল একটি ট্রেন রাজুকে অতিক্রম করে চলে গেল [চিত্র ৩.৭]। তাহলে ট্রেনটি রাজুর অবস্থানের সাপেক্ষে গতিশীল। এক্ষেত্রে ট্রেনটির এবং রাজুর মধ্যকার দূরত্ব সময়ের সাথে সাথে পরিবর্তিত



চিত্র ৩.৭

হচ্ছে। তাহলে কি ট্রেনটি পরম গতি প্রাপ্ত নয় ? ট্রেনটি যদিও রাজুর সাপেক্ষে গতিশীল কিন্তু পৃথিবী নিজে সূর্যের চারদিকে ঘূর্ণনের জন্য পৃথিবীকে কখনও পরম স্থিতি বিবেচনা করা যায় না। এক্ষেত্রে ট্রেনটির গতি পরম গতি নয়। এভাবে তুমি পৃথিবীর উপর বিভিন্ন বস্তুর গতির কথা ভাব এবং পরম স্থিতি ও পরম গতি বুঝার চেষ্টা কর।

(খ) সূর্যের চারদিকে পৃথিবীর আবর্তনের বিস্তৃত তথ্য বিজ্ঞানীরা অনেকদিন আগেই গণনা করেছেন। অর্থাৎ পৃথিবীর গতি হিসাব করে রেলগাড়ির গতি কি নির্ণয় করা যায় না ? কিন্তু সূর্যও স্থির নয়। সমস্ত সৌরজগৎই ছায়াপথের মধ্য দিয়ে প্রচণ্ড বেগে ছুটে চলেছে। আবার ছায়াপথগুলোও একে অন্যের সাপেক্ষে গতিশীল। প্রকৃতপক্ষে এই মহাবিশ্বের সমস্ত বস্তুই গতিশীল। সুতরাং পরম গতি নির্ণয় করা অসম্ভব। অতএব বলা যায়, **কোনো বস্তুর স্থিতি অথবা গতি সব সময়ই আপেক্ষিক।**

৩.৩২ আপেক্ষিক গতি ও নির্দেশ কাঠামো

Relative motion and reference frame

এই মহাবিশ্বে আমাদের জানা কোনো বস্তুই স্থির নয়; অর্থাৎ পরম স্থিতি কি তা আমরা জানি না। কোনো একটি বস্তু স্থির বা গতিশীল বলতে আমরা বুঝি অন্য কোনো একটি বস্তুর সাপেক্ষে ওই বস্তুটি স্থির না গতিশীল। যেমন, রাস্তার পাশে দাঁড়িয়ে থাকা একজন দর্শকের কাছে গতিশীল একটি ট্রেনের যাত্রীকে গতিশীল মনে হবে।

পক্ষান্তরে গতিশীল ট্রেনের একজন যাত্রীর রাস্তার পাশে দাঁড়িয়ে থাকা একটি গাছকে ট্রেনের বিপরীত দিকে গতিশীল মনে হবে। আবার, সমবেগে একই দিকে ধাবমান দুটি ট্রেনের দুজন যাত্রীর পরস্পরকে স্থির বলে মনে হবে; কিন্তু ট্রেন দুটি বিপরীত দিকে ধাবমান হলে একজন যাত্রীর কাছে অন্য ট্রেনের যাত্রী অনেক বেশি বেগে দ্রুত পেরিয়ে যাচ্ছে মনে হবে। এগুলো সবই আপেক্ষিক। অর্থাৎ সব স্থিতি বা গতিই হলো আপেক্ষিক স্থিতি বা আপেক্ষিক গতি।

কোনো একটি বস্তুর অবস্থান নির্ণয় অপর একটি বস্তুর সাহায্য ছাড়া সম্ভব নয়। এই অপর বস্তুটিকে নির্দেশ বস্তু বা নির্দেশ কাঠামো (frame) বলা হয়।

৩.৪ গতি বর্ণনায় অন্তরীকরণ ও যোগজীকরণের প্রাথমিক ধারণা
Preliminary idea of differentiation and integration to describe motion

৩.৪.১ অন্তরীকরণ
Differentiation

মনে কর একটি রাশি অন্য একটি রাশির ওপর নির্ভরশীল, তাহলে গণিতের ভাষায় এ নির্ভরশীল রাশিটি অপরটির অপেক্ষক (function) হয়।

y রাশিটি x রাশির উপর নির্ভরশীল হলে y, x-এর একটি অপেক্ষক হয়।

অর্থাৎ $y = f(x)$ ... ... (3.1)

আবার y-এর ক্ষুদ্রতম পরিবর্তন Δy এর জন্য x এর ক্ষুদ্রতম পরিবর্তন Δx ধরলে y এবং x এর ক্ষুদ্রতম পরিবর্তনের জন্য লেখা যায়

$$y + \Delta y = f(\Delta x + x) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.2)$$

বা, $\Delta y = f(\Delta x + x) - y$

বা, $\Delta y = f(\Delta x + x) - f(x)$ ... ... (3.3)

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x + x) - f(x)}{\Delta x} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.4)$$

এখানে $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ হলো উল্লেখিত ক্ষুদ্রতম পরিবর্তনের জন্য x এর সাপেক্ষে y এর পরিবর্তনের হার। হর Δx এর মান যখন শূন্যের কাছাকাছি হয় তখন (3.4) নং সমীকরণকে লেখা যায়

$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.5)$$

$$\text{বা,} \quad \frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.6)$$

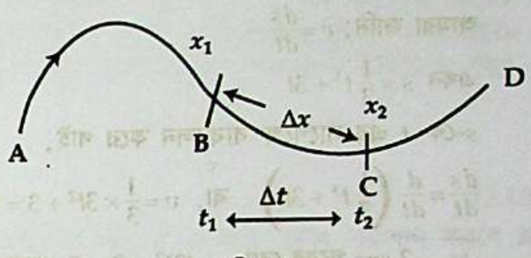
এখানে $\frac{dy}{dx}$ হলো, x এর অতি ক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য x এর সাপেক্ষে y এর পরিবর্তনের হার। $\frac{dy}{dx}$ কে x এর সাপেক্ষে y এর differential সহগও বলে এবং $\frac{dy}{dx}$ এর মান নির্ণয়ের পদ্ধতিকে অন্তরীকরণ বা ব্যবকলন বলে। গতির বর্ণনার ক্ষেত্রে এই অন্তরীকরণ পদ্ধতি প্রয়োগ করা যায়। এখানে $\frac{dy}{dx}$ একটি প্রতীক, যা y-এর উপর $\frac{d}{dx}$ এর ক্রিয়াকে নির্দেশ করে। ইহা dy ও dx এর ভাগফল নয়। $\frac{dy}{dx}$, x এর সাপেক্ষে y এর পরিবর্তনের হার বুঝায়।

মনে কর তুমি তোমার বন্ধুর মোটর সাইকেলে করে নিউমার্কেট থেকে মতিঝিল যাচ্ছ। তাহলে যাওয়ার পথে তুমি লক্ষ করবে মোটর সাইকেল কখনও একই বেগে চলেনি। কখনও ধীরে কখনও দ্রুত চলেছে। কখনও ব্রেক চেপে থামতেও হয়েছে। ফলে মোটর সাইকেলটির গতি সুষম ছিল না। কিন্তু তোমাকে যদি মোটর সাইকেলটির বেগ নির্ণয় করতে বলা হয় তাহলে তুমি নিউমার্কেট থেকে মতিঝিলের মোট দূরত্ব নিয়ে মোট অতিক্রান্ত সময় দ্বারা ভাগ করে বেগের মান নির্ণয় করে নিবে। এক্ষেত্রে এই নির্ণেয় বেগ গড় বেগ বুঝাবে। অর্থাৎ সময়ের সাপেক্ষে দুই অবস্থানের পরিবর্তন হবে বেগ v, অর্থাৎ $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$।

$\frac{\Delta x}{\Delta t}$ কে বলা হয় উল্লিখিত সময়ের পরিবর্তনের জন্য x-এর সাপেক্ষে সময়ের পরিবর্তনের হার বা বেগ। আবার সময়ের মান ক্ষুদ্র হলে উক্ত সময়ের বেগই হলো তাৎক্ষণিক বেগ। এক্ষেত্রে এই বেগকে অন্তরীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ

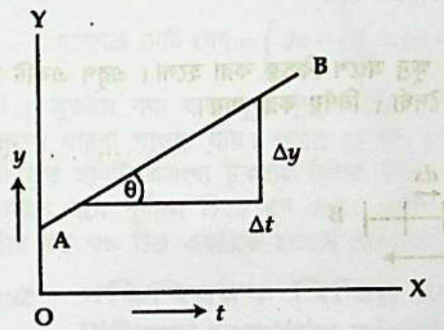
করা যায়; অর্থাৎ $\Delta t \to 0$ হলে $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ এর নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায় তাহলে ওই সীমাস্থ মানকে অর্থাৎ $\underset{\Delta t \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ কে $x(t)$ অপেক্ষকের t এর সাপেক্ষে বৃদ্ধির হার বা অন্তরক সহগ বা তাৎক্ষণিক বেগ বলে।

ধরা যাক একটি কণার গতিপথ AD এবং এই গতিপথের ওপর একটি বিন্দু B-তে এর বেগের মান নির্ণয় করতে হবে। তাহলে ধরা যাক t সময়ে কণার অবস্থান B এবং $t + \Delta t$ সময়ে কণার অবস্থান C [চিত্র ৩.৮]।



চিত্র ৩.৮

এক্ষেত্রে B ও C বিন্দুর মধ্যে দূরত্বের ব্যবধান Δx এবং সময়ের ব্যবধান Δt, তাহলে বেগের মান, $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$; বলা যায় t-এর সাপেক্ষে x-এর পরিবর্তন হলো অন্তরীকরণের ভাষায় বেগের মান।



চিত্র ৩.৯

আবার t এর Δt পরিবর্তনের জন্য Δy এর অতি ক্ষুদ্র পরিবর্তন লেখচিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় [চিত্র ৩.৯]। আলোচ্য ক্ষেত্রে Δy তথা Δt অতি ক্ষুদ্র হলে $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ সরলরেখাটির ঢাল নির্দেশ করবে।

$$\therefore \underset{\Delta t \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \text{ঢাল}$$

$$\text{বা,} \quad \frac{dy}{dt} = \text{ঢাল}$$

অর্থাৎ সরণ (y) বনাম সময় (t) লেখচিত্র থেকে ঢাল নির্ণয়ের মাধ্যমে সময়ের পরিবর্তনের সাথে সরণের পরিবর্তন দ্বারা বেগ নির্ণয় করতে পারি।

আবার, মনে করি $x = f(t) = t^2$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$$= \underset{\Delta t \to 0}{\text{Lt}} \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t}$$

$$= \underset{p \to 0}{\text{Lt}} \frac{(t+p)^2 - t^2}{p}, \quad \Delta t = p \text{ ধরি}$$

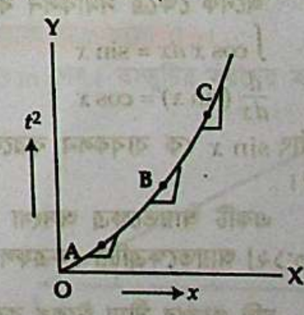
$$= \underset{p \to 0}{\text{Lt}} \frac{2tp + p^2}{p} = \underset{p \to 0}{\text{Lt}} 2t + p = 2t$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}(t^2) = 2t \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.7)$$

নিচের লেখচিত্রে বক্র রেখায় বিভিন্ন বিন্দুতে অঙ্কিত ঢালের মান সমান নয়। এইরূপ লেখচিত্রে কোনো বিন্দুর ঢাল নির্ণয় করতে হলে উক্ত বিন্দু সংলগ্ন এলাকায় অতি ক্ষুদ্র Δt এবং তৎসংলগ্ন Δx বিবেচনা করতে হবে। এই ঢাল ওই বিন্দুতে অন্তরক সহগের সমান তা দেখানো যায়।

এক্ষেত্রে ঢালের মান $= \frac{\Delta t^2}{\Delta x}$ বা, $\frac{d}{dx}(t^2) = 2t$ বুঝায়।

৩.১০ নং চিত্রে t^2 বনাম x লেখ অঙ্কন করা হয়েছে।



চিত্র ৩.১০

গাণিতিক উদাহরণ ৩.১

১। $s=\frac{1}{3}t^3+3t$ সূত্রানুসারে একটি বস্তু সরলরেখায় চলছে। 2 sec পর এর বেগ নির্ণয় কর।

মনে করি গতিবেগ $= v$

আমরা জানি, $v=\frac{ds}{dt}$

এখন $s=\frac{1}{3}t^3+3t$

এখানে,
সময়, $t = 2$ sec
বেগ, $v = ?$

s-কে t এর সাপেক্ষে ব্যবকলন করে পাই,

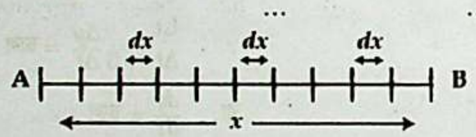
$\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}t^3+3t\right)$ বা, $v=\frac{1}{3}\times 3t^2+3=t^2+3$

$\therefore$ 2 sec পরের বেগ $v=(2)^2+3=7$ একক।

৩'৪'২ যোগজীকরণ বা সমাকলন
Integration

মনে করি একটি দণ্ডের দৈর্ঘ্য x; দণ্ডটিকে অসংখ্য সমান ও ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশে বিভক্ত করা হলো। এরূপ একটি ক্ষুদ্র অংশের দৈর্ঘ্য $= dx$। ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সকল অংশকে যোগ করলে সমগ্র দণ্ডের দৈর্ঘ্য x নির্ণয় করা যায়।

$\therefore \quad \Sigma dx = x \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.8)$



চিত্র ৩'১১

এখানে Σ চিহ্ন যোগজীকরণ বা সমষ্টিকরণ বুঝায়।

সমীকরণ (3.8) কে নিম্নলিখিত উপায়ে লেখা যায়

$\int dx = x \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.9)$

'$\int$' প্রতীকটি দ্বারাও যোগজীকরণ বা সমাকলন বুঝায়। এই সমীকরণ হতে দেখা যায় যে, dx এর সমাকলিত মান x এর সমান। তাহলে আমরা বলতে পারি সমাকলন এক ধরনের যোগজীকরণ। উপরের সমীকরণটির উভয় পাশে সমতা আনার জন্য উত্তর লেখার সময় একটি সমাকলন ধ্রুবক c যোগ করে লিখতে হয়, $\int dx = x + c$।

আবার মনে করি একটি ফাংশন $f(t)$ এর সমাকলিত মান, $\int f(t)dt = A(x)$

তাহলে $f(t)$ কে যোগজ রাশি বা integral রাশি বলে। $f(t)$ এর পর dt দ্বারা বুঝানো হয়েছে যে সমাকলনটি করতে হবে t এর সাপেক্ষে। একে variable বা চলরাশি বলে।

১. কয়েকটি ক্ষেত্রে যোগজীকরণের প্রয়োগ

- ভেক্টরের সাধারণ সমাকলন স্কেলার রাশির মতোই। মনে করি $\vec{A}(t)=\hat{i}\,A_x(t)+\hat{j}\,A_y(t)+\hat{k}\,A_z(t)$ ভেক্টরটি একটিমাত্র স্কেলার চলরাশি t-এর সমাকলন; তাহলে,

  $\int \vec{A}(t)\,dt=\hat{i}\int A_x(t)\,dt+\hat{j}\int A_y(t)dt+\hat{k}\int A_z(t)\,dt$ হবে।

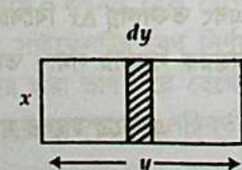
  একে $\vec{A}(t)$-এর অনিশ্চিত সমাকলন (Indefinite integral) বলে।

- অনেক ক্ষেত্রে সমাকলন ব্যবকলনের বিপরীত প্রক্রিয়া যেমন—

  $\int \cos x\,dx = \sin x$

  $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$

  অর্থাৎ $\sin x$ কে ব্যবকলন করলে $\cos x$ এবং $\cos x$ কে সমাকলন করলে $\sin x$ পাওয়া যায়।



চিত্র ৩'১২

- একটি আয়তক্ষেত্র অসংখ্য ফালির সমন্বয়ে গঠিত যার দৈর্ঘ্য x এবং প্রস্থ dy হলে [চিত্র ৩'১২] আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল হবে $\int x dy, = x\int dy = xy$

- যদি প্রস্থের সীমা উল্লেখ করে দেওয়া থাকে তাহলে ক্ষেত্রফল $=\int_0^y x\,dy = x\,[y]_0^y = x\,(y-0)=xy$

২. বেগের ক্ষেত্রে সমাকলনের প্রয়োগ

গতিশীল বস্তুর বেগ নির্ণয় কালে সরণকে মোট সময় দ্বারা ভাগ করে বেগ নির্ণয় করে থাকি। কিন্তু এই বেগ গড়বেগ ছাড়া আর কিছুই নয়। কারণ চলার ক্ষেত্রে বস্তুর গতি কখনও সুষম, কখনও অসম হয়। তাই যদি চলমান পথকে ক্ষুদ্রতম অসংখ্য প্রস্থে বা অংশে বিভক্ত করে প্রতিটি ক্ষুদ্রতম অংশ (dx) এবং এই ক্ষুদ্রতম অংশ অতিক্রমের সময় (dt) দ্বারা ভাগ করি তাহলে ক্ষুদ্রতম অংশের জন্য বেগ নির্ণয় করতে পারি। এরপর এই ক্ষুদ্রতম প্রস্থের জন্য নির্ণেয় বেগ (dv) কে সমাকলন করলে সমগ্র পথের জন্য বস্তুর প্রকৃত বেগ নির্ণয় করতে পারি। সমাকলন পদ্ধতিতে নিচে ইহা দেখানো হলো :

dx অংশের বেগ, $dv = \frac{dx}{dt}$

আবার সমগ্র পথের জন্য বেগ $= \int dv = v + c$ ... ... (3.10)

যদি বেগের মান নির্দিষ্ট করা থাকে তাহলে উপরোক্ত সমাকলনটি ওই সীমার মধ্যে রেখে সমাধান করলে প্রকৃত বেগ জানা যায়। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় বেগের মান $v = 0$ থেকে $v = v$ হলে (3.10) নং সমীকরণকে এই সীমার মধ্যে সমাকলন করলে মোট বেগ পাওয়া যায়।

এক্ষেত্রে মোট বেগ $= \int_0^v dv = [v]_0^v = (v - 0) = v$

সুতরাং বলা যায় ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশের যোগফলই হলো মোট বা সমাকলন। একটি বাস্তব উদাহরণ দ্বারা বিষয়টি সম্বন্ধে ধারণা পাওয়া যায়। যেমন একজন মানুষ যখন টিভি স্টুডিওতে ক্যামেরার সামনে খবর পাঠ করে তখন তার ধারণকৃত ছবিটি অসংখ্য টুকরায় বিভক্ত করা হয়, আবার এটি যখন টিভির পর্দায় পৌঁছে তখন টুকরা টুকরা ছবিগুলো একত্রিত হয়ে পূর্ণাঙ্গ চিত্রে রূপ নেয়। এক্ষেত্রে স্টুডিওতে খণ্ড খণ্ড ছবিতে পরিণত হবার নাম ব্যবকলন আর টিভির পর্দায় খণ্ড খণ্ড চিত্র একত্রিত হওয়ার প্রক্রিয়াকে সমাকলন বা যোগজীকরণ বলে।

৩·৫ গতিবিষয়ক বিভিন্ন রাশি

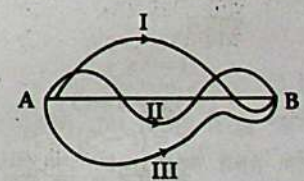
Different quantities related to motion

১. **সরণ (Displacement) : কোনো নির্দিষ্ট দিকে কোনো বস্তুর সময়ের সাথে অবস্থান পরিবর্তনকে বস্তুটির সরণ বলে।** সরণ একটি ভেক্টর রাশি। সুতরাং এর মান ও দিক উভয়ই আছে।

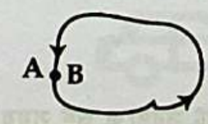
বস্তুর প্রাথমিক অবস্থান ও শেষ অবস্থান সংযোগকারী সরলরেখার দৈর্ঘ্য দ্বারা সরণ পরিমাপ করা হয়। বস্তুটির প্রাথমিক অবস্থান হতে শেষ অবস্থানের দিক সরণের দিক নির্দেশ করে [চিত্র ৩·১৩]। বস্তুর সরণ পথ-নিরপেক্ষ, কেবল প্রাথমিক ও শেষ অবস্থানের ওপর নির্ভর করে।

ব্যাখ্যা : চিত্র ৩·১৩-এ একটি বস্তুকণা তিনটি ভিন্ন পথে প্রাথমিক অবস্থান A থেকে শেষ অবস্থান B-তে পৌঁছানো দেখানো হয়েছে।

কণাটি প্রতি ক্ষেত্রে ভিন্ন পথে গেলেও প্রতিটি ক্ষেত্রে বস্তুটির সরণ = AB। সরলরেখার দৈর্ঘ্য এবং সরণের অভিমুখ A থেকে B-এর দিকে। অর্থাৎ কণাটির সরণ পথ-নিরপেক্ষ, শুধুমাত্র প্রাথমিক ও শেষ অবস্থানের ওপর নির্ভরশীল।



চিত্র ৩·১৩



চিত্র ৩·১৪

যদি বস্তুটির প্রাথমিক ও শেষ অবস্থান একই বিন্দু হয় তবে বস্তুটির সরণ শূন্য হবে [চিত্র ৩·১৪]।

সরণের একক ও মাত্রা : S. I. পদ্ধতিতে সরণের একক মিটার (m)। সরণের মাত্রা হলো (L)।

উদাহরণ : একটি বস্তু পূর্বদিকে 4 m অতিক্রম করার পর উত্তরদিকে 3 m গেল। বস্তুটির সরণের মান ও দিক নির্ণয় কর।

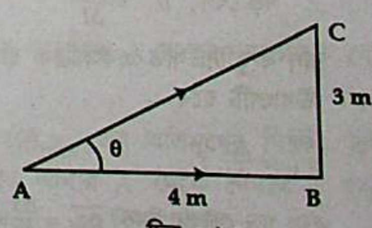
বস্তুটির পূর্ব দিকের সরণ, AB = 4 m

এবং উত্তর দিকে সরণ, BC = 3 m

বস্তুটির প্রাথমিক অবস্থান A ও শেষ অবস্থান C হওয়ায় এর সরণ,

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5\,m$$

বস্তুটির অভিমুখ A হতে C এর দিকে।



চিত্র ৩·১৫

ধরি $\overrightarrow{AC}$ অভিমুখ AB এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

∴ $\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4} = 0.75 = \tan 36.9°$

∴ $\theta = 36.9°$

সুতরাং, বস্তুটির সরণের অভিমুখ হলো পূর্বদিকের সাথে 36.9° কোণ করে উত্তর দিকে।

২. দ্রুতি (Speed) : কোনো গতিশীল বস্তু একক সময়ে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে ওই বস্তুর দ্রুতি বলে।

যদি একটি বস্তুকণা t সময়ে s দূরত্ব অতিক্রম করে, তবে বস্তুকণাটির দ্রুতি, $u = \frac{s}{t}$।

দ্রুতি একটি স্কেলার রাশি। এর মান আছে, কিন্তু অভিমুখ নেই।

দ্রুতির একক ও মাত্রা : S. I. পদ্ধতিতে দ্রুতির একক মিটার/সেকেন্ড (ms^{-1})। এর মাত্রা $= \frac{[L]}{[T]} = [LT^{-1}]$

৩. গড় দ্রুতি (Average speed) : কোনো বস্তু কর্তৃক অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব এবং মোট ব্যয়িত সময়ের ভাগফলকে গড় দ্রুতি বলে।

ব্যাখ্যা : মনে করি একটি গতিশীল বস্তু মোট সময় t-এ মোট দূরত্ব s অতিক্রম করল।

∴ গড় দ্রুতি, $\bar{v} = \frac{\text{মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব}}{\text{মোট ব্যয়িত সময়}} = \frac{s}{t}$

কোনো বস্তু যদি প্রতি একক সময়ে সমান দূরত্ব অতিক্রম করে অর্থাৎ বস্তুটি সমদ্রুতিতে গতিশীল হয়, তবে ওই বস্তুর দ্রুতি ও গড় দ্রুতি একই হয়।

৪. তাৎক্ষণিক দ্রুতি (Instantaneous speed) : সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে সময়ের সঙ্গে বস্তুর দূরত্বের পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক দ্রুতি বা দ্রুতি বলে। ক্যালকুলাসের নিয়ম অনুসারে কোনো গতিশীল বস্তু Δt সময়ে Δs দূরত্ব অতিক্রম করলে এর তাৎক্ষণিক দ্রুতি হবে,

$$v = \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

বস্তুটি সমদ্রুতিতে গতিশীল হলে প্রতিটি মুহূর্তে বস্তুটির তাৎক্ষণিক দ্রুতি সমান হয়।

উদাহরণ : একটি বস্তুকণার ওপর স্থির বল ক্রিয়া করায় কণাটির সরণ ও সময় $t = \sqrt{x} + 5$ সমীকরণ দ্বারা সম্পর্কিত। বস্তুকণাটির বেগ যখন শূন্য তখন কণাটির সরণ কত ? (সরণ এবং দূরত্ব এস আই এককে প্রকাশিত)

এখানে,

$t = \sqrt{x} + 5$

$\sqrt{x} = t - 5$

∴ $x = (t-5)^2 = t^2 + 25 - 10t$

∴ কণাটির তাৎক্ষণিক বেগ, $v = \frac{dx}{dt} = 2t - 10$

এখন, কণাটির বেগ শূন্য হবে, যখন $2t - 10 = 0$

∴ $t = \frac{10}{2} = 5$ সেকেন্ড

৫. গড় বেগ (Average velocity) : যে কোনো সময় ব্যবধানে কোনো বস্তুর মোট সরণকে ওই সময় ব্যবধান দিয়ে ভাগ করলে যে রাশি পাওয়া যায় তাকেই বস্তুটির গড় বেগ বলে।

ব্যাখ্যা : মনে করি Δt সময় ব্যবধানে একটি বস্তুর মোট সরণ $\Delta\vec{r}$

∴ গড় বেগ, $\overline{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

যদি বস্তুটির গতি একমাত্রিক হয় এবং বস্তুটি X-অক্ষ বরাবর গতিশীল হয়, সেক্ষেত্রে বেগের একটিমাত্র উপাংশ থাকে। উপাংশটি হবে—

$\overline{\vec{v}_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i}$ [∵ একমাত্রিক কাঠামোতে $\vec{r} = x\hat{i}$]

এবং গড় বেগের মান $\overline{v_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

৬. তাৎক্ষণিক বেগ বা বেগ (Instantaneous velocity or velocity) : সময়ের ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে বস্তুর সরণের হারকে তাৎক্ষণিক বেগ বা সংক্ষেপে বেগ বলা হয়। তাৎক্ষণিক বেগ বলতে কোনো বস্তুর বিশেষ মুহূর্তের বেগ বুঝায়। কোনো বস্তুর তাৎক্ষণিক বেগ নির্ণয় করতে হলে যে মুহূর্তের বেগ নির্ণয় করতে হবে ঠিক তার পূর্ববর্তী এবং পরবর্তী মুহূর্তে বস্তুটির অবস্থান জানা প্রয়োজন। পূর্ববর্তী এবং পরবর্তী মুহূর্ত বা সময়ের ব্যবধান অবশ্যই অত্যন্ত ক্ষুদ্র হতে হবে (প্রায় শূন্যের কাছাকাছি)।

অর্থাৎ সময়ের মান শূন্যের কাছাকাছি হলে উক্ত সময়ে সরণের পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক বেগ বলে।

সুতরাং তাৎক্ষণিক একমাত্রিক বেগ $\vec{v}_x = \underset{\Delta t \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{x}}{dt}$

উপরের আলোচনা থেকে তাৎক্ষণিক বেগ বা বেগের নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেয়া যায় :

সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে গড় বেগের সীমান্তিক মানকেই তাৎক্ষণিক বেগ বা সংক্ষেপে বেগ বলে।

৭. মধ্য বেগ (Mean velocity) : কোনো একটি গতিশীল বস্তুর আদি বেগ এবং শেষ বেগ-এর অভিমুখ একই হলে তাদের যোগফলের অর্ধেককে মধ্য বেগ বলে।

মনে করি, কোনো নির্দিষ্ট দিকে একটি বস্তুর আদি বা প্রথম বেগ $\vec{v}_0$ এবং শেষ বেগ $\vec{v}$.

$\therefore$ মধ্য বেগ $= \dfrac{\vec{v}_0 + \vec{v}}{2}$

৮. আপেক্ষিক বেগ (Relative velocity) : সাধারণত 'কোনো বস্তুর বেগ' বলতে আমরা পৃথিবীর ওপর কোনো স্থির বস্তুর সাপেক্ষে এর বেগ বুঝি। আবার আমরা একটি বস্তু A-এর বেগ পৃথিবীর উপর সচল আরেকটি বস্তু B-এর সাপেক্ষেও নির্ণয় করতে পারি। একে B বস্তুর সাপেক্ষে A বস্তুর আপেক্ষিক বেগ বলে। অর্থাৎ **দুটি চলমান বস্তুর একটির সাপেক্ষে অপরটির অবস্থানের পরিবর্তনের হারকে আপেক্ষিক বেগ বলে।** এক্ষেত্রে কোনো বস্তু সাপেক্ষে আরেকটি বস্তুর আপেক্ষিক বেগ হবে বেগদ্বয়ের ভেক্টর বিয়োগফলের সমান; অর্থাৎ পৃথিবী পৃষ্ঠের উপর সচল কোনো বস্তু সাপেক্ষে আরেকটি বস্তুর আপেক্ষিক বেগ বস্তু দুটির বেগের ভেক্টর বিয়োগফলের সমান।

মনে কর A ও B দুটি বস্তুর বেগ যথাক্রমে v_A এবং v_B হলে B সাপেক্ষে A-এর আপেক্ষিক বেগ

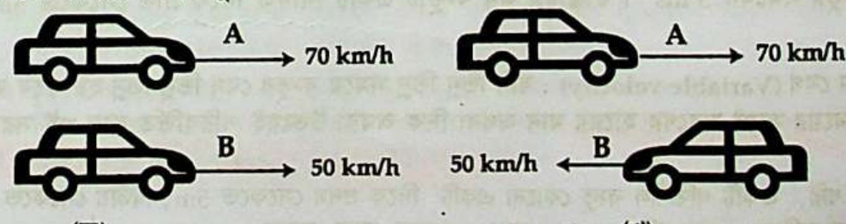
$$v_{AB} = v_A - v_B \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.11)$$

আবার A সাপেক্ষে B-এর আপেক্ষিক বেগ

$$v_{BA} = v_B - v_A$$

$$\therefore \quad v_{BA} = -v_{BA} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.12)$$

উদাহরণ (ক) : নিচের চিত্র দুটি লক্ষ কর। প্রথম চিত্রে দুটি গাড়ি একই দিকে গতিশীল এবং দ্বিতীয় চিত্রে পরস্পর বিপরীত দিকে গতিশীল। এদের আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় করবে কীভাবে ? এক্ষেত্রে দুটি সমান্তরাল সরল চলন গতির ক্ষেত্রে আপেক্ষিক বেগ নির্ণয়ে নিম্নের দুটি গতি বিবেচনা করতে হবে।

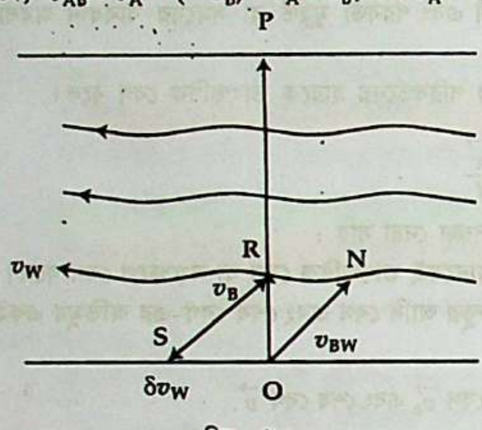


চিত্র ৩.১৬

● **সমমুখি গতি :** দুটি বস্তু সরলরেখা বরাবর একই দিকে চললে B বস্তু সাপেক্ষে A বস্তুর আপেক্ষিক বেগের মান বস্তুদ্বয়ের বেগের মানের বিয়োগফলের সমান হয়।

অর্থাৎ $v_{AB} = v_A - v_B$, যদি $v_A > v_B$ হয়, তবে v_{AB} এর অভিমুখ হবে v_A এর অভিমুখের দিকে। সুতরাং B থেকে দেখলে A বস্তুকে সামনের দিকে v_{AB} বেগে এগোতে দেখা যাবে। আবার A থেকে দেখলে B বস্তুকে v_{BA} $(= -v_{AB})$ বেগে পেছনের দিকে যেতে দেখা যাবে। কারণ v_{BA} এর অভিমুখ v_{AB} এর বিপরীতমুখি।

● **বিপরীতমুখি গতি :** দুটি বস্তু সরলরেখা বরাবর বিপরীত দিকে চলতে থাকলে যদি A বস্তুর বেগ v_A কে ধনাত্মক ধরা হয়, তাহলে B বস্তুর বেগ v_B কে ঋণাত্মক ধরতে হবে। এখানে B সাপেক্ষে A বস্তুর আপেক্ষিক বেগ হবে, $v_{AB} = v_A - (-v_B) = v_A + v_B$, যদি $v_A > v_B$ হয়।



চিত্র ৩.১৭

সুতরাং B বস্তু থেকে দেখলে A বস্তু v_{AB} বেগে B বস্তুর দিকে এগোচ্ছে বা দূরে চলে যাচ্ছে বলে মনে হবে। যেহেতু $v_{BA} = -v_B - v_A = -(v_B + v_A)$, অতএব A বস্তু থেকে দেখলে মনে হবে যে, B বস্তুটি v_{BA} $(= -v_{AB})$ বেগে A বস্তুর দিকে এগোচ্ছে বা দূরে সরে যাচ্ছে।

উদাহরণ (খ) : মনে কর এক ব্যক্তি নৌকা করে এপারের কোনো বিন্দু O থেকে নদীর ওপারে ঠিক বিপরীতে অবস্থিত P বিন্দুতে সরাসরি যেতে চায়; তাহলে তাকে ON অভিমুখে নৌকা চালাতে হবে [চিত্র ৩.১৭]।

যদি স্রোত সাপেক্ষে নৌকাটির আপেক্ষিক বেগ v_{BW} এবং স্রোতের বেগ v_W হয়, তবে এদের ভেক্টর যোগফল নৌকাটির বেগ v_B কে প্রকাশ করে, অর্থাৎ $\vec{v}_B = \vec{v}_W + \vec{v}_{BW}$.

সিদ্ধান্ত : উপরের উদাহরণ থেকে এ সিদ্ধান্ত নেয়া যায় :

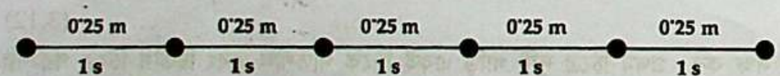
(১) দুটি গতিশীল বস্তু একই দিকে চললে বস্তু দুটির বেগ বিয়োগ করে আপেক্ষিক বেগ পাওয়া যায়।

(২) দুটি গতিশীল বস্তু বিপরীত দিকে চললে আপেক্ষিক বেগ বের করতে বেগ দুটি যোগ করতে হয়।

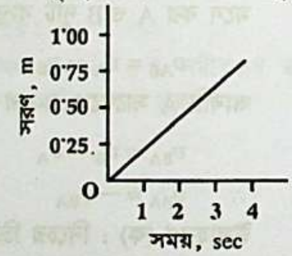
৯. সমবেগ (Uniform velocity) : কোনো বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল বলের মান ও দিক ধ্রুব থাকলে, ওই বস্তুর বেগও ধ্রুব থাকে। বস্তুর এই ধ্রুব বেগকে সমবেগ বলে।

উদাহরণ : শব্দের বেগ, আলোর বেগ ইত্যাদি।

ব্যাখ্যা : ৩.১৮ (ক) চিত্রে পাঁচটি বিন্দু দ্বারা 1 সেকেন্ড পর পর কোনো একটি সরলরেখা বরাবর একই দিকে গতিশীল একটি বস্তুর অবস্থান প্রকাশ করা হয়েছে। এখানে পর পর দুটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব 0.25m। গতি অনুসারে বস্তুটি একই অভিমুখে প্রতি সেকেন্ডে 0.25m দূরত্ব অতিক্রম করছে এবং সমান সময়ে সমান পথ অতিক্রম করছে। কাজেই বস্তুর এই বেগ সমবেগ এবং সমবেগের মান 0.25 ms^{-1}। ৩.১৮(খ) চিত্রে সরণ বনাম সময় লেখচিত্র দ্বারা সমবেগ দেখানো হয়েছে।



চিত্র ৩.১৮ (ক)

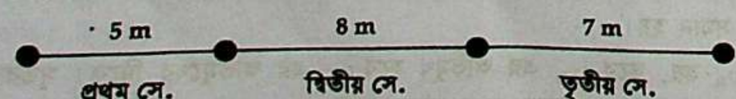


চিত্র ৩.১৮ (খ)

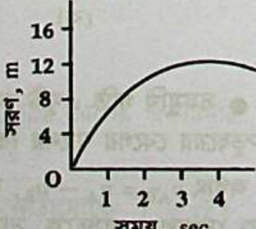
একটি বস্তুর সমবেগ 5 ms^{-1}। উক্তিটির অর্থ বস্তুটি একটি নির্দিষ্ট দিকে প্রতি সেকেন্ডে 5m দূরত্ব অতিক্রম করে চলছে।

১০. অসম বেগ (Variable velocity) : যদি ভিন্ন ভিন্ন সময়ে বস্তুর বেগ ভিন্ন ভিন্ন হয় তবে তাকে অসম বেগ বলে। কাজেই সময়ের সাথে সরণের হারের মান অথবা দিক অথবা উভয়েই পরিবর্তিত হলে ওই সরণের হারই অসম বেগ।

ব্যাখ্যা : ধরি, একটি গতিশীল বস্তু কোনো একটি দিকে প্রথম সেকেন্ডে 5m, দ্বিতীয় সেকেন্ডে 8m এবং তৃতীয় সেকেন্ডে 7m পথ অতিক্রম করল [চিত্র ৩.১৯ (ক)]। এখানে বস্তু সমান সময়ে সমান পথ অতিক্রম করছে না। সুতরাং বস্তুর এই বেগ অসম বেগ। অসম বেগের লেখচিত্র ৩.১৯ (খ)-এ দেখানো হয়েছে।



চিত্র ৩.১৯ (ক)



চিত্র ৩.১৯ (খ)

১১. তাৎক্ষণিক ত্বরণ বা ত্বরণ (Instantaneous acceleration or acceleration) : কোনো একটি গতিশীল বস্তুর সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে বেগ পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক ত্বরণ বা সংক্ষেপে ত্বরণ বলে।

ব্যাখ্যা : ধরা যাক, অত্যন্ত অল্প সময়ে Δt-এ কোনো বস্তুর বেগ পরিবর্তন $\Delta \vec{v}$ হয়। বস্তুটির বেগের পরিবর্তন যে খুবই স্বল্প সময়ে ঘটেছে তা দিয়ে ভাগ করলে তাৎক্ষণিক ত্বরণ পাওয়া যায়।

অতএব, তাৎক্ষণিক ত্বরণ, $\vec{a} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

সুতরাং, তাৎক্ষণিক ত্বরণকে নিম্নলিখিত উপায়ে সংজ্ঞায়িত করা হয় :

সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে, গড় ত্বরণের সীমান্তিক মান ত্বরণের সমান।

ত্বরণের মান হবে, $a = \left| \dfrac{d\vec{v}}{dt} \right|$

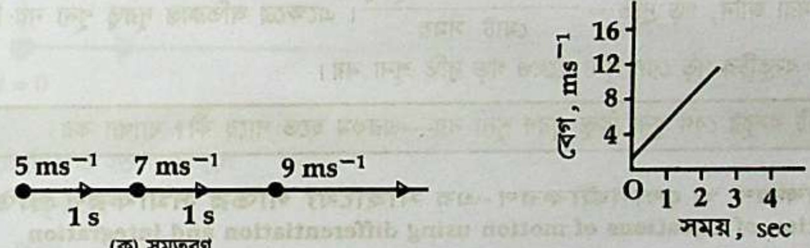
উল্লেখ্য, কোনো বিন্দুতে তাৎক্ষণিক ত্বরণ ওই বিন্দুতে বস্তুটির বেগের লম্ব বরাবর হবে।

ত্বরণ দুই প্রকার; যথা—(ক) সমত্বরণ (uniform acceleration) ও (খ) অসমত্বরণ (variable acceleration)।

(ক) সমত্বরণ : ত্বরণ যদি সব সময় ধ্রুব হয় তবে তাকে সমত্বরণ বলে। অভিকর্ষের টানে মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুর ত্বরণ সমত্বরণ। সমত্বরণশীল বস্তুতে সমবল ক্রিয়া করে। সমত্বরণে ত্বরণের মান ও দিক উভয়ই ধ্রুব থাকে।

৩·২০ (ক) চিত্রে একটি সরলরেখা বরাবর বস্তুর পর পর সেকেন্ডের বেগ দেখিয়ে তার ত্বরণের প্রকৃতি নির্দেশ করা হয়েছে। ৩·২০ (খ) চিত্রে লেখচিত্রের সাহায্যে সমত্বরণ দেখানো হয়েছে। এখানে সমত্বরণের মান $2\,ms^{-2}$। সমত্বরণের ক্ষেত্রে লেখচিত্র সরলরেখা এবং ঢাল সর্বত্র সমান হয়।

একটি বস্তুর সমত্বরণ $10\ ms^{-2}$ এই উক্তি দ্বারা বুঝা যায় যে, একই দিকে বস্তুর বেগ প্রতি সেকেন্ডেই $10\ ms^{-1}$ বৃদ্ধি পাচ্ছে।



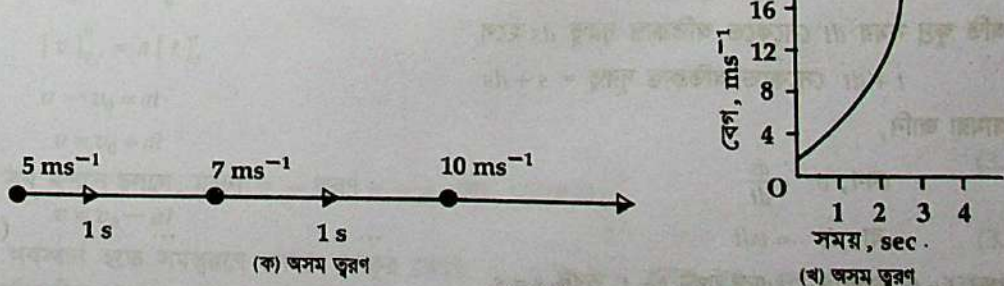
(ক) সমত্বরণ (খ) সমত্বরণ

চিত্র ৩·২০

কাজ : সমদ্রুতিতে চলমান কোনো বস্তুর ত্বরণ থাকা কী সম্ভব ? উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।

সমদ্রুতিতে চলমান বস্তুর ত্বরণ থাকা সম্ভব। একটি বস্তু যদি সম বৃত্তাকার পথে সমদ্রুতিতে পরিধি বরাবর আবর্তিত হয় তবে বস্তুটির ওপর কেন্দ্রাভিমুখি অভিকেন্দ্র ত্বরণ ক্রিয়াশীল হয়।

(খ) অসম ত্বরণ : সময়ের সাথে যখন ত্বরণ ভিন্ন ভিন্ন হয় তখন তাকে অসম ত্বরণ বলে। ত্বরণের মান ও দিক, কিংবা মান অথবা দিক পরিবর্তনের জন্য অসম ত্বরণ সৃষ্টি হতে পারে। বাস, ট্রেন, মোটরগাড়ি ইত্যাদির ত্বরণ অসম ত্বরণের উদাহরণ। এক কথায় গতিশীল প্রায় বস্তুর ত্বরণই অসম ত্বরণ।



(ক) অসম ত্বরণ (খ) অসম ত্বরণ

চিত্র ৩·২১

৩.২১ (ক) ও (খ) চিত্রে যথাক্রমে সরলরেখা ও লেখচিত্র দ্বারা অসম ত্বরণ দেখানো হয়েছে। লেখচিত্রের বিভিন্ন বিন্দুতে ঢাল ভিন্ন ভিন্ন হয়।

গাণিতিক উদাহরণ ৩.২

১। এক ব্যক্তি গড়ে 24 $kmhr^{-1}$ বেগে গন্তব্যস্থানের অর্ধেক পথ অতিক্রম করে। বাকি পথ কত বেগে চললে ওই ব্যক্তি সম্পূর্ণ পথ 32 $kmhr^{-1}$ গড় গতিবেগে অতিক্রম করবে ?

ধরা যাক, ওই ব্যক্তি মোট $2x$ km পথ অতিক্রম করে।

প্রশ্নানুসারে, প্রথম x km যেতে সময় লাগে $\frac{x}{24}$ hr। সমগ্র পথ 32 $kmhr^{-1}$ গড় বেগে অতিক্রম করলে মোট সময় লাগে,

$$\frac{2x}{32}\text{hr} = \frac{x}{16}\text{hr}$$

$\therefore$ শেষ অর্ধেক যেতে সময় নেয় $\left(\frac{x}{16}-\frac{x}{24}\right) = \frac{x}{48}$ hr

$\therefore$ দ্বিতীয় অর্ধেক ওই ব্যক্তির গতিবেগ হবে, $\frac{x}{x/48} = 48\ kmhr^{-1}$

কাজ : একটি বস্তুর গড় বেগ শূন্য কিন্তু ওই বস্তুর গড় দ্রুতি শূন্য নাও হতে পারে কী? ব্যাখ্যা কর।

বস্তুটি যদি একটি বিন্দু থেকে যাত্রা শুরু করে আবার ওই বিন্দুতে ফিরে আসে, তবে তার সরণ শূন্য হয়। এখন, গড় বেগ = $\frac{\text{মোট সরণ}}{\text{মোট সময়}}$। এক্ষেত্রে যেহেতু মোট সরণ শূন্য, তাই গড় বেগ শূন্য হবে।

আবার আমরা জানি, গড় দ্রুতি = $\frac{\text{মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব}}{\text{মোট সময়}}$। এক্ষেত্রে অতিক্রান্ত দূরত্ব শূন্য নয় বিধায় গড় দ্রুতি শূন্য হবে না। সুতরাং, বস্তুটির গড় বেগ শূন্য হলেও গড় দ্রুতি শূন্য নয়।

নিজে কর : একটি বস্তুর বেগ শূন্য কিন্তু ত্বরণ শূন্য নয়—এরকম হতে পারে কী? ব্যাখ্যা কর।

৩.৬ অন্তরীকরণ ও যোগজীকরণ-এর সাহায্যে গতির সমীকরণ প্রতিপাদন

Derivation of Equations of motion using differentiation and integration

পূর্বের অনুচ্ছেদে দূরত্ব, সরণ, বেগ, ত্বরণ ইত্যাদি রাশিগুলো সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়েছে। এই রাশিগুলো পরস্পর সম্পর্কযুক্ত। এগুলোকে কয়েকটি সমীকরণের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়। এই সমীকরণগুলোকে গতির সমীকরণ বলে। অন্তরীকরণ ও যোগজীকরণ ব্যবহার করে এ সমীকরণগুলো নিম্নে প্রতিপাদন করা হলো :

(ক) সমবেগে গতিশীল বস্তুর দূরত্বের সমীকরণ ($s = vt$ বা, $x = x_0 + v_x t$)

মনে করি একটি বস্তু নির্দিষ্ট দিকে সমবেগে গতিশীল।

ধরি, বস্তুটির সমবেগ = v

আদি সরণ = 0

t সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব = s

অতি ক্ষুদ্র সময় dt সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব ds হলে

$t + dt$ সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব = $s + ds$

আমরা জানি,

বেগ, $v = \frac{ds}{dt}$

বা, $ds = vdt$ ... ... (3.13)

যখন $t = 0$, তখন $s = 0$ এবং যখন $t = t$, তখন $s = s$

সমীকরণ (3.13)-কে উল্লিখিত সীমার মধ্যে সমাকলন করে পাওয়া যায়

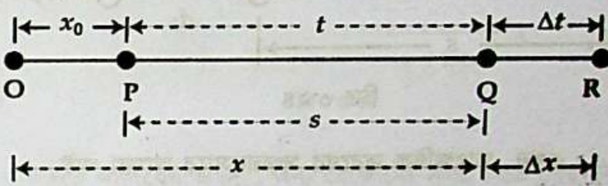
$$\int_0^s ds = \int_0^t v dt$$

বা, $\int_0^s ds = v \int_0^t dt \quad [\because v \text{ ধ্রুবক }]$

বা, $s = v \times t \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.14)$

যদি বস্তুটি X-অক্ষের দিকে গতিশীল হয় এবং গতির শুরুতে অর্থাৎ যখন $t = 0$, তখন $s = x_0$ এবং যখন $t = t$, তখন $s = x$ এবং বেগ, $v = v_x$ হয় [চিত্র ৩.২২], তবে সমীকরণ (3.13)-কে উপরোক্ত সীমার মধ্যে সমাকলন করে পাই,

$$\int_{x_0}^{x} ds = v_x \int_0^t dt$$



চিত্র ৩.২২

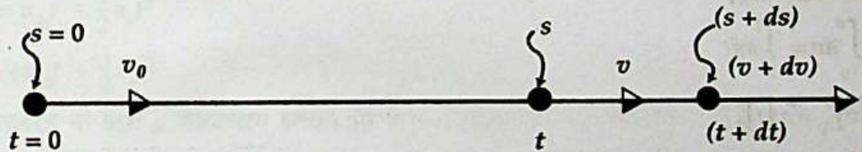
বা, $[s]_{x_0}^{x} = v_x [t]_0^t$

বা, $x - x_0 = v_y t$

বা, $x = x_0 + v_x t \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.15)$

(খ) **সমত্বরণে গতিশীল বস্তুর শেষ বেগের সমীকরণ ($v = v_0 + at$ বা $v_x = v_{x0} + a_x t$)**

মনে করি কোনো একটি দিকে v_0 আদি বেগসহ a সমত্বরণে গতিশীল বস্তুর বেগ অতি অল্প dt সময়ে v হতে



চিত্র ৩.২৩

বৃদ্ধি পেয়ে $v + dv$ হয় [চিত্র ৩.২৩]। তাহলে

ত্বরণের সংজ্ঞা অনুসারে,

ত্বরণ $a = \dfrac{dv}{dt}$

বা, $dv = adt \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.16)$

যখন $t = 0$, তখন $v = v_0$ এবং যখন $t = t$, তখন $v = v$। এই সীমার মধ্যে সমীকরণ (3.16)-এর উভয় পক্ষকে সমাকলন করে পাই,

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t adt$$

বা, $\int_{v_0}^{v} dv = a \int_0^t dt$

বা, $[v]_{v_0}^{v} = a[t]_0^t$

বা, $v - v_0 = at$

বা, $v = v_0 + at \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.17)$

বস্তু সম মন্দনে চললে, মন্দন = $-$ ত্বরণ = $-a$ এবং সেক্ষেত্রে

$v = v_0 - at \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.18)$

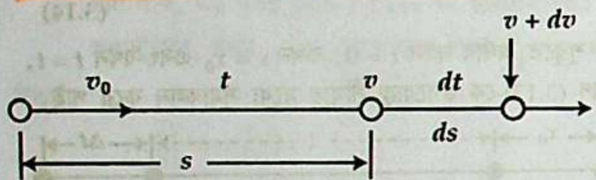
স্থির অবস্থান হতে সমত্বরণে চলমান বস্তুর ক্ষেত্রে $v_0 = 0$, a = ধ্রুবক হয়। সেক্ষেত্রে v = ধ্রুবক $\times t$ বা $v \propto t$ হয়। অর্থাৎ স্থির অবস্থান হতে সমত্বরণে চলমান বস্তুর ক্ষেত্রে বেগ সময়ের সমানুপাতিক।

বি. দ্র. X অক্ষ বরাবর গতিশীল বস্তুর ক্ষেত্রে আদিবেগ v_{x0}, শেষ বেগ v_x এবং ত্বরণ a_x ধরলে সমীকরণ (3.17) পরিবর্তিত হবে।

$$v_x = v_{x0} + a_x t \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.19)$$

অনুরূপভাবে, সমীকরণ (3.18) পরিবর্তিত হবে। Y বা Z অক্ষ বরাবর গতির ক্ষেত্রে x-এর স্থলে যথাক্রমে y বা z ব্যবহার করতে হবে।

(গ) সমত্বরণে বস্তুর অতিক্রান্ত দূরত্বের সমীকরণ ($s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ বা, $x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$)



চিত্র ৩·২৪

মনে করি, একটি বস্তুকণা v_0 আদি বেগসহ a সমত্বরণে কোনো নির্দিষ্ট দিকে গতিশীল।

বস্তুকণাটি t সময়ে s দূরত্ব অতিক্রম করে v বেগ প্রাপ্ত হয় এবং একই দিকে আরো অতি ক্ষুদ্র সময় dt পরে ds দূরত্ব অতিক্রমের পর $v + dv$ বেগ প্রাপ্ত হয় [চিত্র ৩·২৪]।

এখন, তাৎক্ষণিক ত্বরণের সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই,

$$a = \frac{dv}{dt}$$

বা, $dv = adt \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.20)$

যখন $t = 0$, তখন বেগ $v = v_0$ এবং যখন $t = t$, তখন বেগ $v = v$। এই সীমার মধ্যে সমীকরণ (3.20)-এর উভয় পক্ষকে সমাকলন করে পাই,

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t adt$$

বা, $[v]_{v_0}^{v} = a\,[t]_0^t$

বা, $v - v_0 = a(t - 0)$

বা, $v = v_0 + at \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.21)$

আবার, তাৎক্ষণিক বেগের সংজ্ঞানুসারে,

$$v = \frac{ds}{dt}$$

বা, $ds = vdt$

বা, $ds = (v_0 + at)dt$ [সমীকরণ (3.21)-এর সাহায্যে]

বা, $ds = v_0dt + atdt \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.22)$

আবার, যখন সময়, $t = 0$ অর্থাৎ গণনার শুরুতে $s = 0$ এবং t সময় পরে $s = s$; এই সীমার মধ্যে সমীকরণ (3.22)-এর উভয় পক্ষকে সমাকলন করে পাই,

$$\int_0^s ds = \int_v^t v_0 dt + \int_v^t atdt$$

বা, $\int_0^s ds = v_0 \int_v^t dt + a\int_v^t tdt$

বা, $[s]_0^s = v_0\,[t]_0^t + a\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^t$

বা, $(s - 0) = v_0\,(t - 0) + a\left(\frac{t^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right)$

বা, $s = v_0t + \frac{1}{2}at^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.23)$

আবার, বস্তুটি স্থির অবস্থান হতে সমত্বরণে গতিশীল হলে, আমরা পাই,

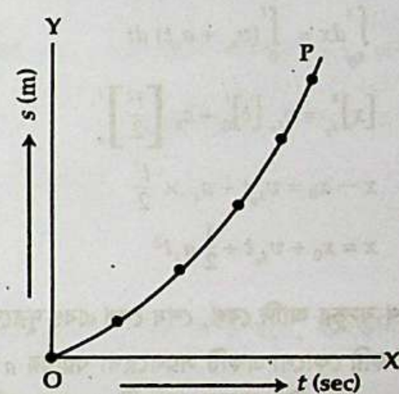
$s = 0 \times t + \frac{1}{2}at^2$

বা, $s = 0 + \frac{1}{2}at^2$

বা, $s = \frac{1}{2}at^2$

বা, $s = \text{ধ্রুবক} \times t^2 \quad \left[\because \frac{1}{2}a = \text{ধ্রুবক}\right]$

বা, $s \propto t^2$



চিত্র ৩.২৫

অর্থাৎ স্থির অবস্থান হতে সম-ত্বরণে চলমান বস্তুর অতিক্রান্ত দূরত্ব সময়ের বর্গের সমানুপাতিক।

চিত্র ৩.২৫-এ সময়ের সঙ্গে সরণের লেখচিত্র দেখানো হয়েছে।

যদি বস্তুটি X অক্ষ বরাবর গতিশীল হয় এবং $t = 0$ সময়ে আদিবেগ $= v_{x_0}$, অন্য যেকোনো সময় t-তে শেষ বেগ $= v$ ও সমত্বরণ a_x ধরা হলে সমীকরণ (3.23) লেখা যায়, $s = v_{x_0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$

এখন $t = 0$ সময়ে বস্তুটির আদি অবস্থান x_0 এবং t সময়ে এর অবস্থান x হলে, $s = x - x_0$ হবে। সেক্ষেত্রে

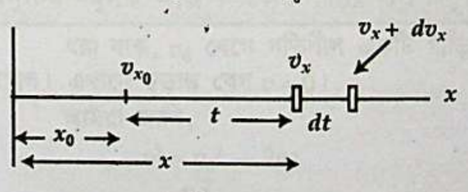
$s = x - x_0 = v_{x_0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$

বা, $x = x_0 + v_{x_0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$ .... (3.24)

বস্তু a সমত্বরণে না চলে a সমমন্দনে চললে, মন্দন = – ত্বরণ = $-a$ সমীকরণ (3.24) হতে পাই,

$s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$ ... ... (3.25)

মনে করি, একটি বস্তু X-অক্ষ বরাবর a_x সমত্বরণে গতিশীল এবং গণনার শুরুতে অর্থাৎ যখন $t = 0$ তখন বস্তুটির আদি অবস্থান $= x_0$, বেগ $= v_{x_0}$ এবং t সময় পরে অবস্থান $= x$, বেগ $= v_x$; এখন বস্তুটি একই দিকে আরও ক্ষুদ্র সময় dt পরে dx দূরত্ব অতিক্রম করে $v_x + dv_x$ বেগ প্রাপ্ত হলে, তাৎক্ষণিক ত্বরণের সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই,



চিত্র ৩.২৬

$a_x = \frac{dv_x}{dt}$

বা, $dv_x = a_x dt$ ... ... (3.26)

সমীকরণ (3.26)-কে যথাযথ সীমা তথা $t = 0$ ও $t = t$ এবং v_{x_0} ও v_x সীমার মধ্যে সমাকলন করে পাই,

$\int_{v_{x_0}}^{v_x} dv_x = \int_0^t a_x dt$

বা, $[v_x]_{v_{x_0}}^{v_x} = a_x [t]_0^t$

বা, $v_x - v_{x_0} = a_x (t - 0)$

বা, $v_x = v_{x_0} + a_x t$ ... ... (3.27)

আবার, তাৎক্ষণিক বেগের সংজ্ঞানুসারে পাই,

$v_x = \frac{dx}{dt}$

বা, $dx = v_x dt$ বা, $dx = (v_{x_0} + a_x t)\, dt$ ... ... (3.28) [সমীকরণ (3.27) এর সাহায্যে]

সমীকরণ (3.28) এর উভয় পক্ষকে x_0 ও x এবং $t = 0$ ও t সীমার মধ্যে সমাকলন করে পাই,

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (v_{x_0} + a_x t)\, dt$$

বা, $$[x]_{x_0}^{x} = v_{x_0}[t]_0^t + a_x\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^t$$

বা, $$x - x_0 = v_{x_0}t + a_x \times \frac{t^2}{2}$$

বা, $$x = x_0 + v_{x_0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

(ঘ) সমত্বরণে বস্তুর আদি বেগ, শেষ বেগ এবং দূরত্বের মধ্যে সম্পর্ক ($v^2 = v_0^2 + 2as$ বা, $v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a(x - x_0)$)

মনে করি কোনো একটি সরলরেখা বরাবর a সমত্বরণে গতিশীল একটি বস্তুর আদি বেগ $= v_0$; t সময় পরে তার শেষ বেগ $= v$ এবং উক্ত সময়ে বস্তুটি s দূরত্ব অতিক্রম করে। v, v_0, a ও s-এর সম্পর্কজনিত সমীকরণ প্রতিপাদন করতে হবে।

তাৎক্ষণিক ত্বরণের সংজ্ঞানুসারে,

$$a = \frac{dv}{dt}$$

বা, $$a = \frac{dv}{ds} \times \frac{ds}{dt}$$

বা, $$a = \frac{dv}{ds} \times v$$

বা, $$ads = v \times dv \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.29)$$

যখন $s = 0$, তখন $v = v_0$ এবং যখন $s = s$, তখন $v = v$; এই সীমার মধ্যে সমীকরণ (3.29)-এর উভয় পক্ষকে সমাকলন করে পাই,

$$\int_0^s ads = \int_{v_0}^{v} vdv \quad \text{বা, } a\int_0^s ds = \int_{v_0}^{v} vdv$$

বা, $$a[s]_0^s = \left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_0}^{v}$$

বা, $$a(s - 0) = \left(\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}\right)$$

বা, $$as = \frac{v^2 - v_0^2}{2}$$

বা, $$2as = v^2 - v_0^2$$

বা, $$v^2 = v_0^2 + 2as \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.30)$$

আবার, বস্তুটি স্থির অবস্থান হতে সমত্বরণে চলা শুরু করলে,

আমরা পাই,

$$v^2 = 0^2 + 2as$$

বা, $$v^2 = 2as$$

বা, $$v^2 = \text{ধ্রুবক} \times s \quad [\because 2a \text{ ধ্রুব সংখ্যা}]$$

বা, $$v^2 \propto s$$

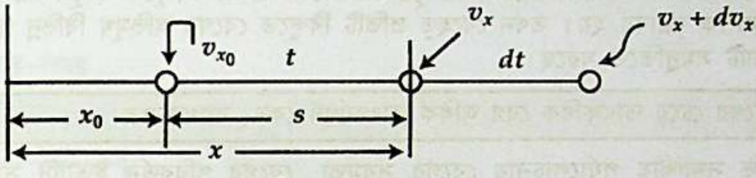
বা, $$v \propto \sqrt{s}$$

অর্থাৎ **স্থির অবস্থান হতে সমত্বরণে গতিশীল কোনো বস্তুর শেষ বেগ অতিক্রান্ত দূরত্বের বর্গমূলের সমানুপাতিক।**

$v_x^2 = v_x^2 + 2a_x(x - x_0)$ প্রতিপাদন :

মনে করি, একটি বস্তু X-অক্ষ বরাবর a_x সমত্বরণে গতিশীল।

গণনার শুরুতে, অর্থাৎ যখন সময়, $t = 0$ তখন বস্তুটির আদিবেগ $= v_{x0}$ এবং আদি অবস্থান $= x_0$ এবং t সময় পরে বেগ $= v_x$ এবং অবস্থান $= x$



চিত্র ৩.২৭

এখন, বস্তুটি ওই X-অক্ষ বরাবরই আরও অতি ক্ষুদ্র সময় dt পরে $v_x + dv_x$ বেগ প্রাপ্ত হলে, তাৎক্ষণিক ত্বরণের সংজ্ঞানুসারে, আমরা পাই,

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

বা, $a_x = \frac{dv_x}{dx} \times \frac{dx}{dt}$ বা, $a_x = \frac{dv_x}{dx} \times v_x$

বা, $a_x dx = v_x \times dv_x$ ... ... (3.31)

যখন $x = x_0$, তখন $v = v_{x0}$ এবং যখন $x = x$, তখন $v = v_x$; এই সীমার মধ্যে সমীকরণ (3.31)-এর উভয় পক্ষকে সমাকলন করে পাই,

$$\int_{x_0}^{x} a_x dx = \int_{v_{x0}}^{v_x} v_x dv_x$$

বা, $a_x \int_{x_0}^{x} dx = \int_{v_{x0}}^{v_x} v_x dv_x$ বা, $a_x [x]_{x_0}^{x} = \left[\frac{v_x^2}{2}\right]_{v_{x0}}^{v_x}$

বা, $a_x(x - x_0) = \left(\frac{v_x^2}{2} - \frac{v_{x0}^2}{2}\right)$ বা, $a_x(x - x_0) = \frac{v_x^2 - v_{x0}^2}{2}$

বা, $v_x^2 - v_{x_0}^2 = 2a_x(x - x_0)$ বা, $v_x^2 = v_{x_0}^2 + 2a_x(x - x_0)$

অনুসন্ধানমূলক কাজ : একটি গাড়ির গতি দ্বিগুণ হলে ব্রেক চেপে থামানোর দূরত্ব কতগুণ হতে হবে? ব্যাখ্যা কর।

ধরা যাক, v_0 বেগে গতিশীল একটি গাড়িতে ব্রেক চেপে a মন্দন সৃষ্টি করা হলো, ফলে s দূরত্বে গিয়ে গাড়িটি থামল। এখানে চূড়ান্ত বেগ $v = 0$।

আমরা জানি,

$$v^2 = v_0^2 - 2as$$

বা, $s = \frac{v_0^2}{2a}$

বা, $s \propto v_0^2$ (ব্রেকের জন্য মন্দন, a = ধ্রুবক)

সুতরাং, গাড়ির প্রাথমিক বেগ দ্বিগুণ হলে, গাড়িটি থামানোর দূরত্ব, $s = (2)^2 = 4$ গুণ হতে হবে।

গাণিতিক উদাহরণ ৩.৩

১। একটি গতিশীল কণার অতিক্রান্ত দূরত্ব সময়ের বর্গের সমানুপাতিক হলে বস্তুটির ত্বরণ কীরূপ হবে ?

এখানে,

$s \propto t^2$ বা, $s = Kt^2$

$\therefore \quad v = \frac{ds}{dt} = 2Kt$

ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(2Kt) = 2K$ = ধ্রুবক

সুতরাং, বস্তুটির ত্বরণ ধ্রুবক।

কাজ : সমদ্রুতিসম্পন্ন কোনো কণার বেগ কী অসম হতে পারে ?

সমদ্রুতিসম্পন্ন একটি কণার বেগ অসম হতে পারে। সমদ্রুতিতে গতিশীল কোনো কণার অভিমুখ যখন পরিবর্তিত হয় তখন কণার গতিবেগের পরিবর্তন হয়। অর্থাৎ কণার বেগ অসম হয়; কিন্তু দ্রুতির কোনো পরিবর্তন হয় না। যখন একটি কণা সমদ্রুতিতে বৃত্তাকার পথে আবর্তন করে তখন বৃত্তাকার পথের প্রতিটি বিন্দুতে বস্তুকণার বেগের অভিমুখ ওই বিন্দুতে বৃত্তাকার পথের স্পর্শক বরাবর হয়। তখন যেহেতু প্রতিটি বিন্দুতে বেগের অভিমুখ বিভিন্ন হয় ফলে বস্তুর বেগ অসমবেগ হয়, যদিও কণাটি সমদ্রুতিতে ঘুরছে।

কাজ : বলবিদ্যায় গড় বেগের চেয়ে তাৎক্ষণিক বেগ অধিক তাৎপর্যপূর্ণ কেন, ব্যাখ্যা কর।

কোনো বস্তুর গতি সম্বন্ধীয় পর্যালোচনায় বেগের সুষমতা, বেগের পরিবর্তন ইত্যাদি সম্বন্ধে ধারণা খুবই গুরুত্বপূর্ণ। এই ধারণাগুলি গড় বেগ থেকে পাওয়া যায় না। সেই কারণে গড় বেগের তুলনায় তাৎক্ষণিক বেগ অধিক তাৎপর্যপূর্ণ।

কাজ : একজন গাড়ি চালককে শেখানো হয় যে গাড়ির বেগ দ্বিগুণ করলে গাড়িটিকে থামানোর দূরত্ব চারগুণ হতে হবে। ব্যাখ্যা কর।

ধরা যাক, গাড়ির প্রাথমিক বেগ v_0 এবং a সমমন্দনে চলায় গাড়িটি x দূরত্বে গিয়ে থামল।

$\therefore \quad x = \dfrac{v_0^2}{2a}$ $\quad [\because v^2 = v_0^2 - 2ax]$

বা, $\quad x \propto v_0^2$ $\quad [\because a = \text{ধ্রুবক}]$

সুতরাং গাড়ির বেগ দ্বিগুণ করলে, গাড়িটিকে থামানোর দূরত্ব $(2)^2$ অর্থাৎ চারগুণ হবে।

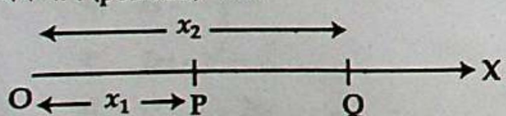
৩·৭ অবস্থান-সময়, দূরত্ব-সময় ও বেগ-সময় লেখচিত্র
Position-time, distance-time and velocity-time graphs

বস্তুর অবস্থানের পরিবর্তন অবস্থান-সময়, দূরত্বের পরিবর্তন দূরত্ব-সময় এবং বেগের পরিবর্তন বেগ-সময় লেখচিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়।

৩·৭·১ অবস্থান-সময় লেখচিত্র
Position-time graphs

সময় অতিবাহিত হওয়ার সাথে সাথে একটি গতিশীল বস্তুর অবস্থানের পরিবর্তন ঘটে। এই সম্পর্ক লেখচিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। এক্ষেত্রে গ্রাফ কাগজে X-অক্ষ বরাবর সময় (t) Y-অক্ষ বরাবর অবস্থানের পরিবর্তন (Δx) স্থাপন করা হয়। এই লেখচিত্রকে অবস্থান-সময় লেখচিত্র বলে। এই লেখচিত্র থেকে বস্তুর বেগ নির্ণয় করা হয়। নিম্নে সুষম ও অসম বস্তুর গতি বুঝানো হয়েছে এবং সরলরেখা বরাবর গতি বিবেচনা করা হয়েছে।

১. কোনো বস্তু একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে কোনো নির্দিষ্ট দূরত্বে অবস্থিত হলে সেই বিন্দু থেকে বস্তুর দূরত্বকে অবস্থান (position) বলে।

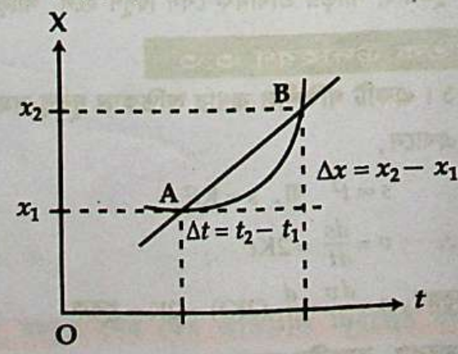


চিত্র ৩·২৮

মনে কর একটি বস্তু X-অক্ষ বরাবর গতিশীল। বস্তুটি যখন P বিন্দুতে তখন মূলবিন্দু O থেকে বস্তুটির দূরত্ব x_1 এবং যখন Q বিন্দুতে অবস্থান করে তখন দূরত্ব x_2। X-অক্ষ বরাবর বস্তুর এরূপ গতি চিত্র ৩·২৮ দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

আবার মনে করি কোনো একটি বস্তু t_1 সময়ে A বিন্দুতে এবং t_2 সময়ে B বিন্দুতে অবস্থান করে। X-অক্ষ বরাবর A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে x_1 এবং x_2। এক্ষেত্রে t_2 এবং t_1 সময়ের মধ্যকার ব্যবধান $\Delta t = t_2 - t_1$ চিত্র ৩·২৯ এ দেখানো হলো।

২. লেখচিত্রের সাহায্যেও কোনো বস্তুর গতির বিষয়ে আলোচনা করা যায়। এই পদ্ধতিতে Y-অক্ষ বরাবর সরণ, বেগ বা ত্বরণের মানকে এবং x-অক্ষ বরাবর সময় সূচিত করে লেখচিত্র আঁকা যায়।



চিত্র ৩·২৯

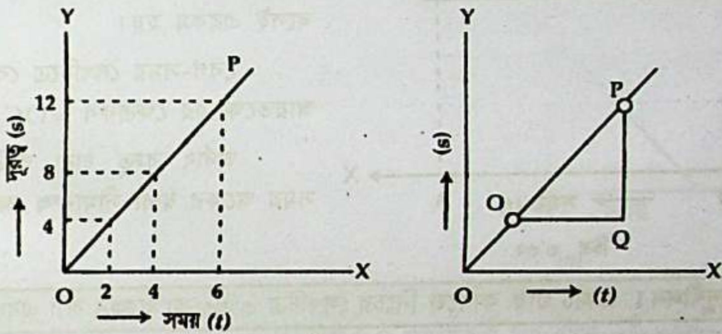
৩·৭·২ দূরত্ব-সময় লেখচিত্র
Distance-time graphs

(i) দূরত্ব-সময় লেখচিত্র (সমবেগের ক্ষেত্রে) :

একটি মোটর সাইকেলের গতি সমতল রাস্তায় 2 মিনিট পরপর নিচের সারণিতে দেখানো হলো [সারণি ৩·১]।

সারণি ৩·১ : দূরত্ব–সময়

সময় t (min)	দূরত্ব s (km)
0	0
2	4
4	8
6	12



চিত্র ৩·৩০

সমবেগে গতিশীল বস্তু একই সময়ে একই দূরত্ব অতিক্রম করবে। সুতরাং সময় সাপেক্ষে দূরত্বের লেখচিত্র মূল বিন্দুগামী একটি সরলরেখা OP হয় [চিত্র ৩·৩০]।

$$\text{OP রেখার ঢাল} = \frac{PQ}{OQ} = \frac{\text{দূরত্ব}}{\text{সময়}} = \text{বেগ}$$

অতএব বস্তুর সমবেগে দূরত্ব-সময় লেখচিত্রের নতির সমান হয়। অর্থাৎ যে কোনো সময়ে বেগের মান হবে ওই বিন্দুতে অঙ্কিত ঢালের মান।

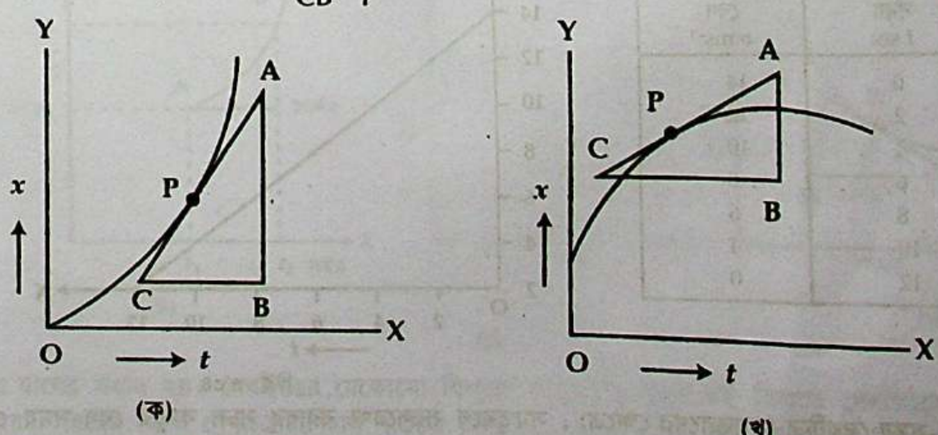
কাজ : একটি গ্রাফ কাগজে তোমার পছন্দমতো ও সুবিধাজনক মান নিয়ে উপরের সারণিতে বর্ণিত গতির জন্য দূরত্ব-সময় লেখচিত্রটি অঙ্কন কর। এই লেখচিত্র থেকে এবং 10 মিনিটে অতিক্রান্ত দূরত্ব ও বেগ নির্ণয় কর।

(ii) দূরত্ব-সময় লেখচিত্র (অসম বেগের ক্ষেত্রে) :

অসম বেগে গতিশীল বস্তু একই সময়ে একই দূরত্ব অতিক্রম করে না। অবস্থান (x) ও সময় (t) এর লেখচিত্র বক্ররেখা হয়। যেকোনো সময়ের বেগ নির্ণয়ে ওই বিন্দু হতে স্পর্শক টেনে ঢাল নিলে বেগ পাওয়া যায়। ৩·৩১ চিত্রে P বিন্দুতে বেগ নির্ণয় করা হয়েছে।

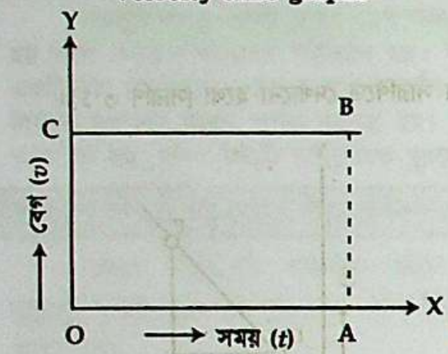
এরূপ বক্ররেখার ঢাল বিভিন্ন বিন্দুতে বা ভিন্ন ভিন্ন সময়ে ভিন্ন হয়। এই ঢালের মান ওই সময়ে অসম বেগের মান নির্দেশ করে।

চিত্র অনুযায়ী, P বিন্দুতে বেগ, $v = \frac{AB}{CB} = \frac{x}{t}$



চিত্র ৩·৩১

৩·৭·৩ বেগ-সময় লেখচিত্র
Velocity-time graphs



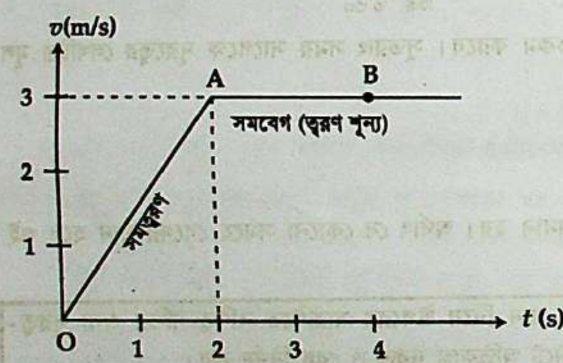
চিত্র ৩·৩২

(i) বেগ-সময় লেখচিত্র (সমবেগের ক্ষেত্রে) : সমবেগে চলমান বস্তুর সময় সাপেক্ষে বেগের লেখচিত্র সময় অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা CB হয় [চিত্র ৩·৩২]। সময়ের সাথে বেগের কোনো পরিবর্তন হয় না বলেই এরকম হয়।

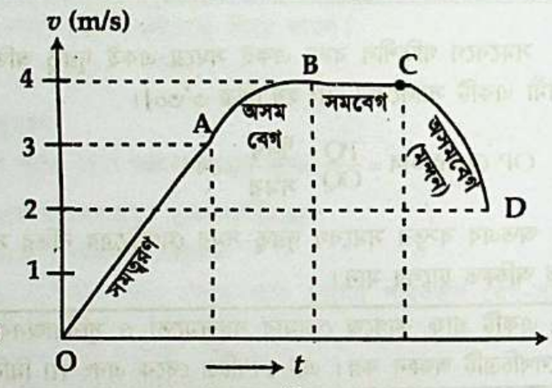
বেগ-সময় লেখচিত্রে বেগ ও সময় অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ OABC আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= OC \times OA = vt = s$

অর্থাৎ বস্তু দ্বারা অতিক্রান্ত দূরত্ব বেগ-সময় লেখচিত্রের বেগ ও সময় অক্ষের দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফলের সমান হয়।

কর্ম অনুশীলন I. একটি গ্রাফ কাগজে নিচের লেখচিত্র ৩·৩৩(ক) অঙ্কন কর এবং A এবং B বিন্দুতে বেগ ব্যাখ্যা কর।



চিত্র ৩·৩৩(ক)



চিত্র ৩·৩৩(খ)

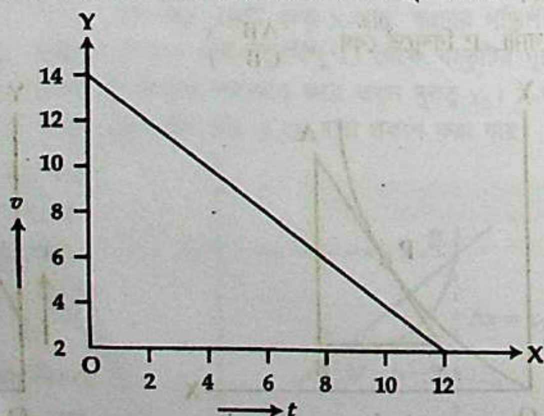
কর্ম অনুশীলন II. একটি গ্রাফ কাগজে লেখচিত্র ৩·৩৩(খ) অঙ্কন কর এবং A, B, C, D বিন্দুতে বেগ ব্যাখ্যা কর।

(ii) বেগ-সময় লেখচিত্র (অসমবেগের ক্ষেত্রে) : $t = 0$ sec থেকে 2 sec পর পর বেগ হ্রাসের মান সারণি ৩·২ দেওয়া হলো। প্রাপ্ত মান থেকে $v — t$ লেখচিত্র অঙ্কন করলে লেখচিত্রটি নিম্নরূপ হয় [চিত্র ৩·৩৪]।

এই লেখচিত্রে যে কোনো সময় t-তে বস্তুর বেগ v নির্ণয় করা যায়। চিত্র থেকে দেখা যায় সময়ের সাথে সাথে বেগ হ্রাস পায়। চিত্র থেকে আরও দেখা যায়, 0 সময়ে বস্তুর বেগ 14 ms^{-1} এবং 12 sec সময়ে বেগ শূন্য। এটি একটি অসম বেগ। এক্ষেত্রে সময়ের সাথে সাথে বেগ হ্রাস পাচ্ছে এবং প্রতিক্ষেত্রে ত্বরণ (বা মন্দন) ধ্রুব থাকে।

সারণি : ৩·২

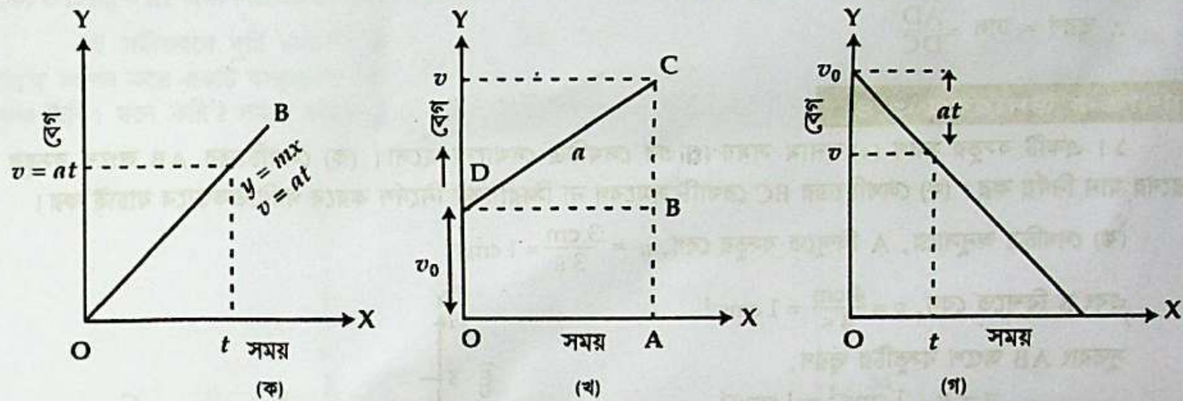
সময় t sec	বেগ v ms^{-1}
0	14
2	12
4	10
6	8
8	6
10	4
12	0



চিত্র ৩·৩৪

(iii) বেগ-সময় লেখচিত্র (সমত্বরণের ক্ষেত্রে) : সমত্বরণে সরলরেখা বরাবর সচল বস্তুর বেগ-সময় লেখচিত্রটি একটি সরলরেখা হয়। একই সময় অবকাশে একই পরিমাণ বেগ বৃদ্ধি হয় বলে লেখচিত্রটি এরূপ হয়। বস্তুটি স্থির

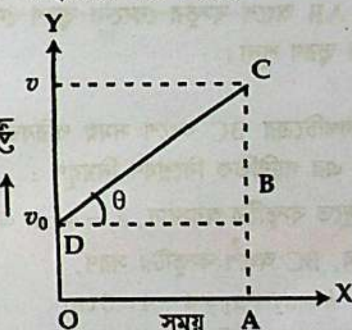
অবস্থান থেকে যাত্রা শুরু করলে সরলরেখাটি মূল বিন্দুগামী হয়, ৩.৩৫(ক) চিত্রে OB সরলরেখা। এই সরলরেখার ঢাল থেকে ত্বরণ নির্ণয় করা যায়।



চিত্র ৩.৩৫

কিন্তু বস্তুটির যদি প্রাথমিক বেগ থাকে তবে বেগ-সময় লেখচিত্রটি DC সরলরেখা হয় [চিত্র ৩.৩৫(খ)]। এখানে OD = প্রাথমিক বেগ v_0। দুটি ক্ষেত্রেই সরলরেখাটির নতি বা ঢাল বস্তুর সমত্বরণের সমান হয়।

ত্বরণ নির্ণয় : চিত্র ৩.৩৫(খ)–এ সময় t = OA,
প্রাথমিক বেগ v_0 = OD, চূড়ান্ত বেগ, v = AC



ত্বরণ, $a = \dfrac{\text{বেগ পরিবর্তন}}{\text{সময়}}$

$= \dfrac{AC - OD}{OA} = \dfrac{AC - AB}{BD}$

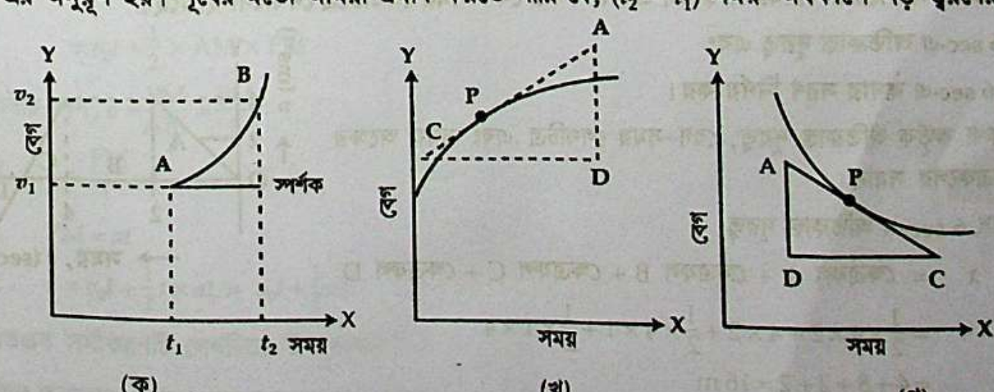
$= \dfrac{BC}{DB}$

= DC সরলরেখার ঢাল বা নতি

= $\tan\theta$ (ধ্রুবক)

(iv) বেগ-সময় লেখচিত্র (সম-মন্দনের ক্ষেত্রে) : সম মন্দনে চলমান বস্তুর প্রাথমিক বেগ থাকবেই। এক্ষেত্রেও বেগ-সময় লেখচিত্রটি সরলরেখা হবে। কিন্তু এর ঢাল ঋণাত্মক হবে [চিত্র ৩.৩৫(গ)]। ঋণাত্মক ঢাল মন্দন বুঝায়। সরলরেখাটির ঢাল বস্তুর সম মন্দনের সমান হয়। শেষ পর্যন্ত বস্তুটি স্থির অবস্থায় আসে অর্থাৎ এর বেগ শূন্য হয়।

(v) বেগ-সময় লেখচিত্র (অসম ত্বরণের ক্ষেত্রে) : অসম ত্বরণে চলমান বস্তুর ক্ষেত্রে বেগ-সময় লেখচিত্রটি বক্ররেখা হয় [চিত্র ৩.৩৬(ক) ও ৩.৩৬(খ)]। সময়ের সঙ্গে বেগ বাড়লে ত্বরণও বাড়ে এবং লেখচিত্র ৩.৩৬(ক) ও ৩.৩৬(খ)-এর অনুরূপ হয়। পূর্বের মতো আমরা প্রমাণ করতে পারি যে, $(t_2 - t_1)$ সময় অবকাশে গড় ত্বরণের মান AB



চিত্র ৩.৩৬

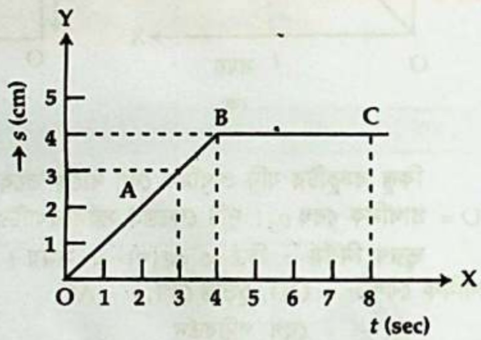
জ্যা-এর ঢালের সমান হয়। লেখচিত্রের যেকোনো বিন্দুতে তাৎক্ষণিক ত্বরণ ওই বিন্দুতে লেখচিত্রের স্পর্শকের ঢালের সমান হয়। সময়ের সঙ্গে লেখচিত্রটির ঢাল বাড়তে থাকে। এ থেকে বোঝা যায় যে, ত্বরণ স্থির নয় [চিত্র ৩.৩৬(খ)]

বরং সময়ের সঙ্গে বাড়ছে। বস্তুর বেগ সময়ের সাথে কমলে বা মন্দন হলে লেখচিত্রটি ৩.৩২(গ) চিত্রের অনুরূপ হয়। P বিন্দুর ত্বরণ ΔADC এর ঢাল থেকে পাওয়া যায়।

$\therefore$ ত্বরণ = ঢাল $= \frac{AD}{DC}$

গাণিতিক উদাহরণ ৩.৪

১। একটি বস্তুর সরণ (s) বনাম সময় (t) এর লেখচিত্র দেখানো হলো। (ক) লেখচিত্রের AB অংশে বস্তুর ত্বরণের মান নির্ণয় কর। (খ) লেখচিত্রের BC রেখাটি সমবেগ না স্থিরাবস্থা নির্দেশ করবে গাণিতিকভাবে যাচাই কর।



(ক) লেখচিত্র অনুসারে, A বিন্দুতে বস্তুর বেগ, $u = \frac{3\text{ cm}}{3\text{ s}} = 1\text{ cms}^{-1}$

এবং B বিন্দুতে বেগ, $v = \frac{4\text{ cm}}{4\text{ s}} = 1\text{ cms}^{-1}$

সুতরাং AB অংশে বস্তুটির ত্বরণ,

$$a = \frac{v-u}{t_2-t_1} = \frac{1\text{ cms}^{-1} - 1\text{ cms}^{-1}}{(4-3)}$$

$$= \frac{0\text{ cms}^{-1}}{1\text{ s}} = 0\text{ cms}^{-2}$$

অর্থাৎ AB অংশে বস্তুর কোনো ত্বরণ নেই। সুতরাং AB অংশে বস্তুটির ত্বরণ শূন্য।

(খ) লেখচিত্রের BC অংশে সময় পরিবর্তনের সাথে দূরত্ব একই থাকে। অর্থাৎ BC রেখাটি বস্তুটির স্থিরাবস্থা নির্দেশ করে। এর গাণিতিক বিশ্লেষণ নিম্নরূপ :

B বিন্দুতে বস্তুটির অবস্থান, $s_1 = 4$ cm এবং C বিন্দুতে বস্তুটির অবস্থান, $s_2 = 4$ cm

অতএব, BC অংশে বস্তুটির সরণ,

$$h = x_2 - x_1 = 4 - 4 = 0\text{ cm}$$

এবং BC অংশে অতিক্রান্ত সময়,

$$t = (8-4)\text{ s} = 4\text{ s}$$

এখন, BC অংশে বস্তুটির বেগ,

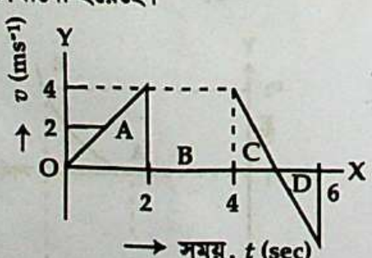
$$v = \frac{x}{t} = \frac{0\text{ cm}}{4\text{ s}} = 0\text{ cms}^{-1}$$

অর্থাৎ BC অংশে বস্তুটির কোনো বেগ নেই। এটি স্থির থাকে।

২। চিত্রে সরলরেখা বরাবর গতিশীল একটি কণার বেগ-সময় লেখচিত্রে দেখানো হয়েছে।

(i) 6 sec-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব এবং

(ii) 6 sec-এ কণার সরণ নির্ণয় কর।



(i) কণা কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব, বেগ-সময় লেখচিত্র এবং সময় অক্ষের মধ্যবর্তী ক্ষেত্রফলের সমান।

সুতরাং 6 sec-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$$x = \text{ক্ষেত্রফল A} + \text{ক্ষেত্রফল B} + \text{ক্ষেত্রফল C} + \text{ক্ষেত্রফল D}$$

$$= \frac{1}{2}\times4\times2 + 4\times2 + \frac{1}{2}\times4\times1 + \frac{1}{2}\times1\times4$$

$$= 4 + 8 + 2 + 2 = 16\text{ m}$$

(ii) 6 sec-এ কণার সরণ,

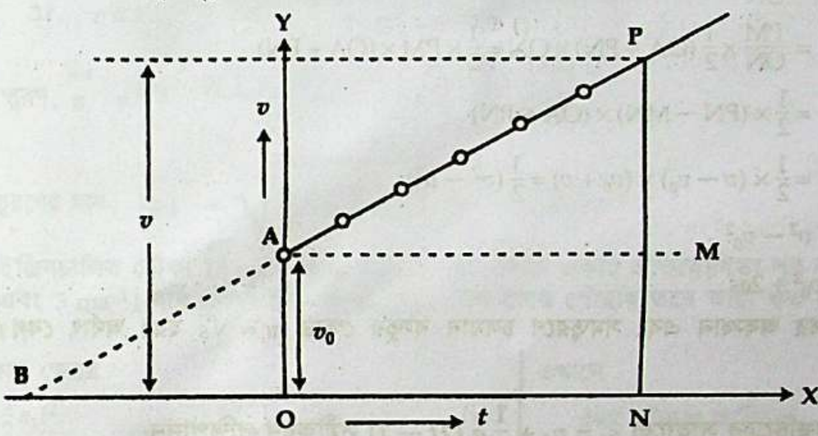
$$s = \text{ক্ষেত্রফল A} + \text{ক্ষেত্রফল B} + \text{ক্ষেত্রফল C} - \text{ক্ষেত্রফল D}$$

$$= 4 + 8 + 2 - 2 = 12\text{ m}$$

৩.৭.৪ বেগ-সময় লেখচিত্রের সাহায্যে গতির সমীকরণ প্রতিপাদন

(ক) $v = v_0 + at$ সমীকরণের ক্ষেত্রে লেখচিত্র

এই সমীকরণে দুটি চলরাশি আছে, একটি হলো সময় t অপরটি হলো বেগ v। t কে X অক্ষে এবং v কে Y অক্ষে স্থাপন করে একটি বস্তুকণার বেগ-সময় লেখচিত্র আঁকা হলো [চিত্র ৩.৩৭]। চিত্রে P বিন্দু হতে Y অক্ষের উপর PY লম্ব টানি। মনে করি t সময়ে বস্তুর চূড়ান্ত বেগ $= v = OY$; এখন $OY = OA + AY$ অর্থাৎ $v = v_0 + at$.



চিত্র ৩.৩৭

এখানে ঢাল, $a = \frac{PM}{AM} = \frac{AY}{AM} = \frac{AY}{t}$

$\therefore\quad v = v_0 + at$ সমীকরণটি লেখচিত্রে উপস্থাপন করা যায়।

স্থির অবস্থান থেকে চলমান বস্তুর ক্ষেত্রে $v_0 = 0$, $a =$ ধ্রুবক হয় $\therefore\ v = 0 +$ ধ্রুবক $\times t$ $\therefore\ v \propto t$

অর্থাৎ বেগ সময়ের সমানুপাতিক।

(খ) $s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ সমীকরণের ক্ষেত্রে লেখচিত্র

চিত্র ৩.৩৭-এ v বনাম t লেখচিত্রটি একটি সরলরেখা। চিত্রে $PN \perp OX$; $AM \perp PN$

ধরি আদি বেগ $= v_0$, সমত্বরণ $= a$, $ON = t$ এবং t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= s$

এখন s = OAPN ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= OAMN আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + AMP ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= OA \times ON + \frac{1}{2} \times AM \times PM$

$= v_0t + \frac{1}{2} \times AM \times PM$

আবার ঢাল, $a = \frac{PM}{AM} = \frac{PM}{t}$

বা, $a = \frac{PM}{t}$

$\therefore\quad PM = at$

$\therefore\quad s = v_0t + \frac{1}{2}t \times at = v_0t + \frac{1}{2}at^2$

অতএব সমীকরণটি লেখচিত্রে উপস্থাপন করা যায়।

স্থির অবস্থান থেকে সমত্বরণে চলমান বস্তুর ক্ষেত্রে $s = 0 \times t + \frac{1}{2} \times$ ধ্রুবক $\times t^2$

বা, $s =$ ধ্রুবক $\times t^2$ বা, $s \propto t^2$

অর্থাৎ সরণ সময়ের বর্গের সমানুপাতিক।

(গ) বেগ-সময় লেখচিত্রের সাহায্যে $v^2 = v_0^2 + 2as$ সমীকরণ প্রতিপাদন

চিত্র ৩.৩৭-এ AP সরলরেখার ঢাল বা নতি

$$a = \frac{PM}{AM} = \frac{PM}{ON}$$

সুতরাং, $as = \frac{PM}{ON} \times$ OAPN ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{PM}{ON} \times \frac{1}{2}(OA + PN) \times ON = \frac{1}{2} \times PM \times (OA + PN)$$

$$= \frac{1}{2} \times (PN - MN) \times (OA + PN)$$

$$= \frac{1}{2} \times (v - v_0) \times (v_0 + v) = \frac{1}{2}(v^2 - u^2)$$

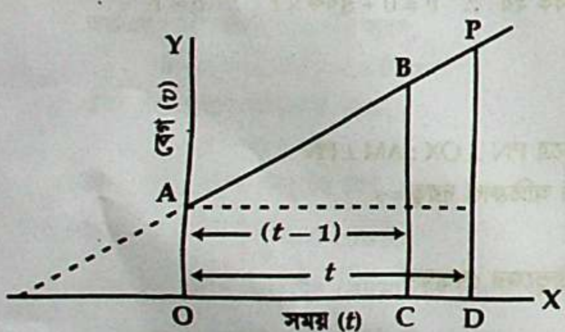
বা, $2as = v^2 - v_0^2$

বা, $v^2 = v_0^2 + 2as$

এক্ষেত্রে স্থির অবস্থান এবং সমত্বরণে চলমান বস্তুর ক্ষেত্রে $v \propto \sqrt{s}$ হয়। অর্থাৎ বেগ দূরত্বের বর্গমূলের সমানুপাতিক।

(ঘ) বেগ-সময় লেখচিত্রের সাহায্যে $s_t = v_0 + \frac{1}{2} a\,(2t - 1)$ সমীকরণ প্রতিপাদন

বেগ-সময় লেখচিত্র ৩.৩৮-এ AP সরলরেখাটি কণার গতি নির্দেশ করে। অর্থাৎ AP সরলরেখার সমীকরণ হলো $v = v_0 + at$। মনে করি ওই সরলরেখায় AB ও AP অংশদ্বয় যথাক্রমে $(t-1)$ সেকেন্ড ও t সেকেন্ড সময় পর্যন্ত গতি নির্দেশ করে। সুতরাং BP রেখাংশ t-তম সেকেন্ডের গতি নির্দেশ করে। তাই t-তম সেকেন্ডের সরণ



চিত্র ৩.৩৮

s_t = BP রেখাংশ ও সময় অক্ষের মধ্যবর্তী ক্ষেত্রফল

= CBPD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}(CB + DP) \times CD$$

চিত্র ৩.৩৮-এ $CD = OD - OC = - (t-1) = 1$ s

CB = $(t-1)$ সময়ে বেগ $= v_0 + a\,(t-1)$

DP = t সময়ে বেগ $= v_0 + at$

$$\therefore \quad s_t = \frac{1}{2}\,[v_0 + a(t-1) + v_0 + at] \times 1$$

$$= \frac{1}{2}\,[2v_0 + a\,(2t-1)]$$

$$= v_0 + \frac{1}{2} a\,(2t-1)$$

কাজ : একটি গতিশীল কণা কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব সময়ের বর্গের সমানুপাতিক হলে বস্তুটি সমবেগে চলছে, না সমত্বরণে চলছে ? ব্যাখ্যা কর।

প্রশ্নানুসারে,

$x \propto t^2$ [এখানে x অতিক্রান্ত দূরত্ব এবং t = সময়]

$\therefore \quad x = ct^2$

এখন বেগ, $v = \frac{dx}{dt} = 2ct$ [c = ধ্রুবক]

এবং ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = 2c$

সুতরাং, কণাটি সমত্বরণে চলছে।

গাণিতিক উদাহরণ ৩.৫

১। একটি বস্তুর বেগ 8s-এ $(4\hat{i}+2\hat{j})\ ms^{-1}$ হতে বৃদ্ধি পেয়ে $(12\hat{i}-4\hat{j})\ ms^{-1}$ হলো। গড় ত্বরণ নির্ণয় কর।

প্রশ্নানুযায়ী, $\Delta\vec{v} = \{(12\hat{i}-4\hat{j})-(4\hat{i}+2\hat{j})\}\ ms^{-1} = (8\hat{i}-6\hat{j})\ ms^{-1}$ এবং

$\Delta t = 8\ s$

$\therefore$ গড় ত্বরণ, $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{(8\hat{i}-6\hat{j})\ ms^{-1}}{8s} = (\hat{i}-\frac{3}{4}\hat{j})\ ms^{-2}$

এবং গড় ত্বরণের মান, $|\vec{a}| = \sqrt{(1)^2+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}\ ms^{-2} = 1.25\ ms^{-2}$

২। দুটি ইঞ্জিনচালিত নৌকা $10\ ms^{-1}$ এবং $5\ ms^{-1}$ বেগ নিয়ে একটি প্রতিযোগিতা শুরু করে। তাদের ত্বরণ যথাক্রমে $2\ ms^{-2}$ এবং $3\ ms^{-2}$। যদি নৌকা দুটি একই সময়ে শেষ প্রান্তে পৌঁছায় তবে তারা কত সময় প্রতিযোগিতায় অংশগ্রহণ করেছিল ?

এখানে
প্রথম নৌকার আদিবেগ, $v_{01} = 10\ ms^{-1}$
প্রথম নৌকার ত্বরণ, $a_1 = 2\ ms^{-2}$
দ্বিতীয় নৌকার আদিবেগ, $= v_{02} = 5\ ms^{-1}$
দ্বিতীয় নৌকার ত্বরণ, $a_2 = 3\ ms^{-2}$

প্রথম নৌকার ক্ষেত্রে

$s = v_{01}t + \frac{1}{2}a_1t^2$ ... ... (i)

দ্বিতীয় নৌকার ক্ষেত্রে

$s = v_{02}t + \frac{1}{2}a_2t^2$ ... ... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) থেকে পাই

$v_{01}t + \frac{1}{2}a_1t^2 = v_{02}t + \frac{1}{2}a_2t^2$

$(v_{01}-v_{02})t = \frac{1}{2}(a_2-a_1)t^2$ ... (iii)

বা, $(10-5)t = \frac{1}{2}(3-2)t^2$ বা, $5t = \frac{1}{2}\times t^2$

বা, $5 = \frac{1}{2}t$

$\therefore$ $t = 10\ sec$

৩। একটি ট্রেন স্থির অবস্থান হতে $10\ ms^{-2}$ ত্বরণে চলতে আরম্ভ করল। একই সময়ে একটি গাড়ি $100\ ms^{-1}$ সমবেগে ট্রেনের সমান্তরালে চলা শুরু করল। ট্রেন গাড়িটিকে কখন পিছনে ফেলে যাবে ?

মনে করি, ট্রেনটি t সময় পরে s দূরত্ব অতিক্রম করে গাড়িটিকে পিছনে ফেলবে।

এখানে,
ট্রেনের আদিবেগ, $v_{01} = 0$
ত্বরণ, $a_1 = 10\ ms^{-2}$
গাড়ির আদিবেগ, $v_{02} = 100\ ms^{-1}$
গাড়ির ত্বরণ, $a_2 = 0$

ট্রেনের ক্ষেত্রে

$s = v_{01}t = \frac{1}{2}a_1t^2$

বা, $s = 0 + \frac{1}{2}\times 10\times t^2$

বা, $s = 5t^2$ ... ... (i)

গাড়ির ক্ষেত্রে

$s = v_{02}t + \frac{1}{2}a_2t^2$

বা, $s = 100t + \frac{1}{2}\times 0$

বা, $s = 100t$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$5t^2 = 100t$

$\therefore$ $t = \frac{100}{5} = 20\ s$

বিকল্প : সমবেগের ক্ষেত্রে, $s = vt = 100\,t$

$\therefore \quad t = \frac{100}{s} = \frac{100}{5} = 20\text{ s}$

৪। একটি বুলেট কোনো দেয়ালে 0·04 m প্রবেশের পর 75% বেগ হারায়। ওই দেয়ালে বুলেটটি আর কতদূর প্রবেশ করতে পারবে ? [রা. বো. ২০১০]

আমরা জানি,

$v_{x_1}{}^2 = v_{x0}^2 + 2a_x s_1$

বা, $a_x = \frac{v_{x_1}{}^2 - v_{x0}^2}{2s_1} = \frac{\frac{v_{x0}^2}{16} - v_{x0}^2}{2s_1}$

$= \frac{-15v_{x0}^2}{32s_1} = \frac{-15v_{x0}^2}{32\times 0{\cdot}04}$

$= \frac{-15v_{x0}^2}{1{\cdot}28}$

এখানে,
প্রথম ক্ষেত্রে
আদিবেগ, $v_{x_0} = v_{x_0}$
দূরত্ব, $s_1 = 0{\cdot}04\text{ m}$
0·04 m যাওয়ার পরে শেষ বেগ
$v_{x_1} = \frac{v_{x_0}}{4}$
ত্বরণ, $a_x = ?$

আবার, $v_{x_2}{}^2 = v^2_{x01} + 2a_x s_2$

$0 = \frac{vx_0^2}{16} + 2\times\left(\frac{-15v_{x0}^2}{1{\cdot}28}\right)\times s_2$

$= \frac{v_{x0}^2}{16} + \frac{30v_{x0}^2}{1{\cdot}28}s_2$

$= \frac{30v_{x0}^2}{1{\cdot}28}s_2 = \frac{v_{x0}^2}{16}$

$\therefore \quad s_2 = \frac{1{\cdot}28}{480} = 2{\cdot}67\times10^{-3}\text{ m}$

এখানে,
দ্বিতীয় ক্ষেত্রে
আদিবেগ, $v_{x_{01}} = \frac{v_{x_0}}{4}$
ত্বরণ, $a_x = -15\,v_{x0}^2/32\times{\cdot}04$
শেষ বেগ, $v_{x_2} = 0$
দূরত্ব, $s_2 = ?$

৫। স্থির মানের বলের ক্রিয়ায় একমাত্রিক স্থানে গতিশীল একটি বস্তুকণার সরণ (x) সময়ের সাথে $t = \sqrt{x} + 5$ সমীকরণ দ্বারা সম্পর্কিত। দেখাও যে বস্তুকণার বেগ যখন শূন্য তখন কণাটির সরণও শূন্য (x মিটারে এবং t সেকেন্ডে প্রকাশিত)।

এখানে,

$t = \sqrt{x} + 5$

বা, $\sqrt{x} = t - 5$

বা, $x = (t-5)^2 = t^2 - 10t + 25$

$\therefore$ কণাটির তাৎক্ষণিক বেগ,

$v = \frac{dx}{dt} = 2t - 10$

এখন, কণাটির বেগ শূন্য হলে আমরা পাই,

$0 = 2t - 10$

বা, $t = \frac{10}{2} = 5$ সেকেন্ড

$\therefore$ $t = 5$ সেকেন্ড সময়ে কণাটির সরণ, $x = t^2 - 10t + 25$

$= (5)^2 - 10\times5 + 25 = 0$

সুতরাং, কণাটির বেগ যখন শূন্য তখন কণাটির সরণও শূন্য। (প্রমাণিত)

৬। একটি গতিশীল বস্তু কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব বস্তুটির তাৎক্ষণিক বেগ ও সময়ের গুণফলের অর্ধেকের সমান হলে দেখাও যে বস্তুটির ত্বরণ ধ্রুবক।

ধরা যাক,
বস্তুটির অতিক্রান্ত দূরত্ব, x
তাৎক্ষণিক বেগ, v
সময়, t

প্রশ্নানুসারে,

$$x = \frac{1}{2} vt$$

বা, $x = \frac{1}{2}\frac{dx}{dt}t \quad \left[\because v = \frac{dx}{dt}\right]$

বা, $\frac{dx}{x} = \frac{2dt}{t}$

উভয় পার্শ্ব সমাকলন করে পাই,

$$\int \frac{dx}{x} = 2\int \frac{dt}{t}$$

বা, $\ln x = 2\ln t + \ln k$ (k = ধ্রুবক)

বা, $\ln x - 2\ln t = \ln k$

বা, $\ln x - \ln t^2 = \ln k$

বা, $\ln\left(\frac{x}{t^2}\right) = \ln k$

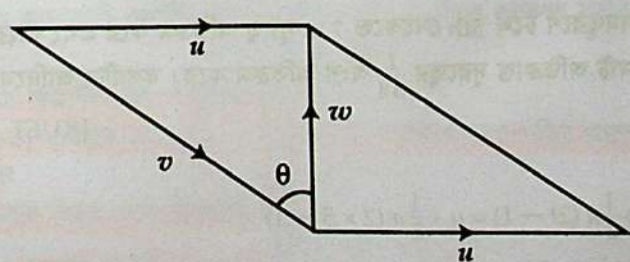
বা, $\frac{x}{t^2} = k$ বা, $x = kt^2$

এখন, বস্তুটির বেগ, $v = \frac{dx}{dt} = 2kt$

এবং ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(2kt)$

$= 2k$ (ধ্রুবক)। প্রমাণিত

৭। স্থির পানিতে একটি নৌকার বেগ ঘণ্টায় 5 km। নৌকাটি 15 min-এ 1 km চওড়া নদী আড়াআড়িভাবে অতিক্রম করে। নদীর স্রোতের বেগ কত ?



নৌকাটি আড়াআড়িভাবে 15 min অর্থাৎ $\frac{1}{4}$ ঘণ্টায় 1 km দূরত্ব অতিক্রম করে।

সুতরাং, নৌকার লব্ধি বেগের মান, $w = \frac{1}{1/4} = 4\ \text{km hr}^{-1}$

স্থির পানিতে নৌকার বেগ, $\vec{v}$ এবং স্রোতের বেগ, $\vec{u}$ হলে চিত্র থেকে পাই,

$v^2 = u^2 + w^2$

বা, $u^2 = v^2 - w^2$

$\therefore\ u = \sqrt{v^2 - w^2} = \sqrt{(5)^2 - (4)^2}$

$= 3\ \text{km hr}^{-1}$

৮। 3·0 kg ভরের একটি হাতুড়ি 6 m উঁচু থেকে একটি লৌহদণ্ডের ওপর পড়ল এবং 0·1 s সময়ে স্থির হলো। লৌহদণ্ডের ওপর প্রযুক্ত বল নির্ণয় কর। ($g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$)

এখানে,
হাতুড়ির ভর, $m = 3{\cdot}0\ kg$
দূরত্ব, $s = 6\ m$
সময়, $t = 0{\cdot}1\ s$
দণ্ডের ওপর প্রযুক্ত বল, $F = ?$
$g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$

হাতুড়ির উল্লম্ব গতির সময় এর প্রাথমিক বেগ, $u = 0$
হাতুড়ির ওপর পড়ার মুহূর্তে হাতুড়ির বেগ v হলে,
আমরা পাই,

$$v^2 = u^2 + 2as$$

বা, $v^2 = 0 + 2 \times 9{\cdot}8 \times 6 = 117{\cdot}6$

$\therefore\ v = \sqrt{117{\cdot}6} = 10{\cdot}84\ ms^{-1}$

অতএব, হাতুড়ির গতির জন্য লৌহদণ্ডের ওপর প্রযুক্ত বল,

$$F = \frac{\text{ভরবেগের পরিবর্তন}}{\text{সময়}} = \frac{m(v-u)}{t}$$

$$= \frac{3 \times (10{\cdot}84 - 0)}{0{\cdot}1} = 325\ N$$

$\therefore$ লৌহদণ্ডের ওপর প্রযুক্ত মোট বল $= F +$ হাতুড়ির ওজন

$= F + mg = 325 + 3 \times 9{\cdot}8 = 325 + 29{\cdot}4$
$= 354{\cdot}4\ N$

৯। বিমানবন্দরের রানওয়ের দৈর্ঘ্য 100 m। একটি উড়োজাহাজ উড়ার পূর্ব মুহূর্তে 216 km/hr গতিসম্পন্ন হতে হয়। উড়োজাহাজটি 15 m/s² ত্বরণে ত্বরান্বিত হলে রানওয়ে থেকে উড়তে সক্ষম হবে কী ? রানওয়ের দৈর্ঘ্য সর্বনিম্ন কত হলে উড়োজাহাজটি উড়তে পারবে ? [BUET Admission Test, 2013-14]

এখানে,
$v = 216\ km/h = 60\ ms^{-1}$
$a = 15\ ms^{-2}$

আমরা জানি,

$$S = \frac{v^2}{2a} = \frac{(60)^2}{2 \times 15}$$

$$= 120\ m$$

$\therefore\ 100\ m < 120\ m$

সুতরাং, উড়োজাহাজটি উড়তে সক্ষম হবে না। রানওয়ের দৈর্ঘ্য সর্বনিম্ন 120 m হলে উড়োজাহাজটি উড়তে পারবে।

১০। একটি কণা সমত্বরণে চলে 5th সেকেন্ডে 7 m দূরত্ব অতিক্রম করে এবং আরো কিছু দূর গিয়ে থেমে যায়। কণাটি শেষতম সেকেন্ডে মোট অতিক্রান্ত দূরত্বের $\frac{1}{64}$ অংশ অতিক্রম করে। কণাটির আদিবেগ, ত্বরণ ও মোট সময় নির্ণয় কর। [KUET Admission Test, 2006-07]

আমরা জানি,

$$S_{th} = 7 = u + \frac{1}{2}a(2t-1) = u + \frac{1}{2}a(2 \times 5 - 1)$$

$$= u + \frac{9}{2}a \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

আবার,

$$v = 0 = u + at \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

মোট সময় t হলে,

$$S_{th} = u + \frac{1}{2}a(2t-1) = \frac{1}{64}\left(ut + \frac{1}{2}at^2\right)$$

বা, $u + at - \frac{1}{2}a = \frac{1}{64}ut + \frac{1}{128}at^2$

বা, $0 - \frac{1}{2}a = \frac{t}{64}\left(u + \frac{1}{2}at\right) = \frac{t}{64}\left(u + at - \frac{1}{2}at\right)\ [\because u + at = 0]$

বা, $0-\frac{1}{2}a=\frac{t}{64}\left(0-\frac{1}{2}at\right)$

বা, $\frac{a}{2}=\frac{at^2}{128}$

বা, $t^2=64 \quad \therefore \; t=8\text{ s}$

সুতরাং, মোট সময়, $t=8\text{ s}$

(ii) নং থেকে পাই,

$u+at=0$

$u=-8a$

এখন, (i) নং থেকে $-8a+\frac{9}{2}a=7$ বা, $-7a=14$

$\therefore \; a=-2\text{ ms}^{-2}$

$\therefore$ কণাটির ত্বরণ, $a=-2\text{ ms}^{-2}$

(ii) নং থেকে $u=-8a=-8\times(-2)=16\text{ ms}^{-1}$

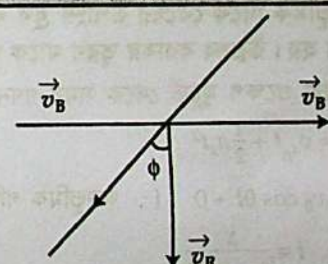
অতএব, কণাটির আদিবেগ, $u=16\text{ ms}^{-1}$

উত্তর : কণাটির আদিবেগ 16 ms^{-1}; ত্বরণ -2 ms^{-2} এবং মোট সময় 8 s।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : বৃষ্টির দিনে চলন্ত বাসে বসে থাকা একজন যাত্রীর নিকট উল্লম্বভাবে পতনশীল বৃষ্টির পানি তির্যকভাবে পড়ছে মনে হয় কেন ?

বৃষ্টির বেগ v_R এবং বাসের বেগ $\vec{v}_B$ হলে যাত্রী সাপেক্ষে বৃষ্টির বেগ হবে, $\vec{v}_{RB}=\vec{v}_R-\vec{v}_B$। $\vec{v}_{RB}$ ভেক্টরটি উল্লম্ব রেখার সাথে ϕ কোণে আনত থাকলে, $\tan\phi=\frac{v_B}{v_R}$।

অর্থাৎ, বাসটি চলতে থাকলে বাসের যাত্রীর নিকট উল্লম্বভাবে পতনশীল বৃষ্টি তির্যকভাবে পড়ছে মনে হবে।



প্রাস (Projectile)

ভূপৃষ্ঠ থেকে বা ভূপৃষ্ঠের কাছাকাছি কোনো বিন্দু থেকে যে কোনো দিকে প্রক্ষিপ্ত বস্তুকে প্রাস বলে।

জানা দরকার :

- প্রাসের ওপর একমাত্র ক্রিয়াশীল বল অভিকর্ষ বল;
- প্রাসের সর্বাধিক উচ্চতা পৃথিবীর ব্যাসার্ধের তুলনায় নগণ্য। তাই প্রাসের গতির আলোচনায় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান স্থির ধরে নেওয়া হয়, এবং
- প্রাসের গতি আলোচনায় বায়ুর বাধা উপেক্ষণীয়।

প্রাসের গতি সংক্রান্ত কয়েকটি সংজ্ঞা

প্রক্ষেপণ বিন্দু (Point of projection) : যে বিন্দু দিয়ে প্রাস প্রক্ষিপ্ত হয় সেই বিন্দুকেই প্রক্ষেপণ বিন্দু বলা হয়।

প্রক্ষেপণ পথ (Trajectory) : যে বক্রপথে প্রাসের গতি হয় তাকেই প্রাসের প্রক্ষেপ পথ বলা হয়।

প্রক্ষেপণ বেগ (Velocity of projection) : যে প্রারম্ভিক বেগে প্রাস প্রক্ষিপ্ত হয় সেই বেগকে প্রক্ষেপণ বেগ বলে।

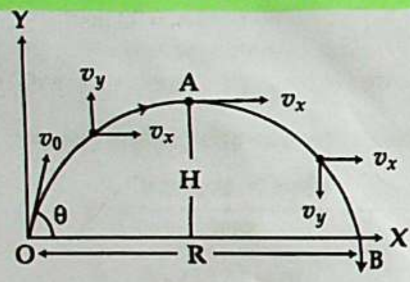
প্রক্ষেপণ কোণ (Angle of projection) : অনুভূমিক তলের সঙ্গে যে কোণে প্রাস প্রক্ষিপ্ত হয় তাকেই বলা হয় প্রক্ষেপণ কোণ।

প্রক্ষেপণ সীমা বা পাল্লা (Horizontal range or range) : প্রক্ষেপণ বিন্দুগামী অনুভূমিক তলের ওপর প্রক্ষিপ্ত বস্তুটি যে বিন্দুতে পতিত হয় প্রক্ষেপণ বিন্দু থেকে ওই বিন্দুর দূরত্বকে প্রাসের প্রক্ষেপণ সীমা বলা হয়।

উড্ডয়নকাল (Time of flight) : প্রক্ষেপণ বিন্দু থেকে প্রক্ষেপণ বিন্দুগামী অনুভূমিক তলের ওপর এসে পড়তে প্রাসটির যে সময় লাগে তাকে উড্ডয়নকাল বলে। একে **চলনকালও** বলা হয়।

৩.৮ প্রক্ষেপণ গতি
Projectile Motion

তুমি যদি স্টেডিয়ামে কখনও ক্রিকেট খেলা দেখতে যাও তাহলে বাউন্ডারি থেকে ছোঁড়া ক্রিকেট বলের গতি লক্ষ করলে দেখবে বলটি প্রথমে ভূমি থেকে ওপরে উঠে পুনরায় বাঁকা পথে ভূমিতে ফিরে আসে। আবার বন্দুক থেকে উপরের দিকে ছোঁড়া বুলেটের গতি, নিক্ষিপ্ত তীর বা বর্শার গতি, বিমান থেকে নিক্ষিপ্ত বোমার গতি সকল ক্ষেত্রে একই প্রকার গতিপথ লক্ষ করা যায়।এই ধরনের বক্রগতিকে প্রাসের গতি বলে এবং গতিপথকে প্রক্ষেপণ (trajectory) বলে। ইহা একটি অধিবৃত্ত। এ ধরনের গতি দ্বিমাত্রিক গতি। বাতাসের বাধা উপেক্ষা করলে প্রাসের গতি কেবলমাত্র অভিকর্ষের ক্রিয়ায় হয়। প্রাসের গতিপথ সর্বদা প্যারাবোলা বা অধিবৃত্ত হয়। প্রাস সর্বোচ্চ উচ্চতায় পৌঁছালে এর বেগ সর্বনিম্ন (শূন্য) হয়। আবার সর্বাধিক উচ্চতায় প্রাসের গতি একমাত্রিক হয়। প্রাস প্রক্ষেপণ বিন্দু হতে অনুভূমিক দিকে সর্বাধিক যে দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে প্রাসের পাল্লা (Range) বলে। নিক্ষেপণ কোণ 45° হলে প্রাসের পাল্লা সর্বাধিক হয়। অনুভূমিক বরাবর প্রাসের ত্বরণ, $a_x = 0$, উল্লম্ব বরাবর প্রাসের ত্বরণ, $a_y = -g$ হয়। প্রাসের সর্বাধিক উচ্চতায় বেগ ও ত্বরণের মধ্যবর্তী কোণ 90° হয়। প্রক্ষেপণ বিন্দুতে প্রাসের মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক $x = 0, y = 0$ হয়। মনে কর O বিন্দু হতে θ কোণে একটি প্রাসকে v_0 আদিবেগে ওপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো [চিত্র ৩.৩৯]। প্রাসের প্রাথমিক বেগ v_0 কে দুটি উপাংশে বিভক্ত করা যায়। একটি উপাংশ OX বরাবর, অপর উপাংশ OY বরাবর। উপাংশ দুটি হলো $v_{x_0} = v_0 \cos\theta$ এবং $v_{y_0} = v_0 \sin\theta$। উল্লেখ্য অনুভূমিক দিকে ত্বরণ না থাকায় অনুভূমিক দিকে বেগের উপাংশ ধ্রুব থাকে। সর্বাধিক উচ্চতায় প্রাসের গতি একমাত্রিক হয় এবং বেগের উল্লম্ব উপাংশ শূন্য হয়। উল্লম্ব বরাবর ত্বরণ থাকে তাই বেগের উপাংশ পরিবর্তিত হয়।



চিত্র ৩.৩৯

আমরা প্রক্ষেপ মুহূর্ত থেকে সময় গণনা করতে পারি। অর্থাৎ $t = 0$ সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব x হলে গতির সমীকরণ অনুযায়ী $x = v_{x_0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$

$x = v_0 \cos\theta t + 0$ [∵ অনুভূমিক গতি $v_{x0} = v_0 \cos\theta$]

$$\therefore \quad t = \frac{x}{v_0 \cos\theta} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.32)$$

আবার $a_x = -g$ হওয়ায় t সময় পর উল্লম্ব দিকে প্রাসের বেগ বা উল্লম্ব গতি

$$v_y = v_{y_0} - gt = v_0 \sin\theta - gt \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.33)$$

t সময় পর প্রাস যদি y উচ্চতায় আরোহণ করে, তবে

$$y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.34)$$

t সময়ে লব্ধি বেগ, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

লব্ধি বেগ অনুভূমিক দিকের সাথে α কোণ করলে, $\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}$

t এর মান (3.34) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$y = v_0 \sin\theta \times \frac{x}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2}g \times \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\theta}$$

$$y = (\tan\theta)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta}x^2$$

$$y = ax - bx^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.35)$$ ইহা একটি প্যারাবোলা বা অধিবৃত্তের সমীকরণ।

এখানে $a = \tan\theta$, $b = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta}$

এই রাশি দুটি প্রক্ষেপ পথে ধ্রুব থাকে। সুতরাং প্রাসের গতিপথ একটি প্যারাবোলা।

অনুধাবনমূলক কাজ : খাড়া ওপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর অনুভূমিক দূরত্ব শূন্য হয় কেন ?

গাণিতিক উদাহরণ ৩.৬

১। অনুভূমিকের সাথে 30° কোণ করে ভূপৃষ্ঠ হতে 40 ms^{-1} বেগে শত্রুপক্ষের একটি বিমানের দিকে একটি কামানের গোলা নিক্ষেপ করা হলো। গোলাটি 30 m দূরে অবস্থিত একটি দেয়ালকে কত উচ্চতায় কত সময় পর আঘাত করবে ?

মনে করি গোলাটি y উচ্চতায় দেওয়ালকে আঘাত করে।

আদিবেগের অনুভূমিক উপাংশ,

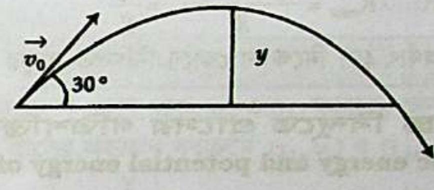
$$v_{x0} = v_0 \cos 30° = 40 \cos 30° = 34.641\ ms^{-1}$$

এখানে,
নিক্ষেপ কোণ, $\theta = 30°$
আদিবেগ, $v_0 = 40\ ms^{-1}$
উচ্চতা, $y = ?$

অনুভূমিক দিকে ত্বরণ না থাকার কারণে বেগের উপাংশ অপরিবর্তিত থাকবে। ধরি t সময় পর গোলাটি 30 m দূরের দেওয়ালকে আঘাত করে।

$\therefore\ v_{x0}t = 30$

বা, $t = \frac{30}{34.641} = 0.866$ sec



আদিবেগের উল্লম্ব উপাংশ,

$$v_{y0} = 40 \sin 30° = 20\ ms^{-1}$$

t সময় পর উল্লম্ব সরণ,

$$y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 = 20 \times 0.866 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times (0.866)^2 = 13.645\ m$$

বি. দ্র. X ও Y অক্ষের দূরত্ব একসাথে ব্যবহার হলে, $y = (\tan\theta)x - \frac{9x^2}{2v_0^2\cos^2\theta}$ সূত্র প্রয়োগেও অঙ্ক করা যাবে।

সর্বাধিক উচ্চতা (H) : সর্বোচ্চ বিন্দু A-তে বেগের উল্লম্ব উপাংশের মান শূন্য হয় অর্থাৎ $v_y = 0$ হয়; সেক্ষেত্রে (3.33) সমীকরণ থেকে $v_0 \sin\theta - gt = 0,\ t = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$ ... ... (3.36)

(3.34) নং সমীকরণে $y = H$ এবং t এর মান বসিয়ে পাওয়া যায়

$$H = v_0 \sin\theta \times \left(\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right) - \frac{1}{2}\frac{gv_0^2 \sin^2\theta}{g^2}$$

$$= \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

$$= \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

$$\therefore\ H = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.37)$$

জেনে রাখ : খাড়াভাবে ওপরে নিক্ষিপ্ত বস্তুর ক্ষেত্রে সর্বাধিক উচ্চতা, $H = \frac{v_0^2}{2g}$

সর্বাধিক উচ্চতায় পৌঁছাবার সময় : সর্বাধিক উচ্চতায় $v_y = 0$ এবং $t = t_m$ হলে $v_y = v_0 \sin\theta - gt$ সমীকরণে মান বসিয়ে পাওয়া যায়, $0 = v_0 \sin\theta - gt_m$ বা, $t_m = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$.

বিচরণ কাল (T) : এক্ষেত্রে উঠা এবং নামার জন্য $y = 0$ হয়

ফলে (3.34) নং সমীকরণ থেকে $v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$

$\therefore\ t\left(v_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt\right) = 0$ অথবা $t = 0$ $\quad \therefore\ t = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$

$t = 0$ হলে প্রাসের প্রাথমিক অবস্থা 0-কে নির্দেশ করে। অতএব বিচরণ কাল $t = T$ বসিয়ে পাই

$$T = \frac{2v_0 \sin\theta}{g} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.38)$$

জেনে রাখ : খাড়াভাবে ওপরে নিক্ষিপ্ত বস্তুর উত্থান-পতন বা বিচরণকাল, $T = \frac{2v_0}{g}$

প্রক্ষেপণ সীমা বা পাল্লা (R) : অনুভূমিক দিকে OB = পাল্লা = R

অতএব পাল্লা, $R = v_{x_0}T = v_0 \cos\theta T = v_0 \cos\theta \times \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$

$$= \frac{2v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g} \quad [\because 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta]$$

$$\therefore \quad R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.39)$$

সর্বাধিক পাল্লা (R_{max}) :

v_0 এর যেকোনো প্রদত্ত মানে R সর্বাধিক হয় যখন $\sin 2\theta = 1$ বা $2\theta = 90°$ হয় বা $\theta = 45°$ হয়।

$$\therefore \quad R_{max} = \frac{v_0^2 \sin 90°}{g} = \frac{v_0^2}{g}$$

অর্থাৎ 45° নিক্ষেপণ কোণে নিক্ষিপ্ত বস্তুর পাল্লা সর্বাধিক।

সর্বোচ্চ বিন্দুতে প্রাসের গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি
Kinetic energy and potential energy of a projectile at the highest point

(i) **সর্বোচ্চ বিন্দুতে প্রাসের গতিশক্তি :** প্রাসের গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দুতে এর গতিশক্তি সর্বনিম্ন হয়। এই বিন্দুতে প্রাসের শুধুমাত্র অনুভূমিক বেগ $v_{0x} = v_0 \cos\theta$ থাকে এবং উল্লম্ব বেগ শূন্য হয়। সুতরাং

$$E_k = \frac{1}{2}mv_{0x}^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\cos^2\theta \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

(ii) **সর্বোচ্চ বিন্দুতে প্রাসের স্থিতিশক্তি :** সর্বোচ্চ বিন্দুতে প্রাসের স্থিতিশক্তি সর্বাধিক হয়। এই স্থিতিশক্তি,

$$E_p = mgh = mg \times \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g} = \frac{1}{2}mv_0^2\sin^2\theta \quad \ldots \quad (ii)$$

অতএব, মোট শক্তি, $E_k + E_p = \frac{1}{2}mv_0^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$= \frac{1}{2}mv_0^2$; এই শক্তি প্রাসের প্রাথমিক মোট শক্তির সমান।

গাণিতিক উদাহরণ ৩.৭

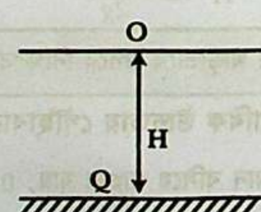
১। যদি ভূমি থেকে O বিন্দুর উচ্চতা H এবং t সময় পরে বস্তুটি ভূমির Q বিন্দুতে আঘাত করে, তবে দেখাও যে প্রক্ষেপণ সীমা, $R = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$

আমরা জানি,

$$H = 0 \times t + \frac{1}{2}gt^2 \quad [\because y = v_{y0}t + \frac{1}{2}gt^2]$$

বা, $t^2 = \frac{2H}{g}$ বা, $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$

$$\therefore \quad R = v_0 t = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$$



২। 1·25 m উচ্চতাবিশিষ্ট একটি অনুভূমিক টেবিলের এক প্রান্ত দিয়ে একটি বল গড়িয়ে পড়ল। টেবিল থেকে পড়ার মুহূর্তে বলটির বেগ 3 ms⁻¹ হলে বলটি টেবিলের নিম্ন প্রান্ত থেকে কত দূরে গিয়ে পড়বে ?

আমরা জানি, প্রক্ষেপণ সীমা,

$$R = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$$\therefore \quad R = 3 \times \sqrt{\frac{2 \times 1{\cdot}25}{9{\cdot}8}}$$

$$= 2 \times 0{\cdot}5 = 1{\cdot}5\ m$$

এখানে,
$v_0 = 3\ ms^{-1}$
$H = 1{\cdot}25\ m$
$g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$

অনুসন্ধানমূলক কাজ : দুটি একই প্রক্ষেপণ বেগের প্রাসের ক্ষেত্রে প্রক্ষেপণ কোণ θ ও $\theta \pm 90°$ হলে, দেখাও যে, এই দুই ক্ষেত্রে প্রক্ষেপণ সীমা সমান; কিন্তু বিপরীতমুখি।

দুটি প্রাসের প্রক্ষেপণ সীমা R_1 ও R_2 হলে লেখা যায়,

$$R_1 = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} \text{ এবং } R_2 = \frac{u^2 \sin 2(90° \pm \theta)}{g} = \frac{u^2 \sin^2 (180° \pm 2\theta)}{g}$$

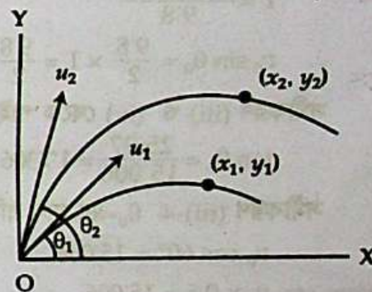
$$\therefore \quad R_2 = \mp \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$\therefore \quad R_1 = \mp R_2$$

সুতরাং, এই দুই ক্ষেত্রে প্রক্ষেপণ সীমা সমান, কিন্তু বিপরীতমুখি।

কাজ : একটি প্রাসের সাপেক্ষে অন্য একটি প্রাসের গতিপথ সরলরেখা। — ব্যাখ্যা কর।

ধরা যাক, u_1 ও θ_1 একটি প্রাসের যথাক্রমে প্রক্ষেপণ বেগ ও প্রক্ষেপণ কোণ এবং u_2 ও θ_2 যথাক্রমে অন্য একটি প্রাসের প্রক্ষেপণ বেগ ও প্রক্ষেপণ কোণ। t সময় পরে প্রথম ও দ্বিতীয় প্রাসের অবস্থান যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) হলে,



$$x_1 = (u_1 \cos\theta_1)\, t$$

$$y_1 = (u_1 \sin\theta_1)\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

এবং $x_2 = (u_2 \cos\theta_2)\, t$

$$y_2 = (u_2 \sin\theta_2)\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

এখন, প্রথম প্রাসের সাপেক্ষে দ্বিতীয় প্রাসের অবস্থান (x, y) হলে,

$$x = x_2 - y_1 = t(u_2 \cos\theta_2 - u_1 \cos\theta_1)$$

এবং $y = y_2 - y_1 = t\,(u_2 \sin\theta_2 - u_1 \sin\theta_1)$

$$\therefore \quad \frac{y}{x} = \frac{u_2 \sin\theta_2 - u_1 \sin\theta_1}{u_2 \cos\theta_2 - u_1 \cos\theta_1} = K = \text{ধ্রুবক (ধরি)}$$

$\therefore \quad y = Kx$, এটি একটি সরলরেখার সমীকরণ।

সুতরাং, একটি প্রাসের সাপেক্ষে অন্য একটি প্রাসের গতিপথ সরলরেখা।

গাণিতিক উদাহরণ ৩.৮

১। $49\ ms^{-1}$ বেগে ভূমির সাথে $60°$ কোণে একটি বস্তুকে শূন্যে নিক্ষেপ করা হলো। এটা সর্বোচ্চ কত ওপরে উঠবে ? এতে কত সময় লাগবে ? কত সময় পর এটা ভূমিতে পতিত হবে ? এর অনুভূমিক পাল্লা কত হবে ?

এখানে,
নিক্ষেপণ বেগ, $v_0 = 49\ ms^{-1}$
নিক্ষেপণ কোণ, $\theta = 60°$
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8\ ms^{-2}$

সর্বাধিক উচ্চতা

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} = \frac{(49)^2 \times (\sin 60°)^2}{2 \times 9.8} = 91.87\ m$$

সর্বোচ্চ উচ্চতায় উঠতে t_m সময় লাগলে

$$t_m = \frac{v_0 \sin\theta}{g} = \frac{49 \times \sin 60°}{9.8} = 4.33\ sec$$

ভূমিতে আসার সময় T হলে

$$T = \frac{2v_0 \sin\theta}{g} = \frac{2 \times 49 \times \sin 60°}{9.8} = 8.66\ s$$

পাল্লা, $R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{(49)^2 \times \sin(2 \times 60°)}{9.8} = 212.18\ m$

উত্তর : সর্বোচ্চ উচ্চতা 91.87 m; সর্বোচ্চ উচ্চতায় উঠতে সময় লাগবে 4.33 sec; ভূমিতে পতিত হতে সময় লাগবে 8.66 s; অনুভূমিক পাল্লা 212.18 m.

২। একটি প্রাসের অনুভূমিক পাল্লা 79·53 m এবং বিচরণকাল 5·3 sec। নিক্ষেপণ বেগ ও নিক্ষেপণ কোণ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০১০; চ. বো. ২০০৯, ২০০৪]

আমরা জানি,

$$T = \frac{2v_0 \sin\theta_0}{g} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} = \frac{v_0^2 2\sin\theta_0 \cos\theta_0}{g} \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

এখানে,
$R = 79·53$ m
$T = 5.3$ sec
$g = 9·8\ ms^{-2}$

সমীকরণ (i) ও (ii) থেকে পাই, $\frac{T}{R} = \frac{\frac{2v_0 \sin\theta_0}{g}}{\frac{v_0^2 2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g}}$

বা, $\frac{5·3}{79·53} = \frac{1}{v_0 \cos\theta_0}$

বা, $v_0 \cos\theta_0 = 15·006 \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(iii)}$

সমীকরণ (i) থেকে পাই,

$$T = \frac{2\,v_0 \sin\theta_0}{9·8}$$

$$\therefore \quad v_0 \sin\theta_0 = \frac{9·8}{2} \times T = \frac{9·8}{2} \times 5·3 = 25·97 \quad \ldots \quad \text{(iv)}$$

সমীকরণ (iii) ও (iv) থেকে পাই,

$$\tan\theta_0 = \frac{25·97}{15·006} = 1·7306 \qquad \therefore \quad \theta_0 = 60°$$

সমীকরণ (iii)-এ θ_0-এর মান বসিয়ে পাই,

$$v_0 \cos 60° = 15·006$$
$$v_0 \times 0·5 = 15·006$$
$$\therefore \quad v_0 = \frac{15·006}{0·5} = 30\ ms^{-1}$$

উত্তর : নিপেক্ষণ বেগ 30 ms^{-1}; নিক্ষেপণ কোণ 60°।

৩। 30 m উচ্চতার কোনো স্তম্ভ হতে একটি প্রক্ষিপ্ত বস্তুকে 20 ms^{-1} বেগে অনুভূমিকের সাথে 20° কোণে ওপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো। বস্তুটির বিচরণকাল নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০১০]

আমরা জানি,

$$y - y_0 = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

বা, $-30 = (20 \times \sin 30)\, t - \frac{1}{2} \times 9·8 \times t^2$

বা, $4·9t^2 - 10\,t - 30 = 0$

বা, $t = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(100)^2 - 4 \times 4·9 \times (-30)}}{2 \times 4·9}$

$t = 3·1$ sec বা, $t = -1·7$ sec

t এর $-$ve মান গ্রহণযোগ্য নয়

$\therefore \quad t = 3·1$ sec

৪। অনুভূমিকের সাথে 30° কোণ করে ভূপৃষ্ঠ থেকে 40 ms^{-1} বেগে একটি বুলেট ছোঁড়া হলো। বুলেটটি 30 m দূরে অবস্থিত একটি দেওয়ালকে কত উচ্চতায় আঘাত করবে ?

আমরা জানি,

$$y = x \tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\theta}$$

$$= 30 \times \tan 30° - \frac{9·8 \times (30)^2}{2 \times (40)^2 \times \cos^2 30°}$$

$$= 17·32 - 3·68 = 13·64 \text{ m}$$

এখানে,
$x = 30$ m
$v_0 = 40\ ms^{-1}$
$\theta = 30°$

৫। v_0 প্রক্ষেপ বেগে ছোঁড়া একটি প্রাসের অর্জিত সর্বাধিক উচ্চতা H ও প্রক্ষেপণ সীমা R হলে দেখাও যে,

$$R^2 = 16\,H\left(\frac{u^2}{2g} - H\right).$$

আমরা জানি,

প্রাসের সর্বাধিক উচ্চতা, $H = \frac{u^2 \sin^2\theta}{2g}$ [এখানে θ হলো প্রক্ষেপণ কোণ]

এবং প্রক্ষেপণ সীমা, $R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$

$$\text{এখন, } \frac{R^2}{H} = \frac{\frac{(u^2 \sin 2\theta)^2}{g^2}}{\frac{u^2 \sin^2\theta}{2g}} = \frac{(u^2 \sin 2\theta)^2 \times 2g}{u^2 \sin^2\theta \times g^2}$$

$$= \frac{(u^2\, 2\sin\theta\cos\theta)^2 \times 2}{u^2 \sin^2\theta \times g} = \frac{u^4 \times 4\sin^2\theta\cos^2\theta \times 2}{u^2 \sin^2\theta \times g}$$

$$= \frac{u^2 \times 8\cos^2\theta}{g} = \frac{16u^2\cos^2\theta}{2g}$$

$$= \frac{16u^2(1-\sin^2\theta)}{2g} = 16\left(\frac{u^2}{2g} - \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}\right)$$

$$R^2 = 16\,H\left(\frac{u^2}{2g} - H\right) \text{ (প্রমাণিত)}$$

৬। দুটি বস্তুকে একই বেগে ভূমি থেকে প্রক্ষেপ করা হলো। এর একটির প্রক্ষেপণ কোণ 60° এবং অপরটির 30°। দেখাও যে এদের সর্বোচ্চ উচ্চতার অনুপাত 3 : 1।

60° কোণে প্রক্ষিপ্ত বস্তুর সর্বোচ্চ উচ্চতা H_1 হলে,

$$H_1 = \frac{u_0^2 \sin^2 60°}{2g}$$

এখানে v_0 প্রক্ষিপ্ত বস্তুর প্রক্ষেপণ বেগ এবং 30° কোণে প্রক্ষিপ্ত বস্তুর সর্বোচ্চ উচ্চতা H_2 হলে,

$$H_2 = \frac{v_0^2 \sin^2 30°}{2g}$$

$$\text{এখন, } \frac{H_1}{H_2} = \frac{\frac{v_0^2 \sin^2 60°}{2g}}{\frac{v_0^2 \sin^2 30°}{2g}} = \frac{\sin^2 60°}{\sin^2 30°}$$

$$= \frac{3/4}{1/4} = \frac{3\times4}{1\times4} = 3$$

$$\therefore \quad H_1 : H_2 = 3 : 1$$

৭। একটি ক্রিকেট বলের ওজন 0·65 kg। একজন ফিল্ডার বলটিকে স্বল্পতম সময়ে 100 m দূরত্বে থাকা উইকেট রক্ষকের কাছে পৌঁছাতে চাইলে ন্যূনতম কত km/h গতিতে বলটি ছুড়তে হবে ? এই গতিতে ছুড়লে কতক্ষণ পর তা উইকেট রক্ষকের কাছে গিয়ে পৌঁছাবে ? [BUET Admission Test, 2017-18]

আমরা জানি, অনুভূমিক দূরত্ব,

$$R = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$v^2 = \frac{R \times g}{\sin 2\theta}$$

$\therefore \quad v = \sqrt{\dfrac{R \times g}{\sin 2\theta}} = \sqrt{100 \times 9.8}$ [$\because v$ এর মান সর্বনিম্ন হবে যদি $\sin 2\theta = 1$ হয়]

$= 31.30 \text{ ms}^{-1}$

$= 112.7 \text{ kmh}^{-1}$

এবং $T = \dfrac{2v \sin\theta}{g}$

$= \dfrac{2 \times 31.30 \times \sin 45°}{9.8}$

$= 4.52 \text{ sec}$

৮। কোনো একটি বস্তুকে ভূপৃষ্ঠ হতে কত কোণে 45 ms^{-1} বেগে ছুড়লে এটি 200 m দূরে গিয়ে পড়বে ?

[BUET Admission Test, 2015-16]

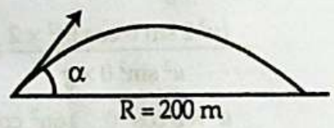
আমরা জানি,

$R = \dfrac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$

বা, $200 \times 9.8 = (45)^2 \times \sin 2\alpha$

$\therefore \quad 2\alpha = 75.44°$

$\alpha = 37.72°$



কাজ : দেখাও যে, প্রাসের প্রক্ষেপণ সীমা সর্বাধিক হলে সর্বোচ্চ উচ্চতার মান সর্বাধিক প্রক্ষেপণ সীমার এক-চতুর্থাংশ হবে।

প্রাসের সর্বাধিক প্রক্ষেপণ সীমা, $R_{max} = \dfrac{v_0^2}{g}$

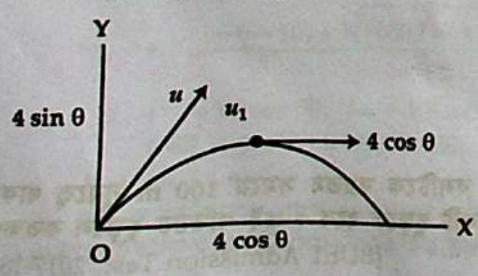
এবং সর্বোচ্চ উচ্চতা, $H = \dfrac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$ [এখানে, $\theta = 45°$]

$\therefore \quad H = \dfrac{v_0^2 (\sin 45°)^2}{2g} = \dfrac{v_0^2 \times 0.5}{2g} = \dfrac{v_0^2}{4g}$

$= \dfrac{R_{max}}{4}$ (প্রমাণিত)

কাজ : দেখাও যে সর্বাধিক প্রক্ষেপণ সীমার ক্ষেত্রে সর্বোচ্চ অবস্থানে গতিশক্তি প্রাথমিক গতিশক্তির অর্ধেক হয়।

ধরা যাক, m ভরের একটি বস্তুকে O বিন্দু থেকে অনুভূমিক তলের সাথে θ কোণে u প্রারম্ভিক বেগে প্রক্ষেপ করা হলো [চিত্র দ্রষ্টব্য]। সুতরাং প্রাসের প্রারম্ভিক গতিশক্তি $E_0 = \dfrac{1}{2} m u_0^2$।



এখন সর্বোচ্চ অবস্থানে প্রাসের গতিশক্তি,

$E = \dfrac{1}{2} m (u \cos\theta)^2$, এখানে $u \cos\theta$ হচ্ছে সর্বোচ্চ বিন্দুতে প্রাসের অনুভূমিক গতিবেগ।

$\therefore \quad \dfrac{E}{E_0} = \cos^2\theta$

বা, $E = E_0 \cos^2\theta \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (i)

এখানে, প্রক্ষেপণ কোণ 45° হলে,

$E = E_0 \cos^2 45°$

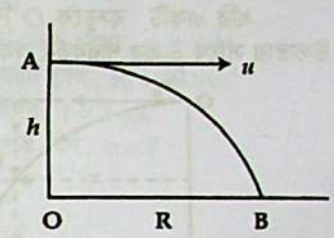
$\therefore \quad E = \dfrac{E_0}{2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (ii)

সুতরাং সর্বাধিক প্রক্ষেপণ সীমার ক্ষেত্রে, সর্বোচ্চ অবস্থানে গতিশক্তি প্রাথমিক গতিশক্তির অর্ধেক হয়।

অনুভূমিক প্রাস
Horizontal projectile

h উচ্চতা থেকে একটি বস্তুকে u বেগে অনুভূমিক দিকে নিক্ষেপ করা হলো। বস্তুটি মাটিকে B বিন্দুতে স্পর্শ করে। এক্ষেত্রে অনুভূমিক পাল্লা R হলে লেখা যায়,

$R = ut$, এখানে t হলো A বিন্দু হতে যাত্রা শুরু করে মাটি স্পর্শ করার সময়-কাল। একে প্রাসের উড্ডয়নকাল বলা যেতে পারে।



বস্তুটির উল্লম্ব নিম্নগতি বিবেচনা করে লেখা যায়,

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{বা}, t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

[∵ এই বস্তুর ক্ষেত্রে বস্তুটির প্রাথমিক বেগ শূন্য]

t-এর মান বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$R = u \times \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2hu^2}{g}}$$

$$\boxed{\therefore R = \sqrt{\frac{2hu^2}{g}}}$$

গাণিতিক উদাহরণ ৩.৯

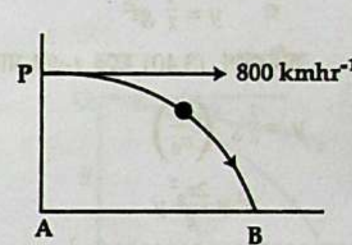
১। ভূপৃষ্ঠ থেকে 2000 m উঁচুতে একটি বোমারু বিমান ঘণ্টায় 800 km অনুভূমিক বেগে গতিশীল। ভূপৃষ্ঠে A বিন্দুর ওপর এসে বিমানটি একটি বোমা ফেলে দিল। বোমাটি ভূপৃষ্ঠে অবস্থিত B লক্ষ্যবস্তুতে আঘাত করল। AB দূরত্ব নির্ণয় কর।

ধরা যাক, P বিন্দুতে বোমাটি বিমান থেকে ফেলে দেওয়া হলো।

এখানে, $PA = 2000$ m

বোমাটির অনুভূমিক বেগ,

$$u = 800 \text{ kmhr}^{-1} = \frac{800 \times 1000}{60 \times 60} \text{ ms}^{-1} = 222{\cdot}2 \text{ ms}^{-1}$$



বোমাটি ভূপৃষ্ঠে এসে পড়তে t সময় লাগলে বোমাটির উল্লম্ব গতির জন্য লেখা যায়,

$$2000 = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\therefore \quad t = \sqrt{\frac{2 \times 2000}{9{\cdot}8}} = 20{\cdot}2 \text{ s}$$

এখন অনুভূমিক দিকে অভিকর্ষজ ত্বরণের উপাংশের মান শূন্য।

$$\therefore \quad AB = ut = 222{\cdot}2 \times 20{\cdot}2 = 4489 \text{ m}$$
$$= 4{\cdot}489 \text{ km}$$

অনুসন্ধানমূলক কাজ : কয়েকটি বস্তুকে কোনো বিন্দু থেকে একই প্রক্ষেপণ বেগ u নিয়ে একই উল্লম্বতলে বিভিন্ন দিকে প্রক্ষেপ করা হলো। দেখাও যে, t সময় পর বস্তুগুলি একটি বৃত্তের পরিধির ওপর থাকবে।

ধরা যাক, কোনো একটি বস্তুকে θ প্রক্ষেপণ কোণে প্রক্ষেপ করা হলো। t সময় পরে বস্তুটির অবস্থান (x, y)।

সুতরাং, $x = (u \cos\theta)\, t$ ... ... (i)

এবং $y = (u \sin\theta)\, t - \frac{1}{2} gt^2$

বা, $y + \frac{1}{2}gt^2 = (u \sin\theta)\, t$ ... ... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) কে বর্গ ও যোগ করে পাওয়া যায়,

$$x^2 + (y + \frac{1}{2}gt^2)^2 = (u^2 \sin^2\theta + u^2\cos^2\theta)\, t^2 = u^2t^2$$

$$\therefore \quad x^2 + (y + \frac{1}{2}gt^2)^2 = u^2t^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(iii)}$$

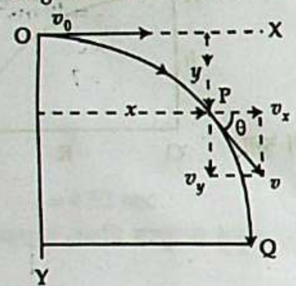
সমীকরণ (iii) একটি বৃত্তের সমীকরণ। এটি প্রক্ষেপণ কোণ θ-এর ওপর নির্ভরশীল নয়।

সুতরাং t সময় পরে বস্তুগুলি একটি বৃত্তের পরিধির ওপর থাকবে।

৩.৯ অনুভূমিকভাবে নিক্ষিপ্ত বস্তুর বা প্রাসের গতির সমীকরণ

Equation of motion of a horizontal projectile

ধরি একটি বস্তুকে O বিন্দু হতে v_0 বেগে অনুভূমিক দিকে নিক্ষেপ করা হলো [চিত্র ৩.৪০]। বায়ুর বাধা ও উচ্চতার সাথে g-এর পরিবর্তন অগ্রাহ্য করলে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতিপথের যে কোনো বিন্দুতে অনুভূমিক বেগ অভিন্ন এবং v_0 হবে। কিন্তু নিক্ষিপ্ত বস্তুর বেগের খাড়া উপাংশ না থাকায় অভিকর্ষীয় ত্বরণের দরুন খাড়া নিচের দিকে বস্তুর বেগ সময়ের সমানুপাতে বৃদ্ধি পাবে। ধরি t সেকেন্ড পরে বস্তুটি অনুভূমিক দিকে x দূরত্ব ও খাড়া নিচের দিকে y দূরত্ব অতিক্রম করে P বিন্দুতে এল এবং P বিন্দুতে বস্তুটির বেগ v ও v-এর অনুভূমিক ও উল্লম্ব অংশকের মান যথাক্রমে v_x ও v_y। তা হলে,



চিত্র ৩.৪০

$$v_x = v_0 = v \cos \theta \text{ ও}$$

$$v_y = 0 + gt = gt = v \sin \theta$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

এখানে অনুভূমিকের সাথে v-এর কৌণিক ব্যবধান θ

$$\therefore \quad \tan \theta = \frac{v_y}{v_x}$$

আবার, $x = v_0 \times t$ ... ... (3.40) [∵ অনুভূমিক দিকে ত্বরণ = 0]

ও $y = \frac{1}{2} gt^2$ ... ... (3.41) [∵ উল্লম্ব দিকে আদি বেগ = 0]

সমীকরণ (3.40) হতে t-এর মান সমীকরণ (3.41)-এ বসিয়ে পাওয়া যায়—

$$y = \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.42)$$

$$\therefore \quad x^2 = \frac{2v_0^2}{g} y$$

উপরের সমীকরণে $\frac{2v_0^2}{g} = 4A$ বসিয়ে পাওয়া যায়,

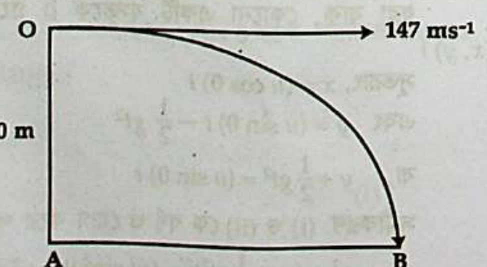
$$x^2 = 4Ay \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.43)$$

এটি একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ। কাজেই বাধাহীন পথে অনুভূমিকভাবে নিক্ষিপ্ত বস্তুর বা প্রাসের গতিপথ প্যারাবোলা (Parabola) বা অধিবৃত্ত রচনা করে।

গাণিতিক উদাহরণ ৩.১০

১। ভূপৃষ্ঠ থেকে 490 m উঁচুতে একটি বিমান 147 ms⁻¹ অনুভূমিক বেগে উড়ছে। ভূপৃষ্ঠে অবস্থিত কোনো বিন্দু A এর উপর উল্লম্ব অবস্থানে এসে সেটি একটি বস্তু ফেলে দিল। বস্তুটি ভূপৃষ্ঠে অবস্থিত B বিন্দুতে আঘাত করল। AB এর দূরত্ব কত ?

মনে করি O অবস্থানে বিমানটি থেকে বস্তুটিকে ফেলা হলো; অতএব OA = 490 m, t সময় পর বস্তুটি B বিন্দুতে আঘাত করল। উল্লম্ব দিকে বস্তুটির প্রাথমিক বেগ শূন্য।



$$\therefore \quad h = v_{y_0} t + \frac{1}{2} g t^2$$

বা, $490 = 0 + \frac{1}{2} \times 9.8 t^2$

বা, $490 = 4.9\, t^2$ বা, $t^2 = 100$

$\therefore \quad t = 10$ sec

$\therefore$ AB-এর দূরত্ব, $x = v_{x_0} \times t = 147 \times 10 = 1470$ m

এখানে
$h = 490$ m
$v_{x0} = 147$ ms^{-1}
$v_{y0} = 0$

২। একটি ফুটবলকে ভূমির সাথে 30° কোণে 40 ms⁻¹ বেগে কিক করা হলো। 2 sec পরে ফুটবলের বেগের মান কত হবে নির্ণয় কর।

মনে করি, ফুটবলটি যে বিন্দু হতে কিক করা হলো সেটি মূলবিন্দু এবং খাড়া উপরের দিক Y অক্ষ ধনাত্মক।

এখানে,
নিক্ষেপ কোণ, $\theta = 30°$
আদি বেগ, $v_0 = 40\ ms^{-1}$
সময়, $t = 2\ sec$
শেষ বেগ, $v = ?$

শেষ বেগের অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশ যথাক্রমে v_x ও v_y হলে,

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

আদি বেগের অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশ যথাক্রমে v_{x_0} ও v_{y_0} হলে,

আমরা পাই, $v_x = v_{x_0} + a_x t = v_0 \cos\theta + a_x t$ [∵ অনুভূমিক ত্বরণ, $a_x = 0$]

$= v_0 \cos\theta = 40 \cos 30° = 34.64\ ms^{-1}$

এবং $v_y = v_{y_0} + a_y t = v_0 \sin\theta + a_y t$

বা, $v_y = 40 \sin 30° + (-9.8) \times 2$ [উল্লম্ব উপাংশ নিম্নমুখি হওয়ায় $a_y = -g = -9.8\ ms^{-2}$]

$= 20 - 19.6 = 0.4\ ms^{-1}$

$\therefore\ v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(34.64)^2 + (0.4)^2}$

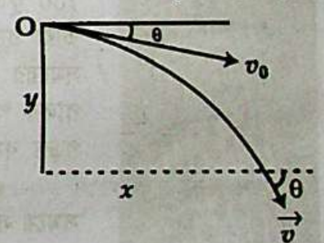
$= \sqrt{1199.9 + 0.16} = \sqrt{1200} = 34.64\ ms^{-1}$

৩। 170 m উঁচু দালানের ছাদ থেকে অনুভূমিকের সাথে 30° কোণ করে নিচের দিকে একটি বস্তু নিক্ষেপ করা হলো। এর আদিবেগ 40 ms⁻¹।

(ক) ভূমিতে আঘাত করতে কত সময় লাগবে?

(খ) দালানের পাদবিন্দু হতে কত দূরে এটি ভূমিতে আঘাত করবে?

(গ) ভূমিতে এটি কত কোণে আঘাত করবে? [রা. বো. ২০০৫]



মনে করি নিক্ষেপণ বিন্দু মূলবিন্দু এবং খাড়া উপরের দিকে Y-অক্ষ ধনাত্মক।

এখানে $x_0 = y_0 = 0$

উল্লম্ব সরণ $(y - y_0) = -170$ m (নিম্নমুখি)

নিক্ষেপণ কোণ, $\theta_0 = -30°$ (অনুভূমিকের সাথে নিচের দিকের কোণ)

(ক) $t = ?$ (খ) $(x - x_0) = ?$ (গ) $\theta = ?$

এখানে অনুভূমিক ত্বরণ $a_x = 0$, উল্লম্ব ত্বরণ, $a_y = -g = -9.8\ ms^{-2}$

(ক) আমরা জানি,

$y - y_0 = v_{y_0} + \frac{1}{2}a_y t^2 = v_0 \sin\theta_0 t + \frac{1}{2}a_y t^2$

বা, $-170 = 40 \sin(-30°) \times t - \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2$

বা, $-170 = -20t - 4.9t^2$

বা, $4.9t^2 + 20t - 170 = 0$

বা, $t = \dfrac{-20 \pm \sqrt{(20)^2 - 4 \times 4.9 \times 170}}{2 \times 4.9}$

বা, $t = 4.9$ sec বা, $t = -8.27$ sec

সুতরাং $t = 4.9$ sec

(খ) $x = x_0 + v_{x_0} t + \frac{1}{2}a_x t^2$

বা, $x - x_0 = v_{x0} t + \frac{1}{2}a_x t^2$

$= v_0 \cos\theta_0 t + \frac{1}{2}a_x t^2$

$= 40 \times \cos(-30°)\, t + \frac{1}{2}a_x t^2$

$= 40 \times \cos 30° \times 4.9 + 0$ [∵ $\cos(-30°) = \cos 30°$]

$= 40 \times \frac{1}{2} \times 4.9 = 145.15$ m

(গ) $v_x = v_{x_0} + a_x t$

$= v_0 \cos\theta_0 + a_x t = 40 \times \cos(-30°) + 0 = 34.64 \text{ ms}^{-1}$

আবার $v_y = v_{y0} + a_y t = v_0 \sin\theta_0 + a_y t$

$= 40 \times \sin(-30°) + (-9.8) \times 4.19$

$= -61.06 \text{ ms}^{-1}$

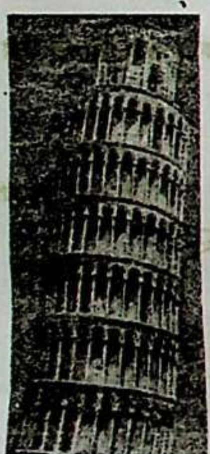
$\tan\theta = \dfrac{v_y}{v_x}$

বা, $\tan\theta = \dfrac{-61.06}{34.64} = -1.76 \;\therefore\; \theta = -60°$

উত্তর : (ক) 4.9 sec; (খ) 145.15 m; (গ) − 60°.

৩.১০ পড়ন্ত বস্তুর সূত্র
Laws of Falling Bodies

তুমি যদি কখনও ছাদের উপর থেকে একটুকরা কাগজ ও একখণ্ড পাথর একই সাথে নিচে ফেলে দাও তাহলে কী দেখতে পাবে ? দেখবে যে, পাথরখণ্ডটি কাগজ অপেক্ষা আগে মাটিতে পৌঁছেছে।



চিত্র ৩.৪১

আমরা জানি যে, বস্তুর এই খাড়াভাবে পতনের কারণ অভিকর্ষজ বা পৃথিবীর আকর্ষণ বা অভিকর্ষ। অভিকর্ষজ ত্বরণ বস্তুর ভরের ওপর নির্ভর করে না, তাহলে কাগজের টুকরা এবং পাথরখণ্ডটি একই সময়ে মাটিতে পৌঁছাল না কেন ? এক্ষেত্রে বাতাসের বাধা বস্তু দুটির ভিন্ন সময়ে মাটিতে পতনের ক্ষেত্রে দায়ী। ইতালিয় বিজ্ঞানী গ্যালিলিও পড়ন্ত বস্তুর গতি নিয়ে গবেষণা করেন এবং পরীক্ষালব্ধ কিছু সূত্র দেন। তিনি 1589 খ্রিস্টাব্দে পিসা শহরের বিখ্যাত 180 ফুট উঁচু হেলানো একটি স্তম্ভের ছাদ থেকে বিভিন্ন ধরনের ভারী বস্তু ফেলে দেখান যে, তারা প্রায় একই সময়ে মাটিতে পৌঁছায় [চিত্র ৩.৪১]। ভারী ও হালকা বস্তুর পতনের ক্ষেত্রে সময়ের এই সামান্য পার্থক্য বায়ুর বাধার জন্য ঘটে। পরবর্তীকালে বিজ্ঞানী নিউটন গিনি ও পালক পরীক্ষার সাহায্যে এই তথ্যের সত্যতা প্রমাণ করেন। গ্যালিলিও এ ধরনের মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুর গতি সংক্রান্ত তিনটি সূত্র প্রদান করেন। সূত্রগুলো হলো :

প্রথম সূত্র : একই উচ্চতায় স্থির অবস্থান থেকে মুক্তভাবে সকল পড়ন্ত বস্তু সমান সময়ে সমান দূরত্ব অতিক্রম করে।

ব্যাখ্যা : মনে করা যাক, m_1 ও m_2 ভরের দুটি বস্তু উঁচু কোনো স্থির অবস্থান থেকে সম্পূর্ণ বাধাহীনভাবে t সময়ে h_1 ও h_2 নিম্নমুখি দূরত্ব অতিক্রম করে। তাই এক্ষেত্রে $h_1 = h_2$.

দ্বিতীয় সূত্র : স্থির অবস্থান থেকে বিনা বাধায় পড়ন্ত বস্তুর নির্দিষ্ট সময় (t)-এ প্রান্ত বেগ (v) ওই সময়ের সমানুপাতিক।

ব্যাখ্যা : ধরা যাক, একটি বস্তু উঁচু কোনো স্থির অবস্থান থেকে সম্পূর্ণরূপে বাধাহীনভাবে ভূমিতে পতিত হচ্ছে। এক্ষেত্রে t সময়ে বস্তুটির বেগ v হলে $v \propto t$।

বা, $\dfrac{v}{t} =$ ধ্রুবক বা, $\dfrac{v_1}{t_1} = \dfrac{v_2}{t_2} =$ ধ্রুবক

এখানে v_1 ও v_2 হলো যথাক্রমে t_1 ও t_2 সময়ে বেগ।

তৃতীয় সূত্র : স্থির অবস্থান থেকে বিনা বাধায় পড়ন্ত বস্তু নির্দিষ্ট সময়ে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তা ওই সময়ের বর্গের সমানুপাতিক।

ব্যাখ্যা : ধরা যাক একটি বস্তু উঁচু কোনো স্থির অবস্থান থেকে সম্পূর্ণ বাধাহীনভাবে ভূমিতে পতিত হচ্ছে। এক্ষেত্রে t সময়ে বস্তুটির অতিক্রান্ত দূরত্ব h হলে $h \propto t^2$

$\dfrac{h}{t^2} =$ ধ্রুবক বা, $\dfrac{h_1}{t_1^2} = \dfrac{h_2}{t_2^2} =$ ধ্রুবক

এখানে h_1 ও h_2 যথাক্রমে t_1 ও t_2 সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব।

জেনে রাখ : I. পড়ন্ত বস্তুর সূত্র দিয়েছেন গ্যালিলিও।
II. গিনি-পালক পরীক্ষা করেছেন নিউটন।
III. গিনি-পালক পরীক্ষা করা হয় 180 ফুট উঁচু হেলানো স্তম্ভের ছাদ থেকে।

পড়ন্ত বস্তুর সমীকরণ

মনে করি একটি বস্তু Y-অক্ষ বরাবর v_0 আদিবেগে উল্লম্বভাবে অভিকর্ষের প্রভাবে h উচ্চতা হতে নিচের দিকে মুক্তভাবে পড়ছে। পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে,

$$v = v_0 + gt \quad \cdots \quad (3.44)$$

$$h = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \quad \cdots \quad (3.45)$$

এবং $$v^2 = v_0^2 + 2gh \quad \cdots \quad (3.46)$$

মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে আদিবেগ $v_0 = 0$, অতএব

$$v = gt$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

এবং $v^2 = 2gh$

উত্থানকালের সময় নির্ণয় :

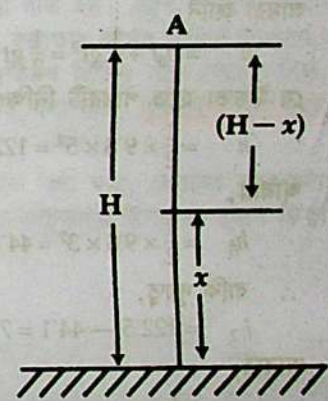
ধরা যাক $t = T_1$ সময়ে বস্তুটি সর্বোচ্চ বিন্দু $y = H$-এ গমন করে [চিত্র ৩.৪২]। সেখানে শেষ বেগ $v = 0$. এক্ষেত্রে $v = v_0 - gt$ সমীকরণ ব্যবহার করে পাই,

$$0 = v_0 - gT_1$$

$$\therefore \quad T_1 = v_0/g \quad \cdots \quad (3.47)$$

ইহা পতনকালের রাশিমালা নির্দেশ করে। অর্থাৎ পতনের সময়

$$T_1 = \frac{v_0}{g}$$



চিত্র ৩.৪২

উত্থান ও পতনকালের সময় নির্ণয় :

ধরি $t = T$ সময়ে বস্তুটি সর্বোচ্চ বিন্দুতে উঠে আবার প্রাথমিক অবস্থান $y = 0$ এ নেমে আসে।

এ অবস্থায় $y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$

$$0 = v_0 T - \frac{1}{2}gT^2$$

$$\frac{1}{2}gT^2 = v_0 T$$

$$\therefore \quad T = \frac{2v_0}{g} \quad \cdots \quad (3.48)$$

উত্থানের সময় : $T_2 = T - T_1 = \frac{2v_0}{g} - \frac{v_0}{g} = \frac{v_0}{g}$

সুতরাং দেখা যায় যে, উত্থান ও পতনের সময় পরস্পর সমান।

গাণিতিক উদাহরণ ৩.১১

১। একটি উঁচু দালানের ছাদ থেকে একটি বল ঊর্ধ্বমুখে এবং অপর একটি বলকে একই বেগে নিচের দিকে ছোড়া হলো। দেখাও যে দুটি বলই একই বেগে ভূমিতে পড়বে।

ধরি, প্রথম বলের প্রাথমিক বেগ $= -u$ (উপরের দিকে)

এবং দ্বিতীয় বলের প্রাথমিক বেগ, $= +u$ (নিচের দিকে)

দালানের উচ্চতা, h

ধরি বল দুটি যথাক্রমে, v_1 ও v_2 বেগে ভূমিতে পড়ল। দেখাতে হবে যে,

$$v_1 = v_2$$

এখন, $v_1^2 = (-u)^2 + 2gh = u^2 + 2gh$

এবং $v_2^2 = u^2 + 2gh$

$$\therefore \quad v_1^2 = v_2^2$$

বা, $v_1 = v_2$ অর্থাৎ বল দুটি একই বেগে ভূমিতে পড়বে।

২। একটি কুয়ার ভেতরে 60 m গভীরতায় পানি আছে। কুয়ার মুখে ঢিল ফেললে যদি 3·68 sec পরে পানির শব্দ শোনা যায়, তবে শব্দের গতিবেগ কত ? ($g = 9·8\ ms^{-2}$)

মনে করি, t sec পরে ঢিলটি পানিতে পড়ল।

আমরা জানি,

$$s = ut + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt^2 \qquad [\because u = 0]$$

$$\therefore \quad t^2 = \frac{2s}{g} = \frac{2 \times 60}{9·8} = \frac{120}{9·8} = 12·24$$

$$\therefore \quad t = \sqrt{12·24} = 3·50 \text{ sec}$$

সুতরাং, শব্দ 3·68 — 3·50 = 0·18 sec সময়ে 60 m দূরত্ব অতিক্রম করে।

অতএব, শব্দের বেগ, $v = \frac{60}{0·18} = 3·33\ ms^{-1}$

৩। একটি পাথর একটি নির্দিষ্ট উচ্চতা হতে 5 sec এ ভূমিতে পতিত হয়। পাথরটিকে 3 sec পর থামিয়ে দিয়ে আবার পড়তে দেয়া হলো। বাকি দূরত্ব অতিক্রম করে পাথরটির ভূমিতে পৌঁছাতে কত সময় লাগবে ?

[RUET Admission Test, 2015-16]

আমরা জানি,

$$h = v_0t + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt^2 \quad [\because v_0 = 0]$$

যে উচ্চতা হতে পাথরটি নিক্ষিপ্ত হয়েছিল তা হলো,

$$h = \frac{1}{2} \times 9·8 \times 5^2 = 122·5 \text{ m}$$

আবার,

$$h_1 = \frac{1}{2} \times 9·8 \times 3^2 = 44·1 \text{ m}$$

∴ বাকি দূরত্ব,

$$h_2 = 122·5 — 44·1 = 78·4 \text{ m}$$

আবার,

$$h_2 = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\text{বা, } t = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 78·4}{9·8}} = 4 \text{ sec}$$

উত্তর : পাথরটির ভূমিতে পৌঁছাতে 4 s সময় লাগবে।

হাতে-কলমে কাজ : তুমি ছাদের ওপর থেকে একটি কাগজ নিচে ফেলে দাও এবং তোমার বন্ধুকে গাছ থেকে একটি আম নিচে ফেলতে বল। উভয় পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে ত্বরণ কী সুষম হবে ? এর কারণ খুঁজে বের কর।

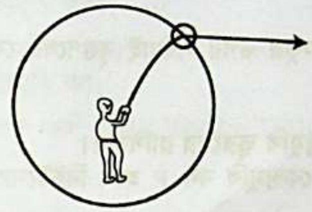
৩·১১ সুষম বৃত্তীয় গতি
Uniform Circular Motion

তুমি একটি সুতার এক প্রান্তে একটুকরা পাথর বেঁধে অন্য প্রান্ত আঙ্গুলে বেঁধে মাথার ওপর নিয়ে সমদ্রুতিতে ঘুরালে দেখবে পাথরটি একটি বৃত্তাকার পথে ঘুরছে। এখন যদি তুমি আঙ্গুল থেকে সুতাটি ছেড়ে দাও তাহলে তুমি কখনও দেখবে না যে, পাথরটি ঘুরতে ঘুরতে এক পর্যায়ে তোমার মাথার ওপর এসে পড়ছে। দেখতে পাবে পাথরটি যে স্থানে তোমার হাত থেকে ছুটে গেছে সেই স্থান থেকে বৃত্তাকার পথের সাথে স্পর্শকভাবে একদিকে ছিটকে যাবে [চিত্র ৩.৪৩(ক)]। নিচের চিত্রের দিকে লক্ষ করলে তুমি স্পষ্ট বুঝতে পারবে। মাথার ওপর যখন পাথরটি ঘুরছিল তখন প্রতি মুহূর্তে বেগের মান সমান হলে এ ধরনের গতি সুষম বৃত্তীয় গতি হয়।

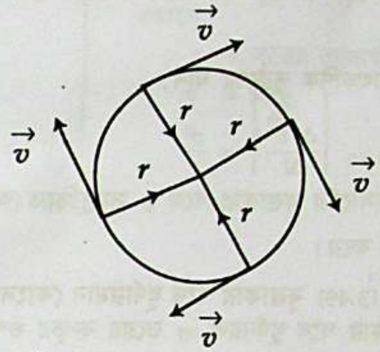
অর্থাৎ বৃত্তাকার পথে সমদ্রুতিতে ঘূর্ণায়মান কোনো বস্তুকণার গতিকে সুষম বৃত্তীয় গতি বলে।

সুষম বৃত্তীয় গতিতে সময়ের সাথে বস্তুর বেগের মান অপরিবর্তিত থাকলেও বেগের অভিমুখ পরিবর্তিত হয়। ফলে বেগের পরিবর্তন হয়। আর কোনো বিন্দুতে এই বেগের দিক ওই বিন্দুতে বৃত্তাকার পথের স্পর্শক বরাবর। কাজেই বেগের অভিমুখ পরিবর্তনের জন্য বস্তুর উপর একটি বল তথা ত্বরণ ক্রিয়া করে। এই ত্বরণের অভিমুখ গতিপথের লম্ব

বরাবর বৃত্তের কেন্দ্রমুখি। এই ত্বরণ হলো কেন্দ্রমুখি বা অভিলম্ব ত্বরণ। যদি ত্বরণের অভিমুখ অন্যদিকে হতো, তাহলে বৃত্তের স্পর্শক বরাবর অর্থাৎ কণাটির গতির অভিমুখে ত্বরণের উপাংশ থাকত; ফলে কণার দ্রুতির পরিবর্তন ঘটত।



চিত্র ৩.৪৩ (ক)



চিত্র ৩.৪৩(খ)

বৃত্তাকার পথে সমদ্রুতিতে চলমান বস্তুর ত্বরণ থাকে কেন ? এর উত্তরে বলা যায়, কোনো বস্তু সমদ্রুতিতে বৃত্তাকার পথের পরিধি বরাবর ঘুরতে থাকলে তখন ওই বস্তুর গতি সুষম বৃত্তাকার গতি হয়। এরূপ গতিতে চলমান বস্তু সমদ্রুতিতে চললেও বৃত্তাকার পথের ওপর বিভিন্ন বিন্দুতে এর দিক ভিন্ন ভিন্ন হয়। বৃত্তাকার পথের বিভিন্ন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক থেকে এর দিক পাওয়া যায় [চিত্র ৩.৪৩(খ)]। বিভিন্ন বিন্দুতে স্পর্শকের অভিমুখ বিভিন্ন বলে বেগের দিক সর্বদা পরবর্তিত হচ্ছে। অর্থাৎ বেগেরও পরিবর্তন হচ্ছে। সুতরাং বস্তুর ত্বরণ হচ্ছে। তাই বলা যায়, বৃত্তকার পথে সমদ্রুতিতে চলমান বস্তুর ত্বরণ থাকে।

যেহেতু দ্রুতি স্থির অতএব কণার ত্বরণ সবসময় কেন্দ্রাভিমুখি হয়। সুতরাং বলা যায়, **কোনো বস্তুকণা যখন বৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকে তখন বৃত্তের ব্যাসার্ধ বরাবর এবং কেন্দ্রের অভিমুখে বস্তুকণার উপর যে ত্বরণ ক্রিয়া করে তাকে কেন্দ্রমুখি বা অভিকেন্দ্র ত্বরণ বলে।**

কেন্দ্রমুখি ত্বরণের মান ও দিক :

ধরি O কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং r ব্যাসার্ধের PQR বৃত্তাকার পথে একটি বস্তুকণা v সমদ্রুতিতে ঘুরে t সময়ে P অবস্থানে ও $(t + \Delta t)$ সময়ে Q অবস্থানে পৌঁছল এবং $\angle POQ = \theta$ [চিত্র ৩.৪৪]। কাজেই Δt সময়ে কণাটির অতিক্রান্ত দূরত্ব $\Delta s = v\Delta t$ = বৃত্তচাপ PQ। P ও Q বিন্দুতে বস্তুকণাটির তাৎক্ষণিক বেগ $\vec{v_1}$ ও $\vec{v_2}$ উক্ত বিন্দুদ্বয়ে অঙ্কিত স্পর্শক অভিমুখি হবে। এই বেগদ্বয়ের উভয়ের মান v-এর সমান কিন্তু দিক ভিন্ন। Δt সেকেন্ডে বেগের পরিবর্তন $(\vec{v_2} - \vec{v_1})$-কে $\Delta\vec{v}$ দ্বারা সূচিত করলে, $\Delta\vec{v}$-এর মান ভেক্টরের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাওয়া যাবে। একই বিন্দু A হতে $\vec{v_1}$ ও $\vec{v_2}$ ভেক্টর দুটি যথাক্রমে তীর চিহ্নিত AB ও AC সরলরেখা দ্বারা মানে ও দিকে নির্দেশ করে B ও C যোগ করি। তা হলে BC রেখা $\Delta\vec{v}$-কে মানে ও দিকে নির্দেশ করবে।

বর্ণনানুসারে OP, OQ ও PQ দ্বারা গঠিত ত্রিভুজ OPQ ও ত্রিভুজ ABC সদৃশকোণী। কেননা উভয়ই সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং $\angle BAC = \angle POQ = \theta$ । কাজেই, $\angle ABC = \angle ACB = \varphi$ হলে,

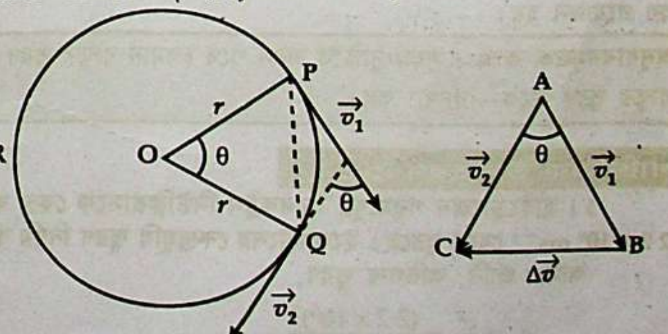
$$\varphi = \left(90^\circ - \frac{\theta}{2}\right)$$

আবার সদৃশ ত্রিভুজের ধর্মানুসারে,

$$\frac{BC}{AC} = \frac{PQ}{OQ}$$

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{v\Delta t}{r} \text{ (প্রায়)}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$



চিত্র ৩.৪৪

এখানে বৃত্তচাপ PQ-কে জ্যা PQ-এর সমান ধরা হয়েছে। Δt ক্ষুদ্র হলে, সম্পর্কটি প্রায় সঠিক বিবেচনা করা যায়। কেননা এমতাবস্থায় বৃত্তচাপ PQ ও জ্যা PQ প্রায় সমান ধরা যায়।

$\Delta t \to 0$ হলে, P ও Q-এর মধ্যবর্তী দূরত্ব ও θ উভয়ই খুবই ক্ষুদ্র হবে অর্থাৎ P ও Q খুবই কাছাকাছি দুটি বিন্দু হবে এবং $\Delta\vec{v}$ ও $\vec{v_1}$ বা $\vec{v_2}$-এর মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 90^\circ$ অর্থাৎ $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ কেন্দ্রের দিকে ক্রিয়া করবে। ফলে কাজ শূন্য হবে।

কাজেই তাৎক্ষণিক ত্বরণের মান,

$$a = Lt_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right| = \frac{v^2}{r} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.49)$$

∴ r ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে v সমদ্রুতিতে আবর্তনরত বস্তুর উপর সর্বদাই বৃত্তপথের কেন্দ্রের দিকে একটি ত্বরণ $a = \frac{v^2}{r}$ ক্রিয়া করে।

সমীকরণ (3.49) বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণায়মান কোনো বস্তুর কেন্দ্রমুখি ত্বরণের রাশিফল।

∴ বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণনরত m ভরের বস্তুর ওপর ক্রিয়ারত কেন্দ্রমুখি বল F হলে নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী, $F = ma$

বা, $F = m\frac{v^2}{r}$

বস্তুটির কৌণিক বেগ ω হলে, $v = \omega r$ হেতু

$$F = \frac{mv^2}{r} = \frac{m\omega^2 r^2}{r} = m\omega^2 r$$

জেনে রাখ : I. কেন্দ্রমুখি বল দ্বারা কৃত কাজ শূন্য হয়।
II. কেন্দ্রমুখি ত্বরণের দিক বৃত্তের কেন্দ্র বরাবর ক্রিয়া করে।

কেন্দ্রমুখি বলের ভেক্টর রূপ :

$-m(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})\vec{r} = -m\omega^2\vec{r} = \frac{mv^2\vec{r}}{r^2}$ এখানে $-$ve চিহ্নের অর্থ হলো কেন্দ্রমুখি ত্বরণের দিক বা বলের দিক ব্যাসার্ধ ভেক্টরের তথা অবস্থান ভেক্টরের বিপরীত দিকে ব্যাসার্ধ বরাবর কেন্দ্রের দিকে।

সুষম বৃত্তাকার গতির বৈশিষ্ট্য :

১। এতে সমদ্রুতি বিদ্যমান;
২। এই গতিতে সমকৌণিক বেগ বিদ্যমান;
৩। এর কৌণিক ত্বরণ শূন্য;
৪। এই গতির কেন্দ্রমুখি ত্বরণ থাকে।

কাজ : কোনো বস্তুকে সুষম বৃত্তীয় গতিতে ঘোরাতে হলে অভিকেন্দ্র বলের প্রয়োজন হয় কেন ব্যাখ্যা কর।

নিউটনের প্রথম গতিসূত্র অনুসারে কোনো বস্তুর ওপর বাহ্যিক বল ক্রিয়া না করলে বস্তুটি স্থির থাকে অথবা সমবেগে গতিশীল থাকে। সুতরাং কোনো বস্তুকে বৃত্তাকার পথে চালানোর জন্য গতির অভিমুখের লম্বদিকে একটি বাহ্যিক বল বস্তুটির ওপর প্রয়োগ করতে হয়। এই বাহ্যিক বল ব্যাসার্ধ বরাবর বৃত্তের কেন্দ্রের দিকে ক্রিয়াশীল হয়। কেন্দ্রাভিমুখি এই বলটিই হলো অভিকেন্দ্র বল। অতএব, কোনো বস্তুকে সমবৃত্তীয় গতিতে ঘোরানোর জন্য অভিকেন্দ্র বল প্রয়োজন হয়।

অনুধাবনমূলক কাজ : সুষম দ্রুতিতে সরল পথে চলমান বস্তুর ত্বরণ থাকে না অথচ বৃত্তাকার পথে সুষম দ্রুতিতে চলমান বস্তুর ত্বরণ থাকে—ব্যাখ্যা কর।

গাণিতিক উদাহরণ ৩.১২

১। হাইড্রোজেন পরমাণুর ইলেকট্রন নিউক্লিয়াসকে কেন্দ্র করে $5{\cdot}2 \times 10^{-11}$ m ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার কক্ষপথে $2{\cdot}2 \times 10^6$ ms^{-1} বেগে ঘুরছে। ইলেকট্রনের কেন্দ্রমুখি ত্বরণ নির্ণয় কর।

আমরা জানি, অভিলম্ব ত্বরণ,

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(2{\cdot}2\times10^6)^2}{5{\cdot}2\times10^{-11}}$$

$$= \frac{2{\cdot}2\times2{\cdot}2\times10^{12}\times10^{11}}{5{\cdot}2} = 9{\cdot}31\times10^{22}\ \text{ms}^{-2}$$

এখানে,
$v = 2{\cdot}2\times10^6\ \text{ms}^{-1}$
$r = 5{\cdot}2\times10^{-11}\text{m}$
$a = ?$

২। 50 g ভরের একটি বস্তুকে 30 cm দীর্ঘ একটি সুতার এক প্রান্তে বেঁধে বৃত্তপথে প্রতি সেকেন্ডে 3 বার ঘুরানো হচ্ছে। কেন্দ্রমুখি বল নির্ণয় কর।

এখানে,

$$\omega = 2\pi n \text{ rad s}^{-1} = 2\pi \times 3 \text{ rad s}^{-1} = 6\pi \text{ rad s}^{-1}$$

এখানে,
r = বৃত্তের ব্যাসার্ধ = 30 cm
m = 50 g
n = 3

আবার, কেন্দ্রমুখি ত্বরণ,

$$a = \omega^2 r = (6\pi)^2 \times 30 = (18.852)^2 \times 30 = 10662 \text{ cm s}^{-2}$$

আবার, কেন্দ্রমুখি বল,

$$F = ma = m\omega^2 = 50 \times 10662 = 533100 \text{ dyne}$$

বিকল্প :

$$F = m\omega^2 r = m(2\pi n)^2 \times r = 0.5\,(2 \times 3.14 \times 3)^2 \times 0.3 = 53.295 \text{ N}$$

এখানে,
r = 30 cm = 0.3 m
m = 50 g = 0.5 kg
n = 3

৩। কোনো বৈদ্যুতিক পাখার সুইচ অন করলে 10 বার পূর্ণ ঘূর্ণনের পর পাখাটির কৌণিক বেগ 20 rad/sec হয়। কৌণিক ত্বরণ কত ? [CUET Admission Test, 2009-10]

আমরা জানি,

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$$

বা, $(20)^2 = 0 + 2\alpha \times 10 \times 2\pi$ $\quad [\because \theta = 2\pi n,\ n = 10]$

$$\therefore \alpha = \frac{10}{\pi} \text{ rad/s}^2$$

উত্তর : কৌণিক ত্বরণ $\frac{10}{\pi}$ rad/s²

প্রয়োজনীয় গাণিতিক সূত্রাবলি

$s = v_0 t \pm \frac{1}{2}at^2$ … … … (1)

$s = vt$ (গড় বেগের ক্ষেত্রে) … … … (2)

$v = \frac{ds}{dt}$ … … … (3)

$a = \frac{dv}{dt}$ … … … (4)

$v^2 = v_0^2 \pm 2as$ … … … (5)

$v = gt$ (পতনের ক্ষেত্রে) … … … (6)

$h = \frac{1}{2}gt^2$ … … … (7)

$v^2 = 2gh$ (পতনের ক্ষেত্রে) … … … (8)

$h = \frac{1}{2}g\,(2t - 1)$ … … … (9)

$v^2 = v_0^2 \pm 2gh$ … … … (10)

$h = v_0 t \pm \frac{1}{2}gt^2$ … … … (11)

$h = \frac{u^2}{2g}$ … … … (12)

$t = \frac{u}{g}$ … … … (13)

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r,\ v = \omega r \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (14)$$

$$F = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (15)$$

$$\omega = 2\pi n = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi N}{t} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (16)$$

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (17)$$

$$R = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (18)$$

$$R_{max} = \frac{v_0^2}{g} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (19)$$

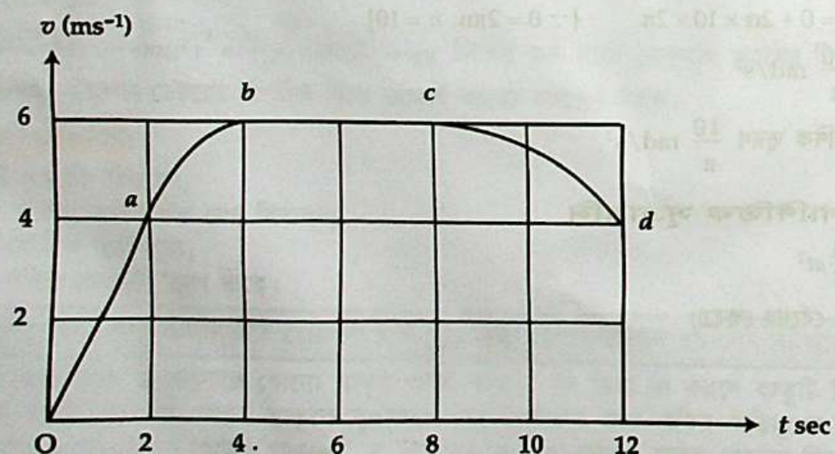
$$T = \frac{2v_0 \sin^2\theta}{g} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (20)$$

$$V = \omega r \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (21)$$

$$\omega = \frac{2\pi N}{t} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (22)$$

উচ্চতর দক্ষতাভিত্তিক নমুনার গাণিতিক উদাহরণ

১। স্বাধীনতা দিবসে কলেজের 100 m দৌড় প্রতিযোগিতায় রুবেলের গতিবেগ সময়ের সাথে কীভাবে পরিবর্তিত হয়েছিল তা নিম্নে গ্রাফে দেখানো হলো :



(ক) রুবেল 4 sec ও 8 sec এর মধ্যে কত দূরত্ব অতিক্রম করেছে ?

(খ) উদ্দীপক অনুসারে রুবেলের ত্বরণ বিশ্লেষণ কর।

(ক) রুবেল 4 sec এবং 8 sec-এর মধ্যবর্তী সময়ে সমবেগে দৌড়াচ্ছে

কাজেই $v = 6\ ms^{-1},\ t = (8 - 4) = 4$ sec

$\therefore$ দূরত্ব, $s = vt = 6 \times 4 = 24$ m

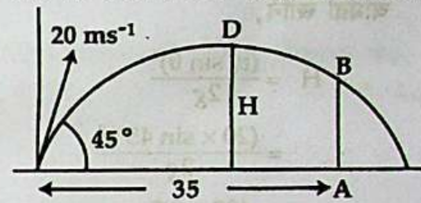
(খ) 0 থেকে a বিন্দুতে অসমবেগে আবার a থেকে b তে অসমবেগে চলে, কাজেই এই দুই ক্ষেত্রে ত্বরণ হবে। আবার b থেকে c তে বেগ সমান হওয়ায় এখানে ত্বরণ = 0। আবার c হতে d তে বেগ হ্রাস পায় অর্থাৎ মন্দন হয়।

আবার a বিন্দুতে ত্বরণ $= \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{4-2}{2-0} = \frac{2}{2} = 1\ ms^{-2}$

b বিন্দুতে ত্বরণ $= 0$

c বিন্দুতে ত্বরণ $= 0$, d তে মন্দন $= \frac{4}{12} = \frac{1}{3} ms^{-2}$

২। একটি ক্রিকেট টেস্টে তামিম একটি বলকে ব্যাটের সাহায্যে আঘাত করায় বলটি 45° কোণে এবং 20 ms^{-1} বেগে বোলারের মাথার ওপর দিয়ে মাঠের বাইরের দিকে যেতে শুরু করে। মধ্য মাঠ থেকে বিপক্ষ দলের একজন ফিল্ডার দৌড়াতে শুরু করলেন। ফিল্ডারটি বলের লাইনে পৌঁছানোর আগেই সেটি দর্শক গ্যালারিতে পৌঁছে গেল। মাঠের ভেতর বলটির অতিক্রান্ত দূরত্ব 35 m, ওই স্থানে $g = 9.8\ ms^{-2}$।



(ক) ব্যাটে আঘাত পাওয়া বলটি সর্বাধিক কত উচ্চতায় উঠবে ?

(খ) উদ্দীপকের ফিল্ডার ঊর্ধ্বে লাফ দিয়ে 3 m উচ্চতায় বল ধরতে পারেন। তিনি যদি সময় মতো বলের লাইনে পৌঁছতে পারতেন তাহলে তিনি বলটি ধরতে সক্ষম হতেন কি ? উত্তরের সপক্ষে গাণিতিক বিশ্লেষণ দাও।

(ক) মনে করি, বলটি সর্বাধিক উচ্চতা H-এ উঠবে।
আমরা জানি,

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

$$\therefore\ H = \frac{(20)^2 \times (\sin 45°)^2}{2 \times 9.8} = \frac{400 \times 0.5}{2 \times 9.8} = 10.2\ m$$

এখানে,
আদিবেগ, $v_0 = 20\ ms^{-1}$
নিক্ষেপ কোণ, $\theta = 45°$
মাঠের দূরত্ব, $x = 35\ m$
$g = 9.8\ ms^{-2}$

(খ) মনে করি বলটি y উচ্চতায় মাঠ অতিক্রম করে।
এখন, আদিবেগের অনুভূমিক উপাংশ,

$$v_{x0} = v_0 \cos 45° = 20 \times 0.707 = 14.14\ ms^{-1}$$

ধরি, t সময় পর বলটি মাঠের সীমানা অতিক্রম করে।

$$v_{x0}t = x$$

$$\therefore\ v_{x0}t = 35$$

$$\therefore\ t = \frac{35}{14.14} = 2.475\ s$$

আদিবেগের উল্লম্ব উপাংশ,

$$v_{y0} = 20 \sin 45° = 20 \times 0.707 = 14.14\ ms^{-1}$$

t সময়ে উল্লম্ব সরণ,

$$y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$= 14.14 \times 2.475 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times (2.475)^2$$

$$= 35 - 30 = 5\ m$$

ফিল্ডার লাফ দিয়ে 3 m উচ্চতায় পৌঁছতে পারেন, কিন্তু বলটি 5 m ওপর দিয়ে মাঠ অতিক্রম করে। সুতরাং ফিল্ডার বলটি ধরতে পারতেন না।

৩। বাংলাদেশ জিম্বাবুয়ের মধ্যকার টেস্টে সাকিব একটি বলকে ব্যাটের সাহায্যে আঘাত করায় বলটি 45° কোণে এবং 20 ms^{-1} বেগে বোলারের উপর দিয়ে মাঠের বাইরে যেতে শুরু করে। মধ্য মাঠ থেকে একজন ফিল্ডার দৌড়াতে শুরু করল। ফিল্ডারটি বলের লাইনে পৌছানোর আগেই সেটি ছক্কাতে পরিণত হলো। মাঠের ভেতর বলটির অতিক্রান্ত দূরত্ব 35 m। [ঢা. বো. ২০১৫]

(ক) খাড়াভাবে নিক্ষিপ্ত বস্তুর অনুভূমিক দূরত্ব শূন্য কেন?

(খ) উদ্দীপকে বলটি সর্বাধিক কত উচ্চতায় উঠবে?

(গ) উদ্দীপকের ফিল্ডার ঊর্ধ্বে লাফ দিয়ে 3 m উচ্চতায় বল ধরতে পারে। সে যদি সময়মতো বলের লাইনে পৌছাতে পারত তাহলে ক্যাচ নিতে সমর্থ হতো কী? উত্তরের সপক্ষে গাণিতিক বিশ্লেষণ দাও।

(ক) খাড়া উপরে নিক্ষিপ্ত বস্তুর অনুভূমিক দিকে নিক্ষেপণ বেগের উপাংশ শূন্য। তাই নিক্ষিপ্ত বস্তুর অনুভূমিক দূরত্বও শূন্য হয়।

(খ) ধরি উদ্দীপকের বলটি সর্বাধিক H উচ্চতায় উঠবে।

আমরা জানি,

$$H = \frac{(v_0 \sin \theta)^2}{2g} = \frac{(20 \times \sin 45°)^2}{2g} = \frac{400 \times 0.5}{2 \times 9.8} = 10.2 \text{ m}$$

এখানে,
$v_0 = 20 \text{ ms}^{-1}$
$\theta = 45°$
$g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$
$H = ?$

(গ) আমরা জানি, $x = v_0 \cos \theta t$

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \theta} = \frac{35}{20 \times \frac{1}{\sqrt{2}}} = 2.47 \text{ sec}$$

এখন, $y = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2$

$$= 20 \times \sin 45° \times 2.47 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times (2.47)^2$$

$$= 5.03 \text{ m}$$

উদ্দীপকে ফিল্ডার উর্ধ্বে লাফ দিয়ে 3 m উচ্চতায় বল ধরতে পারে।

যেহেতু $y = 5.03 \text{ m} > 3 \text{ m}$, সেহেতু উদ্দীপকের ফিল্ডার সময়মতো বলের লাইনে পৌঁছাতে পারলেও বলটি ক্যাচ ধরতে সমর্থ হতো না।

৪। সার্কাস পার্টিতে একজন পারফরমার 5 kg ভরের একটি গোলককে ভূমি থেকে 1.5 m উপরে অনুভূমিক তলে 2 m লম্বা রশির সাহায্যে বৃত্তাকার পথে ঘোরাচ্ছেন। গোলকটি প্রতি মিনিটে 20 বার আবর্তন করে। ঘূর্ণায়মান অবস্থায় হঠাৎ রশিটি ছিঁড়ে যায়।

(ক) আবর্তনশীল গোলকটি কেন্দ্রের দিকে কত বল অনুভব করবে?

(খ) পারফরমার হতে দর্শক সারির দূরত্ব কেমন হলে গোলকটি কোনো দর্শককে আঘাত করবে না? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর।

(ক) আমরা জানি,

$$F_C = m\omega^2 r = m \times \left(\frac{2\pi N}{t}\right)^2 \times r = 5 \times \left(\frac{2 \times 3.14 \times 20}{60}\right)^2 \times 2 = 43.87 \text{ N}$$

এখানে,
$m = 5 \text{ kg}$
$r = 2 \text{ m}$
$N = 20$
$t = 1 \text{ min} = 60 \text{ sec}$
কেন্দ্রমুখী বল, $F_C = ?$

(খ) আমরা জানি,

$$\omega = \frac{2\pi N}{t} = \frac{2\pi \times 20}{60} = 2.0944 \text{ rads}^{-1}$$

আবার, $v = \omega r = 2.0944 \times 2 = 4.188 \text{ ms}^{-1}$

গোলকটির সর্বোচ্চ অনুভূমিক পাল্লা R হলে,

$$R = \frac{v^2}{g} = \frac{(4.188)^2}{9.8} = 1.79 \text{ m}$$ (পারফরমার হতে)।

সুতরাং, পারফরমার হতে দর্শক সারির দূরত্ব 1.79 m এর বেশি হলে গোলকটি কোনো দর্শককে আঘাত করবে না।

৫। একজন শিকারী 75 m দূরে অবস্থিত 10 m উঁচু একটি দেওয়ালে বসে থাকা পাখিকে লক্ষ করে একটি বুলেট ছুড়ল। বুলেটটির নিক্ষেপণ কোণ 60° এবং নিক্ষেপণ বেগ $v_0 = 30 \text{ ms}^{-1}$।

(ক) উদ্দীপকে বর্ণিত বুলেটটি কত সময় শূন্যে ছিল তা নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকে বর্ণিত বুলেটটি পাখিটিকে আঘাত করবে কি-না? গাণিতিকভাবে যুক্তিসহকারে বিশ্লেষণ কর। [চ. বো. ২০১৫]

(ক) আমরা জানি,

বিচরণকাল $T = \frac{2v_0 \sin\theta}{g} = \frac{2 \times 30 \times \sin 60°}{9.8} = 5.302 \text{ s}$

(খ) আমরা জানি,

$$y = (\tan\theta)\,x - \frac{g}{2(v_0\cos\theta)^2}x^2$$

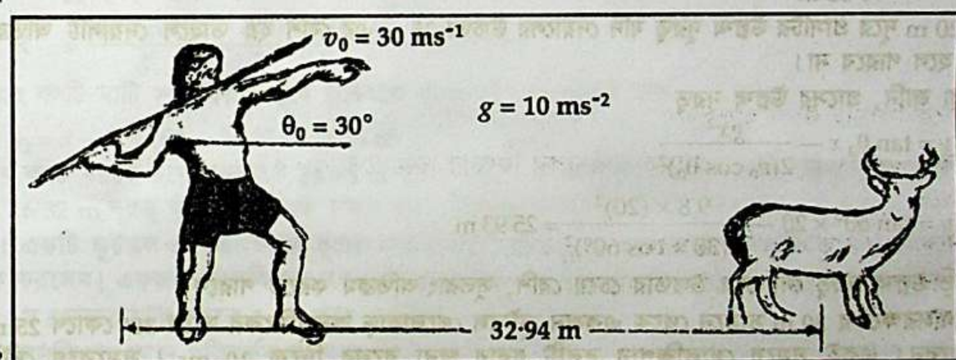
$$= \tan 60° \times 75 - \frac{9.8}{2(30 \times \cos 60°)^2} \times (75)^2$$

$$= 129.9 - 122.5 = 7.4 \text{ m}$$

এখানে,
$x_0 = y_0 = 0$
$v_0 = 30 \text{ ms}^{-1}$
$x = 75 \text{ m}$
$\theta = 60°$
$y = ?$
দেওয়ালের উচ্চতা, $h = 10 \text{ m}$

যেহেতু বুলেটটির উল্লম্ব দূরত্ব $y = 7.4$ m এবং পাখিটির অবস্থান 10 m উচ্চতাবিশিষ্ট দেওয়ালের উপর তাই বুলেটটি পাখিটিকে আঘাত করবে না।

৬।



শিকারী যখন বর্শাটি নিক্ষেপ করেন হরিণটি তখন স্থিরাবস্থা থেকে 10 ms^{-1} সমত্বরণে PQ বরাবর দৌড়াতে থাকে। [চ. বো. ২০১৫]

(ক) উদ্দীপকে বর্শাটি এর নিক্ষেপণ বিন্দু হতে সর্বাধিক কত উচ্চতায় উঠবে?

(খ) বর্শাটি কি হরিণটিকে আঘাত করবে? তোমার উত্তরের সপক্ষে গাণিতিক যুক্তি উপস্থাপন কর।

(ক) আমরা জানি, সর্বাধিক উচ্চতা

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} = \frac{(30)^2 \times (\sin 30°)^2}{2 \times 10} = 11.25 \text{ m}$$

(খ) বর্শাটির অনুভূমিক পাল্লা, $R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$

$$= \frac{(30)^2 (\sin 2 \times 30°)}{10} = 77.94 \text{ m}$$

বর্শাটির উড্ডয়নকাল, $T = \frac{2\,v_0 \sin\theta}{g} = \frac{2 \times 30 \times \sin 30°}{10} = 3 \text{ sec}$

3 সে. পর শিকারী থেকে হরিণের দূরত্ব,

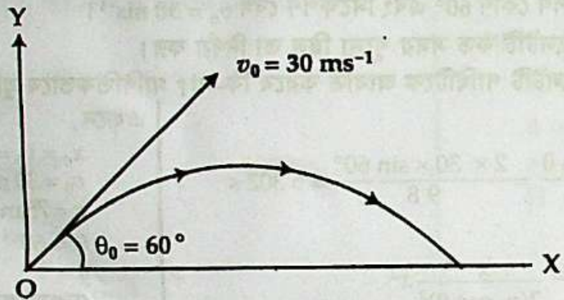
$$s = 32.94 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$= 32.94 + \frac{1}{2} \times 10 \times (3)^2 = 77.94 \text{ m}$$

এখানে,
$v_0 = 0$

এক্ষেত্রে পাল্লা এবং হরিণ কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব সমান। সুতরাং বর্শাটি হরিণকে আঘাত করবে।

৭।



(ক) প্রাসটির পাল্লা নির্ণয় কর।
(খ) প্রাসটির নিক্ষেপণ বিন্দু থেকে X-অক্ষ বরাবর 20 m দূরে 25 m উঁচু দেয়াল অতিক্রম করতে পারবে কী ? [য. বো. ২০১৬]

(ক) আমরা জানি, প্রাসের পাল্লা,

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} = \frac{(30)^2 \times \sin 120°}{9{\cdot}8}$$
$$= 79{\cdot}53\ m$$

(খ) 20 m দূরে প্রাসটির উল্লম্ব দূরত্ব যদি দেয়ালের উচ্চতা 25 m এর বেশি হয় তাহলে দেয়ালটি অতিক্রম করতে পারবে, কম হলে পারবে না।

আমরা জানি, প্রাসের উল্লম্ব দূরত্ব

$$y = \tan\theta_0\, x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos\theta_0)^2}$$

$$y = \tan 60° \times 20 - \frac{9{\cdot}8 \times (20)^2}{2(30 \times \cos 60°)^2} = 25{\cdot}93\ m$$

যেহেতু উল্লম্ব দূরত্ব দেয়ালের উচ্চতার চেয়ে বেশি, সুতরাং অতিক্রম করতে পারবে।

৮। গোলরক্ষকের 80 m সামনে থেকে একজন ফুটবল খেলোয়াড় অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে 25 ms^{-1} বেগে বল কিক করেন। একই সময়ে গোলকিপার বলটি ধরার জন্য বলের দিকে 10 ms^{-1} সমবেগে দৌঁড়ে যান। [$g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$]

(ক) কিক করার 0·5 s পরে বলের বেগ কত ?
(খ) বলটি ভূমিতে পড়ার আগে গোলকিপার বলটি ধরতে পারবেন কী না—গাণিতিক বিশ্লেষণ করে মতামত দাও। [রা. বো. ২০১৬]

(ক) মনে করি যে বিন্দু থেকে ফুটবলটি কিক করা হয় সেটি মূল বিন্দু এবং খাড়া ওপরের দিক Y-অক্ষ ধনাত্মক। শেষ বেগের অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশ যথাক্রমে v_x ও v_y হলে $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

আদিবেগের অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশ যথাক্রমে v_{x0} ও v_{y0} হলে

$$v_x = v_{x0} + a_x t$$
$$= v_0 \cos\theta_0 + a_x t = 25 \times \cos 30° + 0 = 21{\cdot}65\ ms^{-1}$$

এবং

$$v_y = v_{y0} + a_y t = v_0 \sin\theta_0 + a_y t = 25 \times \sin 30° - 9{\cdot}8 \times 0{\cdot}5 = 7{\cdot}6\ ms^{-1}$$

(খ) বলটি যে সময় শূন্যে থাকবে অর্থাৎ বলের উড্ডয়ন কাল,

$$T = \frac{2v_0 \sin\theta_0}{g}$$
$$= \frac{2 \times 25 \times \sin 30°}{9{\cdot}8} = 2{\cdot}55\ sec$$

এ সময় গোলরক্ষক কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s = vt = 10 \times 2{\cdot}55 = 25{\cdot}5\ m$

বলটির অনুভূমিক পাল্লা,

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} = \frac{(25)^2 \times \sin 60°}{9{\cdot}8} = 55{\cdot}23\ m$$

অর্থাৎ মাটি স্পর্শ করার পূর্বে গোলকিপার যদি বলের দিকে কমপক্ষে $(80 - 55{\cdot}23)$ m = $24{\cdot}77$ m দূরত্ব অতিক্রম করতে পারেন তাহলে তিনি বলটি ধরতে পারবেন। যেহেতু গোলকিপার বল মাটি স্পর্শ করার পূর্বে $25{\cdot}5$ m দূরত্ব অতিক্রম করতে সক্ষম, কাজেই তিনি বলটি ধরতে পারবেন।

৯। ভারত বনাম বাংলাদেশের ক্রিকেট ম্যাচে ব্যাটসম্যান বিরাট কোহলীর দিকে সাকিব-আল হাসান বল করলেন। $20\ ms^{-1}$ বেগে এবং $30°$ কোণে ব্যাটসম্যান বলটিকে আঘাত করলেন। ব্যাটসম্যান হতে 60 m দূরে থাকা রুবেল $8\ ms^{-1}$ বেগে দৌড়ে বলটি ক্যাচ ধরার জন্য অগ্রসর হলেন।

(ক) বলটি কত সময় শূন্যে অবস্থান করবে ?

(খ) রুবেলের পক্ষে ক্যাচ ধরা সম্ভব কী ? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে সিদ্ধান্ত দাও। [ব. বো. ২০১৬]

(ক) আমরা জানি, উড্ডয়নকাল

$$T = \frac{2v_0 \sin\theta_0}{g} = \frac{2\times 30\times \sin 30°}{9{\cdot}8} = 2{\cdot}04 \text{ sec}$$

(খ) ব্যাটসম্যান থেকে রুবেলের দূরত্ব, $d = 60$ m

রুবেল $2{\cdot}04$ সেকেন্ডে ব্যাটসম্যানের দিকে দৌড়ে আসবেন,

∴ রুবেল কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব, s_1 = রুবেলের বেগ × বলটির উড্ডয়নকাল $= 8\times 2{\cdot}04 = 16{\cdot}32$ m

বলটির অনুভূমিক পাল্লা,

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} = \frac{(20)^2\times \sin 60°}{9{\cdot}8} = 35{\cdot}35 \text{ m}$$

সুতরাং বলটি মাটি স্পর্শ করার পূর্বে রুবেলকে দূরত্ব অতিক্রম করতে হবে।

$$s_2 = d - R = (60 - 35{\cdot}35) \text{ m} = 24{\cdot}65$$

অর্থাৎ ক্যাচ ধরতে হলে রুবেলকে $24{\cdot}65$ m দূরত্ব $2{\cdot}04$ s এ অতিক্রম করতে হবে। কিন্তু রুবেল বল মাটি স্পর্শ করার আগে $16{\cdot}32$ m দূরত্ব অতিক্রম করতে সক্ষম হন। কাজেই ক্যাচ ধরা সম্ভব হবে না।

১০। একটি ফুটবল প্রশিক্ষণকালে দুজন খেলোয়াড় উভয়েই $10\ ms^{-1}$ বেগে যথাক্রমে $30°$ এবং $60°$ কোণে ফুটবল কিক করলেন। একজন গোলকিপার বল দুটিকে মাটিতে পড়বার ঠিক আগ মুহূর্তে ধরবার জন্য দাঁড়িয়ে ছিলেন।

(ক) ১ম খেলোয়াড়ের ক্ষেত্রে 1 sec পরে বলটির বেগের মান কত ?

(খ) গোলকিপার স্থান পরিবর্তন না করে ভিন্ন সময়ে বল দুটি ধরতে সক্ষম হবে—এর সত্যতা গাণিতিকভাবে যাচাই কর। [কু. বো. ২০১৬]

(ক) আমরা জানি, বেগের অনুভূমিক উপাংশ

$$v_x = v_0\cos\theta = 10\cos 30° = 10\times 0{\cdot}866 = 8{\cdot}66\ ms^{-1}$$

এবং উল্লম্ব উপাংশ

$$v_y = v_0\sin\theta - gt = 10\sin 30° - gt = 10\sin 30° - 9{\cdot}8\times 1 = 5 - 9{\cdot}8 = -4{\cdot}8\ ms^{-1}$$

এখানে,
নিক্ষেপ কোণ, $\theta = 30°$
আদিবেগ, $v_0 = 10\ ms^{-1}$
সময়, $t = 1$ sec
বলটির বেগ, v = ?

∴ বেগের মান $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(8{\cdot}66)^2 + (-4{\cdot}8)^2} = \sqrt{98{\cdot}03} = 9{\cdot}90\ ms^{-1}$

(খ) ১ম ও ২য় খেলোয়াড়ের বলের আদিবেগ, $v_0 = 10\ ms^{-1}$

১ম খেলোয়াড়ের নিক্ষেপণ কোণ $= 30°$

এবং ২য় খেলোয়াড়ের নিক্ষেপণ কোণ $= 60°$

(খ) মনে করি বস্তুটিকে θ কোণে নিক্ষেপ করলে বস্তুটি ঠিক AB দেওয়ালের ওপর দিয়ে চলে যায়।

আমরা জানি,

$$y = (\tan\theta)x - \frac{gx^2}{(2v_0\cos\theta)^2}$$

বা, $2 = \tan\theta\times 85 - \dfrac{9{\cdot}8\times(85)^2}{2\times(32\cos\theta)^2}$

উদ্দীপক হতে পাই,
নিক্ষেপণ বেগ, $v_0 = 32\ ms^{-1}$
নিক্ষেপণ কোণ, $\theta = 30°$
AB দেওয়ালের দূরত্ব, $x = 85$ m
AB দেওয়ালের উচ্চতা, $y = 2$ m

১ম খেলোয়াড়ের বলটির অনুভূমিক পাল্লা,

$$R_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_1}{g}$$

$$= \frac{(10)^2 \sin(2 \times 30°)}{9.8} = 8.837 \text{ m}$$

২য় খেলোয়াড়ের বলটির অনুভূমিক পাল্লা,

$$R_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_2}{g}$$

$$= \frac{(10)^2 \times \sin(2 \times 60°)}{9.8} = 8.837 \text{ m}$$

প্রথম বলটির উড্ডয়নকাল,

$$T_1 = \frac{2v_0 \sin\theta_1}{g} = \frac{2 \times 10 \times \sin 30°}{9.8} = 1.02 \text{ sec}$$

দ্বিতীয় বলটির উড্ডয়নকাল,

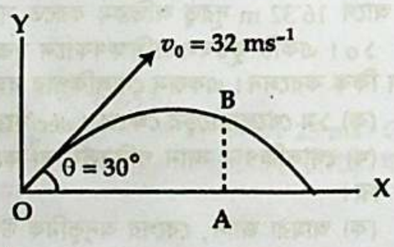
$$T_2 = \frac{2v_0 \sin\theta_2}{g} = \frac{2 \times 10 \times \sin 60°}{9.8} = 1.767 \text{ sec}$$

$\therefore R_1 = R_2$ কিন্তু $T_1 \neq T_2$; কাজেই গোলকিপার স্থান পরিবর্তন না করে ভিন্ন সময়ে বল দুটি ধরতে সক্ষম হবে।

১১। দুই বন্ধু সুমন ও রানা দেখল যে, ভূপৃষ্ঠস্থ O বিন্দু হতে একটি বস্তুকে 32 ms^{-1} বেগে 30° কোণে নিক্ষেপ করায় 85 m দূরে অবস্থিত 2 m উঁচু AB দেয়ালের ওপর দিয়ে বস্তুটি ভূপৃষ্ঠে পতিত হয়। [ঢা. বো. ২০১৭]

(ক) O বিন্দু হতে নিক্ষেপণের 1.2 s পর নিক্ষিপ্ত বস্তুটির বেগ নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপক অনুসারে নিক্ষেপণ কোণের সর্বনিম্ন কী পরিবর্তন করলে প্রাসটি AB দেয়ালে বাধা পাবে ? গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও।



(ক) 1.2 s পর বস্তুর বেগ $\vec{v}$ হলে, আমরা জানি বেগের অনুভূমিক উপাংশ

$$v_x = v_0 \cos\theta = 32 \times \cos 30°$$

$$= 32 \times 0.866 = 27.71 \text{ ms}^{-1}$$

এবং উল্লম্ব উপাংশ,

$$v_y = v_0 \sin\theta - gt$$

$$= 32 \times \sin 30° - 9.8 \times 1.2$$

$$= 32 \times 0.5 - 9.8 \times 1.2 = 4.24 \text{ ms}^{-1}$$

এখানে,
নিক্ষেপণ কোণ, $\theta = 30°$
আদিবেগ, $v_0 = 32$ ms^{-1}
সময়, $t = 1.2$ sec

$\therefore$ বেগের মান $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$$= \sqrt{(27.71)^2 + (4.24)^2}$$

$$= 28.03 \text{ ms}^{-1}$$

ধরি বেগের দিক অনুভূমিকের সাথে θ কোণ করে

$$\therefore \tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{4.24}{27.71}$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\frac{4.24}{27.71} = 8.698°$$

বা, $2 = \tan\theta \times 85 - \frac{34.573}{\cos^2\theta}$

বা, $2 = \tan\theta \times 85 - \sec^2 \times (34.573)$

বা, $2 = \tan\theta \times 85 - 34.573\,(1 + \tan^2\theta)$

বা, $2 = \tan\theta \times 85 - 34.573 - 34.573\tan^2\theta$

বা, $34.573\tan^2\theta - 85\tan\theta + 36.573 = 0$

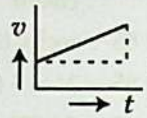
$\therefore\ \theta = 62.24°$ অথবা $\theta = 29.07°$

অতএব নিক্ষেপণ কোণ সর্বনিম্ন $(30° - 29.07°) = 0.93°$ কমালে প্রাসটি AB দেওয়ালে বাধা পাবে।

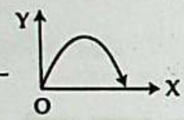
সার-সংক্ষেপ

প্রসঙ্গ কাঠামো	:	যে দৃঢ় বস্তু বা বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো স্থানে অন্য বিন্দু বা বস্তুকে নির্দিষ্ট করা হয়, তাকে প্রসঙ্গ কাঠামো বলে।
সরণ	:	কোনো বস্তুর সরণ একটি ভেক্টর রাশি যার মান বস্তুটির শেষ এবং আদি অবস্থানের মধ্যে ন্যূনতম দূরত্ব এবং দিক হলো আদি থেকে শেষ অবস্থানের দিকে।
গড় দ্রুতি	:	কোনো বস্তু কর্তৃক অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব এবং মোট ব্যয়িত সময়ের ভাগফলকে গড় দ্রুতি বলে।
তাৎক্ষণিক দ্রুতি বা দ্রুতি	:	সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে সময়ের সঙ্গে বস্তুর দূরত্বের পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক দ্রুতি বা দ্রুতি বলে।
গড় বেগ	:	যে কোনো সময় ব্যবধানে কোনো বস্তুর মোট সরণকে ওই সময় ব্যবধান দিয়ে ভাগ করলে যে রাশি পাওয়া যায় তাকেই বস্তুটির গড় বেগ বলে।
তাৎক্ষণিক বেগ বা বেগ	:	সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে সময়ের সঙ্গে বস্তুর সরণের পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক বেগ বা বেগ বলে।
সমবেগ	:	কোনো বস্তুর বেগ সবসময় ধ্রুব থাকলে ওই বেগকে সমবেগ বলে।
গড় ত্বরণ	:	কোনো একটি গতিশীল বস্তুর বেগের বৃদ্ধি এবং ওই বৃদ্ধির জন্য ব্যয়িত সময়ের ভাগফলকে গড় ত্বরণ বলে।
তাৎক্ষণিক ত্বরণ বা ত্বরণ	:	সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে কোনো একটি গতিশীল বস্তুর বেগ বৃদ্ধির হারকে তাৎক্ষণিক ত্বরণ বা ত্বরণ বলে।
সমত্বরণ	:	ত্বরণ যদি সবসময় ধ্রুব হয় তবে তাকে সমত্বরণ বলে।
পড়ন্ত বস্তুর সূত্র	→	পড়ন্ত বস্তুর তিনটি সূত্র রয়েছে। সূত্রগুলো নিম্নে বিবৃত হলো।
১ম সূত্র	:	বায়ুশূন্য স্থানে সকল বস্তুই স্থির অবস্থান হতে যাত্রা করে সমান সময়ে সমান পথ অতিক্রম করে।
২য় সূত্র	:	বাধাহীন পথে পড়ন্ত বস্তুর নির্দিষ্ট সময়ের প্রাপ্ত বেগ ওই সময়ের সমানুপাতিক।
৩য় সূত্র	:	বাধাহীন পথে পড়ন্ত বস্তুর নির্দিষ্ট সময়ের অতিক্রান্ত দূরত্ব ওই সময়ের বর্গের সমানুপাতিক।
প্রাস বা প্রক্ষেপক	:	কোনো একটি বস্তুকে অনুভূমিকের সাথে তির্যকভাবে ওপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলে তাকে প্রাস বা প্রক্ষেপক বলে।
বিচরণ কাল বা ভ্রমণকাল	:	নিক্ষেপের মুহূর্ত হতে সমতলে ফিরে আসতে নিক্ষিপ্ত বস্তুর যে সময় লাগে তাকে বিচরণকাল বা ভ্রমণকাল বলে।
পাল্লা	:	নিক্ষেপণ বিন্দু ও বিচরণ পথের শেষ প্রান্ত বিন্দুর মধ্যবর্তী রৈখিক দূরত্বকে পাল্লা বলে।
বৃত্তীয় গতি	:	কোনো বস্তুকণা যদি কোনো অক্ষ বা বিন্দুকে কেন্দ্র করে একটি বৃত্তাকার পথে গতিশীল থাকে, তবে বস্তুকণার এই গতিকে বৃত্তীয় গতি বলে।
সুষম বৃত্তীয় গতি	:	বৃত্তাকার পথে সমদ্রুতিতে ঘূর্ণায়মান কোনো বস্তুকণার গতিকে সুষম বৃত্তীয় গতি বলে।
কেন্দ্রমুখি বা অভিকেন্দ্র ত্বরণ	:	কোনো বস্তুকণা যখন বৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকে তখন বৃত্তের ব্যাসার্ধ বরাবর এবং কেন্দ্রের অভিমুখে বস্তুকণার উপর যে ত্বরণ ক্রিয়া করে তাকে কেন্দ্রমুখ বা অভিকেন্দ্র ত্বরণ বলে।

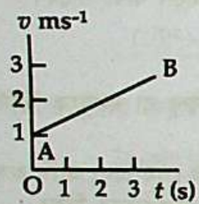
বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তরের জন্য প্রয়োজনীয় বিষয়াবলির সার-সংক্ষেপ

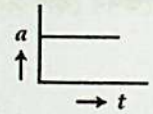
১। $v = u + at$ সমীকরণটি পাশের $v - t$ লেখচিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। 

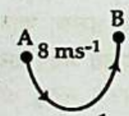
এর ঢাল = ত্বরণ।

২। প্রাসের ক্ষেত্রে লেখচিত্র হলো— 

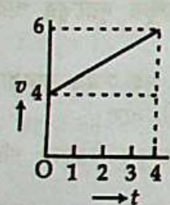
। প্রাসের সর্বাধিক উচ্চতা, $H = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$।

৩। 

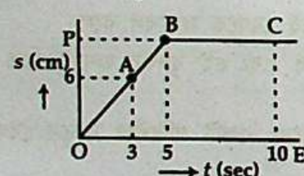
অসম বেগের এই লেখচিত্রের আলোকে ত্বরণকে 

এই লেখচিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। 

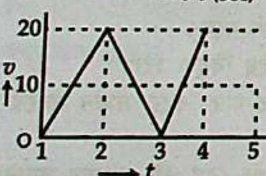
$10\ ms^{-1}$ দুটি বেগ হলে A ও B বিন্দুতে বেগের পরিবর্তন $18\ ms^{-1}$। $s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$, $s_{th} = v_0 + \frac{1}{2}a(2t - 1)$, $h = v_0 - \frac{1}{2}g(2t - 1)$ কোনোটিই পরিবর্তনশীল ত্বরণের গতিশীল বস্তুর জন্য প্রযোজ্য নয়।

৪। 

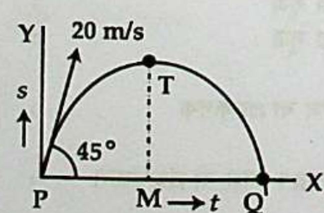
লেখচিত্র হতে ত্বরণের মান পাওয়া যায়, ঢাল থেকে $= \frac{2}{4} = 0·05\ ms^{-2}$ এবং এর সমীকরণ $v = v_0 + at$।

৫। 

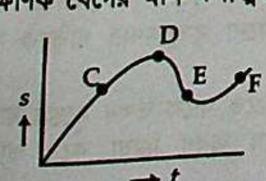
পাশের লেখচিত্রে
(ক) A বিন্দুতে বেগ $= \frac{6}{3} = 2\ cms^{-1}$
(খ) BC রেখা অংশ বস্তুর স্থির অবস্থা নির্দেশ করে।
(গ) 10 s এর অতিক্রান্ত দূরত্ব হবে OPBCE এর ক্ষেত্রফল।

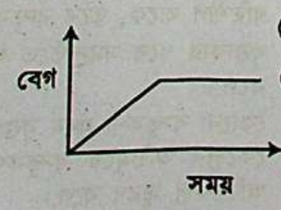
৬। 

(ক) লেখচিত্র অনুযায়ী $t = 0$ থেকে $t = 5$ সে. এ বস্তুটি কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব হবে $s = vt = 10 \times 5 = 50\ m$
(খ) $t = 0$ থেকে $t = 5$ সে. এ বস্তুটির বেগ $= 10\ ms^{-1}$

৭। বাতাসের বাধা উপেক্ষা করে একটি পাথরকে পাশের চিত্র অনুযায়ী P বিন্দু হতে তির্যকভাবে ছুঁড়ে দেওয়া হলো। পাথরটির গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দু T এবং পাথরটি ভূমি স্পর্শ করার পূর্ব মুহূর্তে Q বিন্দুতে পৌঁছায়।


(ক) পাথরটির সর্বাধিক অনুভূমিক পাল্লা হবে 40·8 m. PM = 20·4 m.
(খ) পাথরটির বেগের উল্লম্ব উপাংশ T বিন্দুতে শূন্য। Q বিন্দুতে পৌঁছাতে সময় 2·885 sec

৮। (ক) নিম্নের লেখচিত্রের E বিন্দুতে বস্তুকণাটির তাৎক্ষণিক বেগের মান ঋণাত্মক হবে।


(খ)


(i) এই চিত্রে বস্তুর আদি বেগ শূন্য।
(ii) বস্তু কখনও থামবে না।

৯। প্রাসের সর্বোচ্চ অবস্থানে বেগ ও ত্বরণের মধ্যবর্তী কোণ $\pi/2$.

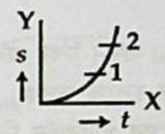
১০। পাল্লা সর্বনিম্ন হলে নিক্ষেপণ কোণ 0° হবে। সর্বোচ্চ উচ্চতায় প্রাসের গতিপথ একমাত্রিক।

১১। প্রাসের নিক্ষেপণ কোণ $\tan^{-1}(4)$ হলে এর সর্বাধিক উচ্চতা ও অনুভূমিক পাল্লার মান পরস্পরের সমান হবে।

১২। স্থির অবস্থান থেকে বিনা বাধায় পড়ন্ত বস্তুর নির্দিষ্ট সময়ে প্রাপ্ত বেগ ওই সময়ের সমানুপাতিক।

১৩। একটি প্রাসকে E গতিশক্তিতে 45° কোণে নিক্ষেপ করা হলো। সর্বোচ্চ বিন্দুতে স্থিতিশক্তি হবে, $\frac{E}{2}$।

১৪। অনুভূমিক বরাবর নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতিপথ পরাবৃত্তাকার বা প্যারাবোলা।
অনুভূমিক বরাবর ত্বরণ শূন্য তাই বেগের উপাংশ ধ্রুব থাকে।



১৫। সমত্বরণে চললে উল্লেখিত চিত্রের ক্ষেত্রে লেখচিত্রটি একটি প্যারাবোলা হবে।
প্রাসের সর্বাধিক উচ্চতায় বেগ শূন্য।

১৬। একটি ঘড়ির সেকেন্ডের কাঁটার কৌণিক বেগ $\frac{\pi}{30}$ rad s^{-1} এবং ঘণ্টার কাঁটার কৌণিক বেগ $\frac{\pi}{6}$ rad s^{-1}.

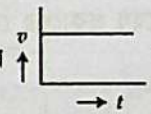
১৭। সর্বাধিক পাল্লার জন্য প্রাসকে অনুভূমিকের সাথে 45° কোণে নিক্ষেপ করতে হবে।

১৮। প্রাসের গতিপথের যেকোনো বিন্দুতে ত্বরণের অনুভূমিক উপাংশ শূন্য।

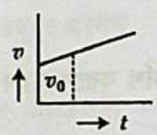
১৯। একটি গতিশীল বস্তুর সরণের সমীকরণ $x = (4t^2 + 3t)$ m, 2 sec পর বস্তুটির বেগ 19 ms^{-1}।

২০। প্রাসের গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দুতে বেগ ও ত্বরণ পরস্পর লম্ব হয় অর্থাৎ মধ্যবর্তী কোণ $\pi/2$ হয়। বেগের উল্লম্ব উপাংশ শূন্য হয়।

২১। কোনো বস্তু t সেকেন্ডে h উচ্চতা হতে ভূমিতে পড়লে $\frac{t}{2}$ সে. পর বস্তুটি ভূমি হতে $\frac{3h}{4}$ উচ্চতায় ছিল।

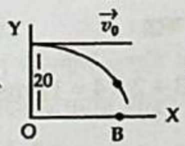
২২। একটি বস্তুর বেগ ধ্রুব কিন্তু শূন্য নয়। সে ক্ষেত্রে লেখচিত্রটি হবে 

সমবেগ।

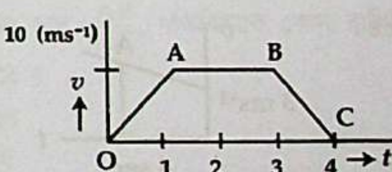
২৩। $v = v_0 + at$ সমীকরণের লেখচিত্র হলো 

এই লেখের ঢালই ত্বরণ।

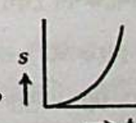
২৪। প্রাসের গতিপথ অধিবৃত্তাকার বা প্যারাবোলা। বৃত্তাকার পথে সমদ্রুতিতে একটি কণা ঘুরছে। তার ত্বরণের অভিমুখ বৃত্তের কেন্দ্রের দিকে। চিত্রে O থেকে A বিন্দুতে যেতে ত্বরণ 10 ms^{-2}।

$x^2 = 80\,y$ এবং 

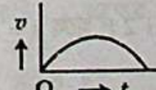
$B(x, y)$ থেকে প্রাপ্ত $v_0 = 20$ ms^{-1}

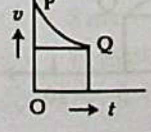


Hints : $2y\frac{v_0^2}{g} = x^2 = 80\,y$

২৫। স্থির অবস্থা হতে t সময়ে চলমান বস্তুর ক্ষেত্রে, $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ সমীকরণের লেখচিত্র, 

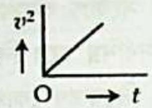
২৬। একটি বস্তু স্থির অবস্থা হতে অসমত্বরণে এমনভাবে গতিশীল যাতে তার ত্বরণের সর্বোচ্চ মান ধীরে ধীরে হ্রাস পেয়ে শূন্য হয়। পাশের বেগ বনাম সময় লেখচিত্র ইহা নির্দেশ করে।



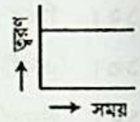


PQ লেখচিত্র $v =$ এর সমীকরণ $v = at$

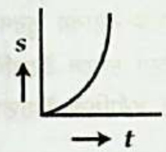
২৭। স্থির অবস্থা হতে সমত্বরণে গতিশীল কোনো বস্তুকণার v^2 বনাম s লেখচিত্র হলো



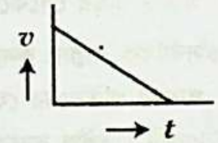
২৮। সোজাপথে চলমান একটি গতিশীল গাড়ির সুষম বেগ বৃদ্ধি পাশের লেখচিত্র দ্বারা প্রকাশ করা যায়।



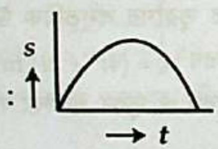
২৯। যখন $t = 0$ তখন স্থির অবস্থান থেকে একটি বস্তু চলতে শুরু করে ধ্রুব ত্বরণে চলতে থাকে। পাশের লেখচিত্রটি সঠিকভাবে সময়ের সাথে সরণের পরিবর্তন নির্দেশ করে।



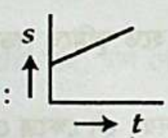
৩০। v বেগে একটি বস্তুকে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো এবং t সময় পর ভূমিতে ফিরে এলো। (ক) এক্ষেত্রে বেগ বনাম সময় লেখচিত্র হলো :



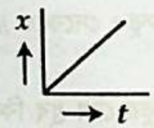
(খ) এক্ষেত্রে সরণ বনাম সময় লেখচিত্র হলো :



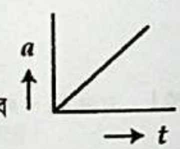
৩১। x বনাম t লেখচিত্রে সমবেগ প্রকাশের লেখচিত্র হলো :



বা,

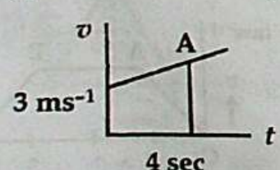


৩২। $x = \frac{1}{3}t^2 + 3t$ সমীকরণটি একটি বস্তুর ধারণ নির্দেশ করলে ত্বরণ বনাম সময়ের লেখচিত্র হবে



৩৩। সর্বাধিক উচ্চতায় প্রাসের গতি একমাত্রিক। প্রাসের X অক্ষের ত্বরণ $a_x = 0$, Y-অক্ষের ত্বরণ $a_y = -g$। অনুভূমিকের দিকে প্রাসের ত্বরণ না থাকায় অনুভূমিক দিকে বেগের উপাংশ ধ্রুব থাকে।

৩৪।



(ক) গ্রাফটির ঢাল ত্বরণ $a = \frac{v}{t}$ নির্দেশ করে।

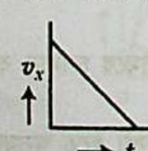
(খ) A বিন্দুতে বেগ হবে $v = u + at = 3 + 2 \times 4 = 11$ ms^{-1}

৩৫। একই নিক্ষেপণ বেগ ও একই পাল্লার জন্য একটি নিক্ষেপণ কোণ 30° হলে অপর কোণ হবে 60°।

ব্যাখ্যা : $\theta = 90° - \alpha$ হলে R একই হয়,

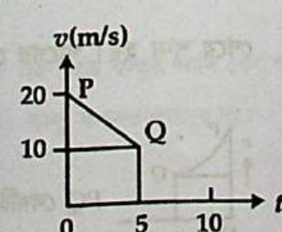
$\therefore \theta = 90° - 30° = 60°$।

৩৬। প্রাসের গতির ক্ষেত্রে অনুভূমিক বেগ বনাম সময় লেখচিত্র হচ্ছে



৩৭। $x = 12t - 1.2\,t^2$ হলে $t = 3$ sec সময়ে বেগ 4.8 ms^{-1} এবং ত্বরণ -2.4 ms^{-2}।

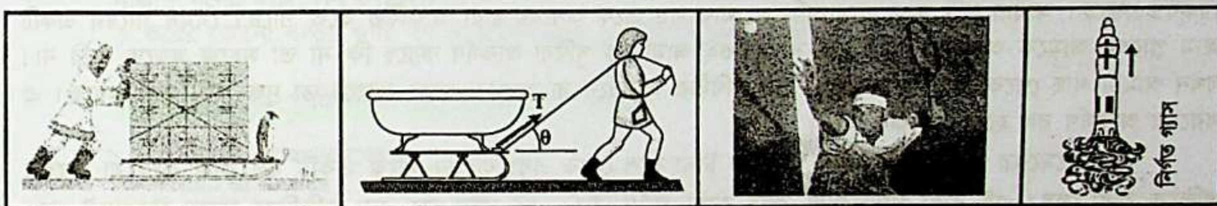
৩৮। PQ লেখচিত্রের জন্য $v = at$ প্রযোজ্য।



৪

নিউটনিয়ান বলবিদ্যা
NEWTONIAN MECHANICS

প্রধান শব্দ (Key Words) : বল, মৌলিক বল, ভরবেগ, নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র, ঘাত, অভিকর্ষ, মহাকর্ষ সূত্র, মহাকর্ষ, মহাকর্ষীয় প্রাবল্য, জড়তার ভ্রামক, কৌণিক ভরবেগ, চক্রগতির ব্যাসার্ধ, টর্ক, কৌণিক ভরবেগের নিত্যতা বা সংরক্ষণ সূত্র, কেন্দ্রমুখি বল, কেন্দ্রবিমুখি বল, সংঘর্ষ, স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ, অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ, একমাত্রিক সংঘর্ষ।



সূচনা
Introduction

বিজ্ঞানী স্যার আইজাক নিউটন বস্তুর গতি সংক্রান্ত সূত্র নিয়ে প্রথম আলোচনা করেন। তাঁর আবিষ্কৃত তিনটি সূত্র গতিবিদ্যার স্তম্ভস্বরূপ। পদার্থবিদ্যা ও প্রকৌশলবিদ্যা (engineering)-এর বহু সমস্যা এই সূত্র প্রয়োগ করে সফল-ভাবে সমাধান করা সম্ভব হয়েছে। সরলরৈখিক এবং ঘূর্ণায়মান বস্তুর ক্ষেত্রেও পদার্থবিদ্যার গতি, ভরবেগ এবং সংরক্ষণশীলতার নীতি ব্যাখ্যা ও প্রমাণ নিউটনিয়ান বলবিদ্যার অন্যতম সাফল্য।

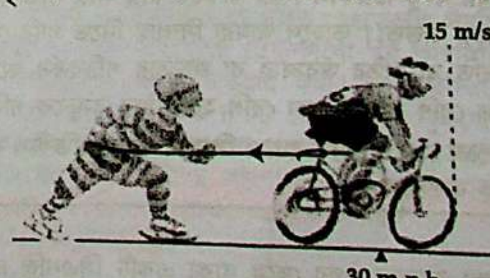
এই অধ্যায় পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা—

- বলের স্বজ্ঞামূলক ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- নিউটনিয়ান বলবিদ্যায় ব্যবহৃত সূত্রগুলো ক্যালকুলাস ব্যবহার করে বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- নিউটনের গতিসূত্রের সীমাবদ্ধতা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- রৈখিক ও কৌণিক ভরবেগ সংক্রান্ত রাশিমালা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- কেন্দ্রমুখি ও কেন্দ্রবিমুখি বলের ব্যবহার জানতে পারবে।
- স্থিতিস্থাপক ও অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ ব্যাখ্যা করতে এবং এ সংক্রান্ত সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- ব্যবহারিক : পরীক্ষার সাহায্যে একটি ফ্লাই হুইলের জড়তার ভ্রামক নির্ণয় করতে পারবে।

৪.১ বলের স্বজ্ঞামূলক ধারণা
Intuitive concept of force

স্থিতি জড়তা, গতি জড়তা, সরণ, বেগ, ত্বরণ সম্পর্কে আমরা আগের অধ্যায়ে জেনেছি। একটি ফুটবলকে কিক করলে তা সহজে সামনের দিকে এগিয়ে যায়। আবার একই আকৃতির একটি লোহার বলে আঘাত করে তাকে একইভাবে

চিত্র ৪.১ (ক)



চিত্র ৪.১ (খ)

সচল করা যায় না। একটি জেট প্লেনকে একা ঠেলে নড়ানো যায় না [চিত্র ৪.১(ক)] কিন্তু নির্দিষ্ট বেগে চলন্ত একটি সাইকেলকে পেছন দিক থেকে টেনে থামানো যায় [চিত্র ৪.১(খ)]। এই উদাহরণগুলো থেকে বোঝা যায় যে বস্তুর ভর যত বেশি তার স্থিতি বা গতির অবস্থা পরিবর্তন করা তত কঠিন। অতএব যে বস্তুর ভর যত বেশি হয় তার জড়তাও তত বেশি হয়।

উক্ত ঘটনা থেকে আমরা বুঝতে পারি যে, বস্তু স্থির থাকলে তা গতিশীল করতে বা গতিশীল থাকলে তা স্থির করতে বস্তুর উপর বাইরে থেকে স্পর্শীয়ভাবে কিছু একটা প্রয়োগ করতে হবে। আমাদের দৈনন্দিন কাজকর্মে কখনও কোনো বস্তুকে পাশে ঠেলে রাখি, কখনও টান দিয়ে, কখনও বা উঁচু করে এক স্থান থেকে অন্য স্থানে নিয়ে যাই। সকল ক্ষেত্রে বল প্রয়োগের জন্য বল প্রয়োগকারীর এবং বস্তুর প্রত্যক্ষ সংস্পর্শ প্রয়োজন। অর্থাৎ যে বল সৃষ্টির জন্য দুটি বস্তুর প্রত্যক্ষ সংস্পর্শ প্রয়োজন তাকে বলা হয় **স্পর্শ বল**। স্পর্শ বলের উদাহরণ হলো—ঘর্ষণ বল, সংঘর্ষের ফলে সৃষ্ট বল, টানা বল ইত্যাদি। এক্ষেত্রে বলা যায় কোনো স্থিতিশীল বস্তুকে গতিশীল করতে এবং গতিশীল বস্তুর অবস্থার পরিবর্তন করতে বস্তুর উপর যা প্রযুক্ত করতে হয় তাকেই বল বলে।

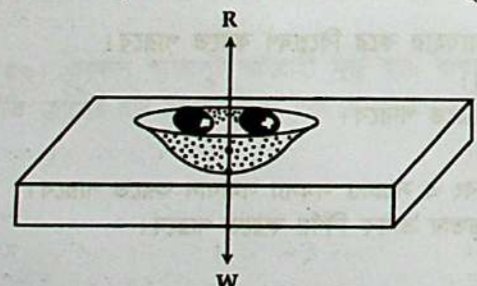
এমনিভাবে প্রকৃতিতেও অনেক ঘটনা ঘটছে যার কারণে দুটি বস্তু একে অপরকে আকর্ষণ করছে বা পরস্পরকে বিকর্ষণ করছে। আবার দুটি বস্তু পাশাপাশি না থাকলেও একে অপরের দ্বারা আকর্ষিত হতে পারে। যেমন গাছের একটি আম পাশের আমকে আকর্ষণ করছে কি-না বা ওই আমটিকে পৃথিবী আকর্ষণ করছে কি-না তা সহজে বুঝতে পারি না। যখন আমটি গাছ থেকে পড়ে তখন দেখা যায় পৃথিবীর আকর্ষণে বা আমের ভরের কারণে তা দ্রুত মাটি স্পর্শ করছে। এ ধরনের আকর্ষণ বল হলো **মহাকর্ষ বল**।

আবার মেঝের ওপর দিয়ে একটি বাক্সকে টানা হলে মেঝে এবং বাক্সের মাঝে একটি বল কাজ করে যা বাক্সের গতিকে বাধা দেয়। এই বাধা প্রদানকারী বলই হলো **ঘর্ষণ বল**। এই ঘর্ষণ বল এবং প্রতিক্রিয়া বলের অনুপাতই হলো **ঘর্ষণ গুণাঙ্ক** (μ)। $\therefore \mu = \frac{f}{R}$।

গতীয় ঘর্ষণের ক্ষেত্রে f_k এবং স্থিতি ঘর্ষণের ক্ষেত্রে f_s হয় এবং প্রতিক্রিয়া R = বস্তুর ওজন $= mg$, হেলানো তলের ক্ষেত্রে $R = mg \cos\theta$ হয়।

পরমাণুর কেন্দ্রে নিউক্লিয়াসের মধ্যে নিউক্লিয়নগুলি পাশাপাশি অবস্থান করে। এক্ষেত্রে তাদের মধ্যে এক ধরনের আকর্ষণের জন্যই তারা বিচ্ছিন্ন হয় না। এ ধরনের আকর্ষণের বিষয়টিই হলো **নিউক্লিও বল**।

বাস্তবে এমন কোনো বস্তু নেই যার ওপর বাইরে থেকে কোনো বল ক্রিয়া না করে। কিন্তু বস্তুর ওপর বাইরে থেকে ক্রিয়ারত দুই বা ততোধিক বলের লব্ধি যদি শূন্য হয়, তাহলে বস্তুর ওপর ওই বলগুলোর ক্রিয়ার কোনো প্রভাব পড়ে না। যেমন একটি টেবিলের উপর দুই দিক থেকে দুটি সমান ও বিপরীতমুখি বল একই রেখায় প্রয়োগ করে একটি টেবিলকে সরাবার চেষ্টা করলে বল দুটির লব্ধি সমান হওয়ায় টেবিলটি স্থির থাকবে। আবার টেবিলের ওপর একটি পাত্র রেখে দিলে তার ওজন (W) নিচের দিকে ক্রিয়া করবে। আবার টেবিল কর্তৃক প্রতিক্রিয়া R ওপরের দিকে টানছে। এক্ষেত্রে W = R হওয়ায় টেবিলের ওপর পাত্রটি স্থির আছে [চিত্র ৪.২]। **এই সকল বল সবই স্পর্শ বল।**



চিত্র ৪.২

নিউটনের গতির প্রথম সূত্র থেকে আমরা বল সম্পর্কে ধারণা করতে পারি। অর্থাৎ **বস্তুর ওপর কিছু প্রয়োগ না করলে স্থির বস্তু চিরকাল স্থির থাকতে চায় আর গতিশীল বস্তু চিরকাল সমবেগে সরল পথে চলতে চায়। এই ধর্মই হলো বস্তুর জড়তা।** তাহলে আমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারি যে, বাইরে থেকে যে প্রভাব (influence) ক্রিয়া করলে কোনো বস্তুর স্থিতি বা গতির অবস্থার বা জড়তার পরিবর্তন ঘটে তাকে বল বলে। কোনো বস্তুর ভর যত বেশি হয় তার জড়তা তত বেশি হয়। জড়তা বেশি হলে স্থির বস্তুকে গতিশীল করতে বেশি বল প্রয়োগ করতে হয়।

সংজ্ঞা : যে বাহ্যিক কারণ স্থির বস্তুকে গতিশীল বা গতিশীল বস্তুর অবস্থার পরিবর্তন ঘটায় বা ঘটাবার চেষ্টা করে তাকে বল বলে।

কাজ :

- পিচঢালা রাস্তার ওপর থেমে থাকা একটি সিএনজি চালিত বেবী টেক্সিকে জোরে ঠেলা দাও। কী দেখতে পেলে ? বেবী টেক্সিটা কিছুটা সামনের দিকে এগিয়ে গেল।
- এবার রাস্তায় থেমে থাকা একটি ট্রাককে আগের মতো ঠেলা দাও। আদৌ এটি সরবে না। কয়েকজন মিলে এবার ট্রাকটিকে ঠেলা দাও। দেখবে ট্রাকটি সামনের দিকে এগিয়ে যাবে। এই দুই ক্ষেত্রে গতির ভিন্নতার কারণ কী?

বেবী টেক্সি এবং ট্রাকের মধ্যে ট্রাকের ভর অনেক বেশি। ফলে এর জড়তাও অনেক বেশি। তাই ট্রাককে গতিশীল করতে বেবী টেক্সি অপেক্ষা বেশি বল প্রয়োগ করতে হয়।

বলের বৈশিষ্ট্য বা বল গতির ওপর কী কী প্রভাব বিস্তার করে তার একটি তালিকা তৈরি করা হলো :

(১) প্রযুক্ত বল কোনো স্থির বস্তুকে গতিশীল করতে পারে। অর্থাৎ বল ত্বরণ সৃষ্টি করতে পারে।

(২) বল প্রয়োগের ফলে গতিশীল বস্তুর বেগ হ্রাস বা বৃদ্ধি পায় বা বস্তুর বিকৃতি ঘটাতে পারে।

(৩) প্রযুক্ত বল গতিশীল বস্তুর বেগের তথা গতির দিক পরিবর্তন করতে পারে।

(৪) বল জোড়ায় জোড়ায় ক্রিয়া করে।

একক : বলের এস. আই. একক নিউটন। এফ. পি. এস. পদ্ধতিতে বলের একক পাউন্ডাল।

1 পাউন্ডাল : যে বল 1 পাউন্ড ভরবিশিষ্ট কোনো একটি বস্তুতে প্রযুক্ত হয়ে 1 ফুট/সে^{2} ত্বরণ সৃষ্টি করে তাকে 1 পাউন্ডাল বলে।

মাত্রা : বলের মাত্রা, $[F] = [MLT^{-2}]$

m ভরের কোনো বস্তুর ওপর বল F প্রয়োগ করে a ত্বরণের সৃষ্টি করলে আমরা পাই,

$$F = ma \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.1)$$

ভর এবং ত্বরণের গুণফল দ্বারা বল পরিমাপ করা হয়।

৪.১.১ বলের প্রকারভেদ
Kinds of forces

প্রকৃতিতে আমরা বিভিন্ন ধরনের বলের সঙ্গে পরিচিত হলেও এবং এদের বিভিন্ন নামকরণ থাকলেও সব বল কিন্তু মৌলিক বল নয়। **যে সকল বল মূল বা অকৃত্রিম অর্থাৎ অন্য কোনো বল থেকে উৎপন্ন হয় না বরং অন্যান্য বলে এ সকল বলের প্রকাশ ঘটে তাকে মৌলিক বল বলে।**

মৌলিকতা অনুসারে প্রকৃতিতে চার ধরনের বল আছে। অন্য যে কোনো ধরনের বলকে এই চারটি বলের যে কোনো একটি বা একাধিক বল দ্বারা ব্যাখ্যা করা যায়। মৌলিক বলগুলো হলো :

১। মহাকর্ষ বল (Gravitational force)

২। তড়িৎ-চুম্বকীয় বল (Electromagnetic force)

৩। সবল নিউক্লীয় বল (Strong nuclear force)

৪। দুর্বল নিউক্লীয় বল (Weak nuclear force)

১। **মহাকর্ষ বল :** মহাবিশ্বের যে কোনো দুটি বস্তুর মধ্যে এক ধরনের আকর্ষণ বল ক্রিয়াশীল রয়েছে। এই আকর্ষণ বলকে **মহাকর্ষ বল** বলা হয়। এই বলের পরিমাণ ক্রিয়াশীল বস্তু দুটির ভরের গুণফলের সমানুপাতিক এবং বস্তুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক। বিজ্ঞানীরা ধারণা করেন যে বস্তুদ্বয়ের মধ্যে গ্রাভিটন (Graviton) নামক এক প্রকার কণার পারস্পরিক বিনিময়ের দ্বারা এই মহাকর্ষ বল ক্রিয়াশীল হয়। মহাকর্ষ বল মাধ্যমের প্রকৃতির ওপর নির্ভরশীল নয়। **ইহা খুব দুর্বল ও আকর্ষণধর্মী বল।**

২। **তড়িৎ-চুম্বকীয় বল :** দুটি আহিত বা চার্জিত বস্তুর মধ্যে এবং দুটি চুম্বক পদার্থের মধ্যে এক ধরনের বল ক্রিয়াশীল থাকে। এদেরকে যথাক্রমে কুলম্বের তড়িৎ এবং চৌম্বক বল বলা হয়। তড়িৎ এবং চৌম্বক বল আকর্ষণ এবং বিকর্ষণ উভয় ধরনের হতে পারে। তড়িৎ এবং চৌম্বক বল পরস্পর ঘনিষ্ঠভাবে সম্পর্কিত। বস্তুত আপেক্ষিক গতিতে পরিভ্রমণরত দুটি আহিত কণার মধ্যে ক্রিয়াশীল বলই হচ্ছে **তড়িৎ-চুম্বকীয় বল**। যখন তড়িৎ আধান বা চার্জগুলো গতিশীল হয়, তখন তারা চৌম্বক ক্ষেত্র সৃষ্টি করে। আবার পরিবর্তী (varying) চৌম্বক ক্ষেত্র তড়িৎ ক্ষেত্রের উৎস হিসেবে কাজ করে। ধারণা করা হয় যে, ভরহীন, চার্জহীন ফোটন নামক এক প্রকার কণার পারস্পরিক বিনিময়ের মাধ্যমে এই বল কার্যকর হয়।

স্থিতিস্থাপক বল, আণবিক গঠন, রাসায়নিক বিক্রিয়া ইত্যাদিতে তড়িৎ-চুম্বকীয় বলের প্রকাশ ঘটে।

৩। **সবল নিউক্লীয় বল :** একটি পরমাণুর নিউক্লিয়াস প্রোটন ও নিউট্রন দ্বারা গঠিত। এদেরকে সমষ্টিগতভাবে বলা হয় নিউক্লিয়ন (Nucleon)। নিউক্লিয়াসের মধ্যে সমধর্মী ধনাত্মক আধানযুক্ত প্রোটনগুলো খুব কাছাকাছি থাকায় এদের মধ্যে কুলম্বের বিকর্ষণ বল প্রবল হওয়া উচিত এবং নিউক্লিয়াস ভেঙ্গে যাওয়ার কথা। কিন্তু বাস্তবে অনেক নিউক্লিয়াসই স্থায়ী। নিউক্লিয়নের মধ্যে যে মাধ্যাকর্ষণ বল কাজ করে তা এত নগণ্য যে এই বল কুলম্বের বিকর্ষণ বলকে প্রতিমিত (balance) করতে পারে না। সুতরাং নিউক্লিয়াসে অবশ্যই অন্য এক ধরনের সবল বল কাজ করে যা নিউক্লিয়াসকে ধরে রাখে। এই বলকে বলা হয় **সবল নিউক্লীয় বল**। বিজ্ঞানীদের ধারণা যে নিউক্লিয়নের মধ্যে মেসন (Meson) নামে এক প্রকার কণার পারস্পরিক বিনিময়ের দ্বারা এই বল ক্রিয়াশীল হয়। এই বল আকর্ষণধর্মী, স্বল্প পাল্লা-বিশিষ্ট (short range), চার্জ নিরপেক্ষ এবং নিউক্লিয়াসের বাইরে ক্রিয়াশীল নয়।

৪। **দুর্বল নিউক্লীয় বল :** প্রকৃতিতে বেশ কিছু মৌলিক পদার্থ (elements) রয়েছে যাদের নিউক্লিয়াস স্বতঃস্ফূর্তভাবে ভেঙ্গে যায় (যেমন ইউরেনিয়াম, থোরিয়াম ইত্যাদি)। এই সমস্ত নিউক্লিয়াসকে বলা হয় **তেজস্ক্রিয় নিউক্লিয়াস**। তেজস্ক্রিয় নিউক্লিয়াস থেকে তিন ধরনের রশ্মি বা কণা নির্গত হয় যাদেরকে আলফা রশ্মি (α-rays), বিটা রশ্মি (β-rays) এবং গামা রশ্মি (γ-rays) বলা হয়।

তেজস্ক্রিয় নিউক্লিয়াস থেকে যখন বিটা কণা নির্গত হয় তখন একই সঙ্গে শক্তিও নির্গত হয়। কিন্তু পরীক্ষালব্ধ ফলাফল থেকে দেখা যায় যে, নিউক্লিয়াস থেকে যে পরিমাণ শক্তি নির্গত হয় তা বিটা কণার গতিশক্তির চেয়ে বেশি।

স্বাভাবিকভাবেই বিজ্ঞানীদের মাঝে প্রশ্ন ওঠে যে β-কণা যদি শক্তির সামান্য অংশ বহন করে, তবে অবশিষ্ট শক্তি যায় কোথায় ? 1930 সালে ডব্লিউ. পাউলি (W. Pauli) প্রস্তাব করেন যে অবশিষ্ট শক্তি অন্য এক ধরনের কণা বহন করে যা β-কণার সঙ্গেই নির্গত হয়। এই কণাকে বলা হয় নিউট্রিনো (neutrino)। এই β-কণা এবং নিউট্রিনো কণার নির্গমন চতুর্থ একটি মৌলিক বলের কারণে ঘটে যাকে বলা হয় **দুর্বল নিউক্লীয় বল**। এই বল সবল নিউক্লীয় বা তড়িৎ-চুম্বকীয় বলের তুলনায় খুবই দুর্বল। এই বলের কারণে অনেক নিউক্লিয়াসের ভাঙ্গন প্রক্রিয়া সংঘটিত হয়। ধারণা করা হয় যে, বোসন নামক এক প্রকার কণার পারস্পরিক বিনিময়ের মাধ্যমে এই বল কার্যকর হয়।

জেনে রাখ :

I. সবল নিউক্লীয় বলের কারণে প্রোটন ও নিউট্রন একত্রে আবন্ধ হয়ে নিউক্লিয়াস গঠন করে। এই বলের বাহক কণিকা হলো মেসন, গ্লুওন।

II. দুর্বল নিউক্লীয় বলের কারণে বিটা ক্ষয় হয়। এই বলের বাহক কণিকা W ও Z বোসন।

III. তড়িৎ চৌম্বক বলের কারণে ইলেকট্রন নিউক্লিয়াসের সাথে আবন্ধ হয়ে পরমাণু গঠন করে। এই বলের কণিকা ফোটন।

IV. মহাকর্ষ বল নক্ষত্রগুলোকে একত্রিত করে গ্যালাক্সি গঠন করে। এই বলের বাহক কণিকা গ্রাভিটন।

৪.১.২ মৌলিক বলসমূহের তীব্রতার তুলনা
Comparison of the intensities of the fundamental forces

চারটি মৌলিক বলের পরিমাপের আপেক্ষিক সবলতা তুলনা করলে দেখা যায় যে সবচেয়ে শক্তিশালী বল হচ্ছে সবল নিউক্লীয় বল এবং সবচেয়ে দুর্বল হলো মহাকর্ষ বল।

সবল এবং দুর্বল উভয় ধরনের নিউক্লীয় বলের ক্রিয়ার পাল্লা (range) খুবই স্বল্প (very short)। এগুলো নিউক্লিয়াসের পৃষ্ঠের বাইরে ক্রিয়াশীল হয় না। পক্ষান্তরে মহাকর্ষ এবং তড়িৎ-চুম্বকীয় বলের পাল্লা প্রায় অসীম।

চারটি মৌলিক বলের আপেক্ষিক সবলতা সম্বন্ধে ধারণা লাভের জন্য যদি মহাকর্ষ বলের সাপেক্ষে সবল নিউক্লীয় বলের মান 10^{41} ধরা হয়, তবে দুর্বল নিউক্লীয় বল, তড়িৎ-চুম্বকীয় বল এবং মহাকর্ষ বলের আপেক্ষিক সবলতার মান হবে যথাক্রমে 10^{30}, 10^{39} ও 1. আবার সরল নিউক্লীয় বলের সাপেক্ষে মহাকর্ষ বলের মান 10^{-41} হলে দুর্বল নিউক্লীয় বল, তড়িৎ চৌম্বক বল ও সবল নিউক্লীয় বলের মান হবে যথাক্রমে 10^{-11}, 10^{-2}, 1।

চারটি মৌলিক বলের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপনের জন্য বিজ্ঞানীরা বহু বছর ধরে চেষ্টা চালিয়ে যাচ্ছেন। প্রফেসর আব্দুস সালাম, ওয়াইনবার্গ ও গ্লাসো তিনজন বিজ্ঞানী দীর্ঘদিন গবেষণা করে দুর্বল নিউক্লিয় বল এবং তড়িৎ-চুম্বকীয় বলের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করেছেন যা সালাম-ওয়াইনবার্গের তত্ত্ব নামে পরিচিত। মহাকর্ষ বলের পাল্লা অসীম, তড়িৎ চুম্বকীয় বলের পাল্লা অসীম, সবল নিউক্লীয় বলের পাল্লা 10^{-15} m, দুর্বল নিউক্লীয় বলের পাল্লা 10^{-16} m।

৪.১.৩ ভরবেগ
Momentum

মনে কর, দুটি বস্তুর মধ্যে কোনো কারণে সংঘর্ষ ঘটল। সংঘর্ষের পর বস্তুদ্বয় কোনদিকে যাবে তা কীসের দ্বারা নির্ধারণ করবে ? এদের ভর দ্বারা না এদের বেগ দ্বারা ? একটি গতিশীল সাইকেল অপেক্ষা একটি গতিশীল রিকশার ধাক্কা অনেক বেশি কেন ? গতিশীল সাইকেল অপেক্ষা গতিশীল রিকশা থামানো কঠিন কেন ? এ সকল ঘটনার কারণ হলো ভরবেগ।

তাহলে ভরবেগ কী ? বলা যায় ভর ও বেগের সমন্বয়ে কোনো গতিশীল বস্তুতে সৃষ্ট গতির পরিমাণই হলো বস্তুর ভরবেগ। ভর স্থির রেখে বেগ বাড়ালে বস্তুর ভরবেগও বাড়ে। একই বস্তু বেশি বেগে চললে তার ভরবেগ বেশি হয়। বেগ যতগুণ বেশি হয় বস্তুটিকে একই সময়ে থামাতে আগের থেকে ততগুণ বেশি বল প্রয়োগ করতে হয়। একটি গাড়ি যদি দ্বিগুণ বেগে চলে, তাহলে গাড়িটিকে থামাতে আগের থেকে দ্বিগুণ বল প্রয়োগ করতে হয়। রাইফেলের গুলির ভর খুব কম, কিন্তু বেগ অত্যন্ত বেশি, ফলে ভরবেগ বেশি হওয়ায় রাইফেলের গুলির আঘাত প্রচণ্ড হয়।

সংজ্ঞা : বস্তুর ভর ও বেগের সমন্বয়ে বস্তুতে যে ধর্মের উদ্ভব হয় তাকে বস্তুর ভরবেগ বলে। বস্তুর ভর ও বেগের গুণফল দ্বারা ভরবেগ পরিমাপ করা হয়। গতি জড়তা ভরবেগের সমানুপাতিক। ইহা একটি ভেক্টর রাশি।

একক : ভরবেগের এস. আই. একক $kg\text{-}ms^{-1}$

মাত্রা : $[P] = [MLT^{-1}]$

৪.২ নিউটনের গতিসূত্র
Newton's laws of motion

1687 সালে স্যার আইজ্যাক নিউটন তাঁর বিখ্যাত ও অমর গ্রন্থ 'ন্যাচারালিস ফিলোসোফিয়া প্রিন্সিপিয়া ম্যাথেমেটিকা'তে বস্তুর ভর, গতি ও বলের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করে তিনটি সূত্র প্রকাশ করেন। এই তিনটি সূত্র নিউটনের গতিসূত্র নামে পরিচিত।

প্রথম সূত্র (First law) **: বাহ্যিক বল প্রয়োগে বস্তুর অবস্থার পরিবর্তন করতে বাধ্য না করলে স্থির বস্তু চিরকাল স্থিরই থাকবে এবং গতিশীল বস্তু সমবেগে অর্থাৎ সমদ্রুতিতে সরলপথে চলতে থাকবে।**

দ্বিতীয় সূত্র (Second law) : বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার তার ওপর প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক এবং বল যেদিকে ক্রিয়া করে বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনও সেদিকে ঘটে।

তৃতীয় সূত্র (Third law) : প্রত্যেক ক্রিয়ারই একটা সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া আছে।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : স্থির মোটর গাড়িতে বসে থাকা কোনো আরোহী ভেতর থেকে ঠেলে গাড়িটি গতিশীল করতে পারে কী? ব্যাখ্যা কর।

মোটর গাড়ির ভেতরে বসা কোনো আরোহী গাড়ির ওপর বল প্রয়োগ করলে নিউটনের গতির তৃতীয় সূত্র অনুসারে গাড়ি ও আরোহীর ওপর সমান ও বিপরীত বল ক্রিয়াশীল হয়। এই দুই ক্রিয়া–প্রতিক্রিয়া বলের প্রভাবে গাড়ি ও আরোহীর সমন্বয়ে গঠিত সিস্টেমের মোট ভরবেগের কোনো পরিবর্তন হয় না। ফলে গাড়িও গতিশীল হয় না। তাই গাড়িটি স্থিরই থাকবে।

প্রথম গতিসূত্রের আলোচনা
Discussion of the first law of inertia

নিউটনের গতির প্রথম সূত্র থেকে আমরা জানতে পারি যে, বস্তুর ওপর কোনো বাহ্যিক বল প্রযুক্ত না হলে বস্তুটি নিজের অবস্থানের পরিবর্তন করতে পারে না। বস্তুটি স্থিতিশীল অবস্থায় থাকলে সর্বদাই স্থিতিশীল, আবার গতিশীল অবস্থায় থাকলে সর্বদাই একই সরলরেখা বরাবর সুষম বেগে গতিশীল থাকতে চায়। বস্তুর এই বিশেষ ধর্মের জন্য বস্তু তার স্থিতিশীলতা বা গতীয় অবস্থা পরিবর্তন করার চেষ্টাকে বাধা দেয়। বস্তুর এই বিশেষ ধর্মকে জড়তা (inertia) বলা হয়। প্রথম সূত্র থেকে বস্তুর এই জড়তার ধর্ম জানা যায়। তাই একে **জড়তা বা জাড্যের সূত্র (law of inertia)** বলে।

৪·২·১ নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র
Newton's second law of motion

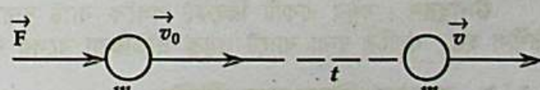
সূত্র : ভরবেগের পরিবর্তনের হার বস্তুর ওপর প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক। এই বল যেদিকে ক্রিয়া করে ভরবেগের পরিবর্তনও সেদিকে ঘটে।

এই সূত্রের সাহায্যে বলের অভিমুখ, পরিমাণ, গুণগত বৈশিষ্ট্য, ত্বরণের সঙ্গে বলের সম্পর্ক, একক বল, বলের একক ও বলের নিরপেক্ষ নীতি সম্বন্ধে জানতে পারা যায়।

$\vec{F} = m\vec{a}$ সমীকরণ প্রতিপাদন (ক্যালকুলাস পদ্ধতিতে)

মনে করি কোনো একটি বস্তুর ভর m এবং এটি $\vec{v}_0$ সমবেগে চলছে [চিত্র ৪.৩]।

ধরি একটি ধ্রুব বল (constant force) $\vec{F}$ এই বস্তুর ওপর তার গতির দিকে t সময় ধরে ক্রিয়া করল। ফলে বস্তুর বেগ পরিবর্তিত হয়ে $\vec{v}$ হলো।



চিত্র ৪.৩

কাজেই $\vec{v}$ বেগে গতিশীল বস্তুটির ভরবেগ $\vec{P} = m\vec{v}$ ... ... (4.2)

সুতরাং ভরবেগের পরিবর্তনের হার $\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$

ভরবেগের পরিবর্তনের হার প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক

$$\therefore \quad \vec{F} \propto \frac{d\vec{P}}{dt} = k\frac{d\vec{P}}{dt} = k\frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$\therefore \quad \vec{F} = km\frac{d\vec{v}}{dt} = km\vec{a} \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.3) \quad \left[\text{এখানে } k = \text{ ধ্রুবক, } \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}\right]$$

একক বলের সংজ্ঞা থেকে নিম্নোক্তভাবে $k = 1$ দেখানো যায়।

যখন $m = 1$ একক, $|\vec{a}| = 1$ একক, তখন $|\vec{F}| = 1$ একক।

$\therefore$ সমীকরণ (4.4)-এ মানগুলো বসিয়ে আমরা পাই,

$$1 = k \,.\, 1 \times 1$$

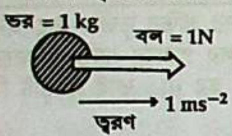
$$\therefore \quad k = 1$$

$$\therefore \quad \vec{F} = m\vec{a} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.4)$$

বস্তুটির ওপর একটি বল প্রযুক্ত না হয়ে যদি $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \ldots \vec{F}_n$ ইত্যাদি বল প্রযুক্ত হয় তাহলে বস্তুটির ওপর ক্রিয়াশীল নিট বল $= \sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \ldots + \vec{F}_n$.

∴ নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র হলো $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ … … … [4.4(a)]

এখানে ত্বরণের দিক নিট বলের বরাবর। নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রের সাহায্যে একক বলের সংজ্ঞা পাওয়া যায়।



চিত্র ৪·৪

একক ভরের কোনো বস্তুর ওপর একক ত্বরণ সৃষ্টি করতে যে বল প্রযুক্ত হয়, তাকে একক বল বলে। অর্থাৎ,

এস. আই. পদ্ধতিতে, $m = 1$ kg

$|a| = 1\ \text{ms}^{-2}$ হলে,

$F = 1$ N, [চিত্র ৪·৪]

সুতরাং সমীকরণ (4.3) অনুযায়ী আমরা পাই,

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.5)$$

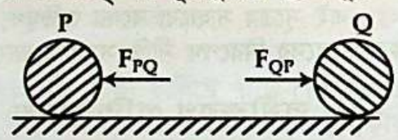
অর্থাৎ বল = ভর × ত্বরণ

এটিই হলো বলের মান নির্দেশক সমীকরণ।

জেনে রাখ : নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র বলের একক, একক বলের সংজ্ঞা, বলের অভিমুখ, বলের নিরপেক্ষ নীতি ইত্যাদি জানা যায়।

তৃতীয় গতিসূত্রের আলোচনা
Discussion of third law of motion

নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র অনুযায়ী প্রত্যেক ক্রিয়ার সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া রয়েছে। ধরা যাক, P ও Q দুটি বস্তু রয়েছে। P বস্তু কর্তৃক Q বস্তুর ওপর প্রযুক্ত বল $\vec{F}_{QP}$ [চিত্র ৪·৫]। নিউটনের তৃতীয় সূত্রানুসারে Q বস্তুটিও P বস্তুটির ওপর একটি প্রতিক্রিয়া বল প্রয়োগ করে। Q বস্তু কর্তৃক P বস্তুর ওপর প্রযুক্ত প্রতিক্রিয়া বল $\vec{F}_{PQ}$ হলে আমরা পাই, $\vec{F}_{PQ} = -\vec{F}_{QP}$।



চিত্র ৪·৫

উল্লেখ্য, ক্রিয়া বল এবং প্রতিক্রিয়া বল সর্বদা জোড়ায় জোড়ায় উপস্থিত থাকে। যতক্ষণ ক্রিয়া স্থায়ী হয়, ততক্ষণই প্রতিক্রিয়া স্থায়ী হয়। ক্রিয়া না থাকলে প্রতিক্রিয়াও থাকে না।

উদাহরণ : যখন একটি ক্রিকেট বলকে ব্যাট দ্বারা আঘাত করা হয়, তখন বলটি সামনের দিকে উচ্চ বেগে গতিশীল হয়। বলটির দ্বারা ব্যাটে প্রযুক্ত প্রতিক্রিয়া বলের দরুন ব্যাট পিছনের দিকে গতিশীল হয়।

৪·২·২ বলের নিরপেক্ষ নীতি
Independent principle of force

নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রানুসারে সময়ের সাথে বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তন বলের ক্রিয়া অভিমুখে সংঘটিত হবে। কাজেই বলের ক্রিয়া অভিমুখে বস্তুতে যে ভরবেগ থাকবে সময়ের সাথে তা-ই শুধু পরিবর্তিত হবে। একাধিক বলের ক্ষেত্রেও একের ক্রিয়া অন্যের দ্বারা প্রভাবিত হবে না। বস্তুর ওপর বলের ক্রিয়ার এই বৈশিষ্ট্যকে বলের নিরপেক্ষ নীতি বা ভৌত অনির্ভরশীলতা বলা হয়।

নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র থেকে আমরা যা জানতে পারলাম তা হলো :

(i) বস্তুর ত্বরণ প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক হয়।
(ii) বলের ক্রিয়া বন্ধ হয়ে গেলে বস্তুটির ত্বরণ বা মন্দন থাকে না।
(iii) বলের অভিমুখই ত্বরণের অভিমুখ।
(iv) বস্তুর ওপর বল ক্রিয়া করলে বস্তুটি ত্বরণ নিয়ে চলতে থাকে।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.১

১। একটি বস্তু স্থিরাবস্থায় ছিল। 15 N-এর একটি বল এর ওপর 4 সেকেন্ড ধরে কাজ করে এবং তারপর আর কোনো কাজ করল না। এরপর বস্তুটি সমবেগে 9 সেকেন্ডে 54 m দূরত্ব গেল। বস্তুটির ভর বের কর।

[RUET Admission Test, 2012-13]

যেহেতু বলটি বস্তুর ওপর 4s ক্রিয়ার পর আর ক্রিয়া করে না সেহেতু বস্তুটি শেষ 9s সময় সমবেগে যাবে।

$$\therefore v = \frac{s}{t_2}$$

$$= \frac{54}{9} = 6\ \text{ms}^{-1}$$

এখানে,

$F = 15$ N
$t_1 = 4$ s
$t_2 = 9$ s
$s = 54$ m
$v_0 = 0$ (যেহেতু বস্তু স্থির)

আমরা জানি, $v = v_0 + at_1$

বা, $6 = 0 + a \times 4$

বা, $6 = 4a$ বা, $a = \frac{6}{4}$

$\therefore a = 1.5 \text{ ms}^{-2}$

আবার, $F = ma$

বা, $15 = m \times 1.5$ বা, $m = \frac{15}{1.5}$

$\therefore m = 10 \text{ kg}$

২। একটি বস্তুর ওপর 7N মানের একটি বল প্রয়োগ করা হলে বস্তুটি 3 ms⁻² ত্বরণ প্রাপ্ত হয়। বস্তুটির ভর কত ? বস্তুটির ওপর 5N মানের আর একটি বল 7N মানের বলের সাথে 60° কোণে প্রয়োগ করলে বস্তুটির ত্বরণ কত হবে ? [চ. বো. ২০১০; রা. বো. ২০০৯; সি. বো. ২০০৩]

প্রথম অংশ :

আমরা জানি,

$F = ma$

$\therefore 7 = m \times 3$

$\therefore m = \frac{7}{3} = 2.33 \text{ kg}$

এখানে,
$F = 7N$
$a = 3 \text{ ms}^{-2}$
$m = ?$

দ্বিতীয় অংশ :

মনে করি, লব্ধি বল R

এখন, $R = (P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore R = (7^2 + 5^2 + 2 \times 7 \times 5 \times \cos 60°)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(49 + 25 + 2 \times 7 \times 5 \times \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= (74 + 35)^{\frac{1}{2}} = (109)^{\frac{1}{2}} = 10.44 \text{ N}$

এখানে,
$P = 7N$
$Q = 5N$
$\alpha = 60°$

আবার, $R = ma'$

$\therefore a' = \frac{R}{m} = \frac{10.44}{2.33} \text{ ms}^{-2}$

$= 4.48 \text{ ms}^{-2}$

এখানে,
$R = 10.44N$
$m = 2.33 \text{ kg}$
$a' = ?$

উত্তর : বস্তুটির ভর 2.33 kg এবং ত্বরণ 4.48 ms^{-2}

৩। 10 N এর একটি বল 2 kg ভরের একটি স্থির বস্তুর উপর ক্রিয়া করে। 4 s পর যদি বলের ক্রিয়া বন্ধ হয়ে যায় তবে প্রথম থেকে 8 s-এ বস্তুটি কত দূরত্ব অতিক্রম করবে ?

আমরা জানি,

$F = ma$

বা, $a = \frac{F}{m} = \frac{10}{2} = 5 \text{ ms}^{-2}$

$\therefore$ ১ম 4 s-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$s_1 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

$= 0 \times 4 + \frac{1}{2} \times 5 \times 4^2 = 40 \text{ m}$

এখানে,
বল, $F = 10 \text{ N}$
ভর, $m = 2 \text{ kg}$
১ম ক্ষেত্রে,
আদিবেগ, $v_0 = 0$
সময়, $t = 4 \text{ s}$
ত্বরণ, $a = ?$
দূরত্ব, $s_1 = ?$

১ম 4 s পর বস্তুটির বেগ,

$v = v_0 + at = 0 + 5 \times 4 = 20 \text{ ms}^{-1}$

পরবর্তী 4 s-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$s_2 = vt = 20 \times 4 = 80 \text{ m}$

$\therefore$ ১ম থেকে মোট 8 s-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$s = s_1 + s_2 = 40 + 80 = 120 \text{ m}$

২য় ক্ষেত্রে,
বেগ, $v = 20 \text{ ms}^{-1}$
সময়, $t = 4 \text{ s}$
দূরত্ব, $s_2 = ?$

৪। 60 kg ভরের একটি বস্তুর ওপর কত বল প্রয়োগ করলে 1 মিনিটে এর বেগ 10 ms⁻¹ বৃদ্ধি পাবে ?

আমরা জানি,

$$F = ma = \frac{m\Delta v}{t}$$

$$= \frac{60 \times 10}{60} = 10\,N$$

এখানে,
ভর, $m = 60$ kg
সময়, $t = 1$ min $= 60$ sec
বেগ বৃদ্ধি, $\Delta v = 10\ ms^{-1}$

৫। 980 N ওজনের একটি বস্তুকে 1 ms^{-2} ত্বরণ দিতে কত বল প্রয়োগ করতে হবে ?

আমরা জানি,

$$W = mg$$

বা, $m = \frac{W}{g} = \frac{980}{9.8} = 100$ kg

আবার আমরা জানি,

$$F = ma$$

$\therefore$ $F = 100 \times 1 = 100$ N

এখানে,
বস্তুর ওজন, $W = 980$ N
ত্বরণ, $a = 1\ ms^{-2}$
$F = ?$

৬। 14 g ভরের একটি রাইফেলের গুলি 3.6 ms^{-1} বেগে 0.21 m পুরু একটি কাঠের গুড়ি ভেদ করতে পারে। বাধাদানকারী বলের মান নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

কৃত কাজ, $W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

বা, $Fs = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)$

বা, $F = \dfrac{\frac{1}{2} \times 14 \times 10^{-3}[0 - (3.6)^2]}{0.21}$

$= -0.432$ N

এখানে,
$m = 14\ g = 14 \times 10^{-3}$ kg
$v_0 = 3.6\ ms^{-1}$
$v = 0$
$s = 0.21$ m

৭। 4 kg ভরের একটি বস্তুকে 10 ms^{-2} ত্বরণে গতিশীল করতে কত বল প্রয়োগ করতে হবে ? [পথের ঘর্ষণ বল 2.5 N kg^{-1}] [ব. বো. ২০০১]

আমরা জানি,

কার্যকর বল, $F = P - F_k$

$\therefore$ $40 = P - 10$

বা, $P = 50$ N

$\therefore$ প্রযুক্ত বল $= 50$N

এখানে,
বস্তুর ভর, $m = 4$ kg
ত্বরণ, $a = 10\ ms^{-2}$
$\therefore$ কার্যকর বল, $F = ma = 4 \times 10 = 40$N
ঘর্ষণ বল $= 2.5\ N\,kg^{-1}$
$\therefore$ মোট ঘর্ষণ বল, $F_K = 2.5 \times 4 = 10$N
প্রযুক্ত বল, $P = ?$

৮। 70 kg ভরের একটি বাক্সকে 500 N অনুভূমিক বলে মেঝের ওপর দিয়ে টানা হচ্ছে। বাক্সটি যখন চলে তখন বাক্স ও মেঝের মধ্যবর্তী ঘর্ষণ সহগ 0.50। বাক্সের ত্বরণ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০১১; সি. বো. ২০০৯; দি. বো. ২০০৯; রা. বো. ২০০৭; য. বো. ২০০৪]

আমরা জানি,

ঘর্ষণ বল, $F_k = \mu_k R$

বা, $F_k = 0.50 \times 686$ N

$= 343$ N

আবার, লব্ধি বল,

$F = F_1 - F_k$

$= (500 - 343)$ N

$= 157$ N

এখন, $F = ma$

বা, $a = \frac{F}{m} = \frac{157\ N}{70\ kg} = 2.24\ ms^{-2}$

এখানে,
$m = 70$ kg
$\mu_k = 0.50$
অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া, $R = 70 \times 9.8\ N = 686$ N
অনুভূমিক বল, $F_1 = 500$ N
ত্বরণ, $a = ?$

৯। 40 g ভরের একটি গুলি 400 ms^{-1} প্রাথমিক বেগে একটি দেওয়ালকে 4×10^4 N গড় বলের সাহায্যে ভেদ করে 40 ms^{-1} বেগে তা দেওয়াল থেকে নির্গত হয়। দেওয়ালটির বেধ কত ? অন্য একটি গুলি একই প্রাথমিক বেগ ও একই বল নিয়ে দেওয়ালটিকে ভেদ করতে পারে না। গুলিটির সর্বোচ্চ ভর কত ?

প্রথম অংশ :

এখানে,
প্রাথমিক বেগ, $v_0 = 400\ ms^{-1}$
$m = 40\ g = 0.04\ kg$
$F = 4 \times 10^4\ N$
চূড়ান্ত বেগ, $v = 40\ ms^{-1}$
দেওয়ালের বেধ, $x = ?$

দেওয়ালের মধ্যে গুলিটির মন্দন,

$$a = \frac{F}{m} = \frac{4 \times 10^4}{0.04} = 1 \times 10^6\ ms^{-2}$$

আবার,

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

বা, $$x = \frac{v_0^2 - v^2}{2a} = \frac{(400)^2 - (40)^2}{2 \times 1 \times 10^6}$$

$$= 7.92 \times 10^{-2}\ m$$

দ্বিতীয় অংশ :

ধরা যাক, দ্বিতীয় গুলিটির ভর $= m$ এবং চূড়ান্ত বেগ $v = 0$

∴ দ্বিতীয় ক্ষেত্রে মন্দন, $a_1 = \frac{v_0^2}{2x}$

এবং গুলিটির ভর, $m_1 = \frac{F}{a_1} = \frac{F}{\frac{v_0^2}{2x}} = \frac{F \times 2x}{v_0^2}$

বা, $$m_1 = \frac{4 \times 10^4 \times 2 \times 7.92 \times 10^{-2}}{(400)^2}$$

$$= \frac{4 \times 10^2 \times 2 \times 7.92}{4 \times 4 \times 10^4} = 0.0486 = 48.6\ g$$

১০। একটি বস্তু স্থিরাবস্থায় ছিল। 15 N এর বল এর ওপর 4 sec ধরে কাজ করে। তারপর আর কোনো কাজ করল না। বস্তুটি এরপর 9 sec এ 54 m দূরত্ব গেল। বস্তুটির ভর নির্ণয় কর। [RUET Admission Test, 2012-13]

আমরা জানি,

$F = ma \quad \therefore m = \frac{F}{a}$

বা, $a = \frac{F}{m} = \frac{15}{m}$

4 sec পর বেগ $v = 0 + at = \frac{15}{m} \times 4 = \frac{60}{m}$

আবার, $s = vt$

বা, $54 = \frac{60}{m} \times 9$

∴ $m = 10\ kg$

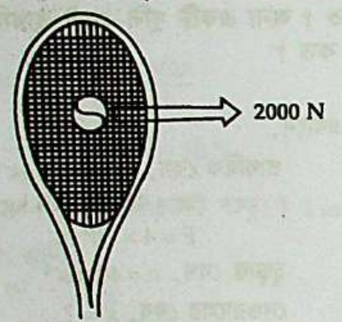
কাজ : ক্রিকেট খেলায় ক্যাচ ধরার সময় খেলোয়াড় হাতটাকে পিছনে টেনে নেয় কেন?

নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রানুসারে ত্বরণ কম হলে প্রযুক্ত বল কম হবে। বেগের পরিবর্তন ধ্রুব হলে, এই পরিবর্তনে যত বেশি সময় নেওয়া হবে, ত্বরণের মান তত কম হবে। তাই ক্রিকেট খেলায় ক্যাচ ধরার সময় খেলোয়াড় হাতটাকে পিছনে টেনে নেয়, যাতে বেগের নির্দিষ্ট পরিবর্তনে বেশি সময় লাগে, ফলে ত্বরণ এবং প্রতিক্রিয়া বল কম মানের হয়।

৪.২৩ ঘাত বল
Impulsive force

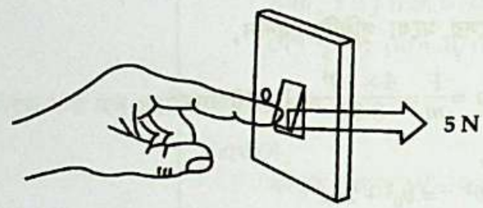
সংঘর্ষ, বিস্ফোরণ, আকস্মিক আঘাত প্রভৃতি ক্ষেত্রে এ ধরনের বল ক্রিয়া করে। ক্যারম খেলার স্ট্রাইকার দিয়ে গুটিকে আঘাত করা, ক্রিকেট বা টেবিল টেনিস খেলার ব্যাট দিয়ে বলকে আঘাত করা, ফুটবলকে কিক করা, হাতুড়ি দিয়ে পেরেক ঠোকা, বাদ্যযন্ত্রের তারে আঘাত করা প্রভৃতি বিশেষ ধরনের বল। একে ঘাত বল (Impulsive force) বলে। অর্থাৎ খুব অল্প সময়ের জন্য খুব বড় মানের যে বল কোনো বস্তুর উপর প্রযুক্ত হয় তাকে ঘাত বল বলে।

উদাহরণ : ধরা যাক, একটি র‍্যাকেট দ্বারা টেনিস বলকে আঘাত করলে প্রচণ্ড একটি বল টেনিস বলের ওপর



(ক) টেনিস বলের উপর বল

চিত্র ৪.৬(ক)



(খ) আলো জ্বালাতে সুইচের উপর বল

চিত্র ৪.৬(খ)

আরোপিত হয়। এক্ষেত্রে টেনিস বল এবং র‍্যাকেটের মধ্যকার সংঘর্ষের সময় খুব কম হয়। এই ধরনের বল ঘাত বল [চিত্র ৪.৬(ক)]। আবার ইলেকট্রিক সুইচ যখন অফ বা অন করা হয় তখনও এই ঘাত বল ক্রিয়াশীল হয় [চিত্র ৪.৬(খ)]।

৪.২.৪ বলের ঘাত
Impulse of force

কোনো বল ও বলের ক্রিয়াকালের গুণফলকে ওই বলের ঘাত (impulse of force) বলে। $\vec{F}$ বল কোনো বস্তুর উপর t সময় ধরে ক্রিয়া করলে

বলের ঘাত, $\vec{J} = \vec{F} \times t$ ... ... (4.6)

$$= \frac{m\vec{v} - m\vec{v}_0}{t} \times t = m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \text{ভরবেগের পরিবর্তন}$$

∴ বলের ঘাত ভরবেগের পরিবর্তনের সমান।

ক্যালকুলাস পদ্ধতি : মনে করি, $\vec{F}$ ধ্রুব বল কোনো একটি বস্তুর ওপরে dt সময় ক্রিয়া করে। তাহলে ঘাত

বল, $\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{P}}{dt} \times dt = \int_{\vec{p_1}}^{\vec{p_2}} d\vec{P} = \left[\vec{P}\right]_{\vec{p_1}}^{\vec{p_2}} = \vec{P_2} - \vec{P_1} = \Delta\vec{P}$

∴ বলের ঘাত ভরবেগের পরিবর্তনের সমান।

৪.২.৫ বলের ঘাত ও ঘাত বলের মধ্যে পার্থক্য
Difference between impulse of a force and impulsive force

১। বলের ঘাত হলো বল ও বলের ক্রিয়াকালের গুণফল। কিন্তু ঘাত বল হলো একটি বৃহৎ মানের অত্যন্ত ক্ষণস্থায়ী বল।

২। ঘাত বল বলের ঘাত সৃষ্টি করে। এই বল বেশি হলে বলের ঘাতও বৃদ্ধি পাবে। তাই বলা হয় যে ঘাত বল হচ্ছে কারণ এবং বলের ঘাত এর ফল।

৩। ঘাত বলের একক এবং বলের একক একই; অর্থাৎ নিউটন। কিন্তু বলের ঘাত একক ভরবেগের এককের অনুরূপ, অর্থাৎ $kgms^{-1}$।

৪। বলের ঘাতের জন্য বায়ুতে ভরবেগের পরিবর্তন ঘটে; কিন্তু ঘাত বলের ফলে বস্তুতে খুবই অল্প সময়ে বৃহৎ ত্বরণ সৃষ্টি হয়।

৫। ঘাত বলের মাত্রা $[MLT^{-2}]$ এবং বলের ঘাতের মাত্রা $[MLT^{-1}]$.

কাজ : কম্বল থেকে ধুলো ঝাড়ার জন্য লাঠি দিয়ে কম্বলকে আঘাত করা হয় কেন ? ব্যাখ্যা কর।

কম্বলকে লাঠি দিয়ে আঘাত করলে ধুলোকণাগুলো স্থির জড়তার জন্য স্থির থাকলেও ঘাত বলের জন্য কম্বলের সুতা হঠাৎ গতিশীল হয়, ফলে ধুলোকণা কম্বল থেকে আলাদা হয়।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.২

১। 16 N-এর একটি বল 4 kg ভরের ওপর 4 s ক্রিয়া করে। বস্তুটির (ক) বেগের পরিবর্তন ও (খ) বলের ঘাত নির্ণয় কর।

(ক) মনে করি বেগের পরিবর্তন $= \vec{v} - \vec{v_0}$

আমরা জানি,

বলের ঘাত = ভরবেগের পরিবর্তন

$\therefore \quad F \times t = mv - mv_0$

বা, $F \times t = m(v - v_0)$

$\therefore$ বেগের পরিবর্তন, $(v - v_0) = \frac{F \times t}{m} = \frac{16 N \times 4 s}{4 kg} = 16 \text{ ms}^{-1}$

(খ) আবার আমরা জানি,

বলের ঘাত, $J = F \times t$

$\therefore \quad J = 16 N \times 4 s$

$= 64 \text{ Ns}$

এখানে,

বল, $\vec{F} = 16 N$

$m = 4 kg$

$t = 4 s$

২। 0·05 kg ভরের একটি বস্তু 0·2 ms⁻¹ অনুভূমিক বেগে একটি খাঁড়া দেয়ালে ধাক্কা দিয়ে 0·1 ms⁻¹ বেগে বিপরীত দিকে ফিরে গেল। বলের ঘাত বের কর। [ব. বো. ২০০৬]

ধরি বলের ঘাত = J

আমরা পাই, $J = F \times t$ ও $F = \frac{m(v - v_0)}{t}$

$\therefore \quad J = m(v - v_0)$

$= 0{\cdot}05 \times (-0{\cdot}1 - 0{\cdot}2)$

$= -0{\cdot}015 \text{ kg-ms}^{-1}$ (ঋণচিহ্ন প্রমাণ করে যে, J ও v-এর অভিমুখ অভিন্ন)।

$\therefore \quad |J| = 0{\cdot}015 \text{ kg-ms}^{-1}$

এখানে,

$m = 0{\cdot}05 \text{ kg}$

$v_0 = 0{\cdot}2 \text{ ms}^{-1}$

$v = -0{\cdot}1 \text{ ms}^{-1}$ (আদি বেগের সাপেক্ষে শেষ বেগ বিপরীতমুখি হেতু ঋণচিহ্ন ব্যবহৃত হয়েছে)।

৩। একজন সাইকেল চালক 8 ms⁻¹ বেগে চলাকালে সাইকেল চালানো বন্ধ করে লক্ষ করেন যে 49 m দূরত্ব অতিক্রমের পর সাইকেলটি থেমে যায়। সাইকেলের টায়ার ও রাস্তার মধ্যকার ঘর্ষণ বল ও 2 sec সময়ে বলের ঘাত নির্ণয় কর। [আরোহীসহ সাইকেলের ভর = 147 kg]

ধরি ঘর্ষণ বল = F ও F-এর জন্য সৃষ্ট মন্দন = a

আমরা পাই, $v^2 = v_0^2 - 2as$ ... ... (i)

$\therefore$ সমীকরণ (i) হতে পাই,

$F = ma = \frac{m(v_0^2 - v^2)}{2s}$

$= 147 \text{ kg} \frac{\{(8 \text{ ms}^{-1})^2 - 0\}}{2 \times 49 \text{ m}} = 96 N$

$\therefore$ ঘর্ষণ বল, $F = 96$ N এবং 2 sec সময়ে বলের ঘাত $= F \times t = 96 \times 2 = 192$ N-s

এখানে, $v = 0$

$v_0 = 8 \text{ ms}^{-1}$

$m = 147 \text{ kg}$

$s = 49 \text{ m}$

৪। 10 ms⁻¹ বেগে আগত 150 g ভরের একটি ক্রিকেট বলকে একটি ব্যাট দিয়ে আঘাত করা হলো। বলটি 18 ms⁻¹ বেগে ফিরে গেল। ব্যাটে-বলে সংঘাতের স্থায়িত্বকাল 0·01 s হলে ব্যাট দ্বারা ক্রিকেট বলের ওপর প্রযুক্ত গড় বলের মান বের কর।

আমরা জানি,

$F \times t = mv - mu$

$F = \frac{m(v - u)}{t}$

$= \frac{0{\cdot}15 \times (-18 - 10)}{{\cdot}01} = -420 N$

$\therefore \quad |F| = 420 N$

এখানে,

আদিবেগ, $v_0 = 10 \text{ ms}^{-1}$

ক্রিকেট বলের ভর, $m = 150 \text{ g} = 0{\cdot}150 \text{ kg}$

শেষ বেগ, $v = -18 \text{ ms}^{-1}$

গড় বেগ, F = ?

৫। দুটি বিলিয়ার্ড বল যার প্রত্যেকটির ভর 0·04 kg সরলরেখা বরাবর বিপরীত দিক থেকে 5 ms^{-1} বেগে এসে সংঘর্ষ ঘটায় এবং একই বেগে বিপরীত দিকে চলে যায়। একটি বল কর্তৃক অন্যটির ওপর বলের ঘাত কত ?

একটি বলের প্রাথমিক ভরবেগ,

$P_1 = mv_0$

এবং সংঘর্ষের পরে ওই বলের ভরবেগ,

$P_2 = mv$

$\therefore$ ভরবেগের পরিবর্তন, $P_1 - P_2 = mv_0 - mv$

অতএব, বলের ঘাত, $J = mv_0 - mv$

$= 0·04\{5-(-5)\}$

$= 0·4 \text{ kgms}^{-1}$

এখানে,
$m = 0·04$ kg
$v_0 = 5 \text{ ms}^{-1}$
$v = -5 \text{ ms}^{-1}$

৬। দুটি বিলিয়ার্ড বল যার প্রতিটির ভর 0·06 kg একই সরলরেখায় বিপরীত দিক থেকে 5 ms^{-1} বেগে এসে সংঘর্ষে লিপ্ত হলো এবং একই বেগে বিপরীত দিকে চলতে শুরু করল। একটি বল কর্তৃক অপরটির ওপর বলের ঘাত কত ?

একটি বলের প্রাথমিক ভরবেগ,

$P_1 = mu$

এবং সংঘাতের পরে ভরবেগ, $P_2 = mv$

$\therefore$ ভরবেগের পরিবর্তন $= P_1 - P_2 = mu - mv$

$\therefore$ বলের ঘাত, $J = mu - mv = 0·06 \times \{5-(-5)\}$

$= 0·06 \times 10 = 0·6 \text{ kg ms}^{-1}$

এখানে,
$m = 0·06$ kg
$u = 5 \text{ ms}^{-1}$
$v = -5 \text{ ms}^{-1}$

৭। একটি বাহক (conveyor) বেল্ট অনুভূমিকভাবে 12 cm s^{-1} বেগে চলছে। ওপর থেকে উল্লম্বভাবে 0·4 kgs^{-1} হারে পাথর বেল্টের ওপর ফেলা হচ্ছে। বেল্টের ওপর কত বল ক্রিয়া করবে ?

পাথরের প্রাথমিক অনুভূমিক বেগ, $u = 0$

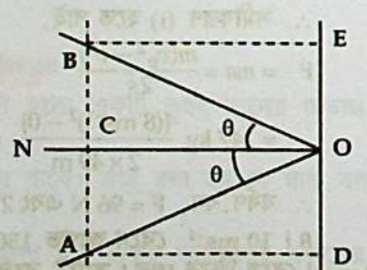
বেল্টে পড়ার পর পাথরের অনুভূমিক বেগ, $v = 12 \text{ cms}^{-1} = 0·12 \text{ ms}^{-1}$

এখন, পাথরের ভরের পরিবর্তন $= 0·4 \text{ kg s}^{-1}$

$\therefore$ প্রতি সেকেন্ডে ভরবেগের পরিবর্তন = ভরের পরিবর্তনের হার × গতিবেগ

$= 0·4 \times 0·12 = 0·048$ Newton

৮। 0·20 kg ভরের একটি ক্রিকেট বল 20 ms^{-1} বেগে ছুটে যাচ্ছিল। ব্যাটের সাহায্যে বলটিকে 60° কোণে একই বেগে বিক্ষিপ্ত করলে বলটির ওপর কত ঘাত প্রযুক্ত হবে ?



চিত্র অনুযায়ী, বলটি AO বরাবর $u = 20 \text{ ms}^{-1}$ চলমান অবস্থায় ব্যাটের গায়ে O বিন্দুতে আঘাত করে এবং একই বেগে OB বরাবর ছুটে যায়।

প্রাথমিক বেগ AO-এর সমকৌণিক উপাংশদ্বয়,

$AC = DO = u \sin\theta$ (DO বরাবর) এবং $AD = CO = u\cos\theta$ (CO বরাবর)

চূড়ান্ত বেগ OB-এর সমকৌণিক উপাংশদ্বয়,

$OE = u\sin\theta$ (OE বরাবর) এবং $OC = u\cos\theta$ (OC বরাবর)

সুতরাং ব্যাটের গা OE বরাবর বেগের পরিবর্তন,

$= u\sin\theta - u\sin\theta = 0$, অর্থাৎ OE বরাবর ভরবেগের পরিবর্তনও শূন্য

ব্যাটের সমকোণে ভরবেগের পরিবর্তন $= mu\cos\theta - (-mu\cos\theta)$

$= 2\,mu\cos\theta$

$\therefore$ বলের ঘাত $= 2\,mu\cos\theta$

$= 2 \times 0·20 \times 20 \times \cos 30°$

$= 2 \times 0·20 \times 20 \times 0·866$

$= 6·928 \text{ kg ms}^{-1}$

এখানে,
$m = 0·20$ kg
$u = 20 \text{ ms}^{-1}$
$\theta = \frac{60°}{2} = 30°$

৪.৩ নিউটনের গতির সূত্রগুলোর মধ্যে সম্পর্ক
Relation between Newton's laws of motion

নিউটনের গতিসূত্রগুলোর মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করতে হলে সূত্রগুলো সম্পর্কে সম্যক ধারণা অবশ্যই থাকতে হবে এবং সূত্রগুলো কী কী বিষয় নিয়ে আলোচনা করে সে সম্পর্কেও আমাদের জ্ঞান থাকা আবশ্যক।

নিউটনের গতির প্রথম সূত্র থেকে আমরা বুঝতে পারি যে, বাইরে থেকে কোনো প্রভাব ক্রিয়া না করলে কোনো বস্তু নিজের অবস্থার পরিবর্তন চায় না। স্থির বস্তু স্থির থাকবে আবার গতিশীল বস্তু গতিশীল অবস্থায় চলতে থাকবে। বস্তুর জড়তা ধর্মের কারণে এরূপ ঘটে। এই জড়তার বিরুদ্ধে কিছু করতে হলে অর্থাৎ স্থির বস্তুকে গতিশীল করতে হলে আবার গতিশীল বস্তুর গতির পরিবর্তন ঘটাতে হলে তার ওপর বল প্রয়োগ করতে হবে। এই ধারণা থেকে নিউটনের গতির ২য় সূত্র প্রয়োগ করতে পারি। কোনো বস্তুর ভর যত বেশি হয় তার ভরবেগও তত বেশি হবে। মনে করি গতিশীল অবস্থায় একটি বস্তুর ভর m এবং বেগ v; আর একটি বস্তুর ভর 2 m কিন্তু বেগ একই অর্থাৎ বেগ v। তাহলে প্রথম বস্তুর ভরবেগ $= mv$ এবং দ্বিতীয় বস্তুর ভরবেগ $= 2\,mv$। বাধা দিয়ে অর্থাৎ বল প্রয়োগ করে বস্তু দুটিকে যদি একই সময়ের মধ্যে থামানো হয় তবে দ্বিতীয়টির ভরবেগের পরিবর্তনের হার প্রথমটির দ্বিগুণ হবে। দ্বিতীয় সূত্র থেকে আমরা জানি যে, প্রযুক্ত বল বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হারের সমানুপাতিক হয়। অতএব দ্বিতীয় বস্তুটিকে একই সময়ের মধ্যে থামাতে গেলে প্রথম বস্তুর থেকে দ্বিগুণ বল প্রয়োগ করতে হয়। আবার যদি সমান দুটি বল (F) বস্তু দুটির ওপর প্রয়োগ করা হয় তাহলে প্রথম বস্তুর ত্বরণ a_1 এবং দ্বিতীয় বস্তুর ত্বরণ a_2 হলে নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুসারে $F = ma_1$ এবং $F = 2\,ma_2$ হবে।

সুতরাং দেখা যায় যে, বস্তুর জড়তার সাথে ভরবেগের ও ত্বরণের মধ্যে একটি সম্পর্ক বিদ্যমান যার মাধ্যমে নিউটনের ১ম ও ২য় সূত্রের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করা যায় বা এক সূত্র হতে অন্য সূত্রে রূপান্তর করা যায়।

অন্যভাবে বস্তু দুটিকে যদি F_1 ও F_2 বলে একই সরলরেখা বরাবর প্রয়োগ করা হয়, তাহলে চলতে চলতে কোনো এক সময় বস্তু দুটি সংঘর্ষে লিপ্ত হতে পারে। যখনই সংঘর্ষে লিপ্ত হয় তখন ২য় বস্তুটি ১ম বস্তুর উপর সমান ও বিপরীতমুখি প্রতিক্রিয়া বল প্রয়োগ করে। এক্ষেত্রে যে বলের কারণে দ্বিতীয় বস্তু আঘাতপ্রাপ্ত হয়, তাকে **ক্রিয়া বল** বলে আর এই বস্তুটি আঘাতপ্রাপ্তির পর বিপরীত দিকে প্রথম বস্তুর ওপর যে বল প্রয়োগ করে তাকে **প্রতিক্রিয়া বল** বলে। নিউটনের তৃতীয় সূত্র অনুযায়ী জানা যায় এই ক্রিয়া এবং প্রতিক্রিয়া সমান।

উপরের ঘটনা থেকে লক্ষ করা যায় যে, বস্তুর জড়তা বল প্রয়োগে ত্বরণ সৃষ্টি এবং ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার সকল কর্মকাণ্ডই নিউটনের গতির প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় সূত্রের পারস্পরিক সম্পর্কিত ঘটনা।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.৩

১। 5 kg ভরের একটি হাতুড়ি 5 m উঁচু থেকে একটি পেরেকের ওপর আপতিত হলো এবং $\frac{1}{20}$ সেকেন্ডে স্থির হলো। পেরেকের ওপর প্রযুক্ত বল নির্ণয় কর। ($g = 10\ ms^{-2}$)

হাতুড়ির প্রাথমিক বেগ, $u = 0$

পেরেকের ওপর পড়ার মুহূর্তে হাতুড়ির বেগ v হলে, আমরা পাই,

$$v^2 = u^2 + 2gs = 0 + 2 \times 10 \times 5 = 100$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{100} = 10\ ms^{-1}$$

হাতুড়িটি $\frac{1}{20}$ সেকেন্ডে স্থির হয়।

সুতরাং, হাতুড়িটির গতির জন্য পেরেকের ওপর প্রযুক্ত বল,

$$F = \frac{\text{ভরবেগের পরিবর্তন}}{\text{সময়}} = \frac{m(v-u)}{t}$$

$$= \frac{5\,(10-0)}{\frac{1}{20}} = 50 \times 20 = 1000\ N$$

২। 8 cm ব্যাসের একটি হোস পাইপ অনুভূমিকভাবে একটি খাড়া দেওয়ালের ওপর 8 ms^{-1} বেগে পানি ফেলছে। আঘাতের পর দেওয়ালের লম্ব দিকে পানির বেগ শূন্য হলে দেওয়ালে কত বল ক্রিয়া করে ? (পানির ঘনত্ব 1000 kg m^{-3})

ধরা যাক, হোস পাইপের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল $= A\ m^2 = \pi r^2\ m^2$

এবং নির্গত পানির বেগ $= 8\ ms^{-1}$

অতএব, প্রতি সেকেন্ডে যে পরিমাণ পানি দেওয়ালে আঘাত করে তার ভর,

$$m = A \times v \times \rho = 3{\cdot}14 \times (4 \times 10^{-2})^2 \times 8 \times 1000$$

আঘাতের পর দেওয়ালের লম্ব দিকের পানির বেগ = 0

∴ প্রতি সেকেন্ডে দেওয়ালে আঘাতকারী পানির ভরবেগের পরিবর্তন

$A v^2 \rho = \pi r^2 \times v^2 \times \rho$

∴ দেওয়ালে প্রযুক্ত বল, $F = A v^2 \rho = \pi r^2 v^2 \rho$

$= 3.14 \times (4 \times 10^{-2})^2 \times 8^2 \times 1000$

$= 3.14 \times 16 \times 10^{-4} \times 64 \times 1000$

$= 321.5 \text{ N}$

গাণিতিকভাবে নিউটনের গতিসূত্রগুলোর মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক

গাণিতিকভাবে নিউটনের গতিসূত্রগুলোর মধ্যে নিম্নোক্ত উপায়ে পারস্পরিক সম্পর্ক স্থাপন করা যায়।

■ ২য় সূত্র এবং ১ম সূত্রের মধ্যে সম্পর্ক :

নিউটনের গতির ২য় সূত্র থেকে জানি ভরবেগের পরিবর্তনের হার প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক.

অর্থাৎ $= \dfrac{m\vec{v} - m\vec{v_0}}{t} \propto \vec{F}$ ∴ $\dfrac{m(\vec{v} - \vec{v_0})}{t} \propto \vec{F}$

বা, $m\vec{a} = k\vec{F}, k = 1$ হলে

$\vec{F} = m\vec{a}$, এখানে $\vec{F}$ = প্রযুক্ত বল, $\vec{a}$ = ত্বরণ, v_0 = আদিবেগ, $\vec{v}$ = শেষ বেগ

বাইরে থেকে বল প্রযুক্ত না হলে $\vec{F} = 0$ হয় এবং $\vec{a} = 0$ হয়।

কিন্তু বস্তুর ভর শূন্য হয় না তাই $m \neq 0$, সুতরাং $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = 0$ অর্থাৎ $\vec{v}$ = ধ্রুবক ... (4.7)

তাই বলা যায় বাহ্যিক বলের ক্রিয়া না থাকলে বেগের কোনো পরিবর্তন হয় না। স্থির বস্তু স্থির আর গতিশীল বস্তুর গতির কোনো পরিবর্তন হয় না। অর্থাৎ বাহ্যিক বলের অনুপস্থিতিতে বস্তুকণার ভরবেগ সব সময় সমান বা ধ্রুব থাকে।

■ ১ম সূত্র এবং ৩য় সূত্রের মধ্যে সম্পর্ক :

নিউটনের গতির ১ম সূত্র থেকে আমরা জানি বাহ্যিক বল ক্রিয়া না করলে ভরবেগ ধ্রুব থাকে।

অর্থাৎ ভরবেগ, $\vec{P} = m\vec{v}$ = ধ্রুবক ... ... (4.8)

t এর সাপেক্ষে ব্যবকলন করে পাই

$$\therefore \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d(\vec{v})}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4.9)$$

আবার দুটি বস্তুর মধ্যে একটি বস্তু যখন অপরটির ওপর বল প্রয়োগ করে তখন লব্ধি ভরবেগের পরিবর্তনের হারের মান সমান ও বিপরীত হয়।

$$\therefore \quad \frac{d\vec{P_1}}{dt} = -\frac{d\vec{P_2}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v_1}) = -\frac{d}{dt}(m_2\vec{v_2}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad [4.9(a)]$$

বা, $m_1\vec{a_1} = -m_2\vec{a_2}$ বা, $\vec{F_1} = -\vec{F_2}$, অর্থাৎ ক্রিয়া বল = প্রতিক্রিয়া বল।

∴ [4.9(a)] এই সমীকরণ দ্বারা নিউটনের গতির ১ম ও ৩য় সূত্রের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করা যায়।

■ ২য় সূত্র এবং ৩য় সূত্রের মধ্যে সম্পর্ক :

নিউটনের গতির ২য় সূত্র থেকে আমরা জানি, ভরবেগের পরিবর্তনের হারই হলো প্রযুক্ত বল। ঘাত বল বিবেচনা করলে লেখা যায়, ঘাত বল = ভরবেগের পরিবর্তন। এক্ষেত্রে যে বলের কারণে ঘাত সৃষ্টি হয় বিপরীত ক্রমে সেই বলের কারণে প্রতিঘাত সৃষ্টি হয়। এক্ষেত্রে বলা যায় ক্রিয়া = প্রতিক্রিয়া। ইহাই নিউটনের ৩য় সূত্র।

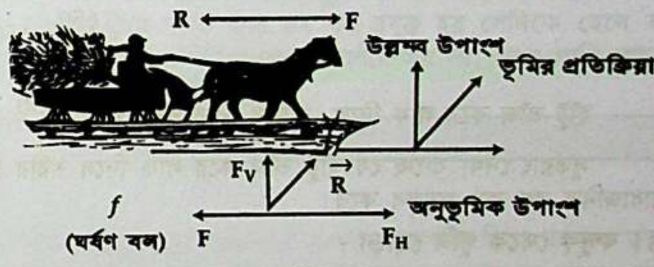
৪.৪ নিউটনের গতিসূত্রের ব্যবহার
Applications of Newton's laws of motion

একটি বস্তু যখন অন্য একটি বস্তুর ওপর বল প্রয়োগ করে তখন দ্বিতীয় বস্তুটিও প্রথম বস্তুটির ওপর একটি সমান ও বিপরীতমুখি বল প্রয়োগ করে। এই ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া সংক্রান্ত বলের বিবরণ আমরা নিউটনের তৃতীয় সূত্র থেকে জেনেছি। প্রকৃতিতে বল সব সময় জোড়ায় জোড়ায় ক্রিয়া করে। প্রকৃতিতে একক বিচ্ছিন্ন বল বলে কিছু থাকতে পারে না। দুটি বলের একটি অপরের পরিপূরক। এদের একটি ক্রিয়া অপরটি প্রতিক্রিয়া বল। ক্রিয়া বল যতক্ষণ থাকে প্রতিক্রিয়া বলও ততক্ষণ স্থায়ী হয়। নিউটনের গতিসূত্রের কয়েকটি ব্যবহারিক প্রয়োগ উদাহরণের সাহায্যে বর্ণনা করা হলো।

১। ঘোড়ার গাড়ির চলাচল :

ঘোড়ার গাড়ি রাস্তায় যখন চলে তখন ঘোড়ার কাঁধে বেল্ট বা হাতলের ওপর F বল প্রয়োগ করে গাড়িটিকে সামনের দিকে নিয়ে যায়; সাথে সাথে গাড়িও ঘোড়াকে পেছনের দিকে সমান ও বিপরীতমুখি F বলে টানতে থাকে। স্বাভাবিকভাবে প্রশ্ন করা যায় যে, গাড়িটি সামনের দিকে কী করে এগোয় ? নিচের চিত্রটি লক্ষ কর।

আরোহীসহ গাড়িটি সামনের দিকে এগোয় কী করে? : গাড়িটিকে সামনের দিকে চালাবার জন্য ঘোড়া মাটির ওপর তির্যকভাবে বল প্রয়োগ করে। সঙ্গে সঙ্গে মাটি ঘোড়ার ওপর সমান ও বিপরীতমুখি প্রতিক্রিয়া বল R প্রয়োগ করে। এই বলকে অনুভূমিক দিকে এবং উল্লম্ব দিকে যথাক্রমে F_H এবং F_V উপাংশে বিশ্লেষণ করা যায়। উল্লম্ব উপাংশ F_V ঘোড়ার ওজনকে প্রশমিত করে। এখন যদি অনুভূমিক উপাংশ F_H ঘোড়ার ওপর গাড়ি দ্বারা পেছনের দিকে প্রযুক্ত প্রতিক্রিয়া বল (R)-এর চেয়ে বেশি হয়, তাহলে $F_H - R$ বলের ক্রিয়ায় ঘোড়া সামনের দিকে এগিয়ে যায় অর্থাৎ গাড়িটি সামনের দিকে এগিয়ে যায় [চিত্র ৪.৭]।



চিত্র ৪.৭

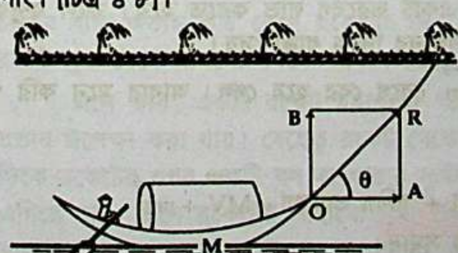
এখন গাড়ির গতি পৃথকভাবে বিবেচনা করলে দেখা যায় যে, এর ওপর দুটি বল ক্রিয়া করছে—

(i) মাটির সংস্পর্শে থাকার দরুন চাকার উপর ঘর্ষণ বল f; এই বল গাড়ির গতিকে বাধা দেয়।

(ii) ঘোড়া দ্বারা প্রযুক্ত বল F; এই বল গাড়িকে সামনের দিকে এগিয়ে নিতে চেষ্টা করে।

২। নৌকার গুণ টানা :

মনে করি M একটি নৌকা। এর O বিন্দুতে গুণ বেঁধে OR বরাবর নদীর পাড় দিয়ে $\vec{F}$ বলে টেনে নেওয়া হচ্ছে। বিভাজন পদ্ধতি দ্বারা O বিন্দুতে F-কে দুটি উপাংশে বিভাজিত করা যায়; যথা—অনুভূমিক উপাংশ ও উল্লম্ব উপাংশ [চিত্র ৪.৮]।



চিত্র ৪.৮

অনুভূমিক উপাংশ = $F\cos\theta$, এর দিক OA বরাবর।

উল্লম্ব উপাংশ = $F\sin\theta$, এর দিক OB বরাবর।

বলের অনুভূমিক উপাংশ $F\cos\theta$ নৌকাকে সামনের দিকে এগিয়ে নিয়ে যায় এবং উল্লম্ব উপাংশ $F\sin\theta$ নৌকাটিকে পাড়ের দিকে টানে। কিন্তু নৌকার হাল দ্বারা উল্লম্ব উপাংশ $F\sin\theta$ প্রতিহত করা হয়। গুণ যত লম্বা হবে, θ-এর মান তত কম হবে ফলে $F\sin\theta$-এর মান কম হবে এবং $F\cos\theta$-এর মান বেশি হবে। ফলে নৌকা দ্রুত সামনের দিকে এগিয়ে যাবে।

কাজ : নৌকার গুণ টানার ক্ষেত্রে নৌকার গতি কীভাবে বৃদ্ধি পায় ?

৩। অ্যাথলেটের লং জাম্প দেওয়া :

একজন অ্যাথলেট লং জাম্প দেওয়ার পূর্বে বেশ কিছু দূর থেকে দৌড় দেয়। এর উদ্দেশ্য হলো গতি জড়তা অর্জন করা যার দরুন সে জাম্প দেওয়ার পর বেশ খানিকটা দূরত্ব অতিক্রম করতে সক্ষম হয়।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.৪

১। 65 kg ভরের এক ব্যক্তি ভূপৃষ্ঠের 5 m ওপর থেকে লাফিয়ে পড়ল। ভূমি স্পর্শ করার সময় হাঁটু ভাঁজ না করলে তার শরীর মাত্র $\frac{1}{8}$ s–এ স্থির হয়। তবে ভূমি স্পর্শ করার সময় হাঁটু ভাঁজ করলে তার শরীর স্থির হতে 1 s সময় নেয়। উভয় ক্ষেত্রে ভূপৃষ্ঠ ব্যক্তিটির ওপর কত বল প্রয়োগ করে ? ($g = 10\ ms^{-2}$)

স্থিরাবস্থা থেকে লাফ দিয়ে ভূপৃষ্ঠে পড়ার মুহূর্তে বেগ v হলে,

$$v^2 = 0 + 2 \times 10 \times 5 \qquad [\because v^2 = u^2 + 2gs]$$
$$= 100$$
$$\therefore \quad v = 10\ ms^{-1}$$

সুতরাং, ভরবেগের পরিবর্তন $= mv - mu$
$$= 65 \times 10 - 0$$
$$= 650\ Ns$$

হাঁটু ভাঁজ না করলে, ব্যক্তির ওপর প্রযুক্ত বল $= \frac{\text{ভরবেগের পরিবর্তন}}{\text{সময়}}$

$$= \frac{650}{\frac{1}{8}} = 650 \times 8 = 5200\ N$$

হাঁটু ভাঁজ করে লাফ দিলে, ব্যক্তির ওপর প্রযুক্ত বল $= \frac{650}{1} = 650\ N$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে হাঁটু ভাঁজ করে লাফ দিলে শরীর স্থিরাবস্থায় আসতে বেশি সময় নেয়, ফলে লোকটি বাধাজনিত বল কম অনুভব করে।

৪। বন্দুক থেকে গুলি ছোড়া :

বন্দুক থেকে গুলি ছুড়লে গুলিটি প্রচণ্ড বেগে সামনে ছুটে যায়। বন্দুকটি গুলির ওপর যদি F বল প্রয়োগ করে, তাহলে গুলিটিও বন্দুকের ওপর সমান ও বিপরীতমুখি বল প্রয়োগ করে। এই প্রতিক্রিয়া বলের জন্য বন্দুকটিও পেছন দিকে এগিয়ে যায় [চিত্র ৪.৯]।

চিত্র ৪.৯

ভরবেগ দিয়েও এর কারণ ব্যাখ্যা করা যায়। গুলি ছোড়ার আগে বন্দুক ও গুলি উভয়েই স্থির থাকে। অতএব বন্দুকের ভরবেগ শূন্য এবং গুলির ভরবেগ শূন্য। সুতরাং তাদের মোট আদি ভরবেগ শূন্য। গুলি ছোঁড়ার পর বারুদের বিস্ফোরণের ফলে গুলি একটি বেগে সামনের দিকে যায়। ফলে এটি সামনের দিকে একটি ভরবেগ প্রাপ্ত হয়। ভরবেগের নিত্যতা অনুসারে গুলি ছোঁড়ার পরেও তাদের মোট ভরবেগ শূন্য হবে। ফলে বন্দুককেও গুলির সমান ও বিপরীতমুখি একটি ভরবেগ লাভ করতে হবে। ফলে বন্দুককে অবশ্যই পেছনের দিকে গতিপ্রাপ্ত হতে হবে [চিত্র ৪.৮]। তাই বন্দুক পিছনের দিকে ধাক্কা দেয়।

মনে করি M ভরের একটি বন্দুক হতে m ভরের একটি গুলি $\vec{v}$ বেগে বের হয়ে গেল। আবার মনে করি গুলি ছোঁড়ার পর বন্দুকের পশ্চাৎ বেগ $= \vec{V}$।

$\therefore$ গুলি ছোঁড়ার আগে তাদের মোট ভরবেগ $= 0$

গুলি ছোঁড়ার পর তাদের মোট ভরবেগ = বন্দুকের ভরবেগ + গুলির ভরবেগ $= M\vec{V} + m\vec{v}$

কিন্তু ভরবেগের নিত্যতা সূত্র অনুসারে আগের ও পরের ভরবেগ সমান।

$$\therefore \quad M\vec{V} + m\vec{v} = 0$$
$$\text{বা,} \quad m\vec{v} = -M\vec{V} = M(-\vec{V})$$
$$\text{বা,} \quad \vec{V} = \frac{-mv}{M} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.10)$$

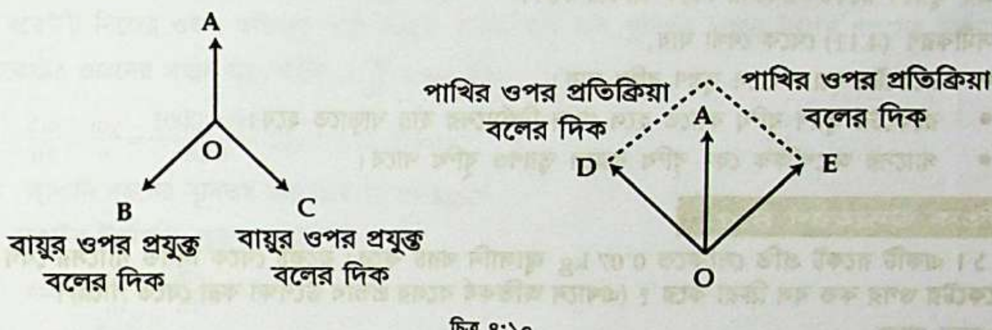
এই বেগে বন্দুককে পিছনের দিকে ধাক্কা দেয়।

সমীকরণ (4.10) অনুযায়ী গুলির ভর × গুলির বেগ = বন্দুকের ভর × বন্দুকের পশ্চাৎ বেগ।

এই সমীকরণ থেকে আরও বলা যায়, গুলির বেগ > বন্দুকের পশ্চাৎ বেগ।

৫। পাখির আকাশে উড়া :

একটি পাখি যখন OA বরাবর উড়ে যায় তখন পাখিটি তার ডানা দুটি দিয়ে বায়ুর ওপর OB এবং OC অভিমুখে বল প্রয়োগ করে। একই সঙ্গে বায়ুও OE এবং OD অভিমুখে পাখিটির ওপর প্রতিক্রিয়া বল প্রয়োগ করে [চিত্র ৪.১০]। এই প্রতিক্রিয়া বল দুটি পাখিটির ওপর ক্রিয়া করায় পাখির গতি সৃষ্টি করে। প্রতিক্রিয়া বল দুটির লব্ধি হলো OA, ফলে



চিত্র ৪.১০

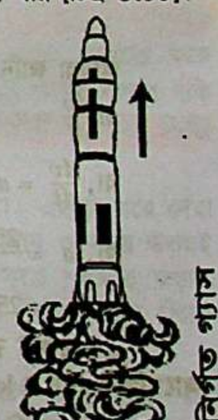
পাখিটি OA বরাবর উড়ে যেতে পারে। এখন পাখিটি যদি এক ডানা দিয়ে অন্যটির তুলনায় কম বল প্রয়োগ করে, তখন প্রতিক্রিয়া বলের লব্ধি OA বরাবর ক্রিয়া করে না। বরং যেদিকে ডানা দ্বারা কম বল প্রযুক্ত হয় সেদিকে হেলে যায়, ফলে পাখিটির চলার দিক পরিবর্তিত হয়। বায়ুশূন্য স্থানে ডানায় প্রতিক্রিয়া বল ক্রিয়াশীল হয় না, ফলে পাখি বায়ুশূন্য স্থানে উড়তে পারে না।

অনুধাবনমূলক কাজ : বায়ুশূন্য স্থানে পাখি উড়তে পারে না কেন ?

৬। মহাশূন্যে অভিযান তথা রকেটের গতি :

মহাশূন্যে অভিযানকালে যখন রকেট উপরের দিকে ধাবিত হয় তখন যদি তোমরা রকেটের দিকে তাকাও তাহলে এর পেছন দিয়ে সাদা মেঘের মতো ধোঁয়া নির্গত হতে দেখবে। কেন এমন ধোঁয়া দেখা যায় তার কারণ বলতে পারবে কী ? জ্বালানি দহনের ফলে অতি উচ্চ চাপে গ্যাস উৎপন্ন হয়। এই গ্যাসের কুণ্ডলী আমরা পৃথিবী থেকে অনেক সময় দেখতে পাই। এই গ্যাস রকেট-এর পেছনে একটি সরু নলের মধ্য দিয়ে তীব্র বেগে বেরিয়ে আসে। এর ফলে যে প্রচণ্ড বিপরীতমুখি প্রতিক্রিয়া বল সৃষ্টি হয়, সেই বলের ক্রিয়ায় রকেট তীব্র বেগে সামনের দিকে এগিয়ে যায় [চিত্র ৪.১১]।

কৃত্রিম উপগ্রহের বহুল ব্যবহার অত্যাধুনিক যোগাযোগ ব্যবস্থার উন্নয়নে এবং মহাকাশ গবেষণায় বিরাট অবদান রেখেছে। এর মূলে রয়েছে রকেট চালনার ক্রমাগত উন্নতি সাধন। ভরবেগের সংরক্ষণ নীতি অনুযায়ী রকেটও সমান কিন্তু বিপরীতমুখি ভরবেগ প্রাপ্ত হয় এবং উচ্চ বেগে ওপরে উঠে যায়। জ্বালানি হিসেবে রকেটে সাধারণত তরল হাইড্রোজেন এবং দহনের জন্য তরল অক্সিজেন থাকে। বিশেষ প্রক্রিয়ায় এবং নিয়ন্ত্রিত হারে তরল হাইড্রোজেন ও অক্সিজেনকে দহন প্রকোষ্ঠে প্রবেশ করানো হয়। জ্বালানির দহন ক্রিয়ার ফলে উৎপন্ন উচ্চ চাপের গ্যাস অত্যন্ত উচ্চ বেগে রকেটের নিচের দিকে নির্গমন পথ দিয়ে বেরিয়ে আসে এবং রকেট দ্রুত বেগে সামনের দিকে এগিয়ে চলে।



চিত্র ৪.১১

মনে করি, একটি রকেট মহাশূন্যে গতিশীল। ফলে বাতাসের বাধা এবং অভিকর্ষের প্রভাব উপেক্ষা করা যায়। যেহেতু রকেট থেকে গ্যাস নির্গমনের ফলে গ্যাসের গতির বিপরীত দিকে রকেটের ওপর একটি বল বা ধাক্কার সৃষ্টি হয়, ফলে রকেট দ্রুত গতিতে সামনের দিকে এগিয়ে যায়। ফলে রকেটের সাহায্যে মুক্তি বেগ ($11.2\ kms^{-1}$) অর্জন করে অভিকর্ষজ ত্বরণের বাধা কাটিয়ে মহাশূন্যে ভূ-উপগ্রহ স্থাপনসহ নানাবিধ অভিযান সফল হয়েছে।

ধরা যাক প্রযুক্ত ধাক্কা $= F$, রকেটের ভর $= M$, Δt সময়ে নির্গত গ্যাসের ভর $= \Delta m$, গ্যাসের নির্গত বেগ $= v$

Δt সময় ব্যবধানে গ্যাসের ভরবেগের পরিবর্তন $= (\Delta m)v$

ভরবেগের নিত্যতার সূত্র অনুযায়ী,

Δt সময়ে ভরবেগের পরিবর্তন = রকেটের ওপর প্রযুক্ত বলের ঘাত সমান

$$\therefore \quad (\Delta m)v = F \times \Delta t$$

$$F = \left(\frac{\Delta m}{\Delta t}\right) v,$$ এখানে $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ = জ্বালানি ব্যবহারের হার

রকেটের তাৎক্ষণিক ত্বরণ a হলে, $F = Ma$

$$a = \frac{F}{M} = \frac{1}{M}\left(\frac{\Delta m}{\Delta t}\right) v \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (4.11)$$

এই ত্বরণে রকেট সামনের দিকে এগিয়ে চলে।

সমীকরণ (4.11) থেকে দেখা যায়,

- রকেটের ভর কমালে ত্বরণ বৃদ্ধি পায়।
- রকেটের ত্বরণ বৃদ্ধি করতে হলে গ্যাস নির্গমনের হার বাড়াতে হবে।
- গ্যাসের আপেক্ষিক বেগ বৃদ্ধি করলে ত্বরণও বৃদ্ধি পাবে।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.৫

১। একটি রকেট প্রতি সেকেন্ডে 0·07 kg জ্বালানি খরচ করে। রকেট থেকে নির্গত গ্যাসের বেগ 100 kms^{-1} হলে রকেটের ওপর কত বল ক্রিয়া করে ? (এখানে অভিকর্ষ বলের প্রভাব উপেক্ষা করা যেতে পারে)।

দেয়া আছে,

প্রতি সেকেন্ডে জ্বালানি খরচ,

$$\frac{dm}{dt} = 0{\cdot}07 \text{ kg s}^{-1}$$

এবং নির্গত গ্যাসের বেগ, $v_r = 100 \text{ kms}^{-1} = 1 \times 10^5 \text{ ms}^{-1}$

আমরা জানি, $F = v_r\, dm/dt - mg$

অভিকর্ষ বলের প্রভাব না থাকলে $(g = 0)$, রকেটের ওপর ক্রিয়াশীল বল,

$$F = v_r \frac{dm}{dt} = 1 \times 10^5 \text{ ms}^{-1} \times 0{\cdot}07 \text{ kg} = 7 \times 10^3 \text{ N}$$

২। একটি রকেট ঊর্ধ্বমুখি যাত্রার প্রথম 2 সেকেন্ডে এর ভরের $\frac{1}{50}$ অংশ হারায়। রকেট হতে নিষ্ক্রান্ত গ্যাসের গতিবেগ 2500 ms^{-1} হলে রকেটের ত্বরণ বের কর।

প্রশ্নানুসারে, $dm = \frac{m}{50}$

$dt = 2 \text{ s}$

$v_r = 2500 \text{ ms}^{-1}$

আমরা জানি,

$$m\frac{dv}{dt} = v_r \frac{dm}{dt} - mg$$

বা, $\frac{dv}{dt} = a = \frac{v_r}{m}\left(\frac{dm}{dt}\right) - g$

বা, $a = \frac{2500 \text{ ms}^{-1}}{m} \cdot \frac{m}{50 \times 2 \text{ s}} - 9{\cdot}8 \text{ ms}^{-2}$

$= 25 \text{ ms}^{-2} - 9{\cdot}8 \text{ ms}^{-2} = 15{\cdot}2 \text{ ms}^{-2}$

৩। একটি রকেটের প্রাথমিক ভর 4000 kg। রকেট থেকে 15 kgs^{-1} হারে গ্যাস নির্গত হচ্ছে। গ্যাসের আপেক্ষিক বেগ 8 kgs^{-1} হলে 2 মিনিট পরে রকেটটির ত্বরণ কত ?

আমরা জানি,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{v_r}{M}\frac{dm}{dt}$$

$$\therefore \quad a = \frac{8 \times 10^3}{2200} \times 15$$

$$= 54{\cdot}5 \text{ ms}^{-2}$$

এখানে,

প্রাথমিক ভর, $M_0 = 4000 \text{ kg}$

$\Delta M = \frac{dm}{dt} \times t = 15 \times 2 \times 60$

$= \frac{dm}{dt} = 15 \text{ kgs}^{-1}$

2 মিনিট পরে ভর,

$M = M_0 - \Delta M$

$= 4000 - 15 \times 2 \times 60$

$= 2200 \text{ kg}$

$v_r = 8 \text{ kms}^{-1} = 8 \times 10^3 \text{ ms}^{-1}$

৪। 1000 kg ভরের একটি রকেটকে উল্লম্বভাবে উৎক্ষেপণ করতে হবে। জ্বালানি দহনে উৎপন্ন গ্যাসের নির্গমন বেগ 800 ms^{-1}।

(i) কী হারে গ্যাস নির্গত হলে রকেটটি নিজের ওজনকে অতিক্রম করে ঠিক উড়তে সক্ষম হবে ?

(ii) কী হারে গ্যাস নির্গত হলে রকেটটি শুরুতে অভিকর্ষজ ত্বরণের দ্বিগুণ ত্বরণ পাবে ?

(i) রকেটটি নিজের ওজন অতিক্রম করে উড়তে সক্ষম হবে যদি জ্বালানি দহনে উৎপন্ন গ্যাসের নির্গমনের ফলে সৃষ্ট ঘাত রকেটের ওজনের সমান হয়; অর্থাৎ $u\frac{dm}{dt} = mg$ হয়।

$$\therefore \quad \frac{dm}{dt} = \frac{mg}{u} = \frac{1000 \times 9 \cdot 8}{800} \text{ kgs}^{-1} = 12 \cdot 25 \text{ kgs}^{-1}$$

$\therefore$ জ্বালানি দহনের ন্যূনতম হার হবে $12 \cdot 25 \text{ kgs}^{-1}$

(ii) রকেটের ঊর্ধ্বমুখি ত্বরণ a হলে,

$$ma = m\frac{dv}{dt} = u\frac{dm}{dt} - mg$$

বা, $a = \frac{u}{m}\frac{dm}{dt} - g$

বা, $\frac{dm}{dt} = \frac{m}{u}(a + g)$

প্রশ্নানুসারে, $a = 2g$

$$\therefore \quad \frac{dm}{dt} = \frac{m}{u} \times (2g + g) = \frac{m}{u} \times 3g$$

$$= \frac{1000}{800} \times 3 \times 9 \cdot 8 \text{ kgs}^{-1} = 36 \cdot 75 \text{ kgs}^{-1}$$

$\therefore$ $36 \cdot 75 \text{ kgs}^{-1}$ হারে গ্যাস নির্গত হতে হবে।

৪.৫ নিউটনের গতিসূত্রের অবদান
Contribution of Newton's laws of motion

নিউটনের সূত্রাবলির ওপর ভিত্তি করে যে বলবিদ্যার সৃষ্টি এবং উন্নয়ন হয়েছে তাকে নিউটনীয় বলবিদ্যা (Newtonian mechanics) বা সনাতন বলবিদ্যা (Classical mechanics) বলা হয়। এই বলবিদ্যার সাহায্যে পৃথিবীর বিভিন্ন বস্তুর গতি, অসীম আকাশের তারকা এবং গ্রহের গতি বিশ্লেষণ করা যায়। নিউটনের গতিসূত্র ব্যবহার করে আমরা এই সমস্ত বস্তুর গতির নিখুঁত সমাধান পাই। নিউটনীয় বলবিদ্যা বা সনাতন বলবিদ্যা এই সমস্ত বস্তুর গতি বিশ্লেষণে অপূর্ব সাফল্য অর্জন করেছে। এই কারণে, বলা হয় যে, নিউটনীয় বলবিদ্যা আধুনিক পদার্থবিজ্ঞানের ভিত্তি স্থাপন করেছে।

নিউটনীয় বলবিদ্যায় ধরা হয়েছে যে বস্তুর ভর ও দৈর্ঘ্য বস্তুর বেগের ওপর নির্ভর করে না। এছাড়া ধরে নেয়া হয়েছে যে পরিমাপ্য যন্ত্রপাতির কার্যনীতি এগুলোর গতির দ্বারা প্রভাবিত হয় না। এই বলবিদ্যায় স্থান ও সময় উভয়ই অপরিবর্তনীয় ধরা হয়েছে এবং কোনো কিছুরই সাপেক্ষে আপেক্ষিক নয়। নিউটনের প্রথম গতিসূত্রে শুধুমাত্র জড়তা কোনো প্রসঙ্গের সাপেক্ষে সঠিকভাবে প্রকাশ করা যায়। এই কারণে, নিউটনীয় বলবিদ্যায় একটি নির্দিষ্ট পরম স্থিতি প্রসঙ্গ বিবেচনা করা হয়।

কিন্তু বিজ্ঞানী আইনস্টাইন বিশদ গবেষণার পর এই সিদ্ধান্তে উপনীত হন যে, এই মহাবিশ্বে পরম স্থিতি বলে কিছু নেই। সব কিছুই গতিশীল। কিন্তু একটি নির্দিষ্ট বস্তুর সাপেক্ষে অপর একটি বস্তু স্থির রয়েছে। তিনি আরও প্রমাণ করেন, যে কোনো প্রসঙ্গ কাঠামোতে প্রকাশ করা হোক না কেন তা অপরিবর্তনীয় থাকে। এটিই আইনস্টাইনের আপেক্ষিক তত্ত্বের মৌলিক ধারণা। সবক্ষেত্রেই প্রযোজ্য হওয়ার জন্য বিজ্ঞানী আইনস্টাইন নিউটনীয় গতির অনেক সমীকরণ পরিবর্তন করেছেন। তিনি এ সমস্ত পরিবর্তনগুলি বিভিন্ন পরীক্ষণ দ্বারা প্রমাণ করেন। এগুলোর মধ্যে একটি হলো যে, বস্তুর ভর দ্রুতির ওপর নির্ভর করে। সুতরাং বলের প্রয়োগে বস্তুতে যে ত্বরণ সৃষ্টি হয় তা ধ্রুব থাকে না অর্থাৎ ত্বরণ এর দ্রুতির ওপর নির্ভর করে। এছাড়া, একটি বস্তুর দৈর্ঘ্য এবং সময় অবকাশও গতির উপর নির্ভর করে। বিভিন্ন পরিমাপের পরীক্ষালব্ধ ফলাফলও গতির ওপর নির্ভরশীল। আইনস্টাইনের আপেক্ষিক তত্ত্ব পদার্থবিজ্ঞানের অনেক নতুন ধারণার সৃষ্টি করেছে এবং সনাতন অনেক ধারণার পরিবর্তন ঘটিয়েছে। বস্তুর গতিবেগ যখন আলোর বেগের কাছাকাছি পৌঁছায় তখন নিউটনীয় বলবিদ্যা আর কার্যকর থাকে না। এ ধরনের উচ্চ গতিবেগ অথবা গতি বর্ণনায় আপেক্ষিক বলবিদ্যার প্রয়োজন হয়।

অণু-পরমাণুর গতি বিশ্লেষণে নিউটনীয় বলবিদ্যা কার্যকর নয়, এ ধরনের ক্ষুদ্র কণার গতি বিশ্লেষণে (যেমন অণু, পরমাণু, ইলেকট্রন, প্রোটন ইত্যাদি) কোয়ান্টাম বলবিদ্যার প্রয়োজন হয়। এর অর্থ এই নয় যে সনাতন বলবিদ্যা সেকেলে হয়ে গেছে।

বাস্তবিক পক্ষে, নিউটনের প্রথম সূত্র প্রসঙ্গ কাঠামোর সঙ্গে সম্পর্কিত। কেননা কোনো প্রসঙ্গ কাঠামোর সাপেক্ষে একটি বস্তুর পরিমাপ্য ত্বরণ ওই প্রসঙ্গের ওপর নির্ভর করে। প্রথম সূত্র বলে যে, যদি কাছাকাছি কোনো বস্তু না পাওয়া যায়, তবে একগুচ্ছ প্রসঙ্গ কাঠামো পাওয়া যেতে পারে। সেখানে কণাটির কোনো ত্বরণ থাকে না। প্রযুক্ত বলের অবর্তমানে বস্তু স্থিতি অবস্থায় অথবা সমরৈখিক গতিতে থাকে—এই গুণ জড়তা ভিন্ন অন্য কিছু নয়।

নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রে আমরা জেনেছি যে একটি বস্তুর ত্বরণ এর ওপর প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক। এখন আমাদের প্রশ্ন, একই বল অন্য বস্তুতে ভিন্নতর হবে কি-না; অবশিষ্ট গুরুত্বপূর্ণ প্রশ্ন হলো, বিভিন্ন বস্তুতে ক্রিয়াশীল একই বল ভিন্নতর হবে কি-না ? অর্থাৎ, একই মানের বল বিভিন্ন বস্তুতে কী ধরনের ক্রিয়া করে এই সূত্র থেকে এর আঙ্কিক উত্তর পেতে পারি। নিউটনের তৃতীয় সূত্র থেকে আমরা শিখতে পারি যে, একক বল হলো শুধু ত্রুটিমুক্ত দুটি বস্তুর মধ্যে মিথস্ক্রিয়ার অভিমুখ। এছাড়া, এই দুটি বলের মান সমান কিন্তু বিপরীতমুখি। সুতরাং, কোনো অন্তরীত বা বিচ্ছিন্ন বলের অস্তিত্ব নেই এবং এটি পাওয়া অসম্ভব। পদার্থবিজ্ঞান কতকগুলো অনমনীয় তত্ত্বের সংমিশ্রণ নয়, বরং এটি অনবরত উন্নয়নশীল বিজ্ঞান। লক্ষণীয় যে 1660 সালে পদার্থবিজ্ঞান নিউটনীয় বলবিদ্যার দ্বারা, 1870 সালে ম্যাক্সওয়েলের তড়িৎ চুম্বকীয় তত্ত্ব, 1906 সালে আইনস্টাইনের আপেক্ষিক তত্ত্ব এবং 1925 সালে কোয়ান্টাম বলবিদ্যার সাহায্যে পূর্ণতা পেতে থাকে।

বিগত কয়েক দশকে কোয়ান্টাম বলবিদ্যার সাহায্যে ক্ষুদ্র কণা যেমন ইলেকট্রন, প্রোটন এবং অন্যান্য মৌলিক কণাসমূহের গুণাগুণ পরিমাপ করা সম্ভব হয়েছে। নিউটনীয় বলবিদ্যা এ সমস্ত দ্রুতগতির কণার গতি বর্ণনা করতে পারেনি। নিউটনীয় বলবিদ্যা $\frac{v}{c} \ll 1$ সীমায় কঠিন বিষয়গুলো ব্যাখ্যা করতে খুবই উপযোগী; কিন্তু উচ্চ দ্রুতির মৌলিক কণাগুলোর সংঘর্ষ, ক্ষয় এবং মিথস্ক্রিয়া ব্যাখ্যা করতে পারে না। তথাপি নিউটনীয় বলবিদ্যার গুরুত্ব কোনোভাবেই কম নয়। নিউটনীয় বলবিদ্যাকে সাধারণ বলবিদ্যা কণাসমূহের আলোর বেগের কাছাকাছি বর্ণনা করে তার একটি বিশেষ রূপ হিসেবে ধরা যেতে পারে। দৈনন্দিন জীবনে আমরা যে সমস্ত বস্তু বিবেচনা করি তার ভর ইলেকট্রনের ভরের তুলনায় অনেক বেশি (ইলেকট্রনের ভর, $m = 9.1 \times 10^{-31}$kg)। এটি আকর্ষণীয় বিষয় যে খুবই কাছাকাছি কণাসমূহের ধারণাই হলো সনাতন বলবিদ্যার ভিত্তি।

এই বলবিদ্যা বা নিউটনের গতির সমীকরণসমূহ দ্বারা কণার অবস্থান এবং তাদের বেগ একই সঙ্গে সূক্ষ্মভাবে পরিমাপ করা সম্ভব নয়, অনিশ্চয়তা থাকে। এই নিশ্চয়তা **হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তা নীতি** হিসেবে পরিচিত যা নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায়,

$$\Delta x \cong \frac{h}{m\Delta v_x}, \text{ এখানে } h = \text{প্ল্যাঙ্ক ধ্রুবক।}$$

নিউটনীয় বলবিদ্যা সাধারণ আপেক্ষিকতার একটি বিশেষ রূপ যা ক্ষুদ্র কণার গতি-প্রকৃতি ব্যাখ্যা করতে সাহায্য করে। হাইজেনবার্গ, শ্রোডিঞ্জার, বার্ন 1925–1926 সনে এবং ডিরাক 1927 সনে এবং অন্য বিজ্ঞানীরা তা ব্যাখ্যা করতে সমর্থ হন।

৪.৬ নিউটনের গতিসূত্রের সীমাবদ্ধতা
Limitations of Newton's laws of motion

নিউটনের গতিসূত্র বৃহৎ আকৃতির বস্তুর জন্য প্রযোজ্য। যে সকল কণার ভর খুবই কম যেমন ইলেকট্রন, প্রোটন, নিউট্রন ইত্যাদির ক্ষেত্রে নিউটনের গতিসূত্র প্রযোজ্য নয়।

ক্ষুদ্র ভর (10^{-31} kg) বিশিষ্ট সকল কণার বেগ বেশি হয়, অর্থাৎ প্রায় আলোর বেগের কাছাকাছি হয় ফলে গতিশীল অবস্থায় এরা তরঙ্গ রূপে আচরণ করে। এ সকল বস্তুর ক্ষেত্রে নিউটনের গতিসূত্র প্রযোজ্য নয়। এসব ক্ষেত্রে আপেক্ষিকতা তত্ত্ব প্রযোজ্য।

আবার বস্তুর ত্বরণ যখন খুব কম ($< 10^{-10}$ ms^{-2}) হয় তখন নিউটনের গতিসূত্র প্রয়োগে ভালো ফল পাওয়া যায় না। এক্ষেত্রে বল ত্বরণের বর্গের সমানুপাতিক হয়। নিউটনের গতিসূত্র কেবলমাত্র বল ত্বরণের সমানুপাতিক ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

কোনো বস্তু স্থির কাঠামোতে বা সমবেগে চলমান হলে নিউটনের গতিসূত্র প্রযোজ্য হয়। অন্যথায় প্রযোজ্য হবে না।

নিউটনের গতির সূত্র প্রয়োগ করা যায় যখন বস্তুর বেগ আলোর বেগের তুলনায় অনেক কম থাকে। আলোর বেগের কাছাকাছি বেগসম্পন্ন বস্তুর গতির ক্ষেত্রে নিউটনের সূত্র প্রয়োগ করা যায় না। এক্ষেত্রে আইনস্টাইনের আপেক্ষিকতার সূত্র ব্যবহার করা হয়।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : 4 kg ভরের একটি বস্তুকে একটি স্প্রিং তুলা যন্ত্র থেকে ঝুলিয়ে দেওয়া হলো এবং একই ভরের অপর একটি বস্তুকে একটি সাধারণ তুলা যন্ত্রের সাহায্যে প্রতিমিত (balanced) করা হলো। তুলা যন্ত্র দুটিকে একটি লিফ্‌টের ভেতর রাখা হলো। এখন লিফ্‌টটি ত্বরণসহ ওপরে উঠতে থাকলে তুলা দুটির পাঠের কোনো পরিবর্তন হবে কী? ব্যাখ্যা কর।

তুলা দুটির পাঠের পরিবর্তন হবে।

ব্যাখ্যা : আমরা জানি, স্প্রিং তুলা যন্ত্র বস্তুর ওজন পরিমাপ করে। এখন, যেহেতু লিফ্‌টটি ত্বরণসহ ওপরে উঠছে তাই বস্তুর ওজন বৃদ্ধি পাবে। ফলে স্প্রিং তুলার পাঠ বৃদ্ধি পাবে। পক্ষান্তরে, সাধারণ তুলা যন্ত্রের সাহায্যে বস্তুর ভর পরিমাপ করা হয়। যেহেতু ভরের কোনো পরিবর্তন হয় না তাই সাধারণ তুলা যন্ত্রের পাঠের কোনো পরিবর্তন ঘটবে না।

৪.৭ বল, ক্ষেত্র ও ক্ষেত্র প্রাবল্যের ধারণা
Concept of force, field and field intensity

পূর্বের অনুচ্ছেদে বল কী এবং এর প্রকারভেদ সম্পর্কে ধারণা প্রদান করা হয়েছে। আমরা জেনেছি, **'যে বাহ্যিক কারণ বস্তুর গতি বা স্থিতি অবস্থার পরিবর্তন ঘটায় বা ঘটাতে চায় তাকে বল বলে।'** বল একটি ভেক্টর রাশি।

বলের প্রকৃতি (Nature of Force) :

মহাকর্ষ বল দুটি বস্তুর মধ্যকার আকর্ষণ বল। দুটি চার্জিত বস্তু পরস্পরকে আকর্ষণ করে যখন চার্জ দুটি বিপরীতধর্মী হয় অর্থাৎ একটি ধনাত্মক বা অপরটি ঋণাত্মক হয় এবং বিকর্ষণ করে যখন চার্জ দুটি সমধর্মী হয়। মহাকর্ষ বল মাধ্যমের ওপর নির্ভর করে না। কিন্তু তড়িৎ বল মাধ্যমের উপর নির্ভরশীল।

ক্ষেত্র (Field) :

একটি চার্জের চারদিকে বিস্তৃত অঞ্চল জুড়ে এর প্রভাব লক্ষ করা যায়। ওই অঞ্চলে অন্য একটি চার্জ আনলে, সেটি বল অনুভব করে। আবার দ্বিতীয় চার্জ প্রথম চার্জের উপর বল প্রয়োগ করে। অর্থাৎ চার্জ দুটির মধ্যে ক্রিয়াশীল বল পারস্পরিক। এখন চার্জের মান বাড়লে বল বাড়বে। আবার চার্জ দুটির মধ্যে দূরত্ব বাড়লে বলের মান কমে যায়।

অনুরূপভাবে, একটি বস্তুর চারদিকের অঞ্চল জুড়ে এর প্রভাব লক্ষ করা যায়। ওই অঞ্চলে অপর একটি বস্তু থাকলে সেটি বল অনুভব করে। এই বল মহাকর্ষীয় বল। এই বল পারস্পরিক; অর্থাৎ একে অপরের ওপর ক্রিয়াশীল হয়। এখন বস্তুর ভর বৃদ্ধি পেলে বলের মান বাড়ে। আবার বস্তুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব বাড়লে বলের মান কমে।

উপরোক্ত আলোচনা থেকে দেখা যায় যে, দুটি বস্তুর মধ্যে কিংবা দুটি চার্জের মধ্যে ক্রিয়াশীল বল সংস্পর্শ ছাড়াই দূর থেকে ক্রিয়া করে। কিন্তু প্রশ্ন জাগে যে চার্জ দুটির মধ্যে কোনো ভৌত সংযোগ ছাড়াই কীভাবে বল ক্রিয়া করে। বিখ্যাত বিজ্ঞানী মাইকেল ফ্যারাডে প্রথম অনুধাবন করেন যে, চার্জের চারদিকে এক ধরনের আলোড়ন সৃষ্টি হয় যার ফলে ওই অঞ্চলে কোনো চার্জ স্থাপন করলে সেটি বল অনুভব করে। তিনি এই আলোড়নের নাম দেন তড়িৎ ক্ষেত্র। সুতরাং তড়িৎ ক্ষেত্রের নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেয়া যায় :

সংজ্ঞা : কোনো একটি চার্জ চারদিকে যে অঞ্চল জুড়ে তার প্রভাব বিস্তার করে সেই অঞ্চলকে ওই চার্জের তড়িৎ ক্ষেত্র বলে।

অনুরূপ, মহাকর্ষ বিষয়ক আলোচনায় ক্ষেত্রের ধারণা প্রয়োগ করা হয়। এ ধারণা অনুযায়ী, **"কোনো বস্তুর চারদিকে যে স্থান জুড়ে তার আকর্ষণ বল অনুভূত হয়, সে স্থানকে ওই বস্তুর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র বলে।"** অতএব, মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র মহাকর্ষীয় বল সঞ্চালনের মধ্যস্থতাকারী হিসেবে ক্রিয়া করে।

ক্ষেত্র প্রাবল্য (Field Intensity) :

তড়িৎ ক্ষেত্র বা মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের সর্বত্র এর প্রভাব সমান নয়। চার্জিত বা আহিত বস্তুর কাছাকাছি তড়িৎ ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে একটি চার্জ যতটুকু বল অনুভব করে দূরে তার চেয়ে কম বল অনুভব করবে। আবার চার্জিত বস্তুর চার্জের পরিমাণ বেশি হলে ওই একই বিন্দুতে কম চার্জের বস্তু অপেক্ষা বেশি বল অনুভূত হবে। তড়িৎ ক্ষেত্রের এই দুর্বলতা বা সবলতা একটি তড়িৎ রাশি দ্বারা প্রকাশ করা হয়। একে তড়িৎ ক্ষেত্রের প্রাবল্য বা তড়িৎ প্রাবল্য বলে।

সংজ্ঞা : তড়িৎ ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে একক আধান বা চার্জের উপর ক্রিয়াশীল বলকে তড়িৎ ক্ষেত্রের প্রাবল্য বা তড়িৎ প্রাবল্য বলে।

এখন তড়িৎ বল $\vec{F}$ হলে এবং চার্জ q_0 হলে সংজ্ঞানুসারে তড়িৎ প্রাবল্য,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \text{ বা, } \vec{F} = q_0\vec{E}$$

এটি ভেক্টর রাশি। এর একক হলো NC^{-1}।

অনুরূপ, মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের সকল বিন্দুতে একই বল ক্রিয়াশীল নয়। অর্থাৎ মহাকর্ষীয় প্রাবল্য ভিন্নতর হয়। মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে প্রাবল্য বা তীব্রতা নির্ণয় করতে ওই বিন্দুতে একক ভরের একটি বস্তু বিবেচনা করা হয়। একক ভরের বস্তুটি যে বল লাভ করে তা দিয়েই মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের প্রাবল্য পরিমাপ করা হয়।

সংজ্ঞা : মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে একক ভরের একটি বস্তু স্থাপন করলে তার ওপর যে বল প্রযুক্ত হয়, তাকে ওই ক্ষেত্রের দরুন ওই বিন্দুতে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য বলে।

অতএব, মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে m ভরের বস্তুর উপর $\vec{F}$ বল ক্রিয়া করলে ওই বিন্দুতে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের প্রাবল্য হবে,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.12)$$

প্রাবল্যের মান ও দিক দুই-ই আছে। প্রাবল্যের অভিমুখই মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের অভিমুখ নির্দেশ করে। এর একক হলো Nkg^{-1}।

৪.৮ রৈখিক ভরবেগের নিত্যতা
Conservation of linear momentum

রৈখিক ভরবেগের নিত্যতার নীতি পদার্থবিজ্ঞানের অন্যতম গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। নিউটনের গতিসূত্র থেকে এই নীতি পাওয়া যায়। কতগুলি বস্তু পরস্পরের ওপর বল (ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়া) প্রয়োগ করতে পারে এবং তার প্রভাবে সচল হতে পারে, কিন্তু বাইরে থেকে কোনো বল প্রয়োগ না করলে তাদের মোট ভরবেগ সবসময় অপরিবর্তিত থাকে। তোমরা লক্ষ করে থাকবে চেয়ারে বসে থাকা অবস্থায় কোনো লোক চেয়ারের ওপর বল প্রয়োগ করে চেয়ারটি তুলতে পারে না। এর কারণ কী ব্যাখ্যা করতে পারবে ? চেয়ার ও লোকটি স্থির বলে এদের মোট ভরবেগ শূন্য। এখন লোকটি চেয়ারকে তুলতে চেষ্টা করলে অর্থাৎ চেয়ারের উপর উপরের দিকে বল প্রয়োগ করলে চেয়ারটি লোকটির ওপর নিচের দিকে সমান প্রতিক্রিয়া বল প্রয়োগ করবে। কিন্তু এই বল দুটিই হলো চেয়ার ও লোকটির মধ্যে ক্রিয়াকৃত বল, যেহেতু বাইরে থেকে কোনো বল প্রয়োগ হচ্ছে না। তাই চেয়ার ও লোকটির মোট ভরবেগ শূন্যই থাকবে। ফলে চেয়ার ওপরে উঠবে না। একইভাবে চেয়ারে বসে থাকা কোনো ব্যক্তি হাত দিয়ে ওপরের দিকে চুল টেনে নিজেকে ওপরের দিকে তুলতে পারবে না। আবার গাড়ি বন্ধ হয়ে গেলে যাত্রীরা যদি গাড়ির মধ্যে থেকে গাড়িকে ঠেলতে থাকে তাহলেও গাড়ি চলবে না। এই সকল প্রশ্নের উত্তর রৈখিক ভরবেগের নিত্যতার সূত্র বা সংরক্ষণ নীতি থেকে পাওয়া যায়।

নিউটনের গতির তৃতীয় সূত্র থেকে আমরা ভরবেগের নিত্যতার সূত্র সম্পর্কে জানতে পারি। ভরবেগের নিত্যতার সূত্র ছোট-বড় পার্থিব বা মহাজাগতিক সব বস্তুর ক্ষেত্রে সমভাবে প্রযোজ্য। নিউটনের গতির প্রথম সূত্র থেকে আমরা জানি কোনো বস্তুর ওপর প্রযুক্ত নিট বল যদি শূন্য হয়, তাহলে চলমান একটি বস্তু সরল পথে সমদ্রুতিতে চলতে থাকে অর্থাৎ এর বেগ ধ্রুব থাকে। সময়ের সাপেক্ষে বেগ $\vec{v}$ ধ্রুব থাকলে ভরবেগ $\vec{p} = m\vec{v}$ ও সময়ের সাপেক্ষে ধ্রুব থাকে।

৪.৯ ভরবেগের সংরক্ষণ নীতি বা নিত্যতার সূত্র
Conservation principle of momentum

নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র থেকে আমরা জানি যে, কোনো বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার বস্তুটির ওপর প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক। সুতরাং বস্তুটির ওপর কোনো বাহ্যিক বল প্রযুক্ত না হলে ভরবেগের কোনো পরিবর্তন হবে না। অর্থাৎ ওই বস্তুর রৈখিক ভরবেগ অপরিবর্তিত থাকে। এটিই হলো রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ নীতি বা নিত্যতার সূত্র।

সূত্র : কোনো বস্তুর ওপর বাহ্যিক বল প্রযুক্ত না হলে ভরবেগের কোনো পরিবর্তন হবে না। অর্থাৎ ভরবেগ সংরক্ষিত থাকে।

ব্যাখ্যা : মনে করি m_1 ও m_2 ভরসম্পন্ন দুটি বস্তু যথাক্রমে u_1 ও u_2 বেগে একই সরলরেখা বরাবর চলার সময় সংঘর্ষ ঘটল। সংঘর্ষের পর বস্তু দুটি যথাক্রমে v_1 ও v_2 বেগে একই সরলরেখা বরাবর চলতে লাগল [চিত্র ৪.১২]।

চিত্র ৪.১২

সুতরাং সংঘর্ষের পূর্বে বস্তু দুটির মোট ভরবেগ $= m_1u_1 + m_2u_2$

এবং সংঘর্ষের পরে এদের মোট ভরবেগ $= m_1v_1 + m_2v_2$

এখন বাহ্যিক কোনো বল প্রযুক্ত না হলে ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রানুসারে,

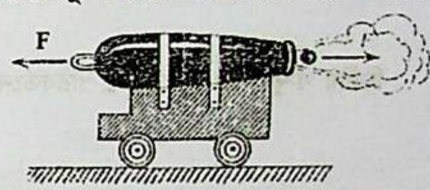
$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.13)$$

অতএব, মোট রৈখিক ভরবেগ সংরক্ষিত বা অপরিবর্তিত থাকে।

৪.৯.১ রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ নীতি বা ভরবেগের নিত্যতার সূত্রের উদাহরণ

কীভাবে রৈখিক ভরবেগের নিত্যতার সূত্র কার্যকর হচ্ছে নিচের উদাহরণগুলো থেকে তা ব্যাখ্যা করতে পারবে।

উদাহরণ ১। কামান থেকে গোলা ছুড়লে গোলাটি প্রচণ্ড বেগে সামনে ছুটে যায়। গুলি ছোড়ার পূর্বে কামান ও গুলি স্থির ছিল, ফলে ভরবেগ শূন্য ছিল। কিন্তু গুলি ছোড়ার পর গোলাটি একটি ভরবেগ প্রাপ্ত হয়। কামানটি গোলার ভরবেগের সমান কিন্তু বিপরীতমুখি একটি ভরবেগ লাভ করে। এই কারণেই কামানটি পেছন দিকে গতিপ্রাপ্ত হয় অর্থাৎ পিছু হটে [চিত্র ৪.১৩]।



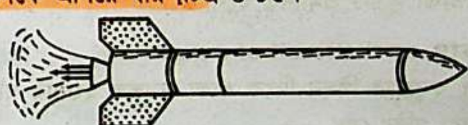
চিত্র ৪.১৩


চিত্র ৪.১৪

উদাহরণ ২। আরোহী নৌকা থেকে লাফিয়ে নামলে নৌকাটি পিছিয়ে যায়। লাফ দেবার আগে নৌকা ও আরোহী স্থির ছিল বলে ওদের মোট ভরবেগ শূন্য ছিল। সামনে লাফ দেওয়ায় আরোহী সচল হয়ে ভরবেগ লাভ করে। ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র অনুযায়ী মোট ভরবেগ শূন্য থাকে। তাই নৌকাটিতে সমান ও বিপরীতমুখি ভরবেগ সৃষ্টি হয়। ফলে নৌকাটি সচল হয়ে পিছিয়ে যায় [চিত্র ৪.১৪]।

নিজে কর : নৌকা থেকে লাফ দেওয়ার সময় নৌকার পেছনে সরে যাবার কারণ ব্যাখ্যা কর।

উদাহরণ ৩। জ্বালানি দহনের ফলে উৎপন্ন গ্যাস তীব্র বেগে পেছনের দিকে বেরিয়ে যায় বলে রকেট বা জেট প্লেন সমান ভরবেগ নিয়ে সামনের দিকে এগিয়ে যায় [চিত্র ৪.১৫]।

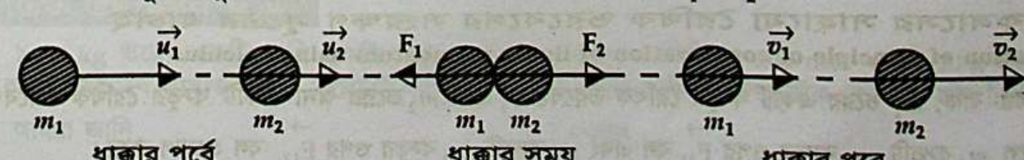

চিত্র ৪.১৫

৪.১০ ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রের সত্যতা যাচাই
Verification of conservation law of momentum

গাণিতিক পদ্ধতি :

গাণিতিকভাবে ভরবেগের নিত্যতা বা সংরক্ষণশীলতা যাচাই করা যায়।

মনে করি কোনো একটি সরল রেখায় m_1 এবং m_2 ভরের দুটি বস্তুকণা যথাক্রমে $\vec{u}_1$ ও $\vec{u}_2$ বেগে একই দিকে চলছে [চিত্র ৪.১৬]। এখানে $\vec{u}_1 > \vec{u}_2$। কোনো এক সময়ে প্রথম বস্তুকণাটি পেছনের দিক হতে দ্বিতীয় বস্তুকণাটিকে ধাক্কা দিল এবং এর পর বস্তুকণা দুটি একই সরলরেখায় ও একই দিকে যথাক্রমে $\vec{v}_1$ ও $\vec{v}_2$ বেগে চলতে লাগল।



চিত্র ৪.১৬

মনে করি ধাক্কাজনিত ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার কার্যকাল t। তা হলে

বস্তুকণা দুটির আদি ভরবেগের সমষ্টি $= m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$

বস্তুকণা দুটির শেষ ভরবেগের সমষ্টি $= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$

ভরবেগের নিত্যতা সূত্রানুসারে প্রমাণ করতে হবে যে, $m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$

প্রমাণ :

প্রথম বস্তুকণার ভরবেগের পরিবর্তনের হার $= \dfrac{m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{u}_1}{t}$

$=$ প্রতিক্রিয়া বল $= \vec{F}_1$

$=$ প্রথম বস্তুকণার ওপর দ্বিতীয় বস্তুকণার প্রতিক্রিয়া বল।

দ্বিতীয় বস্তুকণার ভরবেগের পরিবর্তনের হার $= \dfrac{m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{u}_2}{t}$

$=$ ক্রিয়া বল $= \vec{F}_2$

$=$ দ্বিতীয় বস্তুকণার ওপর প্রথম বস্তুকণার প্রযুক্ত বল।

কিন্তু বস্তুকণা দুটির ভরবেগের পরিবর্তনের হার (অর্থাৎ ক্রিয়া বল ও প্রতিক্রিয়া বল) সমান ও বিপরীত। অর্থাৎ

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

$$\therefore \quad \frac{m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{u}_2}{t} = -\frac{m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{u}_1}{t}$$

বা, $m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{u}_2 = -m_1\vec{v}_1 + m_1\vec{u}_1$

বা, $m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ ...... = একটি ধ্রুব ভেক্টর

$\therefore$ বস্তুকণা দুটির আদি ভরবেগের সমষ্টি = বস্তুকণা দুটির শেষ ভরবেগের সমষ্টি।

অর্থাৎ $\sum m\vec{v} =$ ধ্রুব ভেক্টর। ... ... (4.14)

সুতরাং দুটি বস্তুর মধ্যে ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়াজনিত বলের ফলে মোট ভরবেগের কোনো পরিবর্তন হয় না, একটি বস্তু যে পরিমাণ ভরবেগ হারায়, অপরটি ঠিক সমপরিমাণ ভরবেগ লাভ করে অর্থাৎ ধাক্কার আগে ও পরে মোট ভরবেগ একই থাকে। অতএব ভরবেগের নিত্যতা সূত্রটি প্রমাণিত হলো।

বন্দুকের প্রতিক্ষেপ বা পশ্চাৎ বেগ (Recoil of a gun)

বন্দুক থেকে গুলি ছোড়া এবং বন্দুকের পিছন দিকে ধাক্কা অনুভূত হওয়ার ঘটনাই বন্দুকের প্রতিক্ষেপ।

ধরা যাক, গুলির ভর $= m_1$ এবং গুলির বেগ $= v_1$

এবং বন্দুকের ভর $= m_2$ এবং গুলির বেগ $= v_2$

গুলি ছোড়ার আগে এদের মোট ভরবেগ $= 0$ এবং গুলি ছোড়ার পর এদের মোট ভরবেগ $= m_1v_1 + m_2v_2$

ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র থেকে পাই,

$$0 = m_1v_1 + m_2v_2$$

বা, $v_2 = -\dfrac{m_1}{m_2}v_1$ ... ... (i)

এই v_2 হলো বন্দুকের প্রতিক্ষেপ বা পশ্চাৎবেগ (Recoil velocity)। সমীকরণ (i)-এর ডান পক্ষের ঋণাত্মক চিহ্ন দ্বারা বোঝা যায় যে v_1 ও v_2 পরস্পর বিপরীতমুখি। অর্থাৎ গুলি যে দিকে বেরিয়ে যায় বন্দুক তার বিপরীত দিকে গতিপ্রাপ্ত হয়।

ক্যালকুলাসের সাহায্যে রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রের যাচাই
Verification of principle of conservation of linear momentum using calculus

ধরা যাক, m_1 ভরের একটি বস্তুর রৈখিক ভরবেগ $\vec{P}_1$ এবং m_2 ভরের অন্য একটি বস্তুর রৈখিক ভরবেগ $\vec{P}_2$। সংঘর্ষকালে m_1 বস্তুটি m_2 বস্তুর ওপর $\vec{F}_{21}$ বল এবং m_2 বস্তুটি m_1 বস্তুর ওপর $\vec{F}_{12}$ বল প্রয়োগ করে।

এখন, নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র অনুসারে,

$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ ... ... (i)

আবার, নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র অনুসারে, $\vec{F}_{12} = m_1$ বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার $= \dfrac{d\vec{P}_1}{dt}$

এবং $\vec{F}_{21} = m_2$ বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার $= \dfrac{d\vec{P}_2}{dt}$

সমীকরণ (i) হতে পাই,

$$\therefore \quad \frac{d\vec{P}_2}{dt} = -\frac{d\vec{P}_1}{dt}$$

$$\text{বা,} \quad \frac{d\vec{P}_2}{dt} + \frac{d\vec{P}_1}{dt} = 0$$

$$\text{বা,} \quad \frac{d}{dt}(\vec{P}_2 + \vec{P}_1) = 0$$

$$\text{বা,} \quad \vec{P}_2 + \vec{P}_1 = \text{ধ্রুবক} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

এটিই রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র।

রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র থেকে নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র

Newton's third law of motion from the principle of conservation of linear momentum

চিত্র ৪.১১–এ বর্ণিত m_1 ও m_2 ভরের বস্তুদ্বয়ের সংঘর্ষের ক্ষেত্রে রৈখিক ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্রানুযায়ী লেখা যায়,

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

$$\text{বা,} \quad m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{u}_2 = (m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{u}_1)$$ উভয়পক্ষে t দ্বারা ভাগ করে পাই

$$\text{বা,} \quad \frac{m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{u}_2}{t} = -\frac{m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{u}_1}{t}$$

বা, m_2 বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার $= -$ (m_1 বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার)

বা, m_1 বস্তু কর্তৃক m_2 বস্তুর ওপর প্রযুক্ত বল $= -$ (m_2 বস্তু কর্তৃক m_1 বস্তুর ওপর প্রযুক্ত বল)

$\therefore \quad \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad \therefore$ ক্রিয়া $= -$ প্রতিক্রিয়া।

সুতরাং, ক্রিয়া এবং প্রতিক্রিয়া পরস্পরের সমান ও বিপরীতমুখি। **এটিই নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র।**

অনুসন্ধানমূলক কাজ : জানালার কাচে ঢিল মারলে কাচটি টুকরো টুকরো হয়ে ভেঙ্গে যায়; কিন্তু বন্দুকের গুলি দিয়ে ওই অংশে আঘাত করলে একটি ছোট গর্ত হয় কেন ? ব্যাখ্যা কর।

একটি গুলির গতিবেগ ঢিলের গতিবেগ অপেক্ষা অনেক বেশি। ঢিলটির গতিবেগ কম হওয়ায় ঢিলের সঙ্গে কাচের সংঘর্ষের সময় অপেক্ষাকৃত বেশি হয়। ফলে এর গতিশক্তি সমগ্র কাচে ছড়িয়ে পড়ে। এই কারণে কাচটি টুকরো টুকরো হয়ে ভেঙ্গে যায়। পক্ষান্তরে গুলির গতিবেগ অনেক বেশি হওয়ায় কাচের সঙ্গে গুলির সংঘর্ষের সময় অনেক কম হয়। তাই এটির গতিশক্তি শুধুমাত্র সংঘর্ষের জায়গায় সীমাবদ্ধ থাকে। ফলে কাচে গুলির পরিমাপ অনুযায়ী ছোট গর্ত হয়।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.৬

১। 4 kg ভরের একটি পাখি একটি আম গাছে বসে আছে। পাখিটিকে 200 ms⁻¹ বেগে 20 g ভরের একটি বুলেট অনুভূমিকভাবে আঘাত করল। বুলেটটি পাখির মধ্যে রয়ে গেলে পাখিটির অনুভূমিক বেগ কত হবে নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$$

বা, $4 \times 0 + 0.02 \times 200 = 4 \times v_1 + 0.02 \times 0$

বা, $0 + 4 = 4v_1 + 0$

বা, $4v_1 = 4$

$\therefore \quad v_1 = 1\ \text{ms}^{-1}$

এখানে,

পাখির ভর, $m_1 = 4\ \text{kg}$

গুলির ভর, $m_2 = 20\ \text{g} = 0.02\ \text{kg}$

পাখির আদিবেগ, $u_1 = 0$

গুলির আদিবেগ, $u_2 = 200\ \text{ms}^{-1}$

পাখির শেষ বেগ, $v_1 = ?$

গুলির শেষ বেগ, $v_2 = 0$

২। 40 kg ও 60 kg ভরের দুটি বস্তু যথাক্রমে 10 ms^{-1} ও 5 ms^{-1} বেগে পরস্পর বিপরীত দিক থেকে আসার সময় একে অপরকে ধাক্কা দিল। ধাক্কার পর বস্তুদ্বয় একত্রে যুক্ত হয়ে কত বেগে চলবে ?

প্রথম বস্তুর বেগ ধনাত্মক বিবেচনা করলে দ্বিতীয় বস্তুর বেগ ঋণাত্মক।

আমরা জানি, $m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$ ... ... (i)

মনে করি, যুক্ত অবস্থায় বস্তুদ্বয়ের বেগ $= v$

অর্থাৎ $v_1 = v_2 = v$ হলে, $m_1u_1 + m_2u_2 = v(m_1 + m_2)$

$40 \times v + 60v = 40 \times 10 + 60(-5)$

বা, $100v = 400 - 300$

বা, $100v = 100$

$\therefore v = 1 \ ms^{-1}$

এখানে,
$m_1 = 40$ kg
$m_2 = 60$ kg
$u_1 = 10 \ ms^{-1}$
$u_2 = -5 \ ms^{-1}$
$v_1 = v_2 = v$

৩। 1200 kg ভরের একটি গাড়ি 20 ms^{-1} বেগে চলছিল। গাড়িটি চলতে চলতে থেমে থাকা 800 kg ভরের অন্য একটি স্থির গাড়িকে ধাক্কা দিল। ধাক্কার পর গাড়ি দুটি একত্রিত 50 m পথ অগ্রসর হয়ে থেমে গেল। বাধাদানকারী বলের মান কত?

আমরা জানি,

$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v$

বা, $1200 \times 20 + 800 \times 0 = (1200 + 800)v$

বা, $24000 = 2000 v$

$\therefore v = 12 \ ms^{-1}$

আবার $v'^2 = v_0^2 + 2as$

বা, $0 = (12)^2 + 2 \times a \times 50$

বা, $0 = 144 + 100a$

বা, $100a = -144$

$\therefore a = -1{\cdot}44 \ ms^{-2}$

এখানে,
প্রথম বস্তুর ভর, $m_1 = 1200$ kg
দ্বিতীয় বস্তুর ভর, $m_2 = 800$ kg
প্রথম বস্তুর বেগ, $v_1 = 20 \ ms^{-1}$
দ্বিতীয় বস্তুর বেগ, $v_2 = 0$
মিলিত বেগ, $v = ?$
শেষ বেগ, $v' = 0$
দূরত্ব, $s = 50$ m
বাধাদানকারী বল, $F = ?$

$\therefore$ বাধাদানকারী বল, $F = ma = 2000 \times -1{\cdot}44 = -2880$ N

৪। 6 kg ভরের একটি বন্দুক হতে 0·01 kg ভরের একটি গুলি 300 ms^{-1} বেগে বের হয়ে গেল। বন্দুকের পশ্চাৎ বেগ নির্ণয় কর।

মনে করি বন্দুকের পশ্চাৎ বেগ $= V$

ভরবেগের নিত্যতা সূত্র হতে আমরা পাই,

$Mv + mV = 0$ ... ... (i)

বা, $Mv = -mV$

$\therefore$ সমীকরণ (i) হতে পাই,

$$v = \frac{-mV}{M} = \frac{0{\cdot}01 \ kg \times 300 \ ms^{-1}}{6 \ kg} = 0{\cdot}5 \ ms^{-1}$$

এখানে, $M = 6$ kg
$m = 0{\cdot}01$ kg
$v = 300 \ ms^{-1}$
$V = ?$

৫। 8 kg ভরের একটি বন্দুকের নল থেকে 10 g ভরের একটি গুলি বের হলে বন্দুকের প্রতিক্ষেপ বেগ 10 ms^{-1} হয়। গুলিটি লক্ষ্যবস্তুর মধ্যে 0·3 m প্রবেশ করার পর থেমে যায়। গুলিটির ওপর প্রযুক্ত বাধা নির্ণয় কর।

যেহেতু t গুলি ছোড়ার আগে বন্দুক ও গুলি উভয়ই স্থির ছিল ফলে এদের মোট ভরবেগের মান $= 0$

এবার বন্দুক ও গুলির ভর যথাক্রমে m_1 ও m_2 এবং এদের বেগ যথাক্রমে v_1 ও v_2 হলে, ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র অনুযায়ী পাই,

$0 = m_1v_1 + m_2v_2$ ... ... (i)

বা, $0 = 8 \times 10 + \frac{10}{1000} \times v_2 = 80 + 1 \times 10^{-2} v_2$

বা, $v_2 = -\frac{80}{1 \times 10^{-2}} = -8 \times 10^3 \ ms^{-1}$

লক্ষ্যবস্তুর মধ্যে 0·3 m প্রবেশ করার পর গুলির বেগ শূন্য হয়। গুলির মন্দন a হলে,

$v^2 = u^2 - 2as$ সমীকরণ (i) থেকে পাই,

$0 = (8 \times 10^3)^2 - 2a \times 0{\cdot}3$

বা, $a = \frac{(-8 \times 10)^2}{0{\cdot}6} = \frac{64 \times 10^6}{0{\cdot}6} = 6{\cdot}46 \times 10^5 \ ms^{-2}$

এখানে,
$k = -8 \times 10^3 \ ms^{-1}$

$\therefore$ বাধা, $P = ma = 0{\cdot}010 \times 6{\cdot}46 \times 10^5 = 6{\cdot}46 \times 10^2$ N

৬। 2500 kg ভরের একটি গাড়ি এবং 40 kmhr⁻¹ বেগে ধাবমান 1×10^4 kg ওজনের একটি ট্রাকের সাথে সম্মুখ সংঘর্ষের পর ট্রাকের ওপর উঠে গেল। সংঘর্ষের পর গাড়িসহ ট্রাকটি 12 kmhr⁻¹ বেগে অগ্রসর হলে গাড়ির বেগ নির্ণয় কর।

সংঘর্ষটি পূর্ণ অস্থিতিস্থাপক।

সুতরাং, ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রানুসারে,

$$mu + MV = (m + M)v$$

$\therefore$ $2500 \times u + 10000 \times 40 = (2500 + 10,000) \times 12$

বা, $2{\cdot}5 \times 10^3\, u + 400 \times 10^3 = 12{\cdot}5 \times 12 \times 10^3$

বা, $2{\cdot}5\, u + 400 = 12{\cdot}5 \times 12$

বা, $2{\cdot}5\, u = 12{\cdot}5 \times 12 - 400 = -250$

বা, $u = -\dfrac{250}{2{\cdot}5} = -100 \text{ kmhr}^{-1}$

এখানে,

গাড়ির ওজন, $m = 2500$ kg

ট্রাকের ওজন, $M = 1 \times 10^4$ kg $= 10000$ kg

ট্রাকের বেগ, $V = 40$ kmhr⁻¹

গাড়িসহ ট্রাকের বেগ, $v = 12$ kmhr⁻¹

গাড়ির বেগ, $u = ?$

অতএব, সংঘর্ষের আগে গাড়িটি বিপরীত দিক থেকে 100 kmhr⁻¹ বেগে গতিশীল ছিল।

৭। 3 kg ভরের বস্তুর ওপর একটি বল ক্রিয়াশীল আছে। বস্তুটির অবস্থান সমীকরণ $x = 3t - 4t^2 + t^3$, যেখানে x এর মান মিটারে এবং t এর মান সেকেন্ডে। $t = 0$ হতে $t = 4$ সেকেন্ড সময়ে বলটি দিয়ে বস্তুর ওপর কৃত কাজের পরিমাণ নির্ণয় কর। [BUET Admission Test, 2016-17]

আমরা জানি,

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{d^2}{dt^2}(3t - 4t^2 + t^3)$$

$$= m\frac{d}{dt}(3 - 8t + 3t^2) = m(-8 + 6t)$$

আবার, $x = 3t - 4t^2 + t^3$

$\therefore$ $\dfrac{dx}{dt} = (3 - 8t^2 + 3t^2)$

$\therefore$ $dx = (3 - 8t + 3t^2)\, dt$

$$\therefore \quad W = \int_{x_2}^{x_2} F dx = \int_0^4 F(3 - 8t + 3t^2)\, dt$$

$$= m\int_0^4 (-8 + 6t)(3 - 8t + 3t^2)\, dt$$

$$= 3\left[\frac{18t^4}{4} - \frac{72t^3}{3} + \frac{82t^2}{2} - 24t\right]_0^4 = 528 \text{ J}$$

কাজ : দেখাও যে, ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র থেকে নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র প্রতিপাদন করা যায়।

বাহ্যিক বল ক্রিয়া না করলে ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র থেকে আমরা জানি যে কোনো সংস্থার (system) সংঘর্ষের আগে এবং পরে মোট ভরবেগ অপরিবর্তিত থাকে, অর্থাৎ

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$$

একটি বলের প্রাথমিক ভরবেগ,

$$P_1 = mv_0$$

এবং সংঘর্ষের পরে ওই বলের ভরবেগ,

$$P_2 = mv$$

$\therefore$ ভরবেগের পরিবর্তন, $P_1 - P_2 = mv_0 - mv$

অতএব, $m_1(v_1 - u_1) = -m_2(v_2 - u_2)$

এখানে,

m_1 ও m_2 বস্তু দুটির ভর

u_1 ও u_2 এদের প্রাথমিক বেগ

v_1 ও v_2 এদের চূড়ান্ত বেগ

যদি ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়া t সময় ধরে স্থায়ী হয় তবে,

$$m_1 \frac{(v_1 - u_1)}{t} = - m_2 \frac{(v_2 - u_2)}{t}$$

$$\therefore \quad m_1 a_1 = - m_2 a_2$$

বা, $F_1 = - F_2$

অর্থাৎ বস্তু দুটির পারস্পরিক ক্রিয়ার ক্ষেত্রে ক্রিয়া এবং প্রতিক্রিয়া পরস্পরের সমান এবং বিপরীত। এটিই নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র।

৪.১১ নিউটনের গতির তৃতীয় সূত্র ও ভরবেগের নিত্যতা
Newton's third law of motion and conservation of momentum

নিউটনের গতির তৃতীয় সূত্র ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া ছাড়া আর কিছুই নয়। একটি বস্তু যখন অন্য একটি বস্তুর ওপর বল প্রয়োগ করে তখন দ্বিতীয় বস্তুটিও প্রথম বস্তুর ওপর একটি সমান ও বিপরীতমুখি বল প্রয়োগ করে। প্রথম বস্তু দ্বিতীয় বস্তুর ওপর যে বল প্রয়োগ করে তাকে যদি ক্রিয়া (Action) ধরা হয়, তবে দ্বিতীয় বস্তু কর্তৃক প্রথম বস্তুটির ওপর প্রযুক্ত বলকে প্রতিক্রিয়া (Reaction) বলা হয়।

দুটি বস্তু স্থির থাকুক বা গতিশীল হোক একে অপরকে স্পর্শ করুক বা পরস্পর থেকে দূরে থাকুক নিউটনের তৃতীয় সূত্র সকল ক্ষেত্রে প্রযোজ্য হবে।

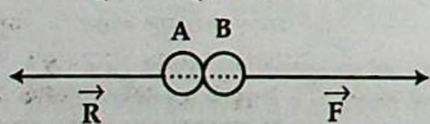
ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া সম্পর্ক কার্যকারণ সম্পর্ক নয়। ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া একে অপরের সরণে বা পরে ক্রিয়াশীল হয় না। বল দুটি সব সময় একসঙ্গে ক্রিয়া করে। ক্রিয়া যতক্ষণে স্থায়ী হয়, প্রতিক্রিয়াও ঠিক ততক্ষণ স্থায়ী হয়। ক্রিয়া বন্ধ হলে প্রতিক্রিয়াও বন্ধ হয়ে যায়।

প্রকৃতিতে বল সকল সময় জোড়ায় জোড়ায় ক্রিয়া করে। প্রকৃতিতে একক বিচ্ছিন্ন বল বলে কিছু থাকতে পারে না। আমরা যখন বলি, একটি বল ক্রিয়া করছে তখন আসলে দুটি ক্রিয়াশীল বলের মধ্যে একটির কথা বলি। এই দুটি বল একে অপরের পরিপূরক।

উপরোক্ত আলোচনা হতে নিউটনের গতির তৃতীয় সূত্র ও ভরবেগের নিত্যতা সূত্র সম্বন্ধে একটি ধারণা পাওয়া যায়। সূত্রটি হলো :

সূত্র : প্রত্যেক ক্রিয়ার একটি সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া রয়েছে। অর্থাৎ প্রত্যেক ক্রিয়ামূলক বলের একটি সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়ামূলক বল রয়েছে। এই সূত্রকে বস্তুসমূহের মধ্যে বলের পারস্পরিক ক্রিয়ার সূত্র বলা যায়। কাজেই ক্রিয়ামূলক বল $\vec{F}$ ও প্রতিক্রিয়ামূলক বল $\vec{R}$ হলে, $\vec{F} = - \vec{R}$। **অপরদিকে ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া ভিন্ন অন্য কোনো বল ক্রিয়া না করলে রৈখিক ভরবেগের কোনো পরিবর্তন হয় না।**

ব্যাখ্যা : নিউটনের তৃতীয় সূত্রানুসারে যদি একটি বস্তু A অপর একটি বস্তু B-এর ওপর বল প্রয়োগ করে, তা হলে B বস্তুও A বস্তুর ওপর সমান ও বিপরীতমুখি বল প্রয়োগ করবে [চিত্র ৪.১৭]।



চিত্র ৪.১৭

A-এর দ্বারা প্রযুক্ত বল হলো ক্রিয়া এবং B-এর দ্বারা প্রযুক্ত বল হলো প্রতিক্রিয়া। কাজেই ক্রিয়া $\vec{F}$ ও প্রতিক্রিয়া $\vec{R}$ হলে, $\vec{F} = -\vec{R}$

ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া দুটি ভিন্ন বস্তুর ওপর প্রযুক্ত হয়। ক্রিয়া না থাকলে প্রতিক্রিয়াও থাকে না। ক্রিয়া বা প্রতিক্রিয়া বলের কার্যকাল t হলে $\vec{F} \times t = -\vec{R} \times t \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.15)$

অর্থাৎ, ক্রিয়াজনিত বলের ঘাত = —প্রতিক্রিয়াজনিত বলের ঘাত।

এটি স্থির বা গতিশীল যে-কোনো বস্তুর ক্ষেত্রে সমভাবে প্রযোজ্য।

নিচে কয়েকটি উদাহরণের সাহায্যে নিউটনের গতির তৃতীয় সূত্র এবং ভরবেগের নিত্যতা ব্যাখ্যা করা হলো।

উদাহরণ :

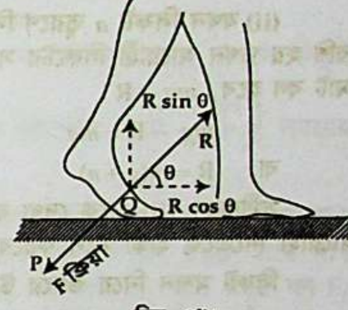
১। **টেবিলের উপর বই থাকা :** একটি টেবিলের ওপর বই রাখা হলে বই-এর ওজন টেবিলের উপর লম্বভাবে চাপ প্রয়োগ করবে। এটিই ক্রিয়া। নিউটনের গতির তৃতীয় সূত্রানুসারে টেবিল বই-এর ওপর ওপরের দিকে সমপরিমাণ বল প্রয়োগ করবে। এটি হলো প্রতিক্রিয়া। ক্রিয়া এবং প্রতিক্রিয়া সমান ও বিপরীত হওয়ায় বইটি টেবিলের ওপর সাম্যাবস্থায় থাকে।

২। **বন্দুক হতে গুলি ছোড়া :** যখন বন্দুক হতে শিকারী গুলি ছোড়ে তখন সে পেছন দিকে একটা ধাক্কা অনুভব করে। প্রাথমিক অবস্থায় বন্দুক ও গুলি উভয়েরই বেগ শূন্য থাকে। ফলে তাদের মিলিত ভরবেগও শূন্য থাকে। গুলি

ছোড়া হলে তা সামনের দিকে একটা ভরবেগ প্রাপ্ত হয়। নিউটনের তৃতীয় সূত্রানুসারে বন্দুকটি গুলির সমান ও বিপরীত ভরবেগ প্রাপ্ত হবে অর্থাৎ বন্দুকটি সমান ভরবেগে পেছনের দিকে যাবে এবং শিকারী পেছন দিকে ধাক্কা অনুভব করবে।

৩। নৌকা থেকে লাফ দেয়া : যখন আরোহী নৌকা হতে নদীর পাড়ে লাফিয়ে পড়ে, তখন নৌকাটিকে পেছনে ছুটে যেতে দেখা যায়। আরোহী নৌকার ওপর যে বল প্রয়োগ করে তাতে নৌকাটি পেছনে যায়। নিউটনের তৃতীয় সূত্রানুসারে নৌকাও আরোহীর ওপর সমান ও বিপরীতমুখি বল প্রয়োগ করে। ফলে আরোহী তীরে পৌঁছায়।

৪। পায়ে হাঁটা : আমরা যখন পায়ে হেঁটে চলি তখন সামনের পা মাটির উপর লম্বভাবে নিচের দিকে একটা বল প্রয়োগ করে। এর নাম ক্রিয়া। মাটিও সামনের পায়ের তলার ওপর সমান ও বিপরীতমুখি বল প্রয়োগ করে। এর নাম প্রতিক্রিয়া। ক্রিয়া এবং প্রতিক্রিয়া সমান এবং বিপরীত হওয়ায় সামনের পা স্থির থাকে।



চিত্র ৪.১৮

কিন্তু পেছনের পা মাটির উপর Q বিন্দুতে তির্যকভাবে $\vec{F}$ পরিমাণ বল QP বরাবর ক্রিয়া করে [চিত্র ৪.১৮]। এই বল অনুভূমিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। নিউটনের তৃতীয় সূত্রানুসারে মাটি পায়ের তলার উপর সমান ও বিপরীতমুখি প্রতিক্রিয়া বল প্রয়োগ করে।

মনে করি প্রতিক্রিয়া বল $\vec{R}$। ফলে $\vec{R} = -\vec{F}$। প্রতিক্রিয়া বলের অনুভূমিক অংশক $R\cos\theta$ আমাদেরকে সামনের দিকে এগিয়ে নেয় এবং উল্লম্ব অংশক $R\sin\theta$ শরীরের ওজন বহন করতে সাহায্য করে।

কিন্তু পিচ্ছিল পথে চলা শক্ত হয়। কারণ পথ পিচ্ছিল হলে মাটির ওপর যথেষ্ট বল প্রয়োগ করা পায়ের পক্ষে সম্ভব হয় না। ফলে পায়ের ওপর মাটির প্রতিক্রিয়া বল এবং সাথে সাথে প্রতিক্রিয়া বলের অনুভূমিক অংশক কম হয়। এজন্যে পিচ্ছিল পথে চলা শক্ত হয়। মার্বেলের তৈরি মেঝে, বালুকাময় রাস্তায় হাঁটতে একই সমস্যা।

কাজ : গাড়ির টায়ারের বাইরের দিক খাঁজ যুক্ত করে তৈরি করা হয় কেন ?

গাড়ির টায়ারের বাইরের দিকে খাঁজযুক্ত করে তৈরি করা হয়। কারণ এতে গাড়িটি এর সঠিক গতির জন্য প্রয়োজনীয় ঘর্ষণ বল লাভ করে। এই খাঁজের ফলে টায়ার রাস্তাকে যথাযথভাবে আঁকড়ে ধরতে সমর্থ হয়। এভাবে আঁকড়ে ধরতে না পারলে গাড়িটি স্থিতিশীল অবস্থা হতে গতিশীল হতে পারত না। আবার গতিশীল অবস্থায় ব্রেক করা হলে টায়ার পিছলে যেত। তাই গাড়িটিকে যথাযথভাবে চালনা করার জন্য টায়ারের বাইরের দিক খাঁজযুক্ত করে তৈরি করা হয়।

কাজ : একটি বায়ু ভর্তি বেলুন খোলা অবস্থায় ছেড়ে দিলে খোলা মুখের বিপরীত দিকে ছুটতে দেখা যায় কেন ?

বেলুন সংকুচিত করলে বায়ুর ওপর একটি বল প্রয়োগ করে। ফলে খোলা মুখ দিয়ে বায়ু সজোরে বেরিয়ে আসে। নিউটনের তৃতীয় সূত্রানুসারে এ সময় বায়ুও বেলুনের ওপর একটি বিপরীত বল প্রয়োগ করে। তাই বায়ু ভর্তি বেলুন মুখ খোলা অবস্থায় ছেড়ে দিলে খোলা মুখের বিপরীত দিকে ছুটতে দেখা যায়।

৫। লিফটে প্রতিক্রিয়া (Reaction in a lift) : লিফটে ওঠানামা করার সময় আমরা ওজনের পরিবর্তন অনুভব করি। স্থিরাবস্থা থেকে ত্বরণ নিয়ে লিফট যখন ওপরে উঠতে থাকে তখন একজন আরোহী নিজেকে অপেক্ষাকৃত ভারী অনুভব করে। আবার, লিফট হঠাৎ নিচে নামতে শুরু করলে আরোহীর তখন বিপরীত অনুভূতি হয় অর্থাৎ আরোহী হাল্কা অনুভব করে। লিফট যখন স্থির থাকে বা সমবেগে চলে অর্থাৎ ত্বরণ না থাকে তখন বস্তুর আপাত ওজনের কোনো পরিবর্তন হয় না। চলন্ত লিফটে আরোহীর ওজনের পরিবর্তন নিউটনের গতিসূত্রের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা যায়।


চিত্র ৪.১৯

(i) লিফট যখন a ত্বরণে ওপরে উঠে : মনে করি m ভরের একজন আরোহী লিফটের মেঝেতে দাঁড়িয়ে আছে [চিত্র ৪.১৯]। ওই আরোহী লিফটের মেঝেতে mg পরিমাণ বল প্রয়োগ করে। লিফটের মেঝে আরোহীর ওপর উর্ধ্বমুখি প্রতিক্রিয়া বল R ক্রিয়া করে। এই প্রতিক্রিয়া বল R আরোহীর ওজন mg অপেক্ষা বেশি হলে আরোহী লিফটের সঙ্গে a ত্বরণে ওপরে উঠবে।

আরোহীর ওপর মোট উর্ধ্বমুখি বল $= R - mg$

এখন, নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র অনুযায়ী আমরা পাই,

$$R - mg = ma$$

বা, $R = mg + ma = m(g + a)$ ... ... (i)

মেঝের এই প্রতিক্রিয়াই বস্তু বা ব্যক্তির কার্যকর ওজন। সুতরাং, ওই আরোহীর ওজন,

$$W' = m(g + a)$$

সমীকরণ (i) থেকে দেখা যাচ্ছে যে প্রতিক্রিয়া বল আরোহীর ওজন (mg) অপেক্ষা বেশি হওয়ায় আরোহী নিজেকে তুলনামূলকভাবে ভারী মনে করবে।

লিফট মন্দন নিয়ে নামতে থাকলে আরোহীর ওজনের একইরকম বৃদ্ধি ঘটে।

(ii) যখন লিফট a ত্বরণে নিচে নামে : আরোহীর ওজন (mg) যখন লিফট দ্বারা প্রদত্ত প্রতিক্রিয়া বল R-এর চেয়ে বেশি হয় তখন আরোহী লিফটের সঙ্গে লিফটের ত্বরণ a সহ নিচে নামে [চিত্র ৪.১৮]। এক্ষেত্রে আরোহীর ওপর প্রযুক্ত মোট বল হবে, $mg - R$।

$$mg - R = ma$$

বা, $R = m(g + a)$ ... ... (ii)

সমীকরণ (ii) থেকে দেখা যায় যে আরোহীর ওপর লিফটের প্রতিক্রিয়া R আরোহীর ওজনের তুলনায় কম হওয়ায় আরোহী নিজেকে হাল্কা মনে করবে।

লিফট মন্দন নিয়ে ওপরে উঠলেও আরোহীর একই অনুভূতি হবে।

(iii) লিফট যখন স্থির থাকে বা সমবেগে ওঠানামা করে : লিফট যখন স্থির থাকে অথবা সমবেগে চলাচল করে তখন এর ত্বরণ $a = 0$; সুতরাং বস্তু বা আরোহীর ওপর প্রতিক্রিয়া বল $R = mg$। অর্থাৎ প্রতিক্রিয়া বল আরোহীর ওজনের সমান হয়। সুতরাং এক্ষেত্রে আরোহী বা বস্তুর ওজনের কোনো আপাত পরিবর্তন ঘটবে না।

(iv) লিফট যখন অবাধে নিচে নামে : লিফট যখন অবাধে নিচে নামে তখন এর ত্বরণ $a = g$। সুতরাং প্রতিক্রিয়া $R = 0$। অর্থাৎ এক্ষেত্রে লিফটের মেঝে আরোহীর ওপর কোনো ঊর্ধ্বমুখি বল প্রয়োগ করবে না। আরোহীও লিফটের মেঝেতে নিচের দিকে কোনো বল প্রয়োগ করবে না। সুতরাং, লিফটের মধ্যে আরোহী নিজেকে সম্পূর্ণ ভারহীন (Weightless) মনে করবে।

(v) লিফট যখন অভিকর্ষজ ত্বরণ অপেক্ষা বেশি ত্বরণে নিচে নামে : ধরা যাক, লিফট কোনোভাবে অভিকর্ষজ ত্বরণ g অপেক্ষা বেশি ত্বরণে (অর্থাৎ $a > g$) নিচের দিকে গতিশীল। এই অবস্থায় লিফটের গতি শুরু হওয়ার সাথে সাথে আরোহী বা বস্তুর সাথে লিফটের মেঝের সংস্পর্শ বিচ্ছিন্ন হয়। ফলে আরোহীর ঊর্ধ্বমুখি গতি থাকবে যতক্ষণ পর্যন্ত না আরোহীর মাথা লিফটের ছাদ স্পর্শ করে। তখন লিফটের ছাদ আরোহীর ওপর নিচের দিকে প্রতিক্রিয়া বল R প্রয়োগ করে। অতএব, নিউটনের দ্বিতীয় গতি সূত্রানুসারে লেখা যায়,

$$R + mg = ma$$

বা, $R = m(a + g)$ ... ... (iii)

এখন আরোহী ছাদের সংস্পর্শে থেকে লিফটের সাথে নিচে নামতে থাকে। নিউটনের তৃতীয় গতি সূত্রানাসারে আরোহীও লিফটের ছাদের গায়ে ওপরের দিকে $m(a - g)$ বল প্রয়োগ করে। সুতরাং, এক্ষেত্রে আরোহীর ওজন ওপরের দিকে ক্রিয়া করে। এই ঘটনাকে অতিভারহীনতা (super weightlessness) বলা হয়।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.৭

১। একটি লিফটের ছাদে আটকানো একটি স্প্রিং তুলার হুক থেকে 3·0 kg ভর ঝুলছে। লিফটটি যখন (i) 0·25 ms⁻² ত্বরণে ওপরে উঠছে, (ii) 0·2 ms⁻² ত্বরণে নিচে নামছে, (iii) 0·1 ms⁻¹ সমবেগে উঠছে তখন স্প্রিং তুলার পাঠগুলো কী কী হবে ?

(i) এখানে লিফটের ঊর্ধ্বমুখি ত্বরণ, $a = 0{\cdot}25\ ms^{-2}$

∴ স্প্রিং তুলাতে কার্যকরী টান, $T = m(g + a) = 3{\cdot}0\,(9{\cdot}8 + 0{\cdot}25)$

$= 3 \times 10{\cdot}05 = 30{\cdot}15\ N$

∴ স্প্রিং তুলাতে পাঠ হবে, $\frac{T}{g} = \frac{30{\cdot}15}{9{\cdot}8} = 3{\cdot}077\ kg$

(ii) লিফটের নিম্নমুখি ত্বরণ, $a = 0{\cdot}2\ ms^{-2}$

∴ স্প্রিং তুলাতে কার্যকরী টান, $T = m(g - a) = 3{\cdot}0\,(9{\cdot}8 - 0{\cdot}2)$

$= 28{\cdot}8\ N$

∴ স্প্রিং তুলাতে পাঠ হবে, $\frac{T}{g} = \frac{28{\cdot}8}{9{\cdot}8} = 2{\cdot}939\ kg$

(iii) লিফটটি 0·1 ms^{-1} সমবেগে নিচে নামলে এর ত্বরণ হয় শূন্য। এক্ষেত্রে,

∴ স্প্রিং তুলাতে টান, $T = mg = 3{\cdot}0 \times 9{\cdot}8 = 29{\cdot}4$ N

∴ স্প্রিং তুলাতে পাঠ হবে, $\frac{T}{g} = \frac{3{\cdot}0 \times 9{\cdot}8}{9{\cdot}8} = 3{\cdot}0$ kg

৪·১২ ভরবেগের নিত্যতার গাণিতিক ব্যাখ্যা
Mathematical explanation of conservation of momentum

নিউটনের গতির প্রথম সূত্র থেকে আমরা জানি যে, কোনো বস্তুর ওপর প্রযুক্ত বল যদি শূন্য হয়, তাহলে বস্তুটি সরল পথে ধ্রুব বেগে চলতে থাকে। সময়ের সাপেক্ষে বেগ $\vec{v}$ যদি ধ্রুব হয়, তাহলে ভরবেগও $\left(\vec{P} = m\vec{v}\right)$ সময়ের সাপেক্ষে ধ্রুব থাকে।

সূত্র : যখন কোনো ব্যবস্থার উপর প্রযুক্ত বাহ্যিক বল শূন্য হয়, তখন ব্যবস্থাটির মোট ভরবেগ সংরক্ষিত থাকে।

মনে করি m_1 ও m_2 ভরের দুটি বস্তু আছে। এই বস্তু সমষ্টির ওপর বাহ্যিক কোনো বল প্রযুক্ত হচ্ছে না। অতএব বস্তু দুটি কেবলমাত্র পারস্পরিক ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়া বলের প্রভাবে চলছে। যদি m_1 এর উপর m_2 দ্বারা প্রযুক্ত বল F_1 হয় তাহলে নিউটনের তৃতীয় সূত্র অনুযায়ী m_2 এর উপর m_1 এর সমান ও বিপরীতমুখি বল F_2 প্রয়োগ করবে অর্থাৎ

$$F_1 = -F_2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.16)$$

ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া বল একই সময় ধরে প্রযুক্ত হয়।

মনে করি m_1 ও m_2 ভরের বস্তু দুটির ভরবেগ যথাক্রমে P_1 এবং P_2। অতএব নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী

$F_1 = \frac{dP_1}{dt}$ এবং $F_2 = \frac{dP_2}{dt}$

∴ সমীকরণ (4.16) থেকে পাই,

$$\frac{dP_1}{dt} = -\frac{dP_2}{dt}$$

বা, $\frac{dP_1}{dt} + \frac{dP_2}{dt} = 0$

বা, $\frac{d}{dt}(P_1 + P_2) = 0 \qquad \therefore\ P_1 + P_2 =$ ধ্রুবক বা $P =$ ধ্রুবক

অর্থাৎ বাহ্যিক বল প্রযুক্ত না হলে ভরবেগ ধ্রুব থাকে। এটাই ভরবেগের সংরক্ষণ নীতি।

উপরের আলোচনা হতে আমরা যে সকল বিষয় জানতে পেরেছি তা হলো :

(১) নীতিটি প্রতিপাদন করার সময় ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া বলের প্রকৃতি নিয়ে আলোচনা করা হয় নি।

(২) এই নীতি যেকোনো ধরনের পারস্পরিক ক্রিয়ার ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

(৩) ভরবেগ একটি ভেক্টর রাশি। অর্থাৎ এই নীতি অনুযায়ী বিচ্ছিন্ন বস্তু সমষ্টির ভরবেগের পরিবর্তন কেবলমাত্র বাইরে থেকে বল প্রয়োগ দ্বারাই করা যায়।

(৪) এ নীতির সাহায্যে একাধিক বস্তুর মধ্যে পারস্পরিক ক্রিয়া সম্পর্কে জটিল সমস্যার সমাধান করা যায়।

হাতে-কলমে কাজ: তুমি রিকশার উপর বসে রিকশার চালককে রিকশা চালাতে বলো। রিকশা চলতে থাকবে। এখন তোমার রিকশা সমতল রাস্তা থেকে যখন উঁচু রাস্তার দিকে চলবে তখন রিকশার গতি কমে যাবে। এবার তুমি গদি থেকে ওঠে দাঁড়িয়ে জোরে সামনের দিকে শরীরকে এগিয়ে নিয়ে রিকশার গদিতে বল প্রয়োগ করে বস। রিকশা সামনের দিকে আগের চেয়ে বেশি জোরে চলবে। কেন—ব্যাখ্যা কর।

উঁচু রাস্তার কারণে রিকশার বেগ কমে যায়, ফলে ভরবেগও কমে যায়। পুনরায় রিকশায় বল প্রয়োগ করার কারণে ভরবেগ সৃষ্টি হয়। ফলে রিকশা সামনে এগিয়ে যাবে। কিন্তু মোট ভরবেগ সংরক্ষিত থাকবে।

৪·১৩ ঘূর্ণন গতি
Rotational motion

সময়ের পরিবর্তনের সাথে যখন কোনো বস্তুর অবস্থানের পরিবর্তন হয় তখন এর অবস্থাকে গতি বলে। যেমন গাড়ি, মানুষ ইত্যাদি। কোনো গতিশীল বস্তু যদি সরলরেখা বরাবর চলে তবে বস্তুটির গতিকে চলন গতি বলে। দালানের ছাদ থেকে কোনো বস্তু ছেড়ে দিলে অথবা সোজা পথে চলা কোনো গাড়ির গতি চলন গতি।

আবার কোনো বস্তু যদি একটি নির্দিষ্ট বিন্দু বা অক্ষের চতুর্দিকে বৃত্তাকার পথে গতিশীল থাকে তবে ওই গতিকে ঘূর্ণন গতি বলে। যেমন বৈদ্যুতিক পাখার গতি। যে অক্ষের চতুর্দিকে বস্তুটি ঘূর্ণায়মান হয় তাকে ঘূর্ণন অক্ষ (axis of rotation) বলে।

ঘূর্ণনের বৈশিষ্ট্যসমূহ : ঘূর্ণন গতির নিম্নোক্ত বৈশিষ্ট্য রয়েছে—

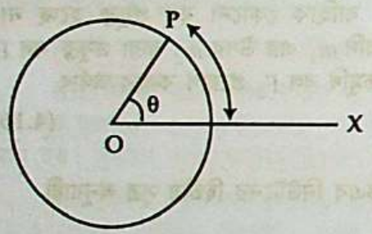
(i) কোনো বস্তুর ঘূর্ণন হলে তার প্রতিটি কণা কোনো নির্দিষ্ট সময়ের অবকাশে একই কোণে ঘুরে।

(ii) ঘূর্ণন অক্ষ সবসময় স্থির থাকে।

৪.১৪ ঘূর্ণন গতি সংক্রান্ত রাশিমালা
Terms related to rotational motion

৪.১৪.১ কৌণিক সরণ
Angular displacement

মনে করি, এই বইয়ের পাতার মতো যেকোনো একটি সমতলের উপর একটি কণা কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু O এর চারদিকে বৃত্ত পথে ঘুরছে। এখানে ঘূর্ণাক্ষ বৃত্তের কেন্দ্র O বিন্দু দিয়ে যাবে এবং বৃত্তের তলের সঙ্গে লম্ব হবে [চিত্র ৪.২০]। যেকোনো মুহূর্তে কণাটির অবস্থান জানার জন্য ওই সমতলে একটি স্থির সরলরেখা OX কল্পনা করতে হয়। OX-কে নির্দেশ রেখা (reference line) বলে।



চিত্র ৪.২০

কণাটি নির্দেশ রেখা অতিক্রম করার মুহূর্ত থেকে সময় গণনা শুরু করলে মনে করি, t সময় পর কণাটির অবস্থান হলো P। স্পষ্টত OP ব্যাসার্ধ OX রেখার সঙ্গে যে θ কোণ উৎপন্ন করে তা জানলেই কণাটির অবস্থান সম্পূর্ণরূপে জানা যায়। θ কোণকে কণার কৌণিক সরণ (angular displacement) বলে। OP ব্যাসার্ধ ভেক্টর।

সংজ্ঞা : বৃত্তীয় গতিতে সচল কণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর কোনো নির্দিষ্ট সময়ের অবকাশে যে কোণে সরে যায়, তাকে ওই সময়ের অবকাশে কণাটির কৌণিক সরণ বলে।

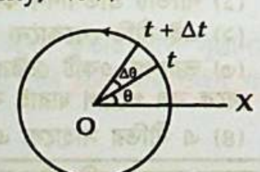
রেডিয়ান এককে প্রকাশ করলে কৌণিক সরণ θ এর সঙ্গে সংশ্লিষ্ট বৃত্তের চাপ s-এর সম্পর্ক খুবই সরল হয়। বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে লেখা যায়,

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.17)$$

৪.১৪.২ কৌণিক বেগ
Angular velocity

রৈখিক গতির মতো কৌণিক গতিও সম বা অসম (ত্বরিত) হতে পারে। কৌণিক গতি অসম হলে কৌণিক সরণ এবং অতিক্রান্ত সময়ের অনুপাতকে কণার গড় কৌণিক বেগ (average angular velocity) বলে। একে ω অক্ষর দিয়ে প্রকাশ করা হয়। কৌণিক বেগ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে। কৌণিক সরণের মতো একই রীতি এখানে অনুসরণ করা হয়।

অতি ক্ষুদ্র সময়ের অবকাশ Δt তে কণার কৌণিক সরণ $\Delta\theta$ হলে [চিত্র ৪.২২] ওই সময়ের অবকাশে কণার গড় কৌণিক বেগ হবে



চিত্র ৪.২১

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.18)$$

কোনো নির্দিষ্ট মুহূর্তের কৌণিক বেগ জানতে হলে সময়ের অবকাশকে ক্ষুদ্র থেকে ক্ষুদ্রতর করতে হয়। সময়ের অবকাশের সীমাস্থ মান শূন্য হলে ওই অবকাশে গড় কৌণিক বেগ তাৎক্ষণিক কৌণিক বেগের (instantaneous angular velocity) সমান হয়। সুতরাং, অতি ক্ষুদ্র সময়ে কৌণিক সরণের পরিবর্তনের তাৎক্ষণিক হারকে তাৎক্ষণিক কৌণিক বেগ (ω) বলে।

অর্থাৎ $\omega = \underset{\Delta t \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$

সাধারণত কৌণিক বেগ বলতে তাৎক্ষণিক কৌণিক বেগ বোঝায়।

কৌণিক বেগের মান স্থির থাকলে বৃত্তীয় গতিকে সমবৃত্তীয় গতি (uniform circular motion) বলে। সমবৃত্তীয় গতির ক্ষেত্রে t সময়ে কৌণিক সরণ θ হলে কৌণিক বেগের মান হয়

$$\omega = \frac{\theta}{t} \text{ অথবা } \theta = \omega t \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.19)$$

এই সমীকরণটি সমরৈখিক গতির সমীকরণ $s = vt$-এর অনুরূপ।

একক : সাধারণত কৌণিক বেগকে রেডিয়ান/সেকেন্ড (radian/sec বা সংক্ষেপে rad/s) এককে প্রকাশ করা হয়। যন্ত্রবিদ্যা বা ইঞ্জিনিয়ারিং-এ আরেকটি একক প্রচলিত আছে। এর নাম আবর্তন/মিনিট বা প্রতি মিনিটে আবর্তন সংখ্যা (revolution per minute, সংক্ষেপে rpm)।

কৌণিক বেগের মাত্রা : $[\omega] = \left[\dfrac{\text{রৈখিক বেগ}}{\text{ব্যাসার্ধ}}\right] = \dfrac{[LT^{-1}]}{[L]} = [T^{-1}]$

একবার পূর্ণ আবর্তন করতে কণার যে সময় লাগে তাকে পর্যায়কাল (time period) বলে। একটি পূর্ণ আবর্তন বলতে 2π রেডিয়ান কৌণিক সরণ বোঝায়। সুতরাং পর্যায়কাল T হলে (4.19) সমীকরণ অনুযায়ী

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad (4.20)$$

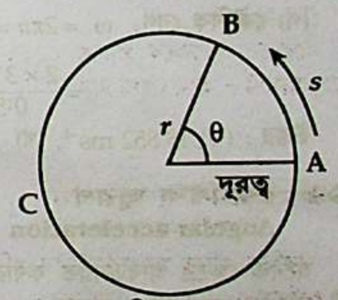
$\dfrac{1}{T}$ একক সময়ে পূর্ণ আবর্তনের সংখ্যা বোঝায়। একে কম্পাঙ্ক (frequency) বলে। কম্পাঙ্ককে 'n' দিয়ে সূচিত করলে আমরা পাই, $\omega = 2\pi n$। আবার সময় t এবং ঘূর্ণন সংখ্যা N হলে $\omega = \dfrac{2\pi N}{t}$

$$\therefore \quad \omega = 2\pi n = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi N}{t} \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad (4.21)$$

৪.১৫ কৌণিক বেগ ও রৈখিক বেগের মধ্যে সম্পর্ক
Relation between angular velocity and linear velocity

আমরা জানি, রৈখিক পথে নির্দিষ্ট দিকে কোনো একটি বস্তুর প্রতি সেকেন্ডের রৈখিক সরণই রৈখিক বেগ এবং বৃত্তাকার পথে কোনো একটি বস্তুর প্রতি সেকেন্ডের কৌণিক সরণই কৌণিক বেগ। রৈখিক বেগকে v_0 অথবা v এবং কৌণিক বেগকে ω দ্বারা প্রকাশ করা হয়। রৈখিক বেগ এবং কৌণিক বেগের সম্পর্কজনিত সমীকরণটি এখন প্রতিপাদন করা হবে।

মনে করি একটি বস্তুকণা r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের পরিধি বরাবর ω সমকৌণিক বেগে ঘুরছে [চিত্র ৪.২২]। যদি T সেকেন্ডে কণাটি বৃত্তের সম্পূর্ণ পরিধি একবার ঘুরে আসে তবে কৌণিক বেগের সংজ্ঞানুসারে,



চিত্র ৪.২২

$$\omega = \frac{\text{কৌণিক দূরত্ব}}{\text{সময়}} = \frac{2\pi}{T}$$

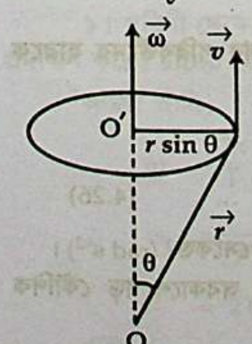
$$\text{বা, } T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad (4.22)$$

আবার কৌণিক বেগ ω, কৌণিক সরণ θ হলে ঘূর্ণন সংখ্যা $N = \dfrac{\theta}{2\pi}$

এখন যদি বৃত্তাকার পথে না ঘুরে কণাটি v বেগে একই সময়ে সরলরেখায় বৃত্তের পরিধির সমান পথ T সময়ে অতিক্রম করে, তবে

$$v = \frac{\text{বৃত্তের পরিধি}}{\text{পরিধির সমান দূরত্ব অতিক্রম করতে সময়}} = \frac{2\pi r}{T}$$

$$\text{বা, } T = \frac{2\pi r}{v} \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad (4.23)$$



চিত্র ৪.২৩

সমীকরণ (4.22) এবং সমীকরণ (4.23) হতে আমরা পাই, $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi r}{v}$

$$\text{বা, } \frac{1}{\omega} = \frac{r}{v}$$

$$\text{বা, } v = \omega r \qquad \dots \qquad \dots \qquad (4.24)$$

অর্থাৎ, রৈখিক বেগ = কৌণিক বেগ × বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

সমীকরণ (4.24) এর ভেক্টর রূপ হলো : $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$; এই তিনটি ভেক্টরের দিক চিত্র ৪.২৩-এ দেখানো হলো।

উল্লেখ থাকে যে, বৃত্তীয় গতি যদি অসম হয়, তবুও যে কোনো বিন্দুতে $v = \omega r$। বস্তুটি সমকৌণিক বেগে চললে ω = ধ্রুবক। অতএব $v \propto r$ অর্থাৎ রৈখিক বেগ ঘূর্ণন অক্ষ হতে দূরত্বের সমানুপাতিক।

উদাহরণ : ধান মাড়াইয়ের ক্ষেত্রে দূরবর্তী গরুকে সবচেয়ে বেশি বেগে হাঁটতে হয়।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : মাঝে মাঝে বোলার কর্তৃক নিক্ষিপ্ত ক্রিকেট বল নিক্ষেপ বেগের চেয়ে বেশি বেগে ভূমি থেকে প্রতিফলিত হয়—ব্যাখ্যা কর।

ভূমি স্পর্শ করার সময় যদি ক্রিকেট বলটির স্পিন (spin) বা ঘূর্ণন থাকে তবে বলের স্পিন বা ঘূর্ণন গতিশক্তি ওর রৈখিক গতিশক্তির সঙ্গে যুক্ত হয়। ফলে সম্মিলিত গতিশক্তির জন্য ক্রিকেট বলটি নিক্ষেপ বেগ অপেক্ষা বেশি বেগে ভূমি থেকে প্রতিফলিত হয়।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.৮

১। একটি কণা 1·5 m ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে প্রতি মিনিটে 120 বার আবর্তন করে। এর (ক) রৈখিক বেগ, (খ) পর্যায়কাল এবং (গ) কৌণিক বেগ কত ? [রা. বো. ২০০১]

আমরা জানি,

(ক) রৈখিক বেগ, $v = \omega r$

$\therefore \; v = 2\pi n r$

$= 2 \times 3{\cdot}142 \times 2 \times 1{\cdot}5$

$= 18{\cdot}852 \text{ ms}^{-1}$

এখানে,

বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ, $r = 1{\cdot}5$ m

আবর্তন বা কম্পন সংখ্যা, $n = \dfrac{120}{1\text{ min}} = \dfrac{120}{60\text{ s}} = 2\text{ s}^{-1} = 2\text{ Hz}$

(খ) পর্যায়কাল, $T = \dfrac{t}{N} = \dfrac{60}{120} = 0{\cdot}5$ s $\quad \left[\because T = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\frac{N}{t}} = \dfrac{t}{N}\right]$

বা, $T = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{2} = 0{\cdot}5$ s

(গ) কৌণিক বেগ, $\omega = 2\pi n = \dfrac{2\pi}{T}$

$= \dfrac{2 \times 3{\cdot}142}{0{\cdot}5} = 12{\cdot}568 \text{ rad s}^{-1}$

উত্তর : (ক) $18{\cdot}852$ ms^{-1}, (খ) $0{\cdot}5$ s, (গ) $12{\cdot}568$ rad s^{-1}

৪.১৬ কৌণিক ত্বরণ
Angular acceleration

অনেক ক্ষেত্রে আবর্তনরত কণার কৌণিক বেগ বাড়ে বা কমে। কৌণিক বেগ পরিবর্তিত হলে বোঝা যায় যে কণাটি কৌণিক ত্বরণ নিয়ে চলছে।

আবর্তনরত কণার গড় **কৌণিক ত্বরণ** (average angular acceleration) বলতে কোনো নির্দিষ্ট সময়ের অবকাশে সময়ের সঙ্গে কৌণিক বেগের পরিবর্তনের হার বোঝায়।

অতএব, অতি ক্ষুদ্র সময়ের অবকাশ Δt-তে কৌণিক বেগের পরিবর্তন $\Delta\omega$ হলে ঐ অবকাশে গড় কৌণিক ত্বরণ হবে, $\vec{\alpha} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ ... ... (4.25)

সুতরাং কৌণিক ত্বরণের নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেওয়া যায়,

সংজ্ঞা : সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে সময়ের সাথে বস্তুর কৌণিক বেগের পরিবর্তনের হারকে কৌণিক ত্বরণ বলে।

ক্যালকুলাস-এর নিয়ম ব্যবহার করে পাই,

$$\alpha = \underset{\Delta t \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \text{ বা, } \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.26)$$

কৌণিক ত্বরণ বলতে সাধারণত তাৎক্ষণিক কৌণিক ত্বরণ বোঝায়। এর একক রেডিয়ান/সেকেন্ড^2 (rad s^{-2})।

আবর্তনরত কণার কৌণিক ত্বরণ ধ্রুবক হলে তাৎক্ষণিক কৌণিক ত্বরণ যেকোনো সময়ের অবকাশে গড় কৌণিক ত্বরণের সমান হয়। এক্ষেত্রে t সময়ে কৌণিক বেগের বৃদ্ধি ω হলে, কৌণিক ত্বরণ, $\alpha = \dfrac{\omega}{t}$

কৌণিক ত্বরণের মাত্রা, $[\alpha] = \left[\dfrac{\omega}{T}\right] = \left[\dfrac{T^{-1}}{T}\right] = [T^{-2}]$

গাণিতিক উদাহরণ ৪.৯

১। একটি মোটর সাইকেল 400 m ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে সুষম গতিতে ঘুরছে। মোটর সাইকেলটি 30 sec এ একবার বৃত্ত পরিক্রম করলে এর রৈখিক ত্বরণ কত ?

মোটর সাইকেলের পর্যায়কাল, $T = 30$ sec

$\therefore$ কৌণিক বেগ, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{30}$ rad s^{-1}

$\therefore$ রৈখিক বেগ, $v = r\omega = 400 \times \frac{2\pi}{30}$

$= 26.67\pi$ ms^{-1}

অতএব, রৈখিক ত্বরণ, $a = \frac{v^2}{r} = \frac{(26.67\pi)^2}{400}$

$= 17.53$ ms^{-2}

৪·১৭ কৌণিক ত্বরণ ও রৈখিক ত্বরণের মধ্যে সম্পর্ক

Relation between angular accelaration and linear accelaration

মনে করি একটি বস্তুকণা r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট [চিত্র ৪·২৪] বৃত্তের পরিধি বরাবর অসম বৃত্তাকার গতিতে আবর্তন করছে। বস্তুকণাটির t সময়ে রৈখিক বেগ $= v$, কৌণিক বেগ $= \omega$, রৈখিক ত্বরণ $= a$ এবং কৌণিক ত্বরণ $= \alpha$।

আমরা জানি,

$$v = \omega r \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.27)$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

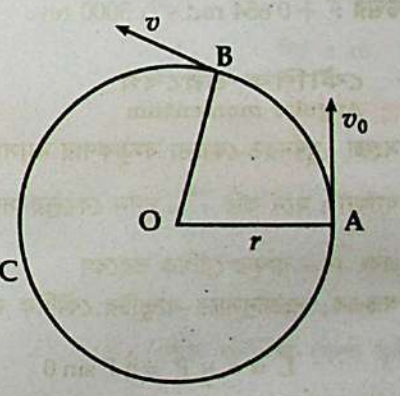
এবং $a = \frac{dv}{dt}$

সমীকরণ 4.27-এর উভয় পক্ষকে t-এর সাপেক্ষে ব্যবকলন করে পাই,

$$\frac{dv}{dt} = \omega \frac{dr}{dt} + \frac{d\omega}{dt} r = \frac{r d\omega}{dt} \quad [\because r = \text{ধ্রুবক}]$$

বা, $a = \alpha r$ $\quad [\because \frac{d\omega}{dt} = \alpha]$

অর্থাৎ $\boxed{\text{রৈখিক ত্বরণ} = \text{কৌণিক ত্বরণ} \times \text{ব্যাসার্ধ}}$



চিত্র ৪·২৪

গাণিতিক উদাহরণ ৪.১০

১। পৃথিবী থেকে চাঁদের দূরত্ব 3.84×10^5 km এবং চাঁদ পৃথিবীকে বৃত্তাকার কক্ষপথে 27.3 দিনে একবার প্রদক্ষিণ করে। চাঁদের কৌণিক এবং রৈখিক দ্রুতি নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ এবং $v = r\omega$

$\therefore \omega = \frac{2 \times 3.14}{27.3 \times 24 \times 60 \times 60}$

$= 2.662 \times 10^{-6}$ rad s^{-1}

এবং $v = r\omega = 3.84 \times 10^5 \times 2.662 \times 10^{-6}$

$= 1.022$ kms^{-1}

এখানে,

$r = 3.84 \times 10^5$ km

$T = 27.3$ days

$= 27.3 \times 24 \times 60 \times 60$ s

$\omega = ?$

$v_T = ?$

উত্তর : চাঁদের কৌণিক বেগ 2.662×10^{-6} rad s^{-1} এবং রৈখিক দ্রুতি 1.022 kms^{-1}।

২। একটি বৈদ্যুতিক পাখা মিনিটে 1500 বার বা 1500 rpm ঘুরে। সুইচ বন্ধ করার 4 মিনিট পর পাখাটি বন্ধ হয়ে যায়। পাখাটির কৌণিক ত্বরণ কত ? থেমে যাওয়ার আগে পাখাটি কত বার ঘুরবে ? [চ. বো. ২০০৭]

এখানে,
আদি কৌণিক বেগ, $\omega_0 = 1500 \text{ rev min}^{-1}$
$= \dfrac{1500 \times 2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}}$
$= 50\,\pi \text{ rads}^{-1}$
সময়, $t = 4$ মিনিট $= 4 \times 60 \text{ s} = 240 \text{ s}$
শেষ কৌণিক বেগ, $\omega = 0$
কৌণিক ত্বরণ, $\alpha = ?$
কৌণিক সরণ, $\theta = ?$

আমরা জানি,

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

বা, $\alpha = \dfrac{\omega - \omega_0}{t}$

$$= \frac{0 - 50\pi \text{ rads}^{-1}}{240 \text{ s}}$$

$$= -0.654 \text{ rad s}^{-2}$$

আবার,

$$\theta = \left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}\right) t$$

বা, $\theta = \left(\dfrac{50\pi \text{ rad s}^{-1} + 0}{2}\right) \times 240 \text{ s} = 6000\,\pi \text{ rad}$

$\therefore$ থেমে যাওয়ার আগে পাখাটির ঘূর্ণন সংখ্যা $N = \dfrac{\theta}{2\pi} = \dfrac{6000\,\pi}{2\,\pi} = 3000$ rev.

উত্তর : $-0.654 \text{ rad s}^{-2}$; 3000 rev.

৪·১৮ কৌণিক ভরবেগ
Angular momentum

সংজ্ঞা : ঘূর্ণনরত কোনো বস্তুকণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর ও রৈখিক ভরবেগের ভেক্টর গুণফলকে কৌণিক ভরবেগ বলে।

ব্যাখ্যা : মনে করি $\vec{r}$ = ঘূর্ণন কেন্দ্রের সাপেক্ষে কোনো বস্তুকণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর

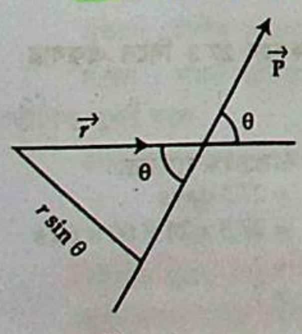
এবং $\vec{P}$ = বস্তুর রৈখিক ভরবেগ

অতএব, সংজ্ঞানুসারে বস্তুটির কৌণিক ভরবেগ

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = \hat{\eta}\, P \sin\theta \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad (4.28)$$

এটি একটি ভেক্টর রাশি। এখানে $\hat{\eta}$ গুণফলের দিক বা কৌণিক ভরবেগের দিক নির্দেশ করে।

মান ও দিক : কৌণিক ভরবেগের মান, $L = rP \sin\theta$



চিত্র ৪·২৫

এখানে θ হচ্ছে $\vec{r}$ ও $\vec{P}$-এর মধ্যবর্তী কোণ [চিত্র ৪·২৫]। ঘূর্ণন কেন্দ্র হতে ভরবেগের ক্রিয়ারেখার লম্ব দূরত্ব হচ্ছে $r \sin\theta$। অতএব, কোনো বস্তুকণার ভরবেগ ও ঘূর্ণন কেন্দ্র হতে ভরবেগের ক্রিয়া রেখার লম্ব দূরত্বের গুণফল কৌণিক ভরবেগের মান নির্দেশ করে।

দিক : $\vec{r}$ ও $\vec{P}$ যে তলে অবস্থিত $\vec{L}$ এর দিক হবে ঐ তলের লম্ব বরাবর। ক্রস গুণনের নিয়ম দ্বারা $\vec{L}$-এর দিক নির্ধারিত হবে।

অনুসিদ্ধান্ত : কণাটি বৃত্তাকার পথে বৃত্তের কেন্দ্রের সাপেক্ষে গতিশীল হলে, $\vec{r}$ ও $\vec{P}$-এর মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 90°$। সেক্ষেত্রে

$$L = rP \sin\theta = rP = r(mv) = mr(r\,\omega) = mr^2\omega \qquad \dots \qquad \dots \qquad (4.29)$$

একক ও মাত্রা সমীকরণ : এম. কে. এস. ও এস. আই. পদ্ধতিতে কৌণিক ভরবেগের একক হচ্ছে $\text{kgm}^2\text{s}^{-1}$ এবং মাত্রা সমীকরণ [L] = [ভরবেগ × দূরত্ব] = $[\text{MLT}^{-1}\text{L}] = [\text{ML}^2\text{T}^{-1}]$

৪.১৯ কৌণিক ভরবেগ এবং কৌণিক বেগের মধ্যে সম্পর্ক
Relation between angular momentum and angular velocity

মনে করি একটি বস্তু ω কৌণিক বেগে একটি অক্ষের চারদিকে ঘুরছে। বস্তুটি অনেকগুলো বস্তুকণার সমষ্টি হলে আমরা লিখতে পারি,

$$L = l_1 + l_2 + l_3 + \ldots\ldots + l_n$$ [এখানে l_1, l_2 … … l_n পরস্পর সমান্তরাল।]

বা, $$L = r_1p_1 + r_2p_2 + r_3p_3 + \ldots\ldots + r_np_n$$
$$= r_1m_1v_1 + r_2m_2v_2 + \ldots\ldots + r_nm_nv_n$$
$$= r_1m_1\omega r_1 + r_2m_2\omega r_2 + \ldots\ldots\ldots$$
$$= m_1r_1^2\omega + m_2r_2^2\omega + \ldots\ldots\ldots$$
$$= \omega\Sigma mr^2$$
$$= I\omega$$

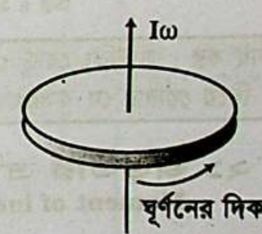
অর্থাৎ $L = I\omega$ … … … … (4.30)

এখানে, $\omega = 2\pi n = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi N}{t}$

সমীকরণ (4.30) হলো কৌণিক ভরবেগ এবং কৌণিক বেগের সম্পর্ক। উক্ত সম্পর্ক হতে কৌণিক ভরবেগের অপর একটি সংজ্ঞা দেয়া যেতে পারে।

সংজ্ঞা : ঘূর্ণন অক্ষ সাপেক্ষে কোনো একটি বস্তুর জড়তার ভ্রামক এবং কৌণিক বেগের গুণফলকে কৌণিক ভরবেগ বলে।

কৌণিক ভরবেগের ভেক্টর রূপ : কৌণিক ভরবেগ একটি ভেক্টর রাশি। এই ভেক্টরের অভিমুখ ঘূর্ণাক্ষ বরাবর। একটি দক্ষিণাবর্তী স্ক্রুকে কণার আবর্তনের দিকে ঘোরালে স্ক্রুটি যেদিকে অগ্রসর হয় কৌণিক ভরবেগ ভেক্টর সেদিকে ক্রিয়া করে [চিত্র ৪.২৬]।



চিত্র ৪.২৬

জানার বিষয় :

I. একক কৌণিক বেগে ঘূর্ণনরত বস্তুর জড়তার ভ্রামক এর কৌণিক ভরবেগের সমান। ($L = I\omega$, $\omega = 1$)

II. একক কৌণিক বেগে ঘূর্ণনরত বস্তুর জড়তার ভ্রামক গতিশক্তির দ্বিগুণ। ($K = \frac{1}{2}I\omega^2$ ∴ $\omega = 1$)

অনুধাবনমূলক কাজ : দেখাও যে, সমকৌণিক বেগে ঘূর্ণনরত কোনো বস্তুর জড়তার ভ্রামক এর কৌণিক ভরবেগের সমান।

আমরা জানি, ঘূর্ণন গতির ক্ষেত্রে কৌণিক ভরবেগ = জড়তার ভ্রামক × কৌণিক বেগ

বা, $L = I\omega$। কৌণিক বেগের মান একক হলে বা $\omega = I$ হলে $L = I$ হয়। তাই একক কৌণিক বেগে ঘূর্ণনরত বস্তুর জড়তার ভ্রামক এর কৌণিক ভরবেগের সমান।

৪.২০ কৌণিক ভরবেগের নিত্যতা বা সংরক্ষণ সূত্র
Law of conservation of angular momentum

কৌণিক গতির জন্য নিউটনের প্রথম সূত্র হতে আমরা জানি বাহ্যিক টর্কের ক্রিয়াতেই কেবলমাত্র বস্তুর কৌণিক বেগের তথা কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তন হয়। টর্কের ক্রিয়া না থাকলে বস্তুটি সমকৌণিক বেগে ঘুরতে থাকে। অর্থাৎ সময়ের সাপেক্ষে কৌণিক বেগ ধ্রুব হয়। ফলে কৌণিক ভরবেগও ধ্রুব হয়। একে কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র বলে। সুতরাং বলা যায়, **কোনো বস্তুর উপর টর্কের লব্ধি শূন্য হলে বস্তুটির কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষিত থাকে।**

গাণিতিক প্রমাণ : আমরা জানি কৌণিক ভরবেগ,

$L = I\omega$ … … … (4.31)

এখানে L বস্তুর কৌণিক ভরবেগ, I জড়তার ভ্রামক এবং ω কৌণিক বেগ।

সমীকরণ (4.31)-কে সময়ের সাপেক্ষে ব্যবকলন করে পাওয়া যায়,

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\frac{d\omega}{dt}$$

কিন্তু $\frac{d\omega}{dt} = \alpha$

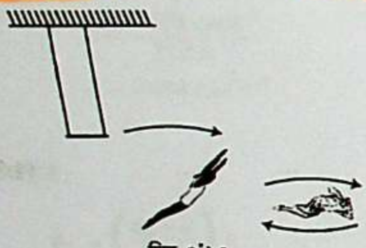
অতএব, $\frac{dL}{dt} = I\alpha = \tau$ [নিউটনের কৌণিক গতির ২য় সূত্র অনুসারে]

এখন $\tau = 0$, অর্থাৎ বস্তুর উপর টর্ক ক্রিয়াশীল না হলে,

$\frac{dL}{dt} = 0 \quad \therefore \; L =$ ধ্রুবক

কাজেই, বস্তুর উপর ক্রিয়ারত বহিস্থ টর্কের লব্ধি শূন্য হলে অথবা, বাইরে থেকে কোনো টর্ক প্রযুক্ত না হলে কোনো অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণায়মান বস্তুর কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তন হবে না। এটিই কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র।

উদাহরণ : তোমরা সার্কাসে ট্রাপিজ খেলা দেখে থাকলে দেখবে খেলোয়াড়রা শূন্যে নানা রকম কসরৎ দেখায়। দোলনা থেকে লাফ দেয়ার সময় খেলোয়াড়ের হাত ও পা সোজা প্রসারিত থাকে। এই সময় তার কৌণিক বেগ খুব কম থাকে। এবার হাত ও পা গুটিয়ে বুকের কাছে আনলে খেলোয়াড়ের কৌণিক বেগ বেড়ে যায়; ফলে তার পক্ষে শূন্যে পর পর ডিগবাজী খাওয়া সম্ভব হয়। হাত পা গুটিয়ে নেয়ার জন্য খেলোয়াড়টির জড়তার ভ্রামক (I) কমে যায়; কিন্তু তার কৌণিক ভরবেগ $L = I\omega$ ধ্রুব থাকে বলে I কমে যাওয়ায় কৌণিক বেগ ω বেড়ে যায় [চিত্র ৪.২৭]।



চিত্র ৪.২৭

যাচাই কর : ডাইভিং বোর্ড থেকে লাফ দেয়ার সময় অথবা বরফের উপর স্কেটিং করতে করতে পায়ের আঙুলের উপর ভর দিয়ে ঘোরার যে কসরৎ দেখানো হয় সেগুলোর ব্যাখ্যা দাও।

৪.২১ জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ
Moment of inertia and radius of gyration

৪.২১.১ জড়তার ভ্রামক
Moment of inertia

যখন কোনো দৃঢ় বস্তু একটি নির্দিষ্ট অক্ষে আবদ্ধ থাকে, তখন ওই বস্তুর উপর বল প্রয়োগ করলে, আবদ্ধ থাকার কারণে বস্তুটি সরলরেখায় চলতে পারে না। বস্তুটি অক্ষের চারদিকে ঘুরে এবং বস্তুর প্রতিটি কণার কৌণিক সরণ হয়। অক্ষের সাপেক্ষে বস্তুর এ ধরনের গতিকে ঘূর্ণন বা আবর্ত গতি বলে। অক্ষ বস্তুর ভেতরে বা বাইরে থাকতে পারে।

সংজ্ঞা : একটি দৃঢ় বস্তু কোনো একটি স্থির অক্ষের চারদিকে আবর্তিত হতে থাকলে ওই অক্ষের সাপেক্ষে বস্তুটির জড়তার ভ্রামক বলতে অক্ষ হতে প্রতিটি কণার দূরত্বের বর্গ ও এদের প্রত্যেকের ভরের গুণফলের সমষ্টিকে বুঝায়।

ব্যাখ্যা : মনে করি B একটি দৃঢ় বস্তু [চিত্র ৪.২৮]। এটি একটি নির্দিষ্ট অক্ষ XY-এর চারদিকে ω সমকৌণিক বেগে ঘুরছে। যদি বস্তুটি m_1, m_2, m_3 .... m_n ভরের অসংখ্য বস্তুকণার সমষ্টি হয় এবং ভরগুলো ঘূর্ণন অক্ষ হতে যথাক্রমে r_1, r_2, r_3 .... r_n দূরে অবস্থিত হয় তাহলে সংজ্ঞানুসারে ঐ অক্ষ সাপেক্ষে,

প্রথম কণার জড়তার ভ্রামক $= m_1 r_1^2$

দ্বিতীয় কণার জড়তার ভ্রামক $= m_2 r_2^2$

তৃতীয় কণার জড়তার ভ্রামক $= m_3 r_3^2$

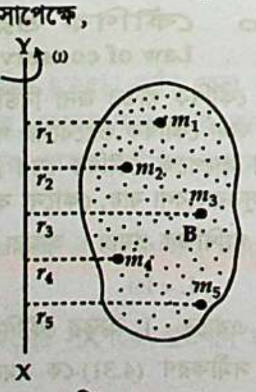
ও n-তম কণার জড়তার ভ্রামক $= m_n r_n^2$

অতএব, সংজ্ঞানুসারে সমগ্র বস্তুটির ঐ অক্ষ সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক,

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots\ldots\ldots m_n r_n^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.32)$$

$\left[\sum_{i=1}^{n} \right.$ চিহ্ন দ্বারা রাশিগুলোর সমষ্টি বুঝানো হয়েছে। $\left. \right]$



চিত্র ৪.২৮

সমাকলনের সাহায্যে জড়তার ভ্রামক নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায়,

$$I = \int r^2 dm \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.33)$$

এখানে dm হচ্ছে বস্তুটির অতি ক্ষুদ্র অংশের ভর এবং r হচ্ছে ঘূর্ণন অক্ষ হতে ওই ক্ষুদ্র অংশটির দূরত্ব।

জড়তার ভ্রামকের একক ও মাত্রা সমীকরণ (Unit and dimension of moment of inertia) :

এম. কে. এস. ও এস. আই. পদ্ধতিতে জড়তার ভ্রামকের একক কিলোগ্রাম-মিটার² ($kg\text{-}m^2$)।

এর মাত্রা সমীকরণ $[I] = [\text{ভর} \times \text{দূরত্ব}^2] = [ML^2]$

জানার বিষয় : জড়তার ভ্রামক নির্ভর করে—

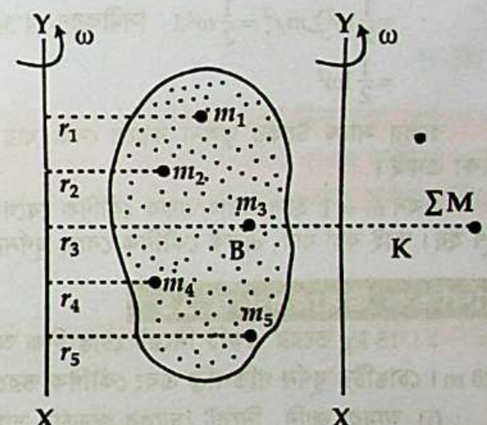
I. ঘূর্ণন অক্ষের অবস্থানের ওপর।

II. দৃঢ় বস্তুর আকৃতির ওপর।

III. ঘূর্ণন অক্ষের চারদিকে দৃঢ় বস্তুর ভরের বিন্যাসের ওপর।

৪.২১.২ চক্রগতির ব্যাসার্ধ
Radius of gyration

সংজ্ঞা : যদি কোনো দৃঢ় বস্তুর মোট ভর একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে কেন্দ্রীভূত আছে মনে করা হয় এবং ঘূর্ণন অক্ষ সাপেক্ষে ওই বিন্দু ভরের জড়তার ভ্রামক সমগ্র বস্তুটির জড়তার ভ্রামকের সমান হয়, তবে অক্ষ হতে ওই বিন্দুর দূরত্বকে চক্রগতির ব্যাসার্ধ বলা হয়। একে K দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।



চিত্র ৪.২৯

ব্যাখ্যা : মনে করি B একটি দৃঢ় বস্তু যা একটি নির্দিষ্ট অক্ষ XY-এর সাপেক্ষে ঘুরছে। দৃঢ় বস্তুটি $m_1, m_2, m_3 \ldots\ldots m_n$ ভরের অসংখ্য বস্তু কণার সমন্বয়ে গঠিত এবং কণাগুলি ঘূর্ণন অক্ষ থেকে যথাক্রমে $r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots\ldots r_n$ দূরত্বে অবস্থিত।

এখন মনে করি, ঘূর্ণন অক্ষ থেকে K দূরত্বে [চিত্র ৪.২৯] একটি বিন্দুভর।

$M = \sum m_i = (m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots\ldots + m_n)$ অবস্থিত।

স্পষ্টতই, উভয় ক্ষেত্রে জড়তার ভ্রামক একই হবে।

অর্থাৎ

$$MK^2 = \sum m_i r_i^2 = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots\ldots\ldots + m_n r_n^2) \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.34)$$

$$\therefore \quad K = \sqrt{\frac{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots\ldots\ldots + m_n r_n^2}{M}}$$

$$= \sqrt{\frac{I}{M}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.35)$$

নির্দিষ্ট অক্ষের সাপেক্ষে কোনো বস্তুর চক্রগতির ব্যাসার্ধ 0.2 m বলতে বুঝা যায় ওই অক্ষ হতে 0.2 m দূরে বস্তুটির সমগ্র ভর কেন্দ্রীভূত আছে বিবেচনা করে জড়তার ভ্রামক নির্ণয় করতে বস্তুটির মোট জড়তার ভ্রামক পাওয়া যাবে।

উদাহরণ : ব্যাস সাপেক্ষে একটি নিরেট গোলকের জড়তা ভ্রামক $I = \frac{2}{5} MR^2$। অতএব, ব্যাস সাপেক্ষে এর চক্রগতির ব্যাসার্ধ,

$$K = \sqrt{\frac{I}{M}} = \sqrt{\frac{\frac{2}{5} MR^2}{M}} = \sqrt{\frac{2}{5}}\, R$$

৪.২২ ঘূর্ণন গতিশক্তি
Rotational kinetic energy

মনে করি B একটি দৃঢ় বস্তু ω কৌণিক বেগে XY অক্ষের চতুর্দিকে [চিত্র ৪.২৫] বৃত্তাকার পথে সমকৌণিক বেগে ঘুরছে। এই ঘূর্ণনের জন্য বস্তুটির কিছু গতিশক্তি থাকে। এই গতিশক্তিকে ঘূর্ণন বা আবর্ত গতিশক্তি বলে।

ধরা যাক, m_1 কণার রৈখিক বেগ v_1, অতএব $v_1 = \omega r_1$

m_2 কণার রৈখিক বেগ v_2, অতএব $v_2 = \omega r_2$

m_3 কণার রৈখিক বেগ v_3, অতএব $v_3 = \omega r_3$

সুতরাং, m_1 কণার গতিশক্তি $= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \omega^2 r_1^2$

m_2 কণার গতিশক্তি $= \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 \omega^2 r_2^2$

m_3 কণার গতিশক্তি $= \frac{1}{2} m_3 v_3^2 = \frac{1}{2} m_3 \omega^2 r_3^2$

এভাবে বস্তুর সকল কণার গতিশক্তি নির্ণয় করে যোগ করলে সমগ্র বস্তুটির গতিশক্তি পাওয়া যায়। সুতরাং বস্তুটি ঘূর্ণন গতিশক্তি

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 \omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega^2 r_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \omega^2 r_3^2 + \ldots\ldots\ldots +$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 [m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots]$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 \Sigma m_i r_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 . I \quad \text{[সমীকরণ (4·34) অনুসারে]}$$

$$= \frac{1}{2} I\omega^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4·36)$$

বলের সাথে টর্কের তুলনা করলে দেখা যায় যে রৈখিক গতিতে ভরের যে ভূমিকা ঘূর্ণন গতির ক্ষেত্রে জড়তার ভূমিকা একই।

এখন $\omega = 1$ হলে অর্থাৎ একক কৌণিক বেগে ঘূর্ণনরত বস্তুর ক্ষেত্রে জড়তার ভ্রামক, $I = 2E$ হয় বা গতিশক্তির দ্বিগুণ হয়। তাই বলা যায়, একক কৌণিক বেগে ঘূর্ণনরত বস্তুর জড়তার ভ্রামক গতিশক্তির দ্বিগুণ।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.১১

১। 15 kg ভরের একটি নিরেট চোঙ নিজ অক্ষ সাপেক্ষে 50 rad s⁻¹ কৌণিক বেগে ঘুরছে। চোঙটির ব্যাসার্ধ 0·20 m। চোঙটির ঘূর্ণন গতিশক্তি এবং কৌণিক ভরবেগ নির্ণয় কর।

(i) আমরা জানি, নিরেট চোঙের জড়তার ভ্রামক,

$$I = \frac{1}{2} Mr^2$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2} \times 15 \times (0·20)^2 = 0·3 \text{ kgm}^2$$

এখানে,
$M = 15$ kg
$r = 0·20$ m
$\omega = 50$ rad s^{-1}

এখন, ঘূর্ণায়মান চোঙের ঘূর্ণন গতিশক্তি,

$$E_r = \frac{1}{2} I\omega^2$$

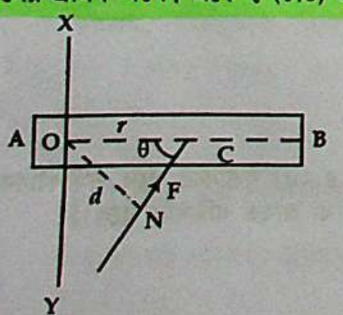
$$\therefore \quad E_r = \frac{1}{2} \times 0·3 \times (50)^2 = 375 \text{ J}$$

(ii) আবার, চোঙের কৌণিক ভরবেগ, $L = I\omega = 0·3 \times 50 = 15$ kgm^2 s^{-1}

৪·২৩ টর্ক বা বলের ভ্রামক
Torque or Moment of a force

কোনো দৃঢ় বস্তু একটি বিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘুরতে পারে। যেমন দেয়ালে ঝুলানো ফটো পেরেক ও সুতার সংযোগ বিন্দুর সাপেক্ষে ঘুরতে থাকে; আবার গাড়ির চাকা তার অক্ষের সাপেক্ষে ঘুরতে পারে।

কোনো নির্দিষ্ট অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণায়মান কোনো বস্তুতে ত্বরণ সৃষ্টির জন্য প্রযুক্ত দ্বন্দ্বের ভ্রামককে টর্ক বা বলের ভ্রামক বলে। একে τ (টাউ) দ্বারা সূচিত করা হয়।



চিত্র ৪·৩০

ব্যাখ্যা : ধরা যাক, O বিন্দুতে একটি পাতলা পাত অনুভূমিক অবস্থায় এমনভাবে আবদ্ধ আছে যে তা উল্লম্ব অক্ষ XOY-এর চতুর্দিকে O-কে কেন্দ্র করে ঘুরতে পারে [চিত্র ৪·৩০]। পাতটিকে তার কোনো বিন্দু C-তে বল প্রয়োগ করে ঘুরালে দেখা যায় যে,

(১) প্রযুক্ত বলের মান যত বেশি হবে, তার ঘূর্ণন সৃষ্টির ক্ষমতাও তত বেশি হবে।

(২) O হতে প্রযুক্ত বল F-এর লম্ব দূরত্ব d যত বেশি হবে, ওই বলে ঘূর্ণন সৃষ্টির ক্ষমতাও তত বেশি হবে।

(৩) বলের ক্রিয়ামুখ O বিন্দু অভিমুখী হলে, পাতটিতে কোনো ঘূর্ণন হবে না।

উপরোক্ত কারণে কোনো অক্ষ বা বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বলের ভ্রামকের মান বলের পরিমাণ ও অক্ষ হতে বলের ক্রিয়া রেখার লম্ব দূরত্ব d-এর গুণফল দ্বারা নির্দিষ্ট হয়।

$$\therefore \quad \tau = d \times F \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.37)$$

বা, বলের ভ্রামক বা টর্ক = বল × লম্ব দূরত্ব

চিত্র ৪.২৯-এ O হতে F বলের ক্রিয়াবিন্দু C-এর দূরত্ব = r ও F বলের ক্রিয়ারেখা NC-এর দূরত্ব = d এবং $\angle NCO = \theta$ নির্দেশ করা হয়েছে।

কাজেই, $ON = d = r \sin\theta$

$\therefore \quad \tau = d \times F = rF\sin\theta$

ভেক্টর বীজগণিতের সাহায্যে τ-কে নিম্ন উপায়ে লেখা হয়,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.38)$$

এখানে, $\vec{r}$ ও $\vec{F}$ যথাক্রমে অবস্থান ভেক্টর ও প্রযুক্ত বল। r ও F যে তলে অবস্থিত τ-এর দিক হবে ওই তলের অভিলম্ব বরাবর। ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে অর্থাৎ বামাবর্তে (anti-clockwise) ঘূর্ণনের জন্য τ-এর অভিমুখ হচ্ছে উপর দিকে এবং মান ধনাত্মক। ঘড়ির কাঁটার দিকে অর্থাৎ দক্ষিণাবর্তে (clockwise) ঘূর্ণনের জন্য τ-এর অভিমুখ নিচের দিকে এবং মান ঋণাত্মক।

সমীকরণ (4.38) অনুসারে টর্কের নিম্নোক্ত গাণিতিক সংজ্ঞা দেয়া যায়।

সংজ্ঞা : অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণনরত বস্তুর ওপর যে বিন্দুতে বল ক্রিয়াশীল ওই বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর ও প্রযুক্ত বলের ভেক্টর গুণফলকে টর্ক বলে।

টর্ক বা বলের ভ্রামকের একক (Unit of torque or moment of force)

এস. আই. পদ্ধতিতে টর্ক বা বলের ভ্রামকের একক নিউটন-মিটার (N-m)।

টর্ক বা বলের ভ্রামকের মাত্রা সমীকরণ (Dimension of torque or moment of force)

টর্ক বা বলের ভ্রামকের সংজ্ঞা হতে এর মাত্রা সমীকরণ প্রতিপাদন করা যায়। বলের ভ্রামকের মাত্রা সমীকরণ,

[টর্ক বা বলের ভ্রামক] = [বল × দূরত্ব] = $[MLT^{-2} \times L] = [ML^2T^{-2}]$

টর্কের তাৎপর্য (Significance of torque)

একটি অক্ষের সাপেক্ষে কোনো টর্ক থেকে বোঝা যায় কোনো একটি নির্দিষ্ট ভরের বিস্তৃত বস্তুকে কত সহজে ওই অক্ষটির সাপেক্ষে ঘুরানো যাবে। অর্থাৎ টর্ক যত বেশি হবে তত সহজে ওই টর্কের সাহায্যে কৌণিক বেগ পরিবর্তন করা সম্ভব হবে।

৪.২৪ টর্ক, জড়তার ভ্রামক ও কৌণিক ত্বরণ
Torque, moment of inertia and angular accelaration

আমরা জানি সরলরেখায় চলমান কোনো বস্তুতে ত্বরণ সৃষ্টির জন্যে বল প্রয়োগের প্রয়োজন। তেমনি নির্দিষ্ট অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণায়মান কোনো বস্তুতে ত্বরণ সৃষ্টির জন্যে একটি দ্বন্দ্বের প্রয়োজন হয়। এই দ্বন্দ্বের ভ্রামককে টর্ক বলে।

ধরি একটি বস্তু একটি নির্দিষ্ট অক্ষ XY-এর চারদিকে ω সমকৌণিক বেগে ঘুরছে [চিত্র ৪.২৫]। এখন তার ওপর একটি যুগল প্রয়োগ করায় তার কৌণিক বেগ বৃদ্ধি পাবে অর্থাৎ বস্তুতে কৌণিক ত্বরণ সৃষ্টি হবে। বস্তুতে সৃষ্ট এই কৌণিক ত্বরণ তার প্রত্যেকটি কণার কৌণিক ত্বরণের সমান। কিন্তু ঘূর্ণাক্ষ হতে কণাগুলো বিভিন্ন দূরত্বে অবস্থান করে বিভিন্ন রৈখিক ত্বরণ লাভ করবে। ঘূর্ণাক্ষ হতে কণার দূরত্ব যত বেশি হবে রৈখিক ত্বরণের মানও তত বেশি হবে।

ধরি বস্তুটি m_1, m_2, m_3 ইত্যাদি ভরের কতকগুলো কণার সমন্বয়ে গঠিত এবং ঘূর্ণাক্ষ হতে কণাগুলোর দূরত্ব যথাক্রমে r_1, r_2, r_3 ইত্যাদি।

বর্ণনা অনুসারে, বস্তুটির প্রত্যেকটি কণার কৌণিক ত্বরণ, $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

তা হলে m_1 ভরের বস্তু কণাটির রৈখিক ত্বরণ = $r_1\frac{d\omega}{dt}$

$\therefore$ ওই কণার উপর প্রযুক্ত বল = ভর × রৈখিক ত্বরণ = $m_1 r_1 \frac{d\omega}{dt}$

∴ ঘূর্ণাক্ষের সাপেক্ষে কণাটির ওপর ক্রিয়ারত বলের ভ্রামক বা টর্ক τ = বল × ঘূর্ণাক্ষ হতে বস্তু কণার দূরত্ব

$$= m_1 r_1 \frac{d\omega}{dt} \times r_1 = m_1 r_1^2 \frac{d\omega}{dt}$$

অনুরূপভাবে লেখা যায় $m_2, m_3, m_4, \ldots \ldots \ldots$ ইত্যাদি ভরের বস্তুকণার ওপর ক্রিয়ারত বলের ভ্রামক যথাক্রমে $m_2 r_2^2 \frac{d\omega}{dt}$, $m_3 r_3^2 \frac{d\omega}{dt}$, $m_4 r_4^2 \frac{d\omega}{dt}$ ইত্যাদি।

তা হলে উপরোক্ত ভ্রামকগুলোর সমষ্টিই উক্ত বস্তুর ওপর ক্রিয়ারত দ্বন্দ্বের ভ্রামক বা টর্ক,

$$\tau = m_1 r_1^2 \frac{d\omega}{dt} + m_2 r_2^2 \frac{d\omega}{dt} + m_3 r_3^2 \frac{d\omega}{dt} + m_4 r_4^2 \frac{d\omega}{dt} + \ldots \ldots \ldots$$

$$= (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots) \frac{d\omega}{dt} = \frac{\mathrm{I}d\omega}{dt} = \mathrm{I}\alpha$$

$$\therefore \tau = \mathrm{I}\frac{d\omega}{dt} = \mathrm{I}\alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.39)$$

বা, টর্ক = জড়তার ভ্রামক × কৌণিক ত্বরণ। কৌণিক ত্বরণের আবর্তনরত বস্তুকণার ওপর ক্রিয়ারত দ্বন্দ্বের টর্ক হবে ঘূর্ণাক্ষের সাপেক্ষে তার জড়তার ভ্রামক ও কৌণিক ত্বরণের গুণফলের সমান।

আবার $\frac{d\omega}{dt} = 1$ হলে, $\tau = \mathrm{I}$

∴ কোনো অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণায়মান কোনো দৃঢ় বস্তুর ওপর যে টর্ক ক্রিয়া করলে তাতে একক কৌণিক ত্বরণের সৃষ্টি হয় তাকে ওই অক্ষের সাপেক্ষে তার জড়তার ভ্রামক বলে। সমীকরণ (4.39) টর্ক, জড়তার ভ্রামক এবং কৌণিক ত্বরণের মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করে।

যাচাই কর : দেখাও যে কোনো বস্তুর ওপর ক্রিয়ারত টর্ক বস্তুটির কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনের হারের সমান।

আমরা জানি, কৌণিক ভরবেগ, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

বা, $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$

$$\therefore \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a}$$

$$= \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} \quad [\because \vec{v} \times \vec{v} = 0]$$

অতএব, কোনো বস্তুর কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনের হার বস্তুটির ওপর ক্রিয়াশীল টর্কের সমান।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.১২

১। একটি চাকার ভর 5 kg এবং কোনো অক্ষ সাপেক্ষে চক্রগতির ব্যাসার্ধ 0·2 m। এর জড়তার ভ্রামক কত ? চাকাটিতে 2 rad s^{-2} কৌণিক ত্বরণ সৃষ্টি করতে কত মানের টর্ক প্রয়োগ করতে হবে ?

আমরা জানি,

$$\mathrm{I} = \mathrm{MK}^2 = 5 \times (0{\cdot}2)^2 = 5 \times 0{\cdot}04 = 0{\cdot}2\ \mathrm{kg\,m^2}$$

এখানে, M = 5 kg, K = 0·2 m, I = ?

আবার,

$$\tau = \mathrm{I}\alpha = 0{\cdot}2 \times 2 = 0{\cdot}4\ \mathrm{N\text{-}m}$$

এখানে, I = 0·2 kgm^2, α = 2 rad s^{-2}, τ = ?

২। একটি 8 kg ভরের চাকার চক্রগতির ব্যাসার্ধ 25 cm হলে এর জড়তার ভ্রামক কত হবে ? চাকাটিতে 3 rad/s² কৌণিক ত্বরণ সৃষ্টি করতে কত মানের টর্ক প্রয়োগ করতে হবে ? [BUET Admission Test, 2017-18]

আমরা জানি, জড়তার ভ্রামক

$$I = Mk^2 = 8 \times (0.25)^2 = 0.5\ \text{kgm}^2$$

$\therefore$ টর্ক, $\tau = I\alpha = 0.5 \times 3 = 1.5\ \text{Nm}$

৩। একটি ধাতব গোলকের ভর 6 g। এটিকে 3 m দীর্ঘ একটি সুতার এক প্রান্তে বেঁধে প্রতি সেকেন্ডে 4 বার ঘুরানো হচ্ছে। এর কৌণিক ভরবেগ কত ?

আমরা জানি,

$$L = I\omega = mr^2 \times \frac{2\pi N}{t} = \frac{0.006 \times (3)^2 \times 2 \times 3.14 \times 4}{1} = 1.356\ \text{kg m}^{-2}\text{s}^{-1}$$

এখানে,
গোলকের ভর, $m = 6\ \text{g} = 0.006\ \text{kg}$
সুতার দৈর্ঘ্য বা বক্রপথের ব্যাসার্ধ, $r = 3\ \text{m}$
প্রতি সেকেন্ডে ঘূর্ণন সংখ্যা, $N = 4$ বার
সময়, $t = 1\ \text{sec}$
কৌণিক ভরবেগ, $L = ?$

৪। একটি চাকার ভর 5 kg এবং চক্রগতির ব্যাসার্ধ 25 cm। এর জড়তার ভ্রামক কত? চাকার কৌণিক ত্বরণ 4 rad s⁻² সৃষ্টি করতে কত মানের টর্ক প্রয়োগ করতে হবে ?

আমরা জানি,

$$I = MK^2$$
$$\therefore I = 5 \times (0.25)^2 = 0.3125\ \text{kg-m}^2$$

এখানে,
$M = 5\ \text{kg}$
$K = 25\ \text{cm} = 0.25\ \text{m}$
$I = ?$

আবার, $\tau = I\alpha$

$$\therefore \tau = 0.3125 \times 4 = 1.25\ \text{N-m}$$

এখানে,
$I = 0.3125\ \text{kg-m}^2$
$\alpha = 4\ \text{rads}^{-2}$
$\tau = ?$

৫। 40 kg ভরের একটি বালক নাগরদোলায় চড়ে 20 m ব্যাসের বৃত্তাকার পথে 6 rpm কৌণিক বেগে ঘুরছে। বালকটির কৌণিক ভরবেগ নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

$$L = I\omega = mr^2\omega = 40 \times (10)^2 \times \frac{1}{5}\pi\ \text{kg m}^2\text{s}^{-1} = 2.512 \times 10^3\ \text{kg m}^2\text{s}^{-1}$$

এখানে,
$\omega = \frac{6 \times 2\pi}{60} = \frac{1}{5}\pi\ \text{rad s}^{-1}$
$m = 40\ \text{kg}$
$r = \frac{d}{2} = \frac{20\ \text{m}}{2} = 10\ \text{m}$

৬। মঙ্গল গ্রহ সূর্যকে কেন্দ্র করে 2.28×10^{11} m ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে ঘুরে ধরে নিয়ে এর কৌণিক ভরবেগ নির্ণয় কর। মঙ্গল গ্রহের ভর 6.46×10^{23} kg এবং আবর্তন কাল 5.94×10^7 s।

আমরা জানি, কৌণিক ভরবেগ,

$$L = I\omega = mr^2 \times \omega = mr^2 \times \frac{2\pi}{T} = \frac{6.46 \times 10^{23} \times (2.28 \times 10^{11})^2 \times 2 \times 3.14}{5.94 \times 10^7} = 3.55 \times 10^{39}\ \text{kgm}^2\text{s}^{-1}$$

এখানে,
ব্যাসার্ধ, $r = 2.28 \times 10^{11}\ \text{m}$
ভর, $m = 6.46 \times 10^{23}\ \text{kg}$
আবর্তন কাল, $T = 5.94 \times 10^7\ \text{s}$
কৌণিক ভরবেগ, $L = ?$

৭। ব্যাসার্ধ ভেক্টর $\vec{r} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং বল ভেক্টর $\vec{F} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে টর্ক $\vec{\tau}$ নির্ণয় কর।

টর্ক, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}\,(6-4) - \hat{j}\,(4-4) + \hat{k}\,(4-6)$

$= 2\hat{i} - 0 - 2\hat{k} = 2\hat{i} - 2\hat{k}$

৮। একটি ঘূর্ণায়মান বস্তুর ভর 2 kg। ঘূর্ণন অক্ষ হতে এর দূরত্ব 1 m, বস্তুটি 5 rad s^{-1} কৌণিক বেগে ঘুরলে গতিশক্তি কত হবে ?

আমরা জানি,

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2} \times mr^2 \times \omega^2$$
$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 1^2 \times (5)^2$$
$$= 25\ J$$

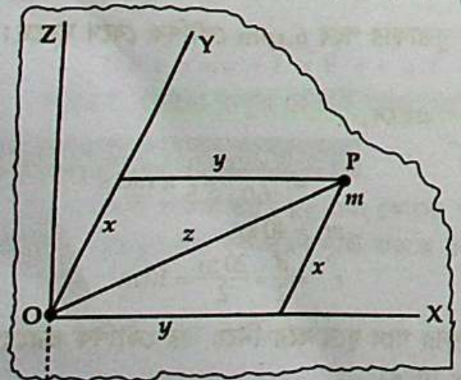
৪.২৫ জড়তার ভ্রামক সংক্রান্ত দুটি উপপাদ্য
Two theorems relating moment of inertia

কোনো একটি বিশেষ অক্ষের সাপেক্ষে দৃঢ় বস্তুর জড়তার ভ্রামক নির্ণয়ের দুটি সহজ উপপাদ্য আছে। উপপাদ্য দুটির একটিকে (১) লম্ব অক্ষসমূহের উপপাদ্য এবং অপরটিকে (২) সমান্তরাল অক্ষসমূহের উপপাদ্য বলে। নিম্নে পাত আকৃতির বস্তুর ক্ষেত্রে উপপাদ্য দুটি আলোচনা করা হলো।

৪.২৫.১ লম্ব অক্ষ উপপাদ্য
Perpendicular axes theorem

কোনো পাতলা সমতল পাতের তলে অবস্থিত দুটি পরস্পর লম্ব অক্ষের সাপেক্ষে পাতটির জড়তার ভ্রামকদ্বয়ের সমষ্টি ওই পাতে অবস্থিত দুই অক্ষের ছেদ বিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব অক্ষ সাপেক্ষে পাতটির জড়তার ভ্রামকের সমান হবে।

ব্যাখ্যা : মনে করি কোনো সমতল পাতের ওপর অবস্থিত দুটি পরস্পর লম্ব অক্ষ OX এবং OY বরাবর এদের জড়তার ভ্রামক যথাক্রমে I_x ও I_y। ধরি ওই পাতে অবস্থিত দুই অক্ষের ছেদ বিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব OZ বরাবর পাতের জড়তার ভ্রামক I_z। প্রমাণ করতে হবে যে, $I_x + I_y = I_z$



চিত্র ৪.৩১

অঙ্কন : একটি পাতলা সমতল পাত নিই। এই পাতের ওপর OX এবং OY দুটি পরস্পর লম্ব অঙ্কন করি [চিত্র ৪.৩১]।

এখন OX এবং OY অক্ষ দুটির ছেদ O-তে পাতের ওপর লম্ব টানি।

প্রমাণ : সমতল পাতের ওপর P একটি বিন্দু নিই যার ভুজ কোটি x, y এবং z। এখন P বিন্দুতে m ভরের একটি কণা বিবেচনা করি। OZ অক্ষ সাপেক্ষে কণাটির জড়তার ভ্রামক $= mz^2$।

$\therefore$ OZ অক্ষ সাপেক্ষে সমগ্র পাতের জড়তার ভ্রামক

$$I_z = \Sigma mz^2 = \Sigma m\,(x^2 + y^2)$$
$$= \Sigma mx^2 + \Sigma my^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.40)$$

কিন্তু, $\Sigma my^2 = I_x$ এবং $\Sigma mx^2 = I_y$

অতএব সমীকরণ (4.40) হতে পাই

$$I_z = I_y + I_x$$

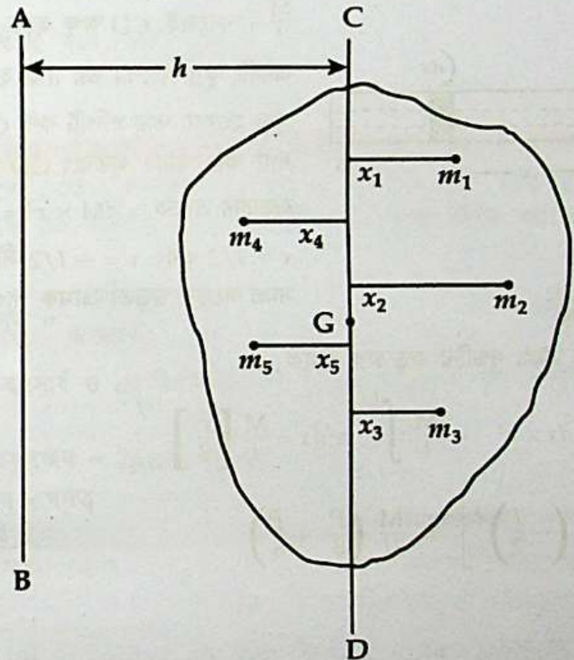
বা $$I_z = I_x + I_y \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.41)$$

$\therefore$ উপপাদ্যটি প্রমাণিত হলো।

৪.২৫.২ সমান্তরাল অক্ষ উপপাদ্য
Parallel axes theorem

যে কোনো অক্ষের সাপেক্ষে কোনো সমতল পাতলা পাতের জড়তার ভ্রামক পাতটির ভারকেন্দ্রগামী তার সমান্তরাল অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক এবং পাতের ভর ও ওই দুই অক্ষের মধ্যবর্তী দূরত্বের বর্গের গুণফলের সমষ্টির সমান।

ব্যাখ্যা : ধরা যাক কাগজের তলে অবস্থিত AB কোনো একটি অক্ষ এবং CD তার সমান্তরাল আর একটি অক্ষ। CD অক্ষটি M ভরের পাতলা সমতল পাতের ভারকেন্দ্র G দিয়ে অতিক্রান্ত [চিত্র ৪.৩২]। যদি সমান্তরাল অক্ষদ্বয় AB ও CD-এর মধ্যবর্তী দূরত্ব h এবং AB ও CD-এর সাপেক্ষে পাতটির জড়তার ভ্রামক যথাক্রমে I ও I_G হয় তবে উপপাদ্য অনুসারে প্রমাণ করতে হবে যে, $I = I_G + Mh^2$



চিত্র ৪.৩২

প্রমাণ : ধরি পাতটি m_1, m_2, m_3 ইত্যাদি ভরের বস্তুকণার সমন্বয়ে গঠিত। CD অক্ষ হতে কণাগুলোর দূরত্ব যথাক্রমে x_1, x_2, x_3 ইত্যাদি। তা হলে AB অক্ষের সাপেক্ষে m_1 ভরের কণার জড়তার ভ্রামক

$$= m_1(x_1 + h)^2 = m_1x_1^2 + m_1h^2 + 2m_1x_1h$$

অনুরূপভাবে AB অক্ষের সাপেক্ষে m_2 ভরের কণার জড়তার ভ্রামক

$$= m_2x_2^2 + m_2h^2 + 2m_2x_2h \text{ ;}$$

m_3 ভরের কণার জড়তার ভ্রামক

$$= m_3x_3^2 + m_3h^2 + 2m_3x_3h \text{ ইত্যাদি।}$$

∴ AB অক্ষের সাপেক্ষে সমগ্র পাতের জড়তার ভ্রামক I হলো উপরোক্ত জড়তার ভ্রামকগুলোর সমষ্টির সমান।

$$\therefore\ I = m_1x_1^2 + m_1h^2 + 2m_1x_1h + m_2x_2^2 + m_2h^2 + 2m_2x_2h + m_3x_3^2 + m_3h^2 + 2m_3x_3h + \dots \dots$$

$$= \Sigma mx^2 + h^2\Sigma m + 2h\Sigma mx.$$

এখানে, Σmx = CD অক্ষের সাপেক্ষে সমগ্র পাতের ভর ভ্রামক। কিন্তু সমগ্র পাতের ওজন G বিন্দু দিয়ে CD রেখা বরাবর নিম্নমুখে ক্রিয়া করায় CD অক্ষের সাপেক্ষে পাতটির ভর ভ্রামক,

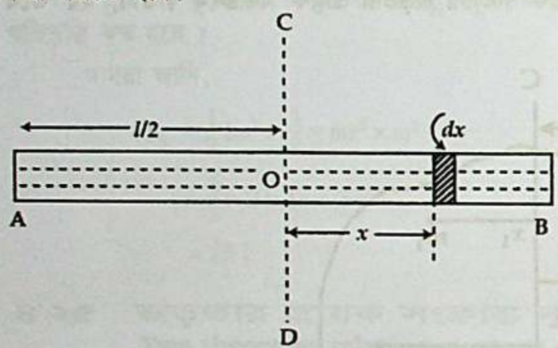
$\Sigma mx = 0$ আবার $\Sigma m = M$ ও $I_G = \Sigma mx^2$

$$\therefore\ I = I_G + Mh^2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4.42)$$

৪.২৬ কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্রে জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ নির্ণয় Determination of moment of inertia and radius of gyration for some special cases

১। সরু ও সুষম দণ্ডের মধ্যবিন্দু দিয়ে ও তার দৈর্ঘ্যের অভিলম্বভাবে অতিক্রান্ত অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণায়মান ওই দণ্ডের জড়তার ভ্রামক

ধরি l দৈর্ঘ্য ও M ভরবিশিষ্ট একটি সুষম সরু দণ্ড AB-এর দৈর্ঘ্যের মধ্যবিন্দু O দিয়ে ও দৈর্ঘ্যের লম্বভাবে অতিক্রান্ত অক্ষ CD-এর চতুর্দিকে ঘুরছে [চিত্র ৪.৩৩]। এই অক্ষের সাপেক্ষে তার জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে হবে।



চিত্র ৪.৩৩

দণ্ডটি সুষম হেতু তার প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর = $\frac{M}{l}$। কাজেই CD অক্ষ হতে x দূরে অবস্থিত dx দৈর্ঘ্যের একটি ক্ষুদ্র অংশের ভর dM হলে $dM = \frac{M}{l}dx$। dx অংশটি ক্ষুদ্র হওয়ায় তার প্রতিটি কণা CD অক্ষ হতে x দূরে অবস্থিত গণ্য করা যায়। সুতরাং CD অক্ষের সাপেক্ষে dx অংশের জড়তার ভ্রামক $= dM \times x^2 = \frac{M}{l} \times dx \times x^2$ এবং একে $x = l/2$ এবং $x = -l/2$ সীমার মধ্যে সমাকলন করলে সমগ্র দণ্ডের জড়তা ভ্রামক পাওয়া যাবে।

$\therefore$ CD অক্ষের সাপেক্ষে সমগ্র দণ্ডটির জড়তার ভ্রামক,

$$I = \int_{-l/2}^{l/2}\left(\frac{M}{l}\right) \times dx \times x^2 = \frac{M}{l}\int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{M}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-l/2}^{l/2}$$

$$= \frac{M}{3l}\left[\left(\frac{l}{2}\right)^3 - \left(-\frac{l}{2}\right)^3\right] = \frac{M}{3l}\left(\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8}\right)$$

$$\therefore \boxed{I = \frac{M}{12}l^2} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4.43)$$

ধরি চক্রগতির ব্যাসার্ধ K

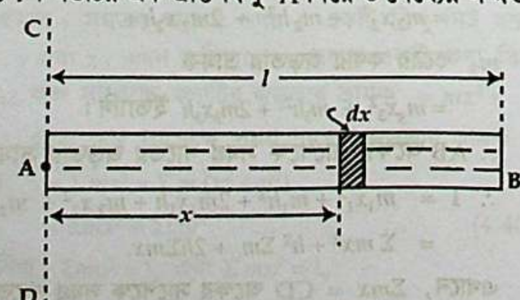
$$\therefore \quad MK^2 = \frac{M}{12}l^2$$

$$\therefore \quad K = \frac{l}{\sqrt{12}} = \frac{l}{2\sqrt{3}} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4.44)$$

২। সরু সুষম দণ্ডের এক প্রান্ত দিয়ে ও এর দৈর্ঘ্যের লম্বভাবে অতিক্রান্ত অক্ষের সাপেক্ষে এর জড়তার ভ্রামক

ধরি AB একটি সরু ও সুষম দণ্ড। এর ভর M ও দৈর্ঘ্য l। দণ্ডটির এক প্রান্ত বিন্দু A দিয়ে ও দৈর্ঘ্যের লম্বভাবে অতিক্রান্ত CD-এর চারদিকে ঘুরছে [চিত্র ৪.৩৪]। এই CD অক্ষের সাপেক্ষে দণ্ডটির জড়তা ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে হবে।

বর্ণনা অনুসারে দণ্ডটি সুষম হওয়ায় এর প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর $\frac{M}{l}$। সুতরাং CD অক্ষ হতে x দূরে অবস্থিত দণ্ডটির dx দৈর্ঘ্যের একটি ক্ষুদ্র অংশের ভর $dM = \frac{M}{l}dx$। অংশটি ক্ষুদ্র হেতু এর প্রতিটি কণা CD অক্ষ হতে x দূরে অবস্থিত গণ্য করা যায়।



চিত্র ৪.৩৪

$\therefore$ CD অক্ষের সাপেক্ষে দণ্ডটির এই ক্ষুদ্র অংশের জড়তার ভ্রামক $= \frac{M}{l} \times dx \times x^2$

এখন একে $x = 0$ ও $x = l$ এই সীমার মধ্যে সমাকলন করলে, CD অক্ষের সাপেক্ষে সমগ্র দণ্ডের জড়তার ভ্রামক পাওয়া যাবে।

$\therefore$ নির্ণেয় জড়তার ভ্রামক, $I = \int_{x=0}^{x=l} \left(\frac{M}{l}\right) \times dx \times x^2$

$$= \frac{M}{l} \int_{x=0}^{x=l} x^2 dx$$

$$= \frac{M}{l} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l = \frac{M}{3l} \times l^3$$

$$\therefore I = \frac{1}{3} Ml^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.45)$$

এখন চক্রগতির ব্যাসার্ধ K হলে, $MK^2 = \frac{1}{3}Ml^2$

$$\therefore K = \frac{l}{\sqrt{3}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.46)$$

৩। **নিজ অক্ষের চতুর্দিকে ঘূর্ণায়মান একটি নিরেট চোঙের জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ**

ধরি একটি সুষম নিরেট চোঙ C-এর ভর M, দৈর্ঘ্য l ও ব্যাসার্ধ r [চিত্র ৪.৩৫]। এটি নিজ অক্ষ PQ-এর চতুর্দিকে ঘুরছে। PQ সাপেক্ষে এর জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে হবে। বর্ণনা অনুসারে চোঙটির আয়তন = $\pi r^2 \times l$

চোঙের উপাদানের ঘনত্ব = $\frac{\text{ভর}}{\text{আয়তন}} = \frac{M}{\pi r^2 l}$

PQ-এর চতুর্দিকে x ব্যাসার্ধ ও dx বিস্তারবিশিষ্ট একটি ফাঁপা সমাক্ষীয় পাতলা চোঙ বিবেচনা করি।

এই পাতলা চোঙের প্রস্থচ্ছেদ = $2\pi x dx$, আয়তন = $2\pi x \times dx \times l$

এখন, ভর = আয়তন × ঘনত্ব

$$= 2\pi x \times dx \times l \times \frac{M}{\pi r^2 l}$$

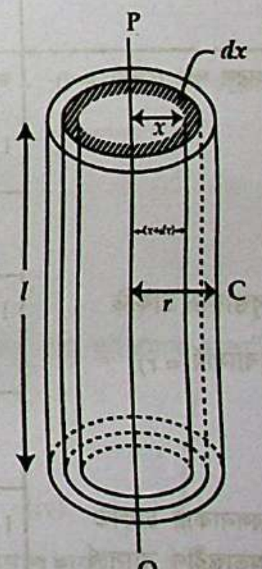
$$= \frac{2Mxdx}{r^2}$$

dx বিস্তারের এই চোঙটি পাতলা হেতু এর প্রতিটি কণা PQ হতে x দূরে বিবেচনা করা যায়। কাজেই PQ-এর সাপেক্ষে এই পাতলা চোঙের জড়তার ভ্রামক

$$= \frac{2Mxdx}{r^2} \times x^2 = \frac{2M}{r^2} x^3 dx$$

সমগ্র চোঙটিকে সমাক্ষীয় অনুরূপ অনেকগুলো পাতলা ফাঁপা চোঙের সমন্বয়ে গঠিত বিবেচনা করা যায়।

কাজেই $x = 0$ ও $x = r$ এই সীমার মধ্যে উপরোক্ত ফাঁপা চোঙের জড়তার ভ্রামককে সমাকলন করলে নিজ অক্ষ PQ-এর সাপেক্ষে সমগ্র চোঙটির জড়তার ভ্রামক I পাওয়া যাবে।



চিত্র ৪.৩৫

$$\therefore I = \int_0^r \frac{2M}{r^2} x^3 dx = \frac{2M}{r^2} \int_0^r x^3 dx = \frac{2M}{r^2} \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^r$$

$$= \frac{2M}{4r^2} \left[r^4 - 0\right]$$

$$\therefore I = \frac{1}{2} Mr^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.47)$$

এক্ষেত্রে চক্রগতির ব্যাসার্ধ K হলে,

$$MK^2 = \frac{1}{2}Mr^2$$

$$\therefore K = \frac{r}{\sqrt{2}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.48)$$

কাজ : (i) M ভরের এবং l দৈর্ঘ্যের সরু ও সুষম দণ্ডের দৈর্ঘ্যের মধ্য বিন্দু দিয়ে, (ii) এক প্রান্ত দিয়ে গমনকারী অক্ষের সাপেক্ষে (iii) M ভরের এবং r ব্যাসার্ধের পাতলা চাকতির কেন্দ্র দিয়ে পৃষ্ঠের অভিলম্বভাবে গমনকারী এবং (iv) M ভর ও r ব্যাসার্ধের নিরেট সিলিন্ডারের নিজ অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ কত ?

(i) সরু ও সুষম দণ্ডের মধ্য বিন্দুর ঘূর্ণায়মানের জন্য জড়তার ভ্রামক $\frac{Ml^2}{12}$, জড়তার ভ্রামক $\frac{l}{\sqrt{12}}$;

(ii) সরু ও সুষম দণ্ডের প্রান্ত বিন্দু দিয়ে ঘূর্ণায়মানের জন্য জড়তার ভ্রামক $\frac{Ml^2}{3}$;

(iii) M ভরের ও r ব্যাসার্ধের পাতলা চাকতির জন্য জড়তার ভ্রামক $\frac{1}{2}Mr^2$, চক্রগতির ব্যাসার্ধ $\frac{r}{\sqrt{2}}$;

(iv) M ভরের ও r ব্যাসার্ধের নিরেট সিলিন্ডারের জড়তার ভ্রামক $\frac{1}{2}Mr^2$, চক্রগতির ব্যাসার্ধ $\frac{r}{\sqrt{2}}$.

৪·২৭ ঘূর্ণাক্ষের অবস্থান অনুযায়ী জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধের সমীকরণ

Equations of moment of inertia and radius of gyration with respect to location of rotational axes

বস্তু	ঘূর্ণাক্ষের অবস্থান অনুযায়ী জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ			
	ভরকেন্দ্রগামী লম্ব অক্ষ সাপেক্ষে		প্রান্তবিন্দুগামী লম্ব অক্ষ সাপেক্ষে	
সরল দণ্ড (দৈর্ঘ্য = l)	জড়তা ভ্রামক $I=\frac{l}{12}ml^2$	চক্রগতির ব্যাসার্ধ $K=\frac{l}{2\sqrt{3}}$	জড়তা ভ্রামক $I=\frac{1}{3}ml^2$	চক্রগতির ব্যাসার্ধ $K=\frac{l}{\sqrt{3}}$
	ভরকেন্দ্রগামী লম্ব অক্ষ সাপেক্ষে		কোনো ব্যাস সাপেক্ষে	
বৃত্তাকার চাকতি (ব্যাসার্ধ = r)	$I=\frac{1}{2}mr^2$	$K=\frac{r}{\sqrt{2}}$	$I=\frac{1}{4}mr^2$	$K=\frac{r}{2}$
	ভরকেন্দ্রগামী লম্ব অক্ষ সাপেক্ষে		কোনো ব্যাস সাপেক্ষে	
বেলনাকার চাকতি (অভ্যন্তরীণ ব্যাসার্ধ = r বহির্ব্যাসার্ধ = R)	$I=\frac{1}{2}m(R^2+r^2)$	$K=\sqrt{\frac{R^2+r^2}{2}}$	$I=\frac{1}{4}(R^2+r^2)$	$K=\frac{(R^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}{2}$
	ভরকেন্দ্রগামী লম্ব অক্ষ সাপেক্ষে		প্রস্থের সঙ্গে সমান্তরাল ভরকেন্দ্রগামী অক্ষ সাপেক্ষে	
আয়তাকার পাত (দৈর্ঘ্য = l, প্রস্থ = b)	$I=\frac{1}{12}(l^2+b^2)$	$K=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l^2+b^2}{3}}$	$I=\frac{1}{12}ml^2$	$K=\frac{l}{2\sqrt{3}}$
	চোঙের অক্ষ সাপেক্ষে		দৈর্ঘ্যের সাথে লম্ব ভরকেন্দ্রগামী অক্ষ সাপেক্ষে	
নিরেট চোঙ (দৈর্ঘ্য = l, ব্যাসার্ধ = r)	$I=\frac{1}{2}mr^2$	$K=\frac{r}{\sqrt{2}}$	$I=m\left(\frac{r^2}{4}+\frac{l^2}{12}\right)$	$K=\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{l^2}{12}}$

বস্তু	ঘূর্ণাক্ষের অবস্থান অনুযায়ী জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ			
	ভরকেন্দ্রগামী লম্ব অক্ষ সাপেক্ষে		কোনো ব্যাস সাপেক্ষে	
বৃত্তাকার রিং (ব্যাসার্ধ = r)	$I = mr^2$	$K = r$	$I = \frac{1}{2}mr^2$	$K = \frac{r}{\sqrt{2}}$
	কোনো ব্যাস সাপেক্ষে		কোনো স্পর্শক সাপেক্ষে	
পাতলা গোলীয় খোলক (ব্যাসার্ধ = r)	$I = \frac{2}{3}mr^2$	$K = \sqrt{\frac{2}{3}}\,r$	$I = \frac{5}{3}mr^2$	$K = \sqrt{\frac{5}{3}}\,r$

৪.২৮ ব্যবহারিক
Experimental

পরীক্ষণের নাম : পিরিয়ড : ২	একটি ফ্লাই হুইলের জড়তার ভ্রামক নির্ণয় **Determination of moment of inertia of a fly wheel**

তত্ত্ব : মনে করি একটি চাকার কৌণিক বেগ ω এর ব্যাসার্ধ r হলে বস্তুটির রৈখিক বেগ $v = \omega r$। যদি চাকার জড়তার ভ্রামক I হয়, এবং চাকাটি অক্ষ দণ্ডের সাপেক্ষে ঘুরতে থাকলে তার

ঘূর্ণন গতিশক্তি, $E = \frac{1}{2}I\omega^2$ ... ... (i)

চাকাটির প্রতি ঘূর্ণনের জন্য ঘর্ষণের বিরুদ্ধে W পরিমাণ কাজ হয়। m ভরের বস্তু ভূমিতে পড়ার পূর্বে চক্রের ঘূর্ণন সংখ্যা n_1 হলে মোট কাজের পরিমাণ $= Wn_1$। m ভরের বস্তুটি h উচ্চতা হতে পড়লে তার

স্থিতিশক্তি $= mgh$ ... ... (ii)

আমরা জানি অক্ষ দণ্ডের স্থিতি = অক্ষ দণ্ডের গতিশক্তি + চাকার ঘূর্ণন গতিশক্তি + চাকার মোট কাজের পরিমাণ

বা, $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + Wn_1$

বা, $mgh = \frac{1}{2}m\,\omega^2r^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + Wn_1$ ... ... (iii)

অক্ষ দণ্ডের সাথে যুক্ত সুতার প্রান্তে m ভরের বস্তুটি অক্ষদণ্ড হতে বিচ্ছিন্ন হবার পর ঘূর্ণায়মান চাকাটি n_2 বার ঘুরার পর থেমে গেলে, ঘর্ষণের বিরুদ্ধে ব্যয়িত কাজ $= Wn_2$

$\therefore\ Wn_2 = \frac{1}{2}I\omega^2$

বা, $W = \frac{I\omega^2}{2n_2}$ ... ... (iv)

সমীকরণ (iii)-এ W এর মান বসিয়ে পাই,

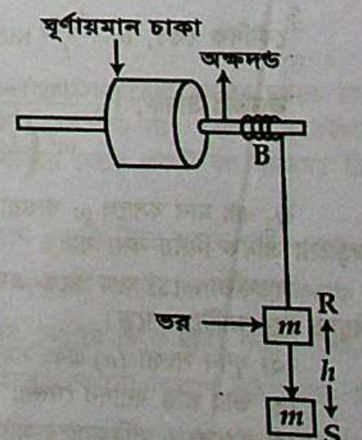
$$mgh = \frac{1}{2}m\omega^2r^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}\left(I\frac{\omega^2}{n_2}\right) \times n_1$$

বা, $mgh = \frac{1}{2}m\omega^2r^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\left(1 + \frac{n_1}{n_2}\right)$

বা, $2mgh = m\omega^2r^2 + I\omega^2\left(1 + \frac{n_1}{n_2}\right)$

বা, $I\omega^2\left(1 + \frac{n_1}{n_2}\right) = 2mgh - m\omega^2r^2$

$$\therefore\ I = \frac{2mgh - m\omega^2r^2}{\omega^2\left(1 + \frac{n_1}{n_2}\right)} \quad \text{... ... (v)}$$



চিত্র ৪.৩৬

যন্ত্রপাতি : একটি লোহার অক্ষ দণ্ড, ভারী চাকা, কিছু রশি, একটি ভর, স্টপওয়াচ, মিটার স্কেল, স্লাইড ক্যালিপার্স।

যন্ত্রের বর্ণনা : ঘূর্ণায়মান একটি ভারী চাকা একটি অক্ষদণ্ড B-এর ওপর সুতার পাক দিয়ে অক্ষদণ্ডের সাথে এক প্রান্তে বেঁধে অন্য প্রান্তে m ভরের বস্তুকে বেঁধে চাকাকে ঘুরানো যায়।

পরীক্ষা পদ্ধতি : (১) প্রথমে স্লাইড ক্যালিপার্সের সাহায্যে চাকার অক্ষদণ্ডের ব্যাসার্ধ নির্ণয় করা হয়।

(২) এরপর ঘূর্ণন সংখ্যা নির্ণয়ের জন্য অক্ষদণ্ডের ওপর চক দিয়ে দাগ দিয়ে চাকা ঘুরিয়ে অক্ষদণ্ডের ওপর সুতাকে প্যাচানো হয় এবং সুতার অপর প্রান্তে ভর বেঁধে R অবস্থান থেকে ছেড়ে দিলে চাকাটি কয়েক বার ঘুরার পর সুতাসহ ভরটি S অবস্থানে পতিত হবে। এই অবস্থায় ভর S বিন্দু স্পর্শ করতে চাকাটি কত বার ঘুরল তার সংখ্যা n_1 এবং সময় নির্ণয় করতে হয়।

এখন সুতাকে পুনরায় অক্ষ দণ্ডের ওপর প্যাচ দিয়ে সুতার অপর প্রান্তে ভর বেঁধে R অবস্থানে এনে ভরকে নিচে নামতে দিতে হবে যে সময়ে ভরটি মাটি স্পর্শ করে সেই মুহূর্তে স্টপ ওয়াচ চালু করতে হবে। অক্ষ দণ্ডটি স্থির অবস্থায় আসার সঙ্গে সঙ্গে স্টপ ওয়াচ বন্ধ করা হয়। মোট সময় এবং চাকাটি কত বার ঘুরে স্থির হলো অর্থাৎ ঘূর্ণন সংখ্যা (n_2) গণনা করা হয়।

ছক–১ : অক্ষদণ্ড (B) এর ব্যাসার্ধ (r) নির্ণয়

পর্যবেক্ষণ সংখ্যা	প্রধান স্কেল পাঠ সেমি m	ভার্নিয়ার পাঠ সংখ্যা n	ভার্নিয়ার ধ্রুবক সেমি c	ভার্নিয়ার স্কেল পাঠ সেমি $F = c \times n$	মোট পাঠ সেমি $D = (m + F)$	গড় ব্যাস D সেমি	ব্যাসার্ধ $r = \frac{D}{2}$ সেমি
1							
2							
3							

ছক–২ : সময় ও ঘূর্ণন সংখ্যা নির্ণয়

পর্যবেক্ষণ	ঘূর্ণায়মান চক্র A-এর ঘূর্ণন সংখ্যা n_2	ঘূর্ণনকাল t sec	গড় ঘূর্ণন সংখ্যা n_2	গড় ঘূর্ণন সংখ্যার গড় সময় t sec
1				
2				
3				

হিসাব ও গণনা : ঘূর্ণন অক্ষটি n_2 বার ঘুরতে যদি t সময় নেয় তাহলে গড় কৌণিক বেগ, $\omega_2 = \frac{2\pi n_2}{t}$

দণ্ডটি ω কৌণিক বেগ হতে সমমন্দনে শূন্য বেগ লাভ করে ফলে তার গড় কৌণিক বেগ,

$$\omega_2 = \frac{\omega + 0}{2} = \frac{\omega}{2} \qquad \text{বা, } \frac{2\pi n_2}{t} r = \frac{\omega}{2}$$

কৌণিক বেগ, $\omega = \frac{4\pi n_2}{t}$ rad s^{-1}

জড়তার ভ্রামক, $I = \dfrac{2mgh - m\omega^2 r^2}{\omega^2\left(1 + \frac{n_1}{n_2}\right)} = \ldots\ldots g\text{-cm}^2 = \ldots\ldots\ldots \text{kg-m}^2$

n_2 এর মান বসালে ω পাওয়া যায়। m, ω, r, h, n_1 ও n_2 এবং g এর মান (v) নং সমীকরণে বসিয়ে ভারী চাকার জড়তার ভ্রামক নির্ণয় করা যায়।

সতর্কতা : (১) অক্ষ দণ্ডে এমনভাবে সুতা বাঁধতে হবে যাতে চাকা ঘুরার পর পাক খুলতে খুলতে অক্ষ দণ্ড থেকে বিচ্যুত হয়ে মাটিতে পড়ে।

(২) ঘূর্ণন সংখ্যা (n) এবং সময় (t) সঠিকভাবে নির্ণয় করতে হবে।

(৩) ভার প্রান্ত বরাবর দেওয়া দাগ দিয়ে ওই স্থান হতে উচ্চতা h নির্ণয় করতে হবে।

(৪) উচ্চতা h সঠিকভাবে মাপা উচিত।

(৫) রশি বা সুতা হালকা হতে হবে এবং দণ্ডের উপর প্যাঁচ সমভাবে হতে হবে।

৪.২৯ কৌণিক গতির জন্য নিউটনের সূত্র
Newton's laws for angular motion

রৈখিক গতির ক্ষেত্রে নিউটনের গতিসূত্রগুলো পূর্বের অধ্যায়ে আলোচনা করা হয়েছে। বস্তুর কৌণিক গতির ক্ষেত্রেও নিউটনের গতিসূত্রগুলো ভিন্নরূপে প্রযোজ্য। নিম্নে সূত্রগুলো বিবৃত ও ব্যাখ্যা করা হলো।

(১) প্রথম সূত্র : **কোনো বস্তুর ওপর টর্ক ক্রিয়াশীল না হলে স্থির বস্তু স্থির অবস্থানে এবং ঘূর্ণনরত বস্তু সমকৌণিক বেগে ঘুরতে থাকবে।**

ব্যাখ্যা : সূত্রানুযায়ী বাহ্যিক টর্কের ক্রিয়াতেই কেবলমাত্র বস্তুর কৌণিক বেগের তথা কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তন সম্ভব। টর্কের ক্রিয়া ছাড়া বস্তুর কৌণিক বেগ হবে সমকৌণিক বেগ। আর বস্তু আপনা হতেই তার কৌণিক ভরবেগের ওপর প্রভাব ফেলতে পারে না। কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনকারীই হচ্ছে টর্ক। সুতরাং, বস্তুর ওপর টর্কের লব্ধি শূন্য হলে ওই বস্তুর কৌণিক ত্বরণও শূন্য হবে।

(২) দ্বিতীয় সূত্র : **ঘূর্ণনরত কোনো বস্তুর কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনের হার ওই বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল টর্কের সমানুপাতিক এবং টর্ক যে দিকে ক্রিয়া করে কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনও ওই দিকে ঘটে।**

ব্যাখ্যা : সূত্রানুযায়ী কৌণিক ভরবেগ $L = I\omega$ -এর পরিবর্তনের হার $\frac{dL}{dt}$ প্রযুক্ত টর্ক τ-এর সমানুপাতিক।

অর্থাৎ, $\tau \propto \frac{dL}{dt} \propto I\frac{d\omega}{dt}$

$\propto I\alpha$

বা, $\tau = KI\alpha$

এখানে K একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক। এস. আই. এককে $K = 1$

$$\therefore \quad \vec{\tau} = I\vec{\alpha} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.49)$$

টর্ক τ-এর অভিমুখেই কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তন dL সংঘটিত হবে।

বর্ণনা অনুযায়ী কৌণিক ত্বরণের উৎসই টর্ক।

তৃতীয় সূত্র : **প্রত্যেক ক্রিয়ামূলক টর্কের একটি সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়ামূলক টর্ক আছে।**

ব্যাখ্যা : বস্তু A অপর একটি বস্তু B-এর উপর $\vec{\tau}_{12}$ টর্ক প্রয়োগ করলে B বস্তুও A-এর ওপর সমান ও বিপরীত-মুখী টর্ক $\vec{\tau}_{21}$ প্রয়োগ করবে। এখানে A কর্তৃক B-এর উপর প্রযুক্ত টর্ক $\vec{\tau}_{12}$ ক্রিয়ামূলক টর্ক ও B কর্তৃক A-এর ওপর প্রযুক্ত টর্ক $\vec{\tau}_{21}$ হচ্ছে প্রতিক্রিয়ামূলক টর্ক।

$$\therefore \quad \vec{\tau}_{12} = -\vec{\tau}_{21} \text{ ও } \tau_{12} = \tau_{21}$$

প্রতিক্রিয়ামূলক টর্কের দিক ক্রিয়ামূলক টর্কের বিপরীতমুখি, তাই ঋণাত্মক চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে।

৪.৩০ কেন্দ্রমুখি বল ও কেন্দ্রবিমুখি বল
Centripetal force and centrifugal force

৪.৩০.১ কেন্দ্রমুখি বল
Centripetal force

নিউটনের প্রথম সূত্র অনুযায়ী গতি জড়তার জন্য সচল বস্তু সব সময় সমবেগে সরলরেখা বরাবর চলতে চায়। কাজেই বাইরে থেকে কোনো বল ক্রিয়া না করলে বস্তুর গতির অভিমুখ আপনা আপনি পাল্টায় না। বৃত্তপথে আবর্তনরত বস্তুর গতির অভিমুখ প্রতি মুহূর্তে পাল্টে যায়; সুতরাং ওই বস্তুর উপর নিশ্চয়ই বাইরে থেকে একটি বল সবসময় ক্রিয়া করে।

আগেই আমরা দেখেছি যে, m ভরের কোনো বস্তু যখন r ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে v দ্রুতি নিয়ে ঘুরতে থাকে তখন ওই বস্তুর ওপর সবসময় কেন্দ্রাভিমুখী ত্বরণ $\frac{v^2}{r}$ ক্রিয়া করে। নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী একটি বল ক্রিয়া করায় এই ত্বরণ সৃষ্টি হচ্ছে। স্পষ্টত এই বলও কেন্দ্রাভিমুখী হবে অর্থাৎ ব্যাসার্ধ বরাবর বৃত্তের কেন্দ্রের দিকে ক্রিয়া করবে এবং এর মান বস্তুর ভর ও অভিকেন্দ্র ত্বরণের গুণফলের সমান অর্থাৎ $\frac{mv^2}{r}$ -এর সমান হবে। কোনো কারণে এই বলের ক্রিয়া বন্ধ হলে বস্তুটিকে বৃত্তপথে ঘোরাবার জন্য কোনো বল থাকবে না। তখন বস্তুটি বৃত্তের স্পর্শক বরাবর ছুটে যাবে এবং সমবেগে সরলরেখায় চলতে থাকবে।

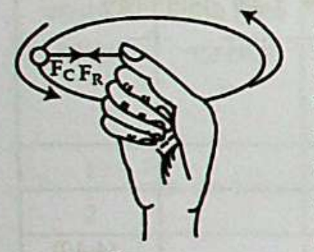
সংজ্ঞা : যে বলের ক্রিয়ায় কোনো বস্তু সমদ্রুতিতে বৃত্তপথে চলতে থাকে এবং যে বল সবসময় বস্তুর গতিপথের সঙ্গে লম্বভাবে ভেতরের দিকে অর্থাৎ বৃত্তের কেন্দ্রাভিমুখে ক্রিয়া করে তাকে কেন্দ্রমুখি বা অভিকেন্দ্র বল (Centripetal force) বলা হয়।

m ভরের বস্তু r ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে সমদ্রুতি v নিয়ে চলতে থাকলে অভিকেন্দ্র বলের মান $\frac{mv^2}{r}$ হয়। কৌণিক বেগে প্রকাশ করলে অভিকেন্দ্র বলের মান হয় $m\omega^2 r$.

কেন্দ্রমুখি বা অভিকেন্দ্র বল একটি কার্যহীন বল

অভিকেন্দ্র বল সব সময় গতিপথের লম্বদিকে ক্রিয়া করায় ওই বলের অভিমুখে বস্তুর কোনো সরণ হয় না। সুতরাং অভিকেন্দ্র বল কোনো কাজ করে না। এই কারণে অভিকেন্দ্র বলকে কার্যহীন বল (no-work force) বলে।

কেন্দ্রবিমুখি প্রতিক্রিয়া : বৃত্তপথে আবর্তনরত বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল অভিকেন্দ্র বল বাইরে থেকে প্রযুক্ত হয়। বাইরে থেকে যে বস্তু ওই বল প্রয়োগ করে তার ওপর প্রথম বস্তুটি নিউটনের তৃতীয় সূত্রানুযায়ী সমান ও বিপরীতমুখি বল প্রয়োগ করে। স্পষ্টত এই প্রতিক্রিয়া বল বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাসার্ধ বরাবর বাইরের দিকে ক্রিয়া করে। একে কেন্দ্রবিমুখি প্রতিক্রিয়া (centrifugal reaction) বলে।



চিত্র ৪.৩৭

মনে কর, একটি পাথরের টুকরাকে সুতোয় বেঁধে বৃত্তাকার পথে ঘোরানো হচ্ছে [চিত্র ৪.৩৭]। পাথরটির উপর সবসময় সুতোর মাধ্যমে অভিকেন্দ্র বল F_C ক্রিয়া করছে। এখানে সুতোর টানই হলো প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বল। সুতোটি হঠাৎ ছিঁড়ে গেলে অভিকেন্দ্র বল F_C-এর ক্রিয়া বন্ধ হয়ে যায়; সঙ্গে সঙ্গে পাথরটি বৃত্তের স্পর্শক বরাবর সরলরেখায় সমবেগে ছুটে যায়। বৃত্তাকার পথে ঘুরবার সময় পাথরটি হাতের উপর সমান ও বিপরীতমুখি অপকেন্দ্র প্রতিক্রিয়া F_R প্রয়োগ করে; ফলে হাতের উপর কেন্দ্র থেকে বাইরের দিকে একটি টান অনুভূত হয়। অন্যান্য ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়ার মতো এখানেও F_C এবং F_R একই বস্তুর উপর ক্রিয়া করে না; দুটি পৃথক বস্তু যেমন, যথাক্রমে পাথর খণ্ড ও হাতের উপর ক্রিয়া করে। সুতো ছিঁড়ে গেলে দুটি বলই একসঙ্গে লোপ পায়।

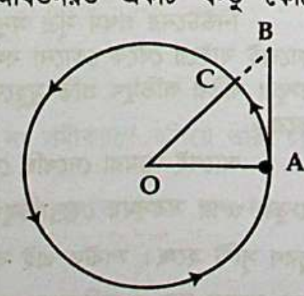
অভিকেন্দ্র বলের আরও অনেক উদাহরণ দেয়া যায়। সৌর জগতের প্রতিটি গ্রহ সূর্যের চারদিকে আবর্তন করে। সূর্য ঐ সব গ্রহের ওপর যে মহাকর্ষীয় আকর্ষণ প্রয়োগ করে, তা গ্রহগুলির উপর অভিকেন্দ্র বল রূপে ক্রিয়া করে।

নিজে কর : বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণনশীল বস্তুর কেন্দ্রমুখি বল ব্যাসার্ধের পরিবর্তনের সাথে পরিবর্তিত হয়—ব্যাখ্যা কর।

৪.৩০.২ কেন্দ্রবিমুখি বল বা অপকেন্দ্র বল
Centrifugal force

আগেই আমরা দেখেছি যে বৃত্তপথে আবর্তনরত প্রতিটি বস্তুর ওপর সবসময় বৃত্তের কেন্দ্রমুখি একটি বল অর্থাৎ অভিকেন্দ্র বল ক্রিয়া করে। পৃথিবী সূর্যকে প্রদক্ষিণ করে। এখানে পৃথিবীর ওপর সূর্যের মহাকর্ষীয় আকর্ষণ বল হলো অভিকেন্দ্র বল। স্বাভাবিকভাবে প্রশ্ন উঠতে পারে— অভিকেন্দ্র বল কোন বলের দ্বারা প্রশমিত হয় ? কোন বাধার জন্য পৃথিবী সোজা সূর্যের দিকে ছুটে যায় না ? আপাতদৃষ্টিতে মনে হয় যে সূর্যের আকর্ষণের সমান ও বিপরীতমুখি আরেকটি বল পৃথিবীর ওপর ক্রিয়া করছে। **এই আপাত প্রতীয়মান বলকে কেন্দ্রবিমুখি বল বা অপকেন্দ্র বল (centrifugal force) বলা হয়।** স্পষ্টত অপকেন্দ্র বল অভিকেন্দ্র বলের সমান ও বিপরীতমুখি। কিন্তু মনে রাখতে হবে যে, অপকেন্দ্র বলের কোনো বাস্তব অস্তিত্ব নেই। তাই প্রকৃতপক্ষে অভিকেন্দ্র বল কোনো বাস্তব বলের (real force) দ্বারা প্রতিমিত হচ্ছে না। অভিকেন্দ্র বা অপকেন্দ্র বল একটি অলীক বল।

বৃত্তপথে আবর্তনরত সব বস্তুরই বৃত্তের স্পর্শক বরাবর ছুটে যাওয়ার প্রবণতা থাকে; যেমন ঘুরন্ত পাথরের উদাহরণে সুতো ছিঁড়ে গেলে পাথরটি স্পর্শক বরাবর ছুটে যায়। মনে করি, বৃত্তপথে আবর্তনরত একটি বস্তু কোনো মুহূর্তে A বিন্দুতে অবস্থান করছে [চিত্র ৪.৩৮]। যদি বস্তুর ওপর বৃত্তের কেন্দ্র O এর দিকে কোনো অভিকেন্দ্র বল ক্রিয়া না করত, তাহলে বস্তুটি অল্প সময় পর স্পর্শক বরাবর অন্য কোনো বিন্দু B-তে পৌঁছত। কিন্তু অভিকেন্দ্র বল সবসময় ক্রিয়া করে বলে বস্তুটি O কেন্দ্রের দিকে কিছুটা এগিয়ে আসে এবং অবশেষে B-এর বদলে বৃত্তপথের আরেকটি বিন্দু C-তে পৌঁছায়। অর্থাৎ অভিকেন্দ্র বলের প্রভাবেই প্রতিমুহূর্তে বস্তুটি বৃত্তপথে ঘুরতে বাধ্য হয়। সুতরাং বস্তুর ঘূর্ণন গতিতে অভিকেন্দ্র বলের ক্রিয়া সবসময় বজায় থাকে। কাজেই অভিকেন্দ্র বল কোনো বাস্তব বল দ্বারা প্রতিমিত হয় না। এজন্য অভিকেন্দ্র বলের বিপরীত দিকে ক্রিয়ারত অপকেন্দ্র বলের উপস্থিতিকে আপাত সত্য বলে ধরা হয়। তাই একে অলীক বল (pseudo force) বলা হয়।



চিত্র ৪.৩৮

সংজ্ঞা : সমদ্রুতিতে বৃত্তপথে আবর্তনরত বস্তুর ওপর অভিকেন্দ্র বলের সমান ও বিপরীতমুখি অর্থাৎ কেন্দ্র থেকে বাইরের দিকে একটি অলীক বল ক্রিয়া করে। একে কেন্দ্রবিমুখি বা অপকেন্দ্র বল বলে।

৪.৩১ কেন্দ্রমুখি এবং কেন্দ্রবিমুখি বলের ব্যবহার
Applications of centripetal and centrifugal forces

ব্যবহারিক দৃষ্টান্ত
Practical examples

১। রাস্তার ব্যাঙ্কিং (Banking of roads) :

(ক) অনুভূমিক রাস্তায় গাড়ির বাঁক নেয়া : মনে করি, অনুভূমিক রাস্তার মোড়ে একটি গাড়ি বাঁক নিচ্ছে। এখানে গাড়ির চাকা এবং রাস্তার মধ্যে ঘর্ষণ বল বাঁক নেয়ার জন্য প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বল সরবরাহ করে। এই ঘর্ষণ স্থিতি ঘর্ষণ এবং স্বনিয়ন্ত্রক। বাঁক নেয়ার সময় গাড়ির চাকাগুলি বাইরের দিকে ছিটকে যেতে চায়। ঘর্ষণ বল রাস্তার বাঁকের কেন্দ্রাভিমুখে ক্রিয়া করে ফলে গাড়ি ছিটকে যাওয়ার প্রবণতাকে বাধা দেয়। গাড়িটি খুব দ্রুত বেগে চলতে চলতে বাঁক নিলে প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বলের মানও খুব বেশি হয়। কিন্তু ঘর্ষণ বলের মান একটি নির্দিষ্ট সীমার বেশি হতে পারে না। তাই গাড়ি খুব দ্রুতগতিতে বাঁক নিলে ঘর্ষণ বল প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বল সরবরাহ করতে পারে না। ফলে গাড়িটি রাস্তা থেকে ছিটকে যায়।

মনে করি, m ভরের একটি গাড়ি v দ্রুতি নিয়ে r ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তপথে বাঁক নিচ্ছে। গাড়ির চাকা এবং রাস্তার ক্রিয়াশীল মোট ঘর্ষণ বল F হলে গাড়িটি নিরাপদে বাঁক নেয়ার শর্ত হবে

$$F = \frac{mv^2}{r}$$

F-এর মান যত বেশি হবে গাড়িটি তত বেশি বেগে বাঁক নিতে পারবে। কিন্তু F-এর সর্বোচ্চ মান হলো μmg ; মানে μ হলো গাড়ির চাকা এবং রাস্তার মধ্যে স্থিতি ঘর্ষণ গুণাঙ্ক। অর্থাৎ, $F \le \mu mg$.

সুতরাং, গাড়িটি নিরাপদে বাঁক নেয়ার শর্ত হলো

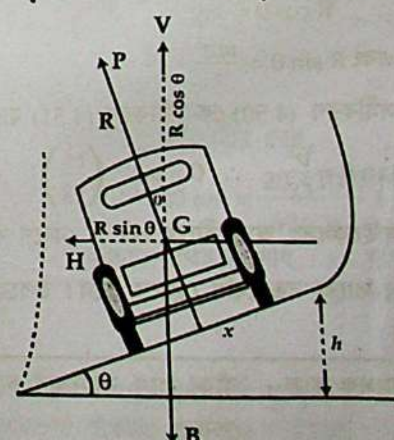
$$\frac{mv^2}{r} \le \mu mg$$

বা, $v^2 \le \mu rg$

বা, $v \le (\mu rg)^{1/2}$

গাড়ির দ্রুতি এই মান থেকে অর্থাৎ $(\mu rg)^{1/2}$ থেকে বেশি হলে গাড়ি রাস্তা থেকে ছিটকে যাবে।

(খ) ব্যাঙ্কিং যুক্ত রাস্তায় গাড়ির বাঁক নেয়া : অনুভূমিক রাস্তায় গাড়ি জোরে বাঁক নিলে গাড়ির চাকা এবং রাস্তার মধ্যে ক্রিয়াশীল ঘর্ষণ বল চাকার ক্ষতি করে। এই শক্তি কমাবার জন্য এবং গাড়ি ছিটকে গিয়ে দুর্ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা রোধ করার জন্য প্রতিটি বাঁকে রাস্তার বাইরের দিক ভেতরের দিকের চেয়ে কিছুটা উঁচু করা হয় অর্থাৎ রাস্তাটি বাঁকের কেন্দ্রের দিকে একটু ঢালু করা থাকে। একে রাস্তার 'ব্যাঙ্কিং' বলে। এর ফলে গাড়ি বাঁক নেয়ার জন্য প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বলের একাংশ গাড়ির ওপর রাস্তা দ্বারা প্রযুক্ত প্রতিক্রিয়া বলের অনুভূমিক উপাংশ যোগান দেয়;. বাকি অংশ ঘর্ষণ থেকে আসে। ব্যাঙ্কিং কোণের মান সঠিক হলে প্রতিক্রিয়ার অনুভূমিক উপাংশ থেকেই প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বল পাওয়া যায়; তখন ঘর্ষণ বলের কোনো ভূমিকা থাকে না।



চিত্র ৪.৩৯

সংজ্ঞা : অনুভূমিক রাস্তায় হঠাৎ বাঁক নেওয়ার সময় গাড়ি যাতে ছিটকে গিয়ে দুর্ঘটনায় না পড়ে সেজন্য প্রতিটি বাঁকে রাস্তার বাইরের দিক ভিতরের দিকের চেয়ে কিছুটা উঁচু করে তৈরি করা হয়। একে রাস্তার ব্যাঙ্কিং বলে।

এখানে গাড়ির ওপর দুটি বল ক্রিয়া করছে— (i) গাড়ির ওজন W খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করে এবং (ii) রাস্তা দ্বারা প্রযুক্ত প্রতিক্রিয়া R রাস্তার তলের সঙ্গে লম্বভাবে উপরের দিকে ক্রিয়া করে [চিত্র ৪.৩৯]। মনে করি, রাস্তার তল অনুভূমিক তলের সঙ্গে θ কোণে আনত; এই θ-কে ব্যাঙ্কিং কোণ (angle of banking) বলে। প্রতিক্রিয়া

R-এর উল্লম্ব উপাংশ R cos θ গাড়ির ওজন W-কে প্রতিমিত করে এবং অনুভূমিক উপাংশ R sin θ প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বলের যোগান দেয়। গাড়ির ভর m, দ্রুতি v এবং রাস্তার বাঁকের ব্যাসার্ধ r হলে

$$R \sin\theta = \frac{mv^2}{r}$$

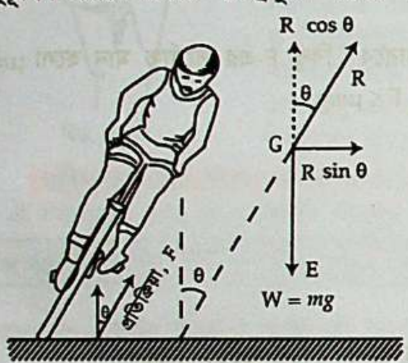
$$R \cos\theta = W = mg$$

ভাগ করে পাই, $\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$ ... ... (4.50)

এই সমীকরণ থেকে সঠিক ব্যাঙ্কিং কোণের মান নির্ণয় করা যায়। এই মান গাড়ির দ্রুতি v-এর ওপর নির্ভর করে; এজন্য গাড়ির বেগের কেবলমাত্র একটি নির্দিষ্ট মানের জন্যই রাস্তার বাঁকে সঠিকভাবে ব্যাঙ্কিং করা যায়।

বর্তমানে আধুনিক হাইওয়ের (highway) প্রতিটি বাঁকে দুর্ঘটনা এড়াবার জন্য ব্যাঙ্কিং করা হয়। রেললাইনের বাঁকেও ব্যাঙ্কিং করা হয়; বাইরের লাইনটিকে ভেতরের লাইন থেকে উঁচু করে বসানো হয়। প্রতিটি বাঁকের মুখে সর্বোচ্চ দ্রুতিসীমা লেখা বোর্ড টাঙানো থাকে; ফলে চালকরা এই সীমার বেশি বেগে গাড়ি চালাবার বিপদ সম্পর্কে সজাগ থাকেন। তাই দুর্ঘটনার সম্ভাবনা কমে যায়।

২। **সাইকেল আরোহীর বাঁক নেওয়া :** কোনো সাইকেল আরোহীর বাঁক নেওয়ার ঘটনাও আমরা অনুরূপভাবে আলোচনা করতে পারি। বাঁক নেওয়ার সময় সাইকেলসহ আরোহী আপনা আপনিই ভেতরের দিকে অর্থাৎ রাস্তার বাঁকের কেন্দ্র যেদিকে সেদিকে ঝুঁকে পড়ে [চিত্র ৪.৪০]। বৃত্তাকার পথে সাইকেলসহ আরোহীকে বৃত্তের কেন্দ্রের দিকে অনুভূমিক করতে একটি কেন্দ্রমুখি বলের প্রয়োজন হয়। এই বলের যেকোনো দিকে সাইকেলসহ আরোহীকে বৃত্তের কেন্দ্রের দিকে হেলতে হয়। ফলে সাইকেলসহ আরোহী আনতভাবে রাস্তার উপর চাপ দেয়; অতএব রাস্তার প্রতিক্রিয়া R অনুভূমিক তলের সঙ্গে θ কোণ করে সাইকেলের ওপর প্রযুক্ত হয়। এই প্রতিক্রিয়ার অনুভূমিক উপাংশই প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বলের যোগান দেয়। যদি বাঁকের মুখে ভারসাম্য রক্ষা করার জন্য সাইকেলসহ আরোহী উল্লম্ব রেখার সঙ্গে θ কোণ করে ভেতরের দিকে ঝোঁকে তাহলে প্রতিক্রিয়া বল R এর উল্লম্ব এবং অনুভূমিক উপাংশ হবে R cos θ এবং R sin θ। প্রতিক্রিয়ার এই উল্লম্ব উপাংশ আরোহীসমেত সাইকেলের ওজন mg-কে প্রশমিত করে আর অনুভূমিক উপাংশই প্রয়োজনীয় কেন্দ্রমুখি বল $\frac{mv^2}{r}$ সরবরাহ করে।



চিত্র ৪.৪০ : সাইকেল আরোহীর বাঁক নেওয়া।

$\therefore \quad R\cos\theta = mg$ ... ... (4.51)

এবং $R\sin\theta = \frac{mv^2}{r}$

সমীকরণ (4.50)-কে সমীকরণ (4.51) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\tan\theta = \frac{v^2}{rg} \quad \therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{rg}\right)$ ... ... (4.52)

সাইকেলসহ আরোহীকে এই θ কোণে বাঁক নিতে হবে। আরোহীর বেগ যত বেশি হবে বাঁকের ব্যাসার্ধ তত কম হবে এবং তাকে তত বেশি হেলতে হবে। উপরোক্ত সমীকরণ থেকে সাইলেকসহ আরোহীর বেগ $v = \sqrt{rg \tan\theta}$ নির্ণয় করা যায়।

অনুধাবনমূলক কাজ : বাঁকা পথে সাইকেল চালাতে হলে সাইকেলসহ আরোহীকে বৃত্তের কেন্দ্রের দিকে হেলতে হয় কেন ?

সোজা পথে বাঁক নিতে গেলে উল্টে যাওয়ার সম্ভাবনা থাকে। বৃত্তাকার পথে সাইকেলসহ আরোহীকে বৃত্তের কেন্দ্রের দিকে অনুভূমিক বরাবর একটি কেন্দ্রমুখি বলের প্রয়োজন হয়। এই কেন্দ্রমুখি বলের যোগান দিতে সাইকেলসহ আরোহীকে বাঁকের কেন্দ্রের দিকে হেলতে হয়।

৩। **গ্রহগুলোর গতি (Motion of the planets) :** গ্রহগুলো নিজ নিজ কক্ষপথে সূর্যের চারদিকে আবর্তন করছে। এখানে প্রতিটি গ্রহের উপর ক্রিয়ারত সূর্যের মহাকর্ষীয় আকর্ষণ বলই হলো প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বল।

অনুরূপভাবে গ্রহের চারদিকে আবর্তনরত উপগ্রহের ক্ষেত্রে অভিকেন্দ্র বল হলো গ্রহের মহাকর্ষীয় আকর্ষণ বল।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.১৩

১। 50 m ব্যাসের বৃত্তাকার পথে কোনো মোটর সাইকেল আরোহী কত বেগে ছুটলে উল্লম্ব তলের সাথে তিনি 30° কোণে আনত থাকবেন ?

আমরা জানি,

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

বা, $v^2 = rg\tan\theta$

বা, $v = \sqrt{rg\tan\theta}$

$\therefore\ v = \sqrt{25\times 9{\cdot}8\times\tan(30°)}$

$= \sqrt{25\times 9{\cdot}8\times 0{\cdot}577}$

$= 11{\cdot}89\ \text{ms}^{-1}$

এখানে,

$r = \frac{50}{2}\text{m} = 25\text{m}$

$\theta = 30°$

$g = 9{\cdot}8\ \text{ms}^{-2}$

$v = ?$

২। 200 m ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বাঁকা পথে 50·4 kmh^{-1} বেগে গাড়ি চালাতে পথটি কত কোণে কাত করে রাখতে হবে ? রাস্তাটি 2 m প্রশস্থ হলে, বাইরের পার্শ্ব ভেতরের পার্শ্ব অপেক্ষা কত উঁচু হতে হবে ?

আমরা জানি,

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

বা, $\tan\theta = \frac{(14)^2}{200\times 9{\cdot}8} = 0{\cdot}1$

$\therefore\ \theta = \tan^{-1}(0{\cdot}1)$

$= 5{\cdot}7°$

θ-এর মান ক্ষুদ্র হলে,

$\tan\theta = \sin\theta = \frac{h}{x}$ লেখা যায়

এবং $\tan\theta = \frac{h}{x}\quad \therefore\ 0{\cdot}1 = \frac{h}{2}$

$\therefore\ h = 0{\cdot}1\times 2 = 0{\cdot}2\ \text{m}$

এখানে,

ব্যাসার্ধ, $r = 200\ \text{m}$

বেগ, $v = 50{\cdot}4\ \text{kmh}^{-1}$

$= \frac{50{\cdot}4\times 1000}{3600}\text{ms}^{-1}$

$= 14\ \text{ms}^{-1}$

$g = 9{\cdot}8\ \text{ms}^{-2}$

$\theta = ?$

$x = 2\text{m}$

উচ্চতা, $h = ?$

উত্তর : 5·7° কোণে কাত করে রাখতে হবে এবং রাস্তাটির বাইরের পার্শ্ব ভেতরের পার্শ্ব হতে 0·2 m উঁচু হতে হবে।

৩। একজন সাইকেল আরোহী ঘণ্টায় 20 km বেগে 18 m ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে চলছে। উল্লম্ব দিকে এর নতির পরিমাণ কত?

ধরি, উল্লম্ব দিকের সাথে সাইকেল আরোহীর নতি কোণ = θ

আমরা জানি,

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

$\therefore\ \tan\theta = \frac{(5{\cdot}55)^2}{18\times 9{\cdot}8}$

$= 0{\cdot}1746$

$\therefore\ \theta = \tan^{-1}(0{\cdot}1746)$

$= 9{\cdot}9°$

এখানে,

সাইকেল আরোহীর বেগ,

$v = 20\ \text{km} = \frac{20\times 1000}{60\times 60} = 5{\cdot}55\ \text{ms}^{-1}$

বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ, $r = 18\ \text{m}$

$g = 9{\cdot}8\ \text{ms}^{-2}$

৪। একটি রেল লাইনের বাঁকের ব্যাসার্ধ 250 m এবং রেল লাইনের পাতদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 1 m, ঘণ্টায় 50 km বেগে চলন্ত গাড়ির ক্ষেত্রে প্রয়োজনীয় ব্রেকিং এর জন্য বাইরের লাইনের পাতকে ভেতরের লাইনের পাত অপেক্ষা কতটুকু উঁচু করতে হবে ? [CUET Admission Test, 2013-14]

আমরা জানি,

$$\frac{h}{x} = \frac{v^2}{rg}$$

$\therefore\ h = \frac{v^2x}{rg} = \frac{(13{\cdot}89)^2\times 1}{250\times 9{\cdot}8}$

$= 0{\cdot}079\ \text{m}$

৫। একটি রাস্তা 100 m ব্যাসার্ধে বাঁক নিয়েছে। ওই স্থানে রাস্তাটি চওড়া 5 m এবং এর ভেতরের কিনারা হতে বাইরের কিনারা 50 cm উঁচু। সর্বোচ্চ কত বেগে ওই স্থানে নিরাপদে বাঁক নেয়া যাবে ?

[RUET Admission Test, 2015-16]

আমরা জানি,

$$\frac{h}{x} = \sin\theta = \tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

$$\frac{v^2}{rg} = \frac{h}{x}$$

$$\therefore\ v = \sqrt{\frac{hrg}{x}} = \sqrt{\frac{0.5\times 100\times 9.8}{5}} = 9.899\ \text{ms}^{-1}$$

৪.৩২ সংঘর্ষ
Collision

অতি অল্প সময়ের জন্য বৃহৎ কোনো বল ক্রিয়া করে বস্তুর গতির হঠাৎ ও ব্যাপক পরিবর্তন করাকে সংঘাত বা সংঘর্ষ বলে। ব্যাট দ্বারা ক্রিকেট বলকে আঘাত করা, ক্যারমের স্ট্রাইকার দ্বারা গুটিকে আঘাত করা, কামান হতে গোলা ছোঁড়া ইত্যাদি সংঘাত বা সংঘর্ষের উদাহরণ। একটি আলফা কণা যখন একটি স্বর্ণ নিউক্লিয়াসের খুবই নিকটে আসে তখন অল্প সময়ের জন্য উহারা পরস্পরকে প্রচণ্ড বলে বিকর্ষণ করে। এই ঘটনাকে সংঘর্ষ বলে।

সংঘর্ষ দুই প্রকার; যথা—

(ক) স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ (Elastic Collision) এবং

(খ) অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ (Inelastic Collision)

৪.৩২.১ স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ
Elastic collision

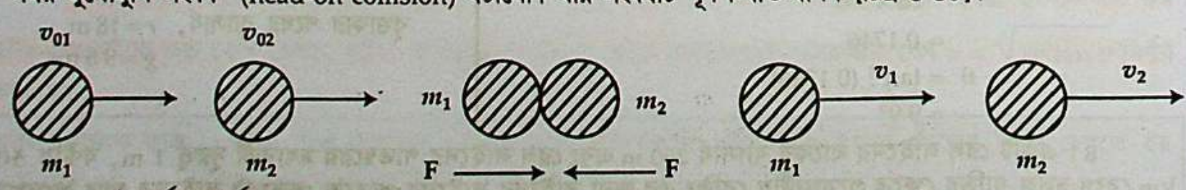
অণু বা পরমাণুর মধ্যে এবং ইলেকট্রন, প্রোটন, নিউট্রন ইত্যাদি কণার মধ্যে যখন সংঘর্ষ ঘটে তখন মোট গতিশক্তি সংরক্ষিত থাকে। এই ধরনের সংঘর্ষ পূর্ণ স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ বলে মনে করা যায়। এই ধরনের সংঘর্ষ একটি আদর্শ ঘটনা, বাস্তবে এ রকম সংঘর্ষ দেখতে পাওয়া যায় না। সুতরাং বলা যায়, যে সংঘর্ষের আগে ও পরে দুটি বস্তুর আপেক্ষিক বেগ অপরিবর্তিত থাকে অর্থাৎ বস্তুদ্বয়ের মোট গতিশক্তি সংরক্ষিত থাকে সেই সংঘর্ষকে পূর্ণ স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ বলে। এই সংঘর্ষের আগে বস্তু দুটির মোট গতিশক্তি যা ছিল সংঘর্ষের পরেও মোট গতিশক্তি একই থাকে।

উদাহরণ : দুটি কাচের বা ইস্পাতের বলের সংঘর্ষ প্রায় পূর্ণ স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ হয়।

আবার যে সংঘর্ষের পর বস্তু দুটি যুক্ত না হয়ে পরস্পর থেকে বিচ্ছিন্ন হয়ে যায়, কিন্তু সংঘর্ষের পর ওদের আপেক্ষিক বেগ সংঘর্ষের আগের আপেক্ষিক বেগের চেয়ে কম হয়, তাকে আংশিক স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ বলে। এই ধরনের সংঘর্ষে মোট গতিশক্তি সংরক্ষিত হয় না। সংঘর্ষের সময় কিছু পরিমাণ গতিশক্তি অন্য শক্তি মূলত তাপশক্তিতে রূপান্তরিত হয়। বাস্তবে এই ধরনের সংঘর্ষই সাধারণত ঘটে।

পূর্ণ স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে :

মনে করি m_1 এবং m_2 ভরের দুটি বস্তু একই সরলরেখায় একই দিকে যথাক্রমে v_{01} এবং v_{02} আদিবেগে চলার সময় মুখোমুখি সংঘর্ষ (head-on collision) ঘটালো। ধরি সংঘর্ষটি পূর্ণ স্থিতিস্থাপক [চিত্র ৪.৪১]।



চিত্র ৪.৪১: পূর্ণ স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ।

সংঘাতের সময় বস্তু দুটি পরস্পরের উপর বিপরীতমুখি ক্রিয়া প্রতিক্রিয়া বল F প্রয়োগ করে। F একটি ঘাত বল এবং এর ক্রিয়ায় প্রতিটি বস্তুরই ভরবেগের পরিবর্তন ঘটে। মনে করি, সংঘর্ষের পর বস্তু দুটি একই সরলরেখায় একই দিকে যথাক্রমে v_1 এবং v_2 বেগ নিয়ে চলতে থাকে। সংঘর্ষের আগে ও পরে বস্তু দুটির বেগের অভিমুখ একই দিকে ধরা হয়েছে। এখানে $v_{01} > v_{02}$ হলে বস্তু দুটির মধ্যে সংঘর্ষ ঘটবে এবং $v_2 > v_1$ হলে বস্তু দুটি সংঘর্ষের পর বিচ্ছিন্ন হয়ে যাবে।

এক্ষেত্রে সংঘর্ষের পূর্বে আপেক্ষিক বেগ = $v_{01} - v_{02}$
সংঘর্ষের পর আপেক্ষিক বেগ = $v_2 - v_1$
স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের সংজ্ঞানুযায়ী সংঘর্ষের আগে ও পরে আপেক্ষিক বেগ অপরিবর্তিত থাকে।
সুতরাং, $v_{01} - v_{02} = v_2 - v_1$
ভরবেগের নিত্যতার সূত্র অনুযায়ী,
সংঘর্ষের আগে মোট ভরবেগ = সংঘর্ষের পরে মোট ভরবেগ

$$m_1v_{01} + m_2v_{02} = m_1v_1 + m_2v_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.53)$$

এই সমীকরণ থেকে v_1 এবং v_2 মান নির্ণয় করা যায়। এই দুই বেগ থেকে সংঘর্ষের পরের গতিশক্তিও নির্ণয় করা যায়।

আবার সংঘর্ষের পূর্বের গতিশক্তি $= \frac{1}{2}m_1v_{01}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{02}^2$ পূর্ণ স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষে গতিশক্তি সংরক্ষিত হয়। তাই সংঘর্ষের পূর্বের ও পরের গতিশক্তি উভয় পাশে সমান লেখে সমাধান করলে আমরা পাই,

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_{01}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{02}^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.54)$$

অর্থাৎ সংঘর্ষের পরের গতিশক্তি = সংঘর্ষের পূর্বের গতিশক্তি।

সংঘর্ষের পরে বেগ নির্ণয় :

মনে করি m_1 ও m_2 ভরের দুইটি বস্তু একই সরলরেখা বরাবর একই দিকে যথাক্রমে v_{01} এবং v_{02} বেগে গতিশীল। $v_{01} > v_{02}$ হওয়ায় এদের মধ্যে স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ ঘটে। সংঘর্ষের পরের বেগ v_1 ও v_2 হলে, ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রানুসারে, সংঘর্ষের পূর্বের মোট ভরবেগ = সংঘর্ষের পরের মোট ভরবেগ

$$m_1v_{01} + m_2v_{02} = m_1v_1 + m_2v_2$$

$$m_1(v_{01} - v_1) = m_2(v_2 - v_{02}) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

যেহেতু সংঘর্ষটি স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ কাজেই সংঘর্ষের পূর্বের গতিশক্তির সমষ্টি সংঘর্ষের পরের গতিশক্তির সমষ্টির সমান হয়।

$$\frac{1}{2}m_1v_{01}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{02}^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$\frac{1}{2}m_1(v_{01}^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}m_2(v_2^2 - v_{02}^2) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$$

সমীকরণ (ii) কে সমীকরণ (i) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$v_{01} + v_1 = v_2 + v_{02}$$

$$v_2 = v_{01} + v_1 - v_{02}$$

(i) নং সমীকরণে v_2 এর মান বসিয়ে পাই,

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{01} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_{02} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (iii)$$

v_1 এর মান (i) সমীকরণে বসিয়ে পাই, (হিসাব করার পর)

$$v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_{02} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{01} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (iv)$$

বিশেষ ক্ষেত্রসমূহ :

(i) বস্তু দুটির ভর সমান অর্থাৎ $m_1 = m_2$ হলে, সমীকরণ (iii) ও (iv) থেকে পাই, $v_{01} = v_2$ এবং $v_{02} = v_1$ অর্থাৎ সংঘর্ষের পর বস্তু দুটি বেগ বিনিময় করে।

(ii) বস্তু দুটির ভর সমান এবং শুরুতে দ্বিতীয় বস্তুটি গতিহীন। এক্ষেত্রে $m_1 = m_2$ এবং $v_{02} = 0$। অতএব উপরোক্ত সমীকরণ দুটি থেকে পাওয়া যায়, $v_1 = 0$ এবং $v_2 = v_{01}$।
অর্থাৎ সংঘাতের পর প্রথম বস্তু থেমে যায় এবং দ্বিতীয় বস্তু প্রথম বস্তুর বেগ নিয়ে চলতে থাকে।

(iii) বস্তু দুটির ভর অসমান এবং শুরুতে দ্বিতীয় বস্তুটি গতিহীন। এক্ষেত্রে $m_1 \neq m_2$ এবং $v_{02} = 0$। সমীকরণ (iii) ও (iv) থেকে পাই,

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{01} \text{ এবং } v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{02}$$

অর্থাৎ $m_1 \neq m_2$ হলে, সংঘাতের ফলে প্রথম বস্তুটিকে গতিহীন করা যায় না।

(iv) প্রথম বস্তুটি অত্যন্ত ভারী এবং শুরুতে দ্বিতীয় বস্তুটি গতিহীন। এক্ষেত্রে, $m_1 >> m_2$ এবং $v_{02} = 0$। সুতরাং লেখা যায়, $m_2 - m_1 \simeq m_1$ এবং $m_2 + m_1 \simeq m_1$। অতএব, $v_1 = v_{01}$ এবং $v_2 = 2v_{01}$। অর্থাৎ সংঘাতের পর ভারী বস্তুটির বেগ প্রায় অপরিবর্তিত থাকে; কিন্তু হাল্কা বস্তুটি ভারী বস্তুর প্রায় দ্বিগুণ বেগে ছুটে যায়।

(v) দ্বিতীয় বস্তুটি অত্যন্ত ভারী এবং শুরুতে গতিহীন। এক্ষেত্রে, $m_2 >> m_2$ এবং $v_{02} = 0$। সুতরাং লেখা যায়, $m_1 - m_2 \simeq - m_2$ এবং $m_1 + m_2 \simeq m_2$। অতএব সমীকরণ (iii) ও (iv) থেকে পাই, $v_1 = v_{01}$ এবং $v_2 = 0$। অর্থাৎ সংঘাতের পরে ভারী বস্তুটি স্থিরই থাকবে এবং হাল্কা বস্তুটি তার প্রাথমিক বেগে বিপরীত দিকে ছুটে যাবে।

অনুধাবনমূলক কাজ : একটি দেওয়ালে একটি বল ধাক্কা খেয়ে পিছনে ফিরে আসে কেন ?

দুটি বস্তুর স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে সংঘর্ষের পর প্রথম বস্তুর বেগ, $v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{01} + \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) \times v_{02}$

দেওয়ালের সাথে বলের সংঘর্ষের ক্ষেত্রে $v_{02} = 0$ হয় এবং $m_2 >> m_1$। সুতরাং $v_1 = - v_{01}$ এবং $v_{02} = 0$ অর্থাৎ দেওয়াল স্থির থাকবে এবং বলটি একই বেগ নিয়ে বিপরীত দিকে ফিরে আসবে।

হাতে কলমে কাজ : তুমি হাতে একটি বল নাও। এবার এটিকে একটি টেবিলের উপর ছুড়ে দাও। টেবিলটি কোন দিকে যাবে? বলটি টেবিলে ধাক্কা খেয়ে বিপরীত দিকে আসবে কেন?

কোনো হালকা বস্তু কোনো ভারী স্থির বস্তুর সঙ্গে সংঘর্ষে লিপ্ত হলে ভারী বস্তুটি স্থির থাকে এবং হালকা বস্তুটি প্রায় দ্বিগুণ বেগে বিপরীত দিকে ছুটে যায়।

অনুধাবনমূলক কাজ : স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে দুটি সমান ভরের বস্তু পরস্পর বেগ বিনিময় করে—ব্যাখ্যা কর।

দুটি সমান ভরের বস্তুর স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষে বস্তুদ্বয় পরস্পর বেগ বিনিময় করে। এর ব্যাখ্যা নিম্নরূপ :

ধরি বস্তু দুটি ভর $m_1 = m_2$ এবং স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে সংঘর্ষের পরের বেগ v_1 এবং v_2 এবং সংঘর্ষের আগের বেগ u_1 এবং u_2। তা হলে আমরা পাই,

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$$

বা, $m_1u_1 - m_2v_1 = m_2v_2 - m_2u_2$

বা, $u_1 - v_1 = v_2 - u_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$

আবার (i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$

বা, $\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_2^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$

বা, $u_1^2 - v_2^2 = v_2^2 - u_2^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$

সমীকরণ (ii)-কে সমীকরণ (i) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{u_1^2 - v_2^2}{u_1 - v_1} = \frac{v_2^2 - u_2^2}{v_2 - u_2}$$

বা, $\frac{(u_1 - v_2)(u_1 + v_2)}{u_1 - v_1} = \frac{(v_2 - u_2)(v_2 + u_2)}{v_2 - u_2}$

বা, $u_1 + v_1 = v_2 + u_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (iii)$

সমীকরণ (i) ও সমীকরণ (iii) যোগ করে পাই,

$$u_1 - v_1 + u_1 + v_1 = v_2 - u_2 + v_2 + u_2$$

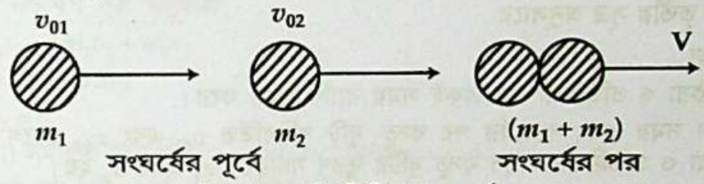
বা, $2u_1 = 2v_2$

$\therefore \boxed{u_1 = v_2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (iv)$

সুতরাং সমান ভরের দুটি বস্তুর স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষে বস্তুদ্বয় পরস্পর বেগ বিনিময় করে।

৪.৩২.২ অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ
Inelastic collision

তোমরা দুটি কাঁদামাটির নরম বল লও এবং বল দুটির সংঘর্ষ ঘটাও। তাহলে দেখতে পাবে যে, এই সংঘর্ষে মোট গতিশক্তি সংরক্ষিত হয় না। এই ধরনের সংঘর্ষও একটি আদর্শ ঘটনা। এ ধরনের সংঘর্ষ অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ। অর্থাৎ যে দুটি পরস্পরের সঙ্গে যুক্ত হয়ে একটি বস্তুরূপে চলতে থাকে অর্থাৎ যে সংঘর্ষের পর বস্তু দুটির আপেক্ষিক বেগ শূন্য হয় এবং বস্তুগুলোর সংঘর্ষের পর বস্তু মোট গতিশক্তি সংরক্ষিত হয় না, তাকে অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ বলে।



চিত্র ৪.৪২: পূর্ণ অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ।

৪.৪২ চিত্রে পূর্ণ অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ দেখানো হয়েছে। m_1 এবং m_2 ভরের দুটি বস্তু একই সরলরেখায় একই দিকে যথাক্রমে v_{01} এবং v_{02} বেগে চলে পরস্পরের সঙ্গে মুখোমুখি সংঘর্ষ ঘটাল। সংঘর্ষের পর বস্তু দুটি পরস্পর যুক্ত হয়ে একই দিকে v বেগে চলতে লাগল।

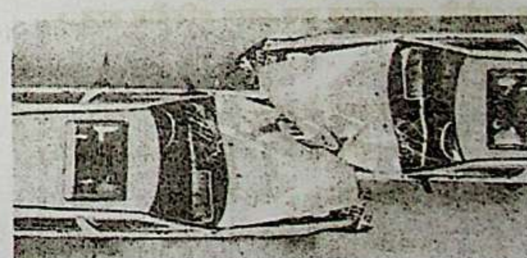
এখন রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ নীতি থেকে পাই,
সংঘর্ষের আগে মোট ভরবেগ = সংঘর্ষের পরে মোট ভরবেগ

$$\therefore \quad m_1v_{01} + m_2v_{02} = (m_1 + m_2)v$$

বা, $$v = \frac{m_1v_{01} + m_2v_{02}}{m_1 + m_2} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.55)$$

সংঘর্ষের আগে মোট গতিশক্তি $\frac{1}{2}mv_{01}{}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{02}{}^2$ এবং সংঘর্ষের পর মোট গতিশক্তি $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$ বিয়োগ করে গতিশক্তি ক্ষয় নির্ণয় করা যায়। দেখা যায় যে, গতিশক্তির ক্ষয় আপেক্ষিক বেগ $(v_{01} - v_{02})$ এর বর্গের সমানুপাতিক হয়।

> **যাচাই কর :** পাশের চিত্রটি লক্ষ কর [চিত্র ৪.৪৩]। গাড়িটি কি ধরনের সংঘর্ষে লিপ্ত হয়েছে ? স্বভাবতই গাড়িটির সংঘর্ষের পর আপেক্ষিক বেগ 0। যদি সংঘর্ষের পূর্বে গাড়িদ্বয়ের বেগ যথাক্রমে u_1, u_2 হয় তাহলে সংঘর্ষের পরে বেগ v এর সমীকরণটি লিখে প্রকাশ কর।

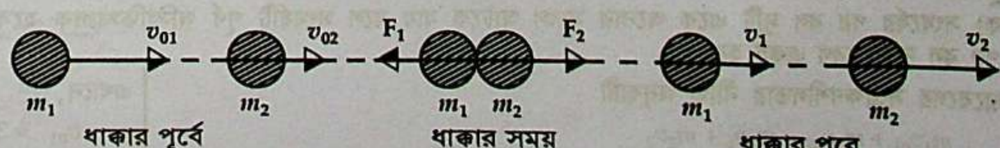


চিত্র ৪.৪৩

৪.৩২.৩ একমাত্রিক সংঘর্ষ
One-dimensional collision

বাচ্চারা যখন মার্বেল খেলে তখন একটি মার্বেল আর একটি মার্বেলকে ধাক্কা দিলে তা যদি ধাক্কার পর সরল পথে চলতে থাকে তাহলে যে সংঘর্ষ হয় তা একমাত্রিক সংঘর্ষ। অর্থাৎ সংঘাতাধীন বস্তু দুটির আপেক্ষিক গতিবেগ সংঘর্ষের আগে ও পরে একই সরলরেখা বরাবর হলে, ওই সংঘাতকে একমাত্রিক সংঘর্ষ বলে।

মনে করি কোনো একটি সরলরেখায় m_1 এবং m_2 ভরের দুটি বস্তুকণা যথাক্রমে x অক্ষ বরাবর v_{01} এবং v_{02} বেগে একই দিকে চলছে [চিত্র ৪.৪৪]। এখানে $v_{01} > v_{02}$। কোনো এক সময়ে প্রথম বস্তুকণাটি পেছনের দিক হতে



চিত্র ৪.৪৪

দ্বিতীয় বস্তুকণাকে ধাক্কা দিল এবং এরপর বস্তুকণা দুটি একই সরলরেখায় ও একই দিকে যথাক্রমে v_1 এবং v_2 বেগে চলতে লাগল।

এখানে m_2 ভরের বস্তুর উপর প্রযুক্ত ক্রিয়া বল F_1 এবং m_2 ভরের বস্তুটিও m_1 ভরের বস্তুটিতে F_2 প্রতিক্রিয়া সৃষ্টি করে।

আবার মনে করি ধাক্কাজনিত ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার কার্যকাল t, তা হলে

বস্তুকণা দুটির আদি ভরবেগের সমষ্টি $= m_1v_{01} + m_2v_{02}$ ... ... (4.56)

বস্তুকণা দুটির শেষ ভরবেগের সমষ্টি $= m_1v_1 + m_2v_2$

নিউটনের গতির তৃতীয় সূত্র অনুসারে

ক্রিয়া = প্রতিক্রিয়া $\therefore\ F_2 = -F_1$

সংঘর্ষের সময় ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া বল একই সময় ব্যাপি ক্রিয়া করে।

ধরি সংঘর্ষকালীন সময় এবং সংঘর্ষের পর বস্তু দুটি পরিবর্তিত v_{01} এবং v_{02} বেগে একই সরলরেখা বরাবর চলতে থাকবে। এই ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার ফলে বস্তু দুটির ত্বরণ যথাক্রমে a_1 এবং a_2 হয়।

$\therefore\quad F_1 = -F_2$

$\therefore\quad m_1a_1 = -m_2a_2$

বা, $m_1\dfrac{(v_1 - v_{01})}{t} = -m_2\dfrac{(v_2 - v_{02})}{t}$

বা, $m_1v_1 - m_1v_{01} = -m_2v_2 + m_2v_{02}$

বা, $m_1v_{01} + m_2v_{02} = m_1v_1 + m_2v_2$ ... ... (4.57)

ভরবেগের সংরক্ষণশীলতার নীতি অনুযায়ী সংঘর্ষের পূর্বের ভরবেগ = সংঘর্ষের পরের ভরবেগ

এই সমীকরণ একমাত্রিক সংঘর্ষের সমীকরণ।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.১৪

১। পানিতে স্থিরভাবে ভাসমান 200 kg একটি বোটের উপর দুই বিপরীত প্রান্তে দুইজন বালক দাঁড়িয়ে আছে। তাদের ভর যথাক্রমে 40 kg এবং 70 kg। যদি তারা প্রত্যেকে এক সাথে 4 ms⁻¹ অনুভূমিক বেগে বোট থেকে লাফ দেয় তাহলে বোটটি কোনদিকে কত বেগে গতিশীল হবে ?

আমরা জানি,

$m_1u_1 + m_2u_2 + m_3u_3 = m_1v_1 + m_2v_2 + m_3v_3$

বা, $0 + 0 + 0 = 40 \times 4 + 70 \times -4 + 200 \times v_3$

বা, $-120 + 200\,v_3 = 0$

$\therefore\quad v_3 = 0.6\ \text{ms}^{-1}$ এবং

দিক হবে m_2 ভরের দিকে

দেয়া আছে

প্রথম বালকের ভর, $m_1 = 40$ kg

দ্বিতীয় বালকের ভর, $m_2 = 70$ kg

বোটের ভর, $m_3 = 200$ kg

লাফ দেবার আগে,

প্রথম বালকের বেগ, $u_1 = 0$

দ্বিতীয় বালকের বেগ, $u_2 = 0$

বোটের বেগ, $u_3 = 0$

লাফ দেবার পর,

প্রথম বালকের বেগ, $v_1 = 4\ \text{ms}^{-1}$

দ্বিতীয় বালকের বেগ, $v_2 = -4\ \text{ms}^{-1}$

বোটের বেগ, $v_3 = ?$

২। 3 ms⁻¹ বেগে 2 kg ভরের একটি বলের সঙ্গে 0.5 kg ভরের আরেকটি স্থির বলের সোজাসুজি সংঘর্ষ ঘটে। যদি (ক) সংঘর্ষের পর এরা একত্রে অন্যের সঙ্গে আটকে যায় এবং (খ) সংঘর্ষটি পূর্ণ স্থিতিস্থাপক হয়, তবে সংঘর্ষের পর বল দুটির বেগ কত হবে ?

(ক) সংঘর্ষের পর বল দুটি একে অন্যের সঙ্গে আটকে যায় বলে সংঘর্ষটি পূর্ণ অস্থিতিস্থাপক হবে। এখানে সংঘর্ষের পর বল দুটির বেগ একই হবে।

ভরবেগের সংরক্ষণশীলতার নীতি অনুযায়ী

$m_1v_{01} + m_2v_{02} = m_1v_1 + m_2v_2$

$\therefore$ এক্ষেত্রে $v_1 = v_2 = v$ বসালে এবং $v_2 = 0$ ধরলে আমরা পাই,

$2 \times 3 + 0 = (2 + 0.5) \times v$

সুতরাং $v = 2.4\ \text{ms}^{-1}$

এখানে,

$v_{01} = 3$

$v_{02} = 0$

$v = ?$

(খ) সংঘর্ষটি পূর্ণ স্থিতিস্থাপক বলে পূর্ণ স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে আমরা জানি,

$$v_{01} - v_{02} = v_2 - v_1$$

$$3 - 0 = (v_2 - v_1)$$

$$\therefore \quad v_2 - v_1 = 3 \text{ ms}^{-1} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

আবার ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র অনুযায়ী

$$m_1v_{01} + m_2v_{02} = m_1v_1 + m_2v_2$$

$$2 \times 3 + 0 = 2v_1 + 0.5v_2$$

$$\therefore \quad 2v_1 + 0.5v_2 = 6 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i) ও (ii) সমাধান করে পাই, $v_1 = 1.8 \text{ ms}^{-1}$ এবং $v_2 = 4.8 \text{ ms}^{-1}$

সুতরাং সংঘর্ষের পর বল দুটি একই দিকে অগ্রসর হবে।

৩। 3 ms⁻¹ বেগে 2 kg ভরের একটি বস্তুর সঙ্গে 0.5 kg ভরের অন্য একটি স্থির বস্তু সোজাসুজি স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষে লিপ্ত হয়। সংঘর্ষের পর দ্বিতীয় বস্তুর বেগ কত হবে? [চ. বো. ২০১৫]

আমরা জানি,

$$v_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_1} \times v_{02} + \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2} \times v_{01}$$

$$= \left(\frac{2 - 0.5}{2 + 0.5}\right) \times 0 + \frac{2 \times 2}{2 + 0.5} \times 3$$

$$= 4.8 \text{ ms}^{-1}$$

এখানে,
$m_1 = 2 \text{ kg}$
$m_2 = 0.5 \text{ kg}$
$v_{01} = 3 \text{ ms}^{-1}$
$v_{02} = 0$
$v_2 = ?$

৪। 4 kg ভরের একটি বস্তু অন্য একটি স্থির বস্তুর সাথে স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষে লিপ্ত হলো। সংঘর্ষের পর বস্তুটি একই দিকে আদিবেগের এক–চতুর্থাংশ বেগ নিয়ে চলতে থাকল। স্থির বস্তুর ভর কত?

আমরা জানি,

$$v_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_1} \times v_{02} + \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2} \times v_{01}$$

$$\text{বা,}\quad v_2 = \frac{4 - m_2}{4 + m_2} \times v_{02} + \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2} \times 0$$

$$\text{বা,}\quad \frac{v_2}{v_{02}} = \frac{4 - m_2}{4 + m_2}$$

$$\text{বা,}\quad \frac{1}{4} = \frac{4 - m_2}{4 + m_2}$$

$$\text{বা,}\quad 4 + m_2 = 8 - 4m_2$$

$$\text{বা,}\quad 5m_2 = 4$$

$$\therefore \quad m_2 = \frac{4}{5} \text{ kg} = 0.8 \text{ kg}$$

এখানে,
$m_1 = 4 \text{ kg}$
$v_{02} = v_2$
$m_2 = ?$
$\frac{v_2}{v_{02}} = \frac{1}{4}$
$v_{01} = 0$

প্রয়োজনীয় গাণিতিক সূত্রাবলি

$$\omega = \frac{\theta}{t} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

$$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

$$a = \alpha r \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (5)$$

$$\theta = \omega t \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (6)$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (7)$$

$$\theta = \omega_0 + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (8)$$

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\omega}{t} = 2\pi n = \frac{v}{r} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9)$$

$$\alpha = \frac{\omega}{t} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (10)$$

$$F = ma \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (11)$$

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (12)$$

$$m_1u_1 + m_2u_2 = (m_1 + m_2)v \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (13)$$

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{01} + \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) \times v_{02} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (14)$$

$$F = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (15)$$

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (16)$$

$$I = \sum mr^2 = MK^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (17)$$

$$K.E = \frac{1}{2} I\omega^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (18)$$

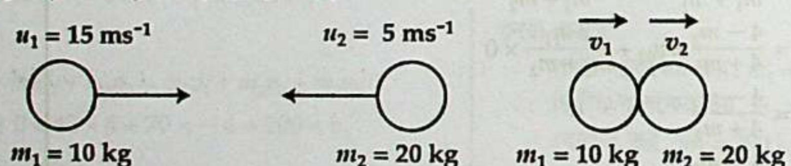
$$L = I\omega \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (19)$$

$$\tau = I\alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (20)$$

$$\tau = \frac{dL}{dt} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (21)$$

উচ্চতর দক্ষতাভিত্তিক নমুনার গাণিতিক উদাহরণ

১। নিচের চিত্রটি লক্ষ কর। উদ্দীপকে উল্লিখিত ঘটনার
(ক) মিলিত বেগ কত হবে ?
(খ) গতিশক্তি সংরক্ষিত হবে কী? ব্যাখ্যা কর।



সংঘর্ষের পূর্বে সংঘর্ষের পর

(ক) চিত্র অনুযায়ী, আমরা জানি,

$$m_1u_1 - m_2u_2 = (m_1 + m_2)v$$

$$10 \times 15 - 20 \times 5 = (10 + 20)(v)$$

বা, $150 - 100 = 30 \times v$ বা, $50 = 30v$

$\therefore$ $v = \frac{5}{3}\ ms^{-1}$ (মিলিত বেগ)

এখানে,
$m_1 = 10\ kg$
$u_1 = 15\ ms^{-1}$
$m_2 = 20\ kg$
$u_2 = 5\ ms^{-1}$
মিলিত বেগ, $v = ?$

(খ) সংঘর্ষের পূর্বে গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}mu_2^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times (15)^2 + \frac{1}{2} \times 20 \times (5)^2$

$$= 5 \times (15)^2 + 10 \times 25 = 1125 + 250 = 1375\ J$$

সংঘর্ষের পরের গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$ | $v_1 = v_2 = v = \frac{5}{3} ms^{-1}$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \times 20 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$= 5 \times \frac{25}{9} + 10 \times \frac{25}{9} = \frac{25}{9}(5 + 10)$$

$$= \frac{25}{9} \times 15 = 41.67\ J$$

দেখা যাচ্ছে যে, উভয় ক্ষেত্রে গতিশক্তি সমান নয়। অর্থাৎ গতিশক্তি সংরক্ষিত হবে না।

২। 4 kg ভরের একটি বস্তুকে 0.2 m লম্বা দড়ি দিয়ে একটি নির্দিষ্ট অক্ষের চারদিকে 2 rad s^{-1} বেগে ঘোরানো হচ্ছে।

(ক) ঘূর্ণায়মান কণাটির কৌণিক ভরবেগ বের কর।

(খ) বস্তুটির ভর অর্ধেক হলে টর্কের কীরূপ পরিবর্তন হবে ? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর। [য. বো, ২০১৬]

(ক) আমরা জানি,

$$L = I\omega = mr^2\omega = 8 \times 0.2 \times 2 = 0.64 \text{ kg m}^2\text{s}^{-1}$$

(খ) আমরা জানি, কৌণিক ত্বরণ α হলে,

টর্ক, $\tau = I\alpha = mr^2\alpha$

$\therefore \quad \tau_1 = m_1 r^2 \alpha$

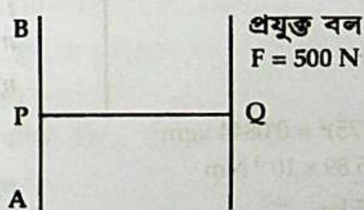
বা, $m_2 = \dfrac{m_1}{2}$ হলে

বা, $\tau_2 = \dfrac{m_1}{2} r^2 \alpha$

$\therefore \quad \dfrac{\tau_2}{\tau_1} = \dfrac{m_1 r^2 \alpha}{2 \times m_1 r^2 \alpha} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \quad \tau_2 = \dfrac{\tau_1}{2}$ অর্থাৎ টর্ক অর্ধেক হয়ে যাবে।

৩।



(ক) AB ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে PQ দণ্ডটির টর্ক নির্ণয় কর।

(খ) যদি ঘূর্ণন অক্ষ AB, PQ দণ্ডটির প্রান্ত বিন্দু হতে পরিবর্তন করে মধ্য বিন্দুতে নেওয়া হয়, তবে কোন ক্ষেত্রে জড়তার ভ্রামক বেশি হবে—তোমার উত্তরের সপক্ষে গাণিতিক যুক্তি প্রদর্শন কর। [সি. বো. ২০১৬]

(ক) আমরা জানি,

টর্ক, $\tau = rF\sin\theta = 1 \times 500 \times \sin 90° = 500 \text{ N}$

(খ) কোনো দণ্ডের প্রান্ত দিয়ে গমনকারী অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক, $I_1 = \dfrac{Ml^2}{3}$

আবার, ঘূর্ণন অক্ষ দণ্ডের কেন্দ্রের মধ্য দিয়ে গেলে,

$I_2 = \dfrac{Ml^2}{12}$

$\therefore \quad \dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{Ml^2}{3} \times \dfrac{12}{Ml^2} = 4$

$\therefore \quad I_1 = 4I_2$ অর্থাৎ প্রথম ক্ষেত্রে জড়তার ভ্রামক বেশি হবে।

৪। একটি ট্রেন 200 m ব্যাসার্ধের একটা রেল লাইনের বাঁকে ঘুরছে। দুটি পাতের মধ্যবর্তী দূরত্ব 1m। ঘন্টায় 50.4 km বেগে চলন্ত গাড়ি ঘোরার জন্য

(ক) রেল লাইনের ভেতরের ও বাইরের পাতের উচ্চতা নির্ণয় কর।

(খ) দুই পাতের উচ্চতা সমান হলে কী ঘটবে আর না হলে কী ঘটবে ? ব্যাখ্যা কর।

(ক) আমরা জানি,

$\tan\theta = \dfrac{v^2}{rg}$

বা, $\tan\theta = \dfrac{(14)^2}{200 \times 9.8} = 0.1$

বা, $\tan\theta = 0.1$

θ এর মান ক্ষুদ্র হলে $\tan\theta = 0.1$ লেখা যায়।

এখানে,

$r = 200 \text{ m}$

$g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$

$v = 50.4 \text{ km h}^{-1}$

$= \dfrac{50.4 \times 1000}{60 \times 60} = 14 \text{ ms}^{-1}$

$r = 1 \text{ m}$

ধরি দুটি লাইনের মধ্যে দূরত্ব $= x$

এক লাইন হতে অন্য লাইনের উচ্চতা h রাখা হলো

$\therefore \quad \tan\theta = \frac{h}{x}$

বা, $\quad h = 0.1 \times 1 = 0.1$ m

(খ) ভেতরের লাইন অপেক্ষা বাইরের লাইন 0.1 m উঁচু করে তৈরি করলে রেল গাড়িটি নির্বিঘ্নে চলতে পারবে। কারণ কেন্দ্রবিমুখি বা অপকেন্দ্র বলের প্রভাব থেকে রেল গাড়িকে মুক্ত করতে হলে বাইরের লাইনকে অবশ্যই উঁচু করে স্থাপন করতে হবে। আর যদি দুটি লাইন সমান উচ্চতায় থাকে তাহলে বাঁক নেওয়ার সময় প্রয়োজনীয় কেন্দ্রমুখি বল সরবরাহ করতে হয়। কেন্দ্রমুখি বলের অভাবে গতি জড়তার কারণে যানবাহন উল্টে যাওয়ার সম্ভাবনা থাকে। এই জড়তাকে প্রশমিত করতে বাইরের লাইনকে ভেতরের লাইন অপেক্ষা উঁচু করে তৈরি করতে হয়।

৫। 150 g ভরের একটি ক্ষুদ্র বস্তু A কে 75 cm লম্বা সুতার সাহায্যে ঘোরানো হচ্ছে। এটি স্থির অবস্থান থেকে ঘুরতে আরম্ভ করে 3 মিনিট পর থেকে প্রতি মিনিটে 120 বার করে ঘুরছে।

(ক) A বস্তুটির উপর কার্যকরী টর্কের মান নির্ণয় কর।

(খ) A বস্তুটির উপর কী পরিমাণ টান কাজ করবে? এই টানের মান 4 গুণ করলে রৈখিক বেগের কী পরিবর্তন হবে মতামত দাও।

(ক) আমরা জানি,

$\omega = 2\pi n = 2\pi \times 2$
$= 12.56$ rad s^{-1}

কৌণিক ত্বরণ α হলে, $\omega = \omega_0 + \alpha t$

বা, $\quad 12.56 = 0 + \alpha \times 3 \times 60$

$\therefore \quad \alpha = 0.0698$ rad s^{-1}

এখানে,
$m = 150$ g $= 0.15$ kg
$r = 75$ cm $= 0.75$ m
$t = 3$ min $= 3 \times 60$ s $= 180$ sec
$n = 120$ rev/min.
$n = \frac{120}{60}$ rev/s $= 2$ rev/s

জড়তার ভ্রামক $I = mr^2 = 0.15 \times (0.75)^2 = 0.0844$ kgm^2

টর্ক, $\tau = I\alpha = 0.0844 \times 0.0698 = 5.89 \times 10^{-3}$ Nm

(খ) বস্তুর ভর $\quad m = 150$ g $= 0.15$ kg
$r = 75$ cm $= 0.75$ m

$\omega = \frac{2\pi N}{60} = \frac{2\pi \times 120}{60}$
$= 12.56$ rads^{-1}

রৈখিক বেগ, $v = \omega r = 12.56 \times 0.75 = 9.42$ ms^{-1}

সুতার টান $F = \frac{mv^2}{r} = \frac{0.15 \times (9.42)^2}{0.75} = 17.75$ N

অতএব, বস্তুটির উপর টান 17.75 N

আবার টানের মান 4 গুণ করা হলে $F_1 = 4F$ হয়; সেক্ষেত্রে রৈখিক বেগ v_1 হলে $F_1 = \frac{mv_1^2}{r}$ এবং $F = \frac{mv^2}{r}$ হলে

$$\frac{F_1}{F} = \frac{v_1^2}{v^2} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^2 = 4$$

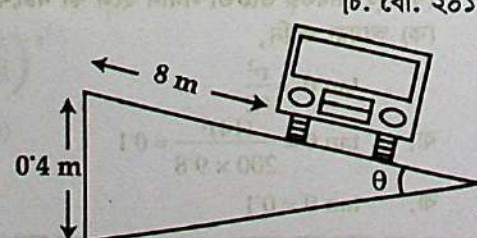
$\therefore \quad \frac{v_1}{v} = 2$ বা, $v_1 = 2v$

অর্থাৎ টান 4 গুণ করা হলে রৈখিক বেগ দ্বিগুণ বৃদ্ধি পায়।

৬। 100 m ব্যাসার্ধের একটি বাঁকে 30 kmh^{-1} বেগে বাঁক নিতে গিয়ে বাস রাস্তা থেকে ছিটকে খাদে পড়ে যায়। [চ. বো. ২০১৬]

(ক) উদ্দীপকে উল্লিখিত রাস্তার ব্যাংকিং কোণ নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীকের আলোকে বাসটি খাদে পড়ে যাওয়ার কারণ গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।



(ক) আমরা জানি, θ এর মান খুব ছোট হলে,

$\tan\theta = \sin\theta = \frac{h}{d}$

$\therefore \quad \theta = \sin^{-1}\frac{h}{d} = \sin^{-1}\frac{0.4}{8} = 2.86°$

(খ) নিরাপদে গাড়ি চালানোর জন্য ব্যাঙ্কিং কোণ θ হলে,

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

বা, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{rg}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{(8.33)^2}{100\times 9.8}\right\} = 4.05°$

উদ্দীপকের রাস্তায় ব্যাঙ্কিং কোণ 2.86° কিন্তু ওই পথে 30 kmh^{-1} বেগে নিরাপদে গাড়ি চালানোর জন্য ব্যাঙ্কিং কোণ হওয়া প্রয়োজন ছিল 4.05°। তাই গাড়িটি খাদে পড়ে যায়।

৭। একজন সার্কাস খেলোয়াড় মাথার উপর উল্লম্ব তলে কোনো বস্তুকে ঘুরাচ্ছে। সুতার দৈর্ঘ্য 90 cm এবং বস্তুটি প্রতি মিনিটে 100 বার ঘুরানো হচ্ছে। হঠাৎ করে ঘূর্ণায়মান বস্তুটির এক-তৃতীয়াংশ খুলে পড়ে গেল। এতে খেলোয়াড় ভীত না হয়ে প্রতি মিনিটে ঘূর্ণন সংখ্যা একই রাখার জন্য সুতার দৈর্ঘ্য বাড়িয়ে দিল।

(ক) বস্তুটির ভর কমে যাবার পূর্বে এর কেন্দ্রমুখি ত্বরণ কত ছিল?

(খ) সার্কাস খেলোয়াড় সুতার দৈর্ঘ্যের যে পরিবর্তন এনেছিল গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে তার সঠিকতা যাচাই কর।

(ক) আমরা জানি,

কৌণিক বেগ, $\omega = \frac{2\pi N}{t} = \frac{2\pi\times 100}{60} = 10.472$ rad s^{-1} এবং

কেন্দ্রমুখি ত্বরণ, $a = \omega^2 r = (10.472)^2 \times 0.9 = 9.87$ ms^{-2}

এখানে,
$N = 100$ বার
$t = 1$ min $= 60$ sec
$r = 90$ cm $= 0.9$ m

(খ) খেলোয়াড়ের হাত দ্বারা প্রযুক্ত টান বা কেন্দ্রমুখি বল অপরিবর্তিত থাকে।

কেন্দ্রমুখি বল বা সুতার টান $F_C = ma = m\times 98.7 = 98.7$ mN

ভর এক-তৃতীয়াংশ কমে গেলে অবশিষ্ট ভর $m' = m - \frac{m}{3} = \frac{2m}{3}$

এক্ষেত্রে সুতার নতুন দৈর্ঘ্য r' হলে

$m'\omega^2 r' = m\omega^2 r$ হয়

বা, $m'r' = mr$

বা, $r' = \frac{mr}{m'} = \frac{mr}{2m/3} = \frac{3}{2}r$

সুতরাং, দৈর্ঘ্য পরিবর্তন $= \frac{3r}{2} - r = \frac{r}{2}$

বা, পূর্বের দৈর্ঘ্যের 50% বৃদ্ধি করেছিল।

৮। 40 kg ও 60 kg ভরের দুটি বস্তু যথাক্রমে 10 ms^{-1} এবং 5 ms^{-1} বেগে পরস্পর বিপরীত দিক থেকে আসার সময় একে অপরকে ধাক্কা দিল। ধাক্কার পর বস্তুদ্বয় একত্রে থেকে চলতে থাকল।

(ক) মিলিত বস্তুর বেগ কত?

(খ) সংঘর্ষটি স্থিতিস্থাপক নয় কেন? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে মতামত দাও।

(ক) আমরা জানি,

$m_1u_1 + m_2u_2 = (m_1+m_2)v$

বা, $40\times 10 - 60\times 5 = (40+60)v$

$\therefore$ $v = \frac{100}{100} = 1$ ms^{-1}

দিক 10 ms^{-1} বেগের দিকে

এখানে,
$m_1 = 40$ kg
$m_2 = 60$ kg
$u_1 = 10$ ms^{-1}
$u_2 = -5$ ms^{-1}
v = মিলিত বস্তুর বেগ = ?

(খ) আমরা জানি, স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষে ভরবেগ ও গতিশক্তি উভয়ই সংরক্ষিত থাকে, কিন্তু অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষে ভরবেগ সংরক্ষিত থাকলেও গতিশক্তি সংরক্ষিত থাকে না, গতিশক্তি অন্য শক্তিতে রূপান্তরিত হয়।

সংঘর্ষের পূর্বে বস্তুদ্বয়ের মোট গতিশক্তি,

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}\times 40\times 10^2 + \frac{1}{2}\times 60\,(-5)^2$$
$$= (2000+750)\text{ J}$$
$$= 2750\text{ J}$$

সংঘর্ষের পূর্বে বস্তুদ্বয়ের একত্রে গতিশক্তি, $\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2=\frac{1}{2}\times100\times(1)^2=50$ J

এক্ষেত্রে সংঘর্ষের পূর্বে ও পরে গতিশক্তি সংরক্ষিত হয়নি। সুতরাং সংঘর্ষটি স্থিতিস্থাপক নয়।

৯। রাস্তার কোনো এক বাঁকের ব্যাসার্ধ 50 m এবং রাস্তার উভয় পার্শ্বের উচ্চতার পার্থক্য 0·5 m; রাস্তার প্রস্থ 5 m।

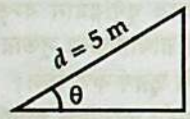
(ক) রাস্তার প্রকৃত ব্যাঙ্কিং কোণ কত ?

(খ) উদ্দীপকের রাস্তায় 108 kmh⁻¹ বেগে একটি গাড়ি নিরাপদে চালানো সম্ভব কি না ? —গাণিতিকভাবে যাচাই কর। [রা. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি,

$\sin\theta=\frac{x}{d}=\frac{0.5}{5}$

$\therefore\quad \theta=\sin^{-1}\left(\frac{0.5}{5}\right)=5.74°$



এখানে,
রাস্তার প্রস্থ, $d=5$ m
রাস্তার উভয় পার্শ্বের উচ্চতার পার্থক্য $x=0.5$ m
ব্যাঙ্কিং কোণ, $\theta=?$

(খ) আমরা (ক) অংশ হতে পাই, $\theta=5.74°$

উদ্দীপক অনুসারে, রাস্তার বাঁকের ব্যাসার্ধ, $r=50$ m

গাড়ির সর্বোচ্চ বেগ v হলে $\tan\theta=\frac{v^2}{rg}$

$\therefore\ v^2=\tan\theta\times rg$

$v=\sqrt{\tan\theta\times rg}$

$=\sqrt{\tan(5.74)\times50\times9.8}$

$=7.02\ \text{ms}^{-1}=25.27\ \text{kmh}^{-1}$

অর্থাৎ এই রাস্তায় সর্বোচ্চ 25·27 kmh⁻¹ বেগে গাড়ি নিরাপদে চালানো সম্ভব।

অতএব, উদ্দীপকের রাস্তায় 108 kmh⁻¹ বেগে একটি গাড়ি নিরাপদে চালানো সম্ভব নয়।

১০। নয়ন 25 g ভরের একটি পাথর খণ্ডকে 1 m দীর্ঘ একটি সুতার সাহায্যে বৃত্তাকার পথে ঘুরাচ্ছে। পাথর খণ্ডটি প্রতি সেকেন্ডে 5 বার ঘুরছে। পাথরের ঘূর্ণন সংখ্যা একই রেখে সুতার দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ করা হলো। সুতা সর্বাধিক 40 N বল সহ্য করতে পারে।

(ক) প্রথম ক্ষেত্রে পাথরটির কৌণিক ভরবেগ নির্ণয় কর।

(খ) নয়ন সুতার দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ করে ঘূর্ণন সফলভাবে সম্পন্ন করতে পারবে কি না—গাণিতিকভাবে যাচাই কর। [সি. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি, কৌণিক ভরবেগ,

$L=mvr=mr^2\omega$

$=mr^2\times\frac{2\pi N}{t}\quad\left[\because\ \omega=\frac{2\pi N}{t}\right]$

$=\frac{25\times10^{-3}\times(1)^2\times2\times3.1416\times5}{1}$

$=0.7854\ \text{kgm}^2\text{s}^{-1}$

এখানে,
সুতার দৈর্ঘ্য, $r=1$ m
পাথর খণ্ডের ভর, $m=25\text{ g}=25\times10^{-3}$ kg
সময়, $t=1$ sec
ঘূর্ণন সংখ্যা $=N=5$
কৌণিক ভরবেগ, $L=?$

(খ) সুতার পরিবর্তিত দৈর্ঘ্য তথা পরিবর্তিত ব্যাসার্ধ,

$r=2\times1=2$ m

সুতার সর্বাধিক সহনশীল বল, $F=40$ N

$\therefore$ কৌণিক বেগ, $\omega=\frac{2\pi N}{t}=\frac{2\times3.1416\times5}{1}=31.416\ \text{rads}^{-1}$

$\therefore$ কেন্দ্রমুখি বল, $F'=m\omega^2r=25\times10^{-3}\times(31.416)^2\times2=49.348$ N

$\therefore$ কেন্দ্রমুখি বল বা সুতার টান F′ সুতার সর্বাধিক সহনশীল বল F অপেক্ষা বড়। সুতরাং নয়ন সুতার দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ করে সফলভাবে ঘূর্ণন সম্পন্ন করতে পারবে না। কারণ সুতার টান বেশি হওয়ায় সুতাটি ছিঁড়ে যাবে।

১১। মিটারগেজ ও ব্রডগেজ রেল লাইনের দুটি পাতের মধ্যবর্তী দূরত্ব যথাক্রমে 0·8 m ও 1·3 m। যে স্থানে বাঁকের ব্যাসার্ধ 500 m, ওই স্থানে লাইনগুলোর মধ্যে উচ্চতার পার্থক্য যথাক্রমে 7 cm এবং 11·37 cm.

(ক) ১ম লাইনের ব্যাঙ্কিং কোণ কত ?

(খ) কোন লাইনে রেলগাড়ি অধিক দ্রুততার সাথে বাঁক নিতে পারবে—গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মন্তব্য কর।

[সি. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি,

$$\tan\theta = \frac{h}{l} = \frac{0.07}{0.8} = 0.0875$$

$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}(0.0875) = 5°$

$\therefore$ ১ম লাইনের ব্যাঙ্কিং কোণ $= 5°$

এখানে,
উচ্চতা, $h = 7\text{ cm} = 0.07\text{ m}$
মিটার গেজের দুটি লাইনের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $l = 0.8\text{ m}$
ব্যাঙ্কিং কোণ, $\theta = ?$

(খ) ২য় লাইনের ব্যাঙ্কিং কোণ,

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{h'}{l'}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0.1137}{1.3}\right) = 5°$$

আবার ১ম লাইনে গাড়ির সর্বোচ্চ বেগ v_1 এবং ২য় লাইনে গাড়ির সর্বোচ্চ বেগ v_2 হলে,

$$\tan\theta_1 = \frac{v_1^2}{rg} \text{ এবং } \tan\theta_2 = \frac{v_2^2}{rg}$$

$$\therefore \quad \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{v_1^2}{v_2^2}$$

এখানে,
বাঁকের ব্যাসার্ধ, $r = 500\text{ m}$
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8\text{ ms}^{-2}$
১ম লাইনের ব্যাংকিং কোণ, $\theta_1 = 5°$
২য় লাইনের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $l' = 1.3$
ব্রডগেজ দুটির উচ্চতার পার্থক্য, $h' = 11.37\text{ cm} = 0.1137\text{ m}$
২য় লাইনের ব্যাঙ্কিং কোণ, $\theta_2 = ?$

যেহেতু $\theta_1 = \theta_2$ সেহেতু $v_1 = v_2$। অর্থাৎ দুটি লাইনে রেলগাড়ি সমান দ্রুততার সাথে বাঁক নিতে পারবে।

১২। 60 kg ভরের একজন নৃত্যশিল্পী দুহাত প্রসারিত করে মিনিটে 20 বার ঘুরতে পারেন। তিনি একটি সংগীত এর তালে তাল মেলানোর চেষ্টা করেন।

(ক) নৃত্যশিল্পীকে সংগীত এর সাথে ঐক্যতানিক হতে মিনিটে 30 বার ঘুরালে জড়তার ভ্রামকদ্বয়ের তুলনা কর।

(খ) উদ্দীপকের নৃত্যশিল্পীর পরিবর্তিত কৌণিক গতিশক্তি দ্বিগুণ হবে কী ? বিশ্লেষণপূর্বক মতামত দাও।

[ব. বো. ২০১৭]

(ক) ধরা যাক,

প্রথম ক্ষেত্রে নৃত্যশিল্পীর জড়তার ভ্রামক I_1 এবং কৌণিক বেগ ω_1 এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে জড়তার ভ্রামক I_2 এবং কৌণিক বেগ ω_2

$$\therefore \quad \omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60} = \frac{2\pi \times 20}{60} = \frac{2}{3}\pi \text{ rads}^{-1}$$

$$\text{এবং} \quad \omega_2 = \frac{2\pi n_2}{60} = \frac{2\pi \times 30}{60} = \pi \text{ rads}^{-1}$$

এখানে,
প্রথম ক্ষেত্রে,
প্রতি মিনিটে নৃত্যশিল্পীর ঘূর্ণন সংখ্যা, $n_1 = 20$
দ্বিতীয় ক্ষেত্রে,
প্রতি মিনিটে নৃত্যশিল্পীর ঘূর্ণন সংখ্যা, $n_2 = 30$

আবার কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণশীলতার সূত্রানুসারে,

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

$$\therefore \quad I_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2} \times I_1 = \frac{\frac{2}{3}\pi}{\pi} \times I_1 = \frac{2}{3} I_1$$

সুতরাং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে জড়তার ভ্রামক প্রথম ক্ষেত্রের $\frac{2}{3}$ গুণ হবে।

(খ) ১ম ক্ষেত্রে কৌণিক কম্পাঙ্ক, $\omega_1 = \frac{2}{3}\pi \text{ rads}^{-1}$

১ম ক্ষেত্রে জড়তার ভ্রামক, I_1

পরিবর্তিত জড়তার ভ্রামক, $I_2 = \frac{2}{3} I_1$

সুতরাং ১ম ক্ষেত্রে কৌণিক গতিশক্তি, $E_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2$

এবং পরিবর্তিত কৌণিক গতিশক্তি, $E_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2$

$$\therefore \frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{1}{2} I_2 \omega^2}{\frac{1}{2} I_1 \omega^2} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} I_1 \times \pi^2}{\frac{1}{2} \times I_1 \times \left(\frac{2}{3}\pi\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} I_1 \pi^2}{\frac{2}{9} I_1 \pi^2} = \frac{9}{6} = 1.5$$

$$\therefore E_2 = \frac{3}{2} \times E_1 = 1.5\, E_1$$

অতএব নৃত্যশিল্পীর পরিবর্তিত কৌণিক গতিশক্তি দ্বিগুণ হবেনা বরং 1.5 গুণ হবে।

১৩। অনিক 0.6 kg ভরের একটি গোলককে ভূমি থেকে 2 m ওপরে অনুভূমিক তলে 2.2 m রশির সাহায্যে ঘোরাচ্ছে। গোলকটি প্রতি মিনিটে 25 বার আবর্তন করে। ঘূর্ণায়মান অবস্থায় হঠাৎ রশিটি ছিঁড়ে গেল।

(ক) চক্রগতির ব্যাসার্ধ কাকে বলে ?

(খ) ক্রিকেট খেলায় ক্যাচ ধরার সময় খেলোয়াড় হাতটাকে পিছনে টেনে নেয় কেন ? ব্যাখ্যা কর।

(গ) উদ্দীপকের আলোকে কেন্দ্রমুখি বলের মান নির্ণয় কর।

(ঘ) অনিকের গোলকটি 4 m দূরে অবস্থিত একটা দেওয়ালে আঘাত করবে কি না—গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

(ক) চক্রগতির ব্যাসার্ধ : যদি কোনো দৃঢ় বস্তুর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু যেখানে বস্তুটির সমস্ত ভর কেন্দ্রীভূত আছে ধরা হয় এবং ঘূর্ণন অক্ষ সাপেক্ষে ওই বিন্দুতে জড়তার ভ্রামক সমগ্র বস্তুটির জড়তার ভ্রামকের সমান হয়, তবে অক্ষ হতে ওই বিন্দুর দূরত্বকে চক্রগতির ব্যাসার্ধ বলা হয়।

(খ) নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রানুসারে প্রযুক্ত বল কম হলে ত্বরণ কম হবে। বেগের পরিবর্তন ধ্রুব হলে, ওই পরিবর্তনে যত বেশি সময় নেওয়া হবে, ত্বরণের মান তত কম হবে। তাই ক্রিকেট খেলায় ক্যাচ ধরার সময় খেলোয়াড় হাতটাকে পিছনে টেনে নেয়, যাতে বেগের নির্দিষ্ট পরিবর্তনে বেশি সময় লাগে, ফলে ত্বরণ এবং প্রতিক্রিয়া বল কম মানের হয়।

(গ) আমরা জানি, কেন্দ্রমুখি বল,

$$F = m\omega^2 r$$

বা, $F = m\left(\frac{2\pi N}{t}\right)^2 r \qquad [\because \omega = \frac{2\pi N}{t}]$

$$= 0.6 \times \left(\frac{2 \times 3.14 \times 25}{60}\right)^2 \times 2.2\,\text{N}$$

$$= 9.04\,\text{N}$$

এখানে,
গোলকের ভর, $m = 0.6$ kg
রশির দৈর্ঘ্য, $r = 2.2$ m
ঘূর্ণন সংখ্যা, $N = 25$
সময়, $t = 1$ min $= 60$ s
উচ্চতা, $y = 2$ m

(ঘ) আমরা জানি,

$$y = \frac{1}{2} g t^2$$

বা, $t^2 = \frac{2y}{g}$

$$\therefore t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 2}{9.8}}$$
$$= 0.64\,\text{s}$$

আবার, $x = vt$

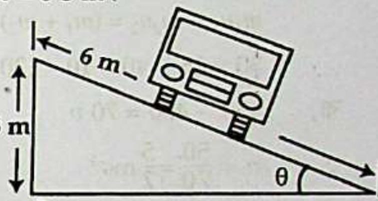
বা, $x = \omega r t = \left(\frac{2\pi N}{t'}\right) rt \qquad [\because v = \omega r]$

এখানে, $t' = 1$ mn $= 60$ s, $N = 25$, $r = 2.2$, $t = 0.64$ s

$$\therefore x = \left(\frac{2 \times 3.14 \times 25}{60}\right) \times 2.2 \times 0.64 = 3.68\,\text{m}$$

অনিকের গোলকটা 3.68 m দূরে গিয়ে পড়বে। কিন্তু দেওয়ালটি 4 m দূরে রয়েছে, তাই গোলকটা দেওয়ালকে আঘাত করবে না।

১৪। 80 m ব্যাসার্ধের একটি বাঁকে 40 kmh^{-1} বেগে বাঁক নেওয়ার সময় একটি গাড়ি রাস্তা থেকে ছিটকে নিচে পড়ে যায়। উদ্দীপকে রাস্তার দুই প্রান্তের মধ্যবর্তী দূরত্ব $d = 6$ m এবং উচ্চতা, $h = 0.3$ m।



(ক) ঘাত বল কী ?

(খ) বাঁকা পথে সাইকেল চালাতে হলে সাইকেলসহ আরোহীকে বৃত্তের কেন্দ্রের দিকে হেলতে হয় কেন ? ব্যাখ্যা কর।

(গ) উদ্দীপকে উল্লেখিত রাস্তার ব্যাংকিং কোণ কত ?

(ঘ) উদ্দীপকের আলোকে গাড়িটি নিচে পড়ে যাওয়ার কারণ গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

(ক) ঘাত বল : খুব অল্প সময়ের জন্য খুব বড় মানের যে বল কোনো বস্তুর ওপর প্রযুক্ত হয় তাকে ঘাত বল বলে।

(খ) সোজা পথে বাঁক নিতে গেলে উল্টে যাওয়ার সম্ভাবনা থাকে। বৃত্তাকার পথে সাইকেলসহ আরোহীকে বৃত্তের কেন্দ্রের দিকে অনুভূমিক বরাবর একটি কেন্দ্রমুখি বলের প্রয়োজন হয়। এই কেন্দ্রমুখি বলের যোগান দিতে সাইকেলসহ আরোহীকে বাঁকের কেন্দ্রের দিকে হেলতে হয়।

(গ) ধরা যাক, ব্যাঙ্কিং কোণ θ

আমরা জানি, $\sin\theta = \frac{h}{d}$

বা, $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{h}{d}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{0.3\,m}{6m}\right) = 2.9°$

সুতরাং রাস্তার ব্যাঙ্কিং কোণ 2.9°

(ঘ) এখানে বাঁকের ব্যাসার্ধ, $r = 80$ m, গাড়ির বেগ, $v = \frac{40 \times 1000}{60 \times 60} = 11.11\ ms^{-1}$, $g = 9.8\ ms^{-2}$

রাস্তার ব্যাঙ্কিং কোণ, $\theta = 2.9°$

মনে করি, ব্যাঙ্কিং কোণ অনুসারে গাড়ির সর্বোচ্চ বেগ, v'

আমরা জানি,

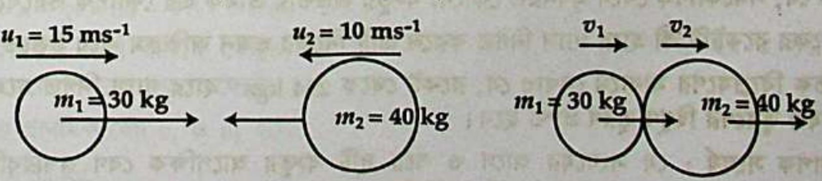
$$\tan\theta = \frac{v'^2}{rg}$$

বা, $v'^2 = rg\tan\theta = 80 \times 9.8 \times \tan 2.9 = 39.7$

$\therefore\ v' = \sqrt{39.7} = 6.3\ ms^{-1}$

এখানে গাড়ির বেগ 11.11 ms^{-1} যা বাঁকের সর্বোচ্চ গতিসীমা 6.3 ms^{-1} এর বেশি। তাই গাড়িটি নিচে পড়ে গিয়েছিল।

১৫। একই সরলরেখায় দুটি বস্তুর সংঘর্ষের চিত্র নিম্নরূপ—



(i) সংঘর্ষের পূর্বে (ii) সংঘর্ষের পর

(ক) বলের ঘাত কী ?

(খ) একটি দেওয়ালে একটি বল ধাক্কা খেয়ে পিছনে ফিরে আসে কেন ? ব্যাখ্যা কর।

(গ) উদ্দীপকে বর্ণিত সংঘর্ষের পর বস্তু দুটির মিলিত বেগ নির্ণয় কর।

(ঘ) উদ্দীপকে উল্লেখিত সংঘর্ষ অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ—গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

(ক) বলের ঘাত : কোনো বল ও বলের ক্রিয়ার গুণফলকে ওই বলের ঘাত বলে।

(খ) দুটি বস্তুর মধ্যে স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের পর প্রথম বস্তুর বেগ,

$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{01} + \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) \times v_{02}$। দেওয়ালের সাথে বলের সংঘর্ষের ক্ষেত্রে $v_{02} = 0$ হয় এবং $m_2 >> m_1$। সুতরাং, $v_1 = -v_{01}$ এবং $v_{02} = 0$ অর্থাৎ দেওয়াল স্থির থাকবে এবং বলটি একই বেগে বিপরীত দিকে ফিরে আসবে।

(গ) চিত্র অনুযায়ী, আমরা জানি,

$$m_1u_1 - m_2u_2 = (m_1 + m_2)v$$

$$30 \times 15 - 40 \times 10 = (30 + 40)v$$

বা, $450 - 400 = 70v$

$\therefore \quad v = \frac{50}{70} = \frac{5}{7} \text{ ms}^{-1}$

এখানে,
$m_1 = 30$ kg
$u_1 = 15 \text{ ms}^{-1}$
$m_2 = 40$ kg
$u_2 = 10 \text{ ms}^{-1}$
মিলিত বেগ, $v = ?$

(ঘ) আমরা জানি, অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে বস্তুগুলোর সংঘর্ষের পর বস্তুর মোট গতিশক্তি সংরক্ষিত হয় না।

উদ্দীপকে সংঘর্ষের পূর্বে গতিশক্তি $= \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$

$$= \frac{1}{2} \times 30 \times (15)^2 + \frac{1}{2} \times 40 \times (10)^2$$

$$= 15 \times 225 + 20 \times 100$$

$$= 3375 + 2000 = 5375 \text{ J}$$

সংঘর্ষের পরে গতিশক্তি $= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$

$$= \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 \qquad [\because v_1 = v_2 = v]$$

$$= \frac{1}{2}(30 + 40) \times \left(\frac{5}{7}\right)^2$$

$$= 35 \times \frac{25}{49} = 17.86 \text{ J}$$

দেখা যাচ্ছে উভয় ক্ষেত্রে গতিশক্তি সমান নয়। সুতরাং উদ্দীপকের সংঘর্ষটি অস্থিতিস্থাপক।

১৬। 10000 kg ভরের একটি রকেটকে উল্লম্বভাবে উৎক্ষেপণ করতে হবে। জ্বালানি দহনে উৎপন্ন গ্যাসের বেগ 1000 ms^{-1}।

(ক) স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ কাকে বলে ?

(খ) দেখাও যে, সমকৌণিক বেগে ঘূর্ণনরত কোনো বস্তুর জড়তার ভ্রামক এর কৌণিক ভরবেগের সমান।

(গ) উদ্দীপকের রকেটটি কী হারে গ্যাস নির্গত করলে এটি নিজের ওজন অতিক্রম করে উড়তে সমর্থ হবে ?

(ঘ) গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে দেখাও যে, রকেট থেকে 294 kgs^{-1} হারে গ্যাস নির্গত হলে রকেটটি শুরুতে অভিকর্ষজ ত্বরণের দ্বিগুণ ত্বরণ প্রাপ্ত হবে।

(ক) স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ : যে সংঘর্ষের আগে ও পরে দুটি বস্তুর আপেক্ষিক বেগ অপরিবর্তিত থাকে অর্থাৎ বস্তুদ্বয়ের মোট গতিশক্তি সংরক্ষিত থাকে সেই সংঘর্ষকে স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ বলে।

(খ) আমরা জানি, ঘূর্ণন গতির ক্ষেত্রে কৌণিক ভরবেগ = জড়তার ভ্রামক × কৌণিক বেগ, বা $L = I\omega$। কৌণিক বেগের মান এক একক হলে অর্থাৎ $\omega = 1$ হলে $L = 1$ হয়। তাই সমকৌণিক বেগে ঘূর্ণনরত বস্তুর জড়তার ভ্রামক এর কৌণিক ভরবেগের সমান।

(গ) রকেটটি নিজের ওজনকে ছাপিয়ে ঠিক উড়তে সমর্থ হবে যদি জ্বালানি দহনে উৎপন্ন গ্যাসের নির্গমনের ফলে উৎপন্ন ঘাত রকেটের ওজনের সমান হয়। অর্থাৎ,

$u\frac{dm}{dt} = mg$ হয়।

$$\therefore \quad \frac{dm}{dt} = \frac{mg}{u} = \frac{10000 \times 9.8}{1000} \text{ kgs}^{-1} = 98 \text{ kgs}^{-1}$$

$\therefore$ জ্বালানি দহনের ন্যূনতম হার হবে 98 kgs^{-1}

(ঘ) রকেটের উর্ধ্বমুখি ত্বরণ a হলে, আমরা জানি,

$$ma = m\frac{dv}{dt} = u\frac{dm}{dt} - mg$$

বা, $$a = \frac{u}{m} \cdot \frac{dm}{dt} - g$$

বা, $$\frac{dm}{dt} = \frac{m}{u}(a+g)$$

প্রশ্নানুসারে, $a = 2g$

$$\therefore \quad \frac{dm}{dt} = \frac{m}{u} \times 3g = \frac{10000}{1000} \times 3 \times 9.8 \text{ kgs}^{-1}$$

$$= 294 \text{ kgs}^{-1}$$

$\therefore$ 294 kgs^{-1} হারে রকেট থেকে গ্যাস নির্গত হলে শুরুতে এর ত্বরণ অভিকর্ষজ ত্বরণের দ্বিগুণ হবে।

১৭। 100 ms^{-1} গতিবেগসহ একটি 50 kg ভরের গোলাকে খাড়া ওপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো। 6 sec পরে গোলাটি বিস্ফোরণের ফলে দুই টুকরা হয়ে গেল। 18 kg ভরের একটি টুকরা 80 ms^{-1} বেগে খাড়া ওপরের দিকে ছুটে গেল।

(ক) বস্তুর জড়তা কী ?

(খ) রৈখিক ভরবেগের নিত্যতা সূত্রটি ব্যাখ্যা কর।

(গ) উদ্দীপকের গোলার 6 sec পরে বিস্ফোরণের ঠিক পূর্বে উর্ধ্বমুখি বেগ নির্ণয় কর।

(ঘ) বিস্ফোরণের ফলে ভরবেগের সংরক্ষণসূত্র প্রযোজ্য হবে কী ? দ্বিতীয় টুকরাটি কত বেগে কোন দিকে ধাবিত হবে—গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

(ক) বস্তুর জড়তা : বস্তুর ওপর কোনো বল প্রয়োগ না করলে স্থির বস্তু চিরকাল স্থির থাকতে চায় এবং গতিশীল বস্তু চিরকাল সমবেগে চলতে চায়। এই ধর্মই বস্তুর জড়তা।

(খ) কোনো বস্তুর ওপর বাহ্যিক বল প্রযুক্ত না হলে ভরবেগের কোনো পরিবর্তন হবে না। অর্থাৎ ভরবেগ সংরক্ষিত থাকে। এটিই ভরবেগের সংরক্ষণ নীতি।

ব্যাখ্যা : কোনো আরোহী নৌকা থেকে লাফিয়ে নামলে নৌকাটি পিছিয়ে যায়। লাফ দেওয়ার আগে নৌকা ও আরোহী স্থির ছিল বলে ওদের ভরবেগ শূন্য ছিল। আরোহী সচল হলে ভরবেগ লাভ করে। ভরবেগের সংরক্ষণ নীতি অনুযায়ী মোট ভরবেগ শূন্য থাকে। তাই নৌকাটিতে সমান ও বিপরীতমুখি ভরবেগ সৃষ্টি হয়। ফলে নৌকাটি সচল হয়ে পিছিয়ে যায়।

(গ) 6 sec পরে বিস্ফোরণের ঠিক পূর্বে গোলার উর্ধ্বমুখি বেগ,

$$v = u - gt = 80 - 9.8 \times 6 = 80 - 58.8 = 21.2 \text{ ms}^{-1}$$

(ঘ) বিস্ফোরণের সময় বাহ্যিক কোনো বল প্রয়োগ করা হয় না। যে বল উৎপন্ন হয় তা গোলার অভ্যন্তরীণ বল। তাই এখানে ভরবেগের সংরক্ষণসূত্র প্রযোজ্য।

টুকরা দুটির প্রাথমিক বেগ v_1 ও v_2 হলে,

$(50 - 18) = 32$ kg

এখন প্রথম টুকরটি 18 kg হলে দ্বিতীয় টুকরার ভর,

$$m_1v_1 + m_2v_2 = mv$$

$$\therefore \quad 18 \times 80 + 32 \times v_2 = 50 \times 21.2$$

বা, $$v_2 = \frac{50 \times 21.2 - 18 \times 80}{32}$$

$$= \frac{1060 - 1440}{32}$$

$$= -\frac{380}{32} = -11.9 \text{ ms}^{-1}$$

ঋণাত্মক চিহ্নের অর্থ হলো যে 32 kg ভরের টুকরাটি বিস্ফোরণের পর খাড়া নিচের দিকে নামে এবং নামার সময় প্রাথমিক বেগ 11.9 ms^{-1}।

১৮। কোনো একটি সরলরেখায় $10\ ms^{-1}$ বেগে চলমান $2\ kg$ ভরের একটি বস্তু একই দিকে সরলরেখায় $2\ ms^{-1}$ বেগে চলমান $10\ kg$ ভরের অপর একটা বস্তুকে ধাক্কা দিল এবং ধাক্কার পর বস্তু দুটি একই দিকে যুক্ত অবস্থায় চলতে থাকল।

(ক) কৌণিক ভরবেগ কাকে বলে ?

(খ) একটি ঢিলকে উল্লম্বভাবে ওপরের দিকে ছুঁড়লে সেটি গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দুতে ক্ষণিকের জন্য থামে। ঢিলটি কী ওই সময় সাম্যে থাকে ? ব্যাখ্যা কর।

(গ) যুক্ত অবস্থায় উদ্দীপকের বস্তু দুটির বেগ নির্ণয় কর।

(ঘ) সংঘর্ষের পূর্বে ও পরে বস্তু দুটির ভরবেগ ও গতিশক্তি সংরক্ষিত থাকে কি–না, গাণিতিভাবে তোমার মতামত দাও।

(ক) কৌণিক ভরবেগ : ঘূর্ণনরত কোনো বস্তু কণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর ও রৈখিক ভরবেগের ভেক্টর গুণফলকে কৌণিক ভরবেগ বলে।

(খ) ঢিলটি তার উর্ধ্বগতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দুতে ক্ষণিকের জন্য স্থির থাকলেও সাম্যে থাকে না। কেননা সর্বোচ্চ বিন্দুতে বস্তুর ত্বরণ শূন্য নয়। এই বস্তুর ওপর পৃথিবীর আকর্ষণ জনিত ত্বরণ নিচের দিকে ক্রিয়া করে। একটি বস্তু তখনই সাম্যে থাকে যখন বস্তুর মোট ত্বরণ শূন্য হয়।

(গ) আমরা জানি,

$$m_1v_{01} + m_2v_{02} = (m_1 + m_2)\,v$$

বা, $2 \times 10 + 10 \times 2 = (2 + 10)\,v$

বা, $v = \frac{20 + 20}{12} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}\ ms^{-1}$

এখানে,
$m_1 = 2\ kg$
$v_{01} = 10\ ms^{-1}$
$m_2 = 20\ kg$
$v_{02} = 2\ ms^{-1}$
যুক্ত অবস্থায় তাদের বেগ $= v$

(ঘ) সংঘর্ষের পূর্বে বস্তুদ্বয়ের ভরবেগ $= m_1v_{01} + m_2v_{02}$
$= 2 \times 10 + 10 \times 2$
$= 40\ kgms^{-1}$

সংঘর্ষের পরে বস্তুদ্বয়ের ভরবেগ $= (m_1 + m_2)\,v$
$= (2 + 10) \times \frac{10}{3}$
$= \frac{12 \times 10}{3}$
$= 40\ kgms^{-1}$

∴ সংঘর্ষের পূর্বে ও পরে ভরবেগ একই থাকে, অর্থাৎ ভরবেগ সংরক্ষিত হয়।

সংঘর্ষের পূর্বে গতিশক্তি $= \frac{1}{2} m_1v_{01}^2 + m_2v_{02}^2$
$= \frac{1}{2} \times 2 \times (10)^2 + \frac{1}{2} \times 10 \times (2)^2$
$= 100 + 20 = 120\ J$

সংঘর্ষের পরে গতিশক্তি $= \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\,v^2$
$= \frac{1}{2}(2 + 10) \times \left(\frac{10}{3}\right)^2$
$= 6 \times \frac{100}{9} = \frac{200}{3} \simeq 67\ J$

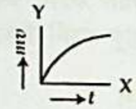
এখানে সংঘর্ষের পূর্বে ও পরে গতিশক্তি সমান নয়।

সুতরাং গতিশক্তি সংরক্ষিত হয় না।

সার-সংক্ষেপ

বল	:	যে বাহ্যিক কারণ বস্তুর গতি বা স্থিতি অবস্থার পরিবর্তন ঘটায় বা ঘটাতে চায় তাকে বল বলে।
মৌলিক বল	:	যে সকল বল মূল বা অকৃত্রিম অর্থাৎ অন্য কোনো বল থেকে উৎপন্ন হয় না তাকে মৌলিক বল বলে।
মৌলিক বলের প্রকারভেদ	:	মৌলিক বল চার ধরনের। যথা—মহাকর্ষ বল, তড়িৎ-চুম্বকীয় বল, সবল নিউক্লিয় বল ও দুর্বল নিউক্লিয় বল।
ভরবেগ	:	বস্তুর ভর ও বেগের সমন্বয়ে বস্তুতে যে ধর্মের উদ্ভব হয় তাকে বস্তুর ভরবেগ বলে। ভরবেগ = ভর × বেগ।
নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র	:	ভরবেগের পরিবর্তনের হার বস্তুর ওপর প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক। এই বল যে দিকে ক্রিয়া করে ভরবেগের পরিবর্তনও সেদিকে ঘটে।
ঘাত বল	:	খুব অল্প সময়ের জন্য খুব বড় মানের যে বল কোনো বস্তুর ওপর প্রযুক্ত হয় তাকে ঘাত বল বলে।
ঘাত	:	কোনো বল ও বলের ক্রিয়াকালের গুণফলকে ওই বলের ঘাত বলে।
জড়তার ভ্রামক	:	কোনো অক্ষ সাপেক্ষে ঘূর্ণনরত কোনো বস্তুর প্রতিটি কণায় ভর ও অক্ষ হতে তাদের প্রত্যেকের লম্ব দূরত্বের বর্গের গুণফলকে জড়তার ভ্রামক বলে।
কৌণিক ভরবেগ	:	ঘূর্ণনরত কোনো বস্তুকণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর ও রৈখিক ভরবেগের ভেক্টর গুণফলকে কৌণিক ভরবেগ বলে।
চক্রগতির ব্যাসার্ধ	:	যদি কোনো দৃঢ় বস্তুর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু যেখানে বস্তুটির সমস্ত ভর কেন্দ্রীভূত আছে ধরা হয় এবং ঘূর্ণন অক্ষ সাপেক্ষে ওই বিন্দুতে জড়তার ভ্রামক সমগ্র বস্তুটির জড়তার ভ্রামকের সমান হয়, তবে অক্ষ হতে ওই বিন্দুর দূরত্বকে চক্রগতির ব্যাসার্ধ বলা হয়।
টর্ক	:	কোনো নির্দিষ্ট অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণায়মান কোনো বস্তুতে ত্বরণ সৃষ্টির জন্য প্রযুক্ত দ্বন্দ্বের ভ্রামককে টর্ক বা বলের ভ্রামক বলে।
কৌণিক ভরবেগের নিত্যতা বা সংরক্ষণ সূত্র	:	বস্তুর উপর ক্রিয়ারত বহিস্থ টর্কের লব্ধি শূন্য হলে, ঘূর্ণায়মান বস্তুর কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তন হবে না। এটিই কৌণিক ভরবেগের নিত্যতা বা সংরক্ষণ সূত্র।
কেন্দ্রমুখি বল	:	যে বলের ক্রিয়ায় কোনো বস্তু সমদ্রুতিতে বৃত্তপথে চলতে থাকে এবং যে বল সবসময় বস্তুর গতিপথের সঙ্গে লম্বভাবে ভেতরের দিকে অর্থাৎ বৃত্তের কেন্দ্রাভিমুখে ক্রিয়া করে তাকে কেন্দ্রমুখি বা অভিকেন্দ্র বল (Centripetal force) বলা হয়।
কেন্দ্রবিমুখি বল	:	সমদ্রুতিতে বৃত্তপথে আবর্তনরত বস্তুর ওপর অভিকেন্দ্র বলের সমান ও বিপরীতমুখি অর্থাৎ কেন্দ্র থেকে বাইরেরর দিকে একটি অলীক বল ক্রিয়া করে। একে কেন্দ্রবিমুখি বা অপকেন্দ্র বল বলে।
সংঘর্ষ	:	অতি অল্প সময়ের জন্য বৃহৎ কোনো বল ক্রিয়া করে বস্তুর গতির হঠাৎ ও ব্যাপক পরিবর্তন করাকে সংঘাত বা সংঘর্ষ বলে।
স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ	:	সংঘর্ষের আগে ও পরে দুটি বস্তুর আপেক্ষিক বেগ অপরিবর্তিত থাকলে সংঘর্ষটিকে পূর্ণ স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ বলে।
অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ	:	যে সংঘর্ষের পর বস্তুটি পরস্পরের সঙ্গে যুক্ত হয়ে একটি বস্তুরূপে চলতে থাকে অর্থাৎ যে সংঘর্ষের পর বস্তু দুটির আপেক্ষিক বেগ শূন্য হয়, তাকে অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ বলে।
একমাত্রিক সংঘর্ষ	:	সংঘাতাধীন বস্তু দুটির আপেক্ষিক গতিবেগ সংঘর্ষের আগে ও পরে একই সরলরেখা বরাবর হলে ওই সংঘর্ষকে একমাত্রিক সংঘর্ষ বলে।

বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তরের জন্য প্রয়োজনীয় বিষয়াবলির সার-সংক্ষেপ

১। একটি গাড়ি স্থির অবস্থা হতে ত্বরণশীল হলে সময়ের বিপরীতে ভরবেগের লেখচিত্র হবে 

২। হাতঘড়ির কাঁটার কৌণিক বেগ ঘণ্টার কাটার জন্য $\frac{\pi}{720}$ rad min^{-1} বা $\frac{\pi}{21600}$ rad s^{-1}, মিনিটের কাটার জন্য $\frac{\pi}{180}$ rad s^{-1}, সেকেন্ডের কাটার জন্য $\frac{\pi}{30}$ rad s^{-1}।

৩। কেন্দ্রমুখি বল দ্বারা কৃত কাজ শূন্য হবে। ব্যাঙ্কিং কোণ নির্ভর করে বস্তুর বেগের ওপর এবং রাস্তার বাঁকের ব্যাসার্ধের ওপর।

৪। 1 rps = 2 πrad, $\frac{mv^2}{r}$ হলো কেন্দ্রমুখি বলের রাশিমালা। সেকেন্ডের কাটার কৌণিক বেগ > মিনিটের কাটার কৌণিক বেগ > ঘণ্টার কাটার কৌণিক বেগ।

৫। কৌণিক ভরবেগের একক kgm^{2}s^{-1} এবং মাত্রা সমীকরণ MLT^{-1}। $F = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$, $L = mvr = mr^2\omega$.

৬। টর্কের অপর নাম ঘূর্ণন বল। কৌণিক ভরবেগের মাত্রা সমীকরণ ML^{2}T^{-1}। টর্কের একক N-m বা জুল।

৭। পাতলা বৃত্তাকার চাকতির চক্রগতির ব্যাসার্ধ হলো $K = \frac{r}{\sqrt{2}}$। কোনো বস্তুর জড়তার ভ্রামক কৌণিক বেগের ওপর নির্ভর করে। সরু সুষম দণ্ডের প্রান্ত এবং লম্বভাবে দণ্ডের মধ্য বিন্দু দিয়ে ঘূর্ণনের ক্ষেত্রে জড়তার ভ্রামক 4 গুণ হয়।

৮। কোনো বস্তুর জড়তার ভ্রামক নির্ভর করে ভর ও ঘূর্ণন অক্ষের অবস্থানের ওপর। টর্কের একক N-m মাত্রা [ML^{2}T^{-2}]

৯। সমান ভরের দুটি বস্তুর মধ্যে স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ হলে এবং ১ম বস্তুর আদিবেগ u_1, শেষ বেগ v_1 এবং ২য় বস্তুর আদিবেগ u_2 এবং শেষবেগ v_2 হলে $u_1 = v_2$ প্রযোজ্য। সব থেকে দুর্বল বল মহাকর্ষ বল। সবল নিউক্লিয় বল শক্তিশালী বল।

১০। একক ভরের বস্তুর ওপর একক ত্বরণ সৃষ্টি করলে একক বলের সৃষ্টি হয়। কৌণিক ভরবেগের একক kg m^{2}s^{-1}.

১১। সমকৌণিক বেগে ঘূর্ণনরত কোনো বস্তুর ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ দ্বিগুণ হলে টর্ক 4 গুণ হবে। কৌণিক ভরবেগের মাত্রা = [ML^{2}T^{-1}]

১২। রৈখিক বেগ ও কৌণিক বেগের মধ্যবর্তী কোণ 90°। একটি পাখা প্রতি মিনিটে 60 বার ঘুরলে পাখাটির কৌণিক বেগ হবে 2π rad/s. ঘড়ির মিনিটের কাটার কম্পাঙ্ক 2.78×10^{-4} Hz.

১৩। নৌকায় গুন টানার সময় নৌকার হাল দ্বারা প্রযুক্ত বলের উল্লম্ব উপাংশ প্রশমিত হয়।

১৪। ব্যাঙ্কিং হলো রাস্তার বাঁকে কেন্দ্রমুখি বল যোগানের জন্য ঢাল। ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার মধ্যবর্তী কোণ 180°।

১৫। 'r' ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে একবার ঘুরে আসলে সরণ হবে $2\pi r$। কৌণিক ত্বরণের মাত্রা [T^{-2}].

১৬। বলের ঘাত ভরবেগের পরিবর্তনের সমান। আর ঘাতবল হলো খুব অল্প সময়ের জন্য খুব বড় মানের প্রযুক্ত বল।

১৭। বলের ভ্রামক বা টর্ক (i) $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ (ii) $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ (iii) $\tau = \frac{d\vec{L}}{dt}$ (iv) $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$ (v) $E = \frac{1}{2}I\omega^2$ ($E \propto I$ যখন ω ধ্রুব) কেন্দ্রমুখি বলের ভেক্টররূপ : $-m(\vec{\omega}.\vec{\omega})r$। ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার মধ্যবর্তী কোণ 180°।

১৮। ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া বল (i) দুটি ভিন্ন বস্তুর উপর ক্রিয়া করে (ii) এদের যোগফল শূন্য হয়।

১৯। আবর্তন ঘূর্ণন গতির জন্য (i) কাজ = টর্ক × কৌণিক বেগ, (ii) ক্ষমতা = টর্ক × কৌণিক বেগ

২০। দৃঢ় বস্তুর জড়তার ভ্রামক নির্ভর করে (i) ঘূর্ণন অক্ষের অবস্থানের ওপর (ii) দৃঢ় বস্তুর আকৃতির ওপর (iii) ঘূর্ণন অক্ষের চারদিকে দৃঢ় বস্তুর ভরের ওপর। বল × ক্রিয়াকাল = ঘাত বল।

২১। ১ম বস্তুর ভর ২য় বস্তুর ভরের তুলনায় অনেক বেশি হলে সংঘর্ষের পর ১ম বস্তুটি একই বেগে চলতে থাকবে।

২২। ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটার কৌণিক বেগ = $\frac{\pi}{21600}$ rad s^{-1}। জড়তার ভ্রামক ও ঘূর্ণন গতিশক্তির মধ্যে সম্পর্ক হলো $E = \frac{1}{2}I\omega^2$। সমকৌণিক বেগে ঘূর্ণায়মান বস্তুর গতিশক্তি জড়তার ভ্রামকের অনুপাত কৌণিক বেগের বর্গের সমানুপাতিক। একক কৌণিক বেগে ঘূর্ণনরত বস্তুর গতি জড়তার ভ্রামক গতিশক্তির দ্বিগুণ।

২৩। ভরবেগ 100% বৃদ্ধি করলে গতিশক্তির পরিবর্তন হবে 300%।

২৪। একক সমকৌণিক বেগে আবর্তনরত কোনো দৃঢ়বস্তুর জড়তার ভ্রামক সংখ্যাগতভাবে এর গতিশক্তির দ্বিগুণ।

২৫। কোনো দৃঢ় বস্তুর চক্রগতির ব্যাসার্ধ, $K = \sqrt{\frac{I}{M}}$। কোনো কণার ওপর প্রযুক্ত টর্ক শূন্য হলে কৌণিক ভরবেগ ধ্রুবক হয়। ডাইভিং এ লাফ দেওয়ার সময় সাতারুর কৌণিক ভরবেগ ধ্রুব থাকে। সবচেয়ে শক্তিশালী বল সবল নিউক্লিয় বল।

২৬। কোনো বিন্দুর সাপেক্ষে ভরবেগের ভ্রামককে কৌণিক ভরবেগ বলে। কেন্দ্রমুখি বলের ভেক্টররূপ $\frac{m(\vec{v} \times \vec{v})}{r}$.

২৭। বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণনরত বস্তুর রৈখিক দ্রুতি v এবং আবর্তনকাল T এর মধ্যকার সম্পর্ক হলো, $v = \frac{2\pi r}{T}$

২৮। স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে সংরক্ষিত থাকে গতিশক্তি এবং ভরবেগ। অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে মোট গতিশক্তি সংরক্ষিত হয় না। বৃত্তাকার পথে কেন্দ্রের সাপেক্ষে গতিশীল হলে $\vec{r}$ ও $\vec{P}$ এর মধ্যবর্তী কোণ 90° হয়। ব্যাঙ্কিং কোণ নির্ভর করে বস্তুর বেগের ওপর এবং রাস্তার বাঁকের ব্যাসার্ধের ওপর।

২৯। দুটি বস্তুর সংঘর্ষে ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া বল—(১) সমান ও বিপরীত (২) সর্বদা একই বস্তুর ওপর ক্রিয়া করে।

৩০। বলের ঘাতের একক নিউটন-সেকেন্ড, ভরবেগ ও গতিশক্তির সম্পর্ক হলো $E_k = \frac{P^2}{2m}$

৩১। সবল নিউক্লিয় বল আকর্ষণধর্মী, স্বল্প পাল্লার এবং চার্জ নিরপেক্ষ। মহাকর্ষ বল মাধ্যমের প্রকৃতির ওপর নির্ভর করে না। মহাকর্ষ বলের তীব্রতা 1। সবল নিউক্লিয় বলের তীব্রতা 10^{42}। সবচেয়ে দুর্বল বল মহাকর্ষ বল।

৩২। গতিশক্তি ও জড়তার ভ্রামকের সম্পর্ক, $E_k = \frac{1}{2} I\omega^2$। M ভরের এবং R ব্যাসার্ধের একটি চাকতি তার সাথে লম্ব বরাবর অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক $\frac{MR^2}{2}$। কোনো বস্তুর জড়তার ভ্রামক নির্ভর করে ভর ও ঘূর্ণন অক্ষের ওপর। ডাল ভাঙ্গানোর যাতাকলে কিনারার কণার রৈখিক বেগ বেশি এবং প্রতিটি কণার কৌণিক ভরবেগ সমান।

৩৩। আণবিক গঠনের জন্য দায়ী তড়িৎ চৌম্বক বল। বৃত্তাকার গতির ক্ষেত্রে কৌণিক ভরবেগ $mr^2\omega$.

অনুশীলনী

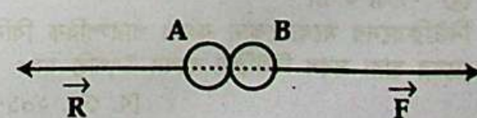
(ক) বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। সবচেয়ে শক্তিশালী বল হচ্ছে— [সি. বো. ২০১৯]
ক মহাকর্ষ বল
খ তড়িৎ চুম্বকীয় বল
গ সবল নিউক্লীয় বল
ঘ দুর্বল নিউক্লীয় বল

২। নিচের বলগুলোর মধ্যে কোনটি সবচেয়ে দুর্বল ? [কু. বো. ২০১৬; সি. বো. ২০১৬; য. বো. ২০১৫; Medical Admission Test, 2016-17]
ক মহাকর্ষ বল
খ তড়িৎ চুম্বকীয় বল
গ সবল নিউক্লীয় বল
ঘ দুর্বল নিউক্লীয় বল

৩। বলের মাত্রা সমীকরণ কোনটি ?
ক $[MLT^{-2}]$
খ $[MLT^{-1}]$
গ $[ML^2T^{-1}]$
ঘ $[ML^2T^{-2}]$

৪।



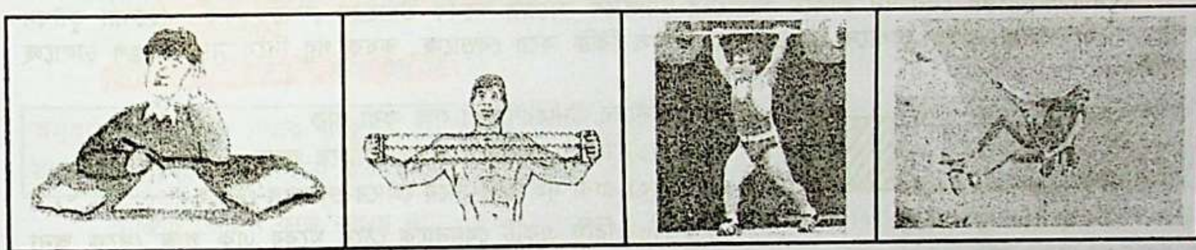
চিত্রটি নিউটনের কোন সূত্র প্রকাশ করে ?
ক ১ম সূত্র
খ ২য় সূত্র
গ ৩য় সূত্র
ঘ ২য় ও ৩য় সূত্র

৫। একটি ঘড়ির সেকেন্ডের কাঁটার কৌণিক কম্পাঙ্ক কত হবে ? [BUET Admission Test, 2013-14]
ক 1.0 rev/s
খ 0.017 rev/s
গ 0.5 rev/s
ঘ 60.0 rev/s

৫

প্রধান শব্দ (Key Words) : কাজ, কাজের একক, শক্তি, স্থিতিস্থাপক বল, গতিশক্তি, স্থিতিশক্তি, ক্ষমতা, ক্ষমতার একক, অসংরক্ষণশীল বল, কর্মক্ষমতা।

কাজ, শক্তি ও ক্ষমতা
WORK, ENERGY AND POWER



সূচনা
Introduction

কাজ, শক্তি ও ক্ষমতা এ তিনটি শব্দ আমাদের অতি পরিচিত। আমরা দৈনন্দিন জীবনে কাজ শব্দটিকে শারীরিক কিংবা মানসিক যে কোনো কাজের জন্য ব্যবহার করে থাকি। তাই সাধারণ অর্থে **কোনো কিছু করার নামই কাজ।** যেমন রিকশাওয়ালা যখন রিকশা টানে তখন সে কাজ করে, কুলি যখন মাল বহন করে তখন সে কাজ করে, ঘোড়া যখন গাড়ি টানে তখন এটি কাজ করে ইত্যাদি। এ থেকে স্পষ্ট যে কাজ শব্দটি দৈনন্দিন জীবনে কোনো নির্দিষ্ট অর্থে ব্যবহৃত না হয়ে ব্যাপক অর্থে ব্যবহৃত হয়। পদার্থবিজ্ঞানে কাজ বলতে নির্দিষ্ট একটি অর্থ বুঝায়। আমরা ক্ষমতা ও শক্তি উভয়ই সাধারণভাবে একই অর্থে ব্যবহার করি। কিন্তু প্রকৃতপক্ষে এরা এক নয়। এ অধ্যায়ে কাজ, ক্ষমতা ও শক্তির প্রকৃত ব্যাখ্যা এবং এদের সম্পর্কিত বিভিন্ন সম্পর্ক আলোচনা করা হবে।

এই অধ্যায় পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা—

- কাজ ও শক্তির সর্বজনীন ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- বল ও সরণের সাথে কাজের ভেক্টর সম্পর্ক বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- স্থির বল ও পরিবর্তনশীল বল দ্বারা সম্পাদিত কাজ বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- স্থিতিস্থাপক বল ও অভিকর্ষ বলের বিপরীতে সম্পাদিত কাজের তুলনা করতে পারবে।
- গতিশক্তির গাণিতিক রাশিমালা প্রতিপাদন ও সমস্যা সমাধানে এর ব্যবহার করতে পারবে।

  ব্যবহারিক : একটি স্প্রিং এর বিভব শক্তি পরিমাপ করতে পারবে।
- শক্তির নিত্যতার নীতি ব্যবহার করে বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবে।
- ক্ষমতা, বল ও বেগের মধ্যে সম্পর্ক বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- সংরক্ষণশীল ও অসংরক্ষণশীল বল ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- কোনো সিস্টেমের ক্ষেত্রে কর্মদক্ষতা হিসাব করতে পারবে।

৫.১ কাজ ও শক্তির সর্বজনীন ধারণা
Universal concept of work and energy

৫.১.১ কাজ
Work

সাধারণভাবে কোনো কিছু করাকে কাজ বলে। যেমন পড়াশোনা করা, কারখানায় কাজ করা, সাইকেল চালানো ইত্যাদি। বিজ্ঞানের ভাষায় কাজের অর্থ আলাদা।

বল প্রয়োগ করলে বস্তুর সরণ ঘটলে তখনই কেবল কাজ হয়। যেমন একটি বইকে টেবিলের ওপর থেকে নিচে ফেলে দেওয়া হলো। মাথায় বোঝা নিয়ে একজন লোক সিঁড়ি বেয়ে ওপরে উঠল, এই দুটি উদাহরণ দ্বারা কাজ করা বুঝায়। প্রথম ক্ষেত্রে অভিকর্ষ বলের দিকে সরণ হয়েছে। আর দ্বিতীয় ক্ষেত্রে অভিকর্ষ বলের বিপরীতে সরণ হয়েছে। তাই উভয় ক্ষেত্রে কাজ হয়েছে। কিন্তু একজন লোক কাঁধে বোঝা নিয়ে এক স্থানে স্থির থেকে খুব ক্লান্ত হয়ে পড়লেও কোনো কাজ হবে না। কারণ বোঝাটির কোনো সরণ হচ্ছে না। এই আলোচনা থেকে বোঝা যায় যে—কোনো বস্তুর

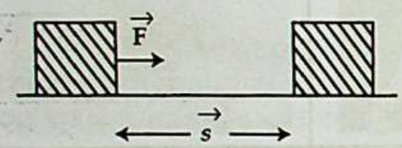
ওপর বল প্রয়োগ করলে যদি বস্তুর সরণ ঘটে কেবলমাত্র তখনই কাজ করা হয়। কিন্তু বল প্রয়োগ করলেও যদি বস্তুর সরণ না ঘটে তাহলে কোনো কাজ হয় না। F বল প্রয়োগে s পরিমাণ সরণ হলে [চিত্র ৫.১], কাজ

$$W = Fs \qquad \ldots \qquad (5.1)$$

কাজ একটি স্কেলার রাশি। ভেক্টর আকারে লিখলে, কাজ

$$W = \vec{F} . \vec{s} \qquad \ldots \qquad (5.2)$$

আমরা আমাদের দৈনন্দিন জীবনে আমাদের চারপাশে কাজের অনেক উদাহরণ দেখতে পাই। ছেলেরা ফুটবল খেলছে, রিকশাওয়ালা রিকশা চালাচ্ছে, ফেরিওয়ালা জিনিস বিক্রি করে বেড়াচ্ছে, কৃষক গরু দিয়ে মাঠে লাঙল চালাচ্ছে ইত্যাদি।



চিত্র ৫.১

নিচের উদাহরণগুলো লক্ষ করা যাক :

(১) মিলন বই নিয়ে ক্লাসে দাঁড়িয়ে আছে।

(২) রানা দুই হাত দিয়ে জোরে দেওয়াল ঠেলছে।

(৩) রিমি একটি খেলনাকে ঠেলে ঘরের এক প্রান্ত থেকে অন্য প্রান্তে পাঠিয়ে দিল।

যেহেতু বল প্রয়োগে বস্তু গতিশীল হলেই কেবল কাজ হয় তাই প্রথম ও দ্বিতীয় ক্ষেত্রে কোনো কাজ হয়নি কিন্তু তৃতীয় ক্ষেত্রে কাজ হয়েছে।

আবার F বল প্রয়োগে s সরণের দিকে θ কোণ উৎপন্ন হলে, বল ও সরণের উপাংশের গুণফল দ্বারা কাজের পরিমাণ হিসাব করা যায়। অর্থাৎ কাজ = বল × বলের দিকে সরণের উপাংশ

বা, $W = Fs \cos\theta \qquad \ldots \qquad (5.3)$

তাই কাজকে নিম্নোক্ত উপায়ে সংজ্ঞায়িত করা যায়।

সংজ্ঞা : কোনো বস্তুর ওপর বল প্রয়োগে বস্তুর সরণ ঘটলে প্রযুক্ত বল ও বলের অভিমুখে সরণের উপাংশের গুণফলকে কাজ বলে।

একক : কাজের এস. আই. একক হলো জুল (Joule) বা নিউটন-মিটার (Nm)। কাজ একটি স্কেলার রাশি।

1 নিউটন বল প্রয়োগে কোনো বস্তুর 1 মিটার সরণ হলে যে কাজ হয় তাকে 1 নিউটন-মিটার বা 1 জুল বলে।

কাজের অভিকর্ষীয় একক : কেজি-মিটার।

কাজের মাত্রা : $[W] = [F][s] = MLT^{-2} \times L = ML^2T^{-2}$

অনুধাবনমূলক কাজ : বল ও সরণ দিক রাশি হওয়া সত্ত্বেও কাজ স্কেলার রাশি কেন ?

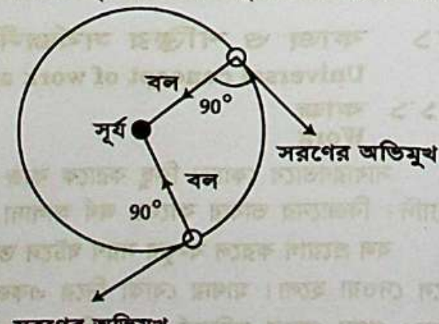
কাজ হলো বল ও সরণের ডট গুণফল অর্থাৎ $W = \vec{F} . \vec{s} = Fs \cos\theta$। যেহেতু ডট গুণন একটি স্কেলার রাশি তাই বল ও সরণ ভেক্টর হওয়া সত্ত্বেও কাজ স্কেলার রাশি।

৫.১.২ কাজ হওয়া এবং না হওয়ার কারণ

নিচের ঘটনাগুলো পড়ে কাজ হওয়া এবং না হওয়ার কারণ জেনে নাও।

● পৃথিবী সূর্যের চারদিকে ঘুরছে, যে কোনো মুহূর্তে পৃথিবীর সরণের অভিমুখ ওই বৃত্তচাপের স্পর্শক বরাবর হয় [চিত্র ৫.২]। কিন্তু সূর্য পৃথিবীকে যে মহাকর্ষ বলে আকর্ষণ করে তা সব সময় পৃথিবী থেকে সূর্যের অভিমুখে অর্থাৎ বৃত্তচাপের ব্যাসার্ধ বরাবর কেন্দ্র অভিমুখে ক্রিয়া করে। অতএব সূর্যের আকর্ষণ বলের অভিমুখ ও পৃথিবীর সরণের অভিমুখ সবসময় পরস্পরের ওপর লম্ব হওয়ায় পৃথিবীর আবর্তনের সময় সূর্যের মহাকর্ষ বল কোনো কাজ করে না।

● হাতে একটি ব্যাগ নিয়ে সমতল পথে হাঁটলে ব্যাগটির ওজন অর্থাৎ অভিকর্ষ বল কোনো কাজ করে না। কারণ সমতল পথে হাঁটায় ব্যাগটির সরণ অনুভূমিক রেখা বরাবর অর্থাৎ অভিকর্ষীয় বলের লম্ব দিকে হয়। তাই ব্যাগটির সরণ হলেও অভিকর্ষ বল কোনো কাজ করে না। অতএব এক্ষেত্রে অভিকর্ষ বল কাজহীন বল। কিন্তু ব্যাগ নিয়ে উঁচু-নিচু পথে হাঁটলে অভিকর্ষ বল কাজ করে।



চিত্র ৫.২

● একটি পাথরে দড়ি বেঁধে ঘোরালে পাথরটি হাতের আঙুলের চারদিকে বৃত্তপথে ঘুরতে থাকে। এখানে দড়ির টান হলো অভিকেন্দ্র বল। অতএব পাথরটি ঘুরবার সময় দড়ির টান কোনো কাজ করবে না।

কাজ : পানি থেকে সদ্য তুলে আনা একটি চিংড়ি মাছকে মাটির ওপর রাখ। এবার একটা কাঠি দূর থেকে মাছটির গায়ের দিকে ঠেলে দাও। কী দেখতে পাবে ? চিংড়ি মাছটি সোজা ওপরের দিকে লাফ দিবে। এক্ষেত্রে চিংড়ি মাছটি কর্তৃক কোনো কাজ হবে কী ?

কাজের সংজ্ঞা থেকে আমরা জানি বল ক্রিয়া করলেও

(i) যদি বলের প্রয়োগ বিন্দুর সরণ $s = 0$ হয় তবে কাজ $W = 0$ হয়

(ii) যদি বলের প্রয়োগ বিন্দুর সরণ বলের অভিমুখের লম্বদিকে হয় অর্থাৎ $\theta = 90°$ হয় তবে $\cos\theta = 0$ হলে $W = 0$ হয়।

তাই এক্ষেত্রে কোনো কাজ হয় নি।

অনুধাবনমূলক কাজ : এক ব্যক্তি নদীতে স্রোতের বিপরীতে এমনভাবে সাঁতার কাটছে যে সে নদীর তীর সাপেক্ষে স্থির রয়েছে। ওই ব্যক্তি কী কোনো কাজ করছে ? — ব্যাখ্যা কর।

ব্যক্তিটি কোনো কাজ করছে না। কেননা স্রোতের জন্য সৃষ্ট বলকে প্রশমিত করার জন্য ওই ব্যক্তিকে একটি বিরুদ্ধ বল প্রয়োগ করতে হচ্ছে। এখন যেহেতু তীর সাপেক্ষে ওই বলের প্রয়োগ বিন্দুর কোনো সরণ হচ্ছে না, তাই ওই ব্যক্তি কর্তৃক কৃত কাজ শূন্য হবে। অর্থাৎ ওই ব্যক্তি কোনো কাজ করছে না।

৫.১.৩ কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্রে কাজ

একাধিক বল দ্বারা কাজ :

যদি বস্তুতে একাধিক বল প্রযুক্ত হয়, তাহলে ওই বলগুলি দ্বারা কাজের মোট পরিমাণ প্রতিটি বল দ্বারা কাজের যোগফলের সমান হয়। ওই বলগুলির লব্ধি দ্বারা কাজের পরিমাণও একই হয়।

বলের দ্বারা কাজ :

যদি চলন্ত একটি ফুটবলে পা দিয়ে গতির দিকে বল প্রয়োগ করা হয় তাহলে ফুটবলটি বলের ক্রিয়ার দিকে সরে যায়। গাছ থেকে একটি আম মাটিতে ফেলে দিলে তা অভিকর্ষের প্রভাবে নিচে পড়বে। উভয় ক্ষেত্রে কাজ ধনাত্মক বা বলের দ্বারা কাজ বুঝায়। অতএব বলা যায় বল প্রয়োগ করার ফলে যদি বলের প্রয়োগ বিন্দু বলের ক্রিয়া অভিমুখে সরে যায় বা বলের দিকে সরণের উপাংশ থাকে, তাহলে বলের দ্বারা কাজ বুঝায়। এক্ষেত্রে বলের দ্বারা কাজ ধনাত্মক কাজ। বলের দিকে কাজ হলে স্থিতিশক্তি হ্রাস পায়, গতিশক্তি বৃদ্ধি পায়। বলের দ্বারা কাজের ক্ষেত্রে $0° \leq \theta < 90°$।

বলের বিরুদ্ধে কাজ :

একজন লোক মাটি থেকে একটি চাউলের বস্তাকে মাথার ওপর তুলল। আবার একটি বইকে মেঝে থেকে আলমারীতে তুলল। এই দুটি ক্ষেত্রে অভিকর্ষের বিরুদ্ধে কাজ করা হয়। সুতরাং যদি একটি বস্তুর ওপর ক্রিয়ারত বলের বিপরীত দিকে বস্তুটিকে সরানো হয় অর্থাৎ বলের অভিমুখের বিপরীত দিকে বলের প্রয়োগ বিন্দু সরে যায়, তবে বলের বিরুদ্ধে কাজ হয়েছে বুঝায়। এক্ষেত্রে বলের বিপরীতে কাজ ঋণাত্মক কাজ। বলের বিরুদ্ধে কাজ হলে স্থিতিশক্তি বৃদ্ধি পায়। বলের বিরুদ্ধে কাজের ক্ষেত্রে $90° < \theta \leq 80°$।

শূন্য কাজ ও কার্যহীন বল :

কোনো বস্তুর ভরের ওপর বল প্রয়োগে লম্ব বরাবর সরণ ঘটলে ওই বলের দ্বারা কাজ শূন্য হয় বা কোনো কাজ হয় না। সেক্ষেত্রে $\theta = 90°$ হয় এবং কাজ $W = Fs\cos 90° = 0$ হয়।

এক্ষেত্রে সরণের অভিমুখে বলের উপাংশ শূন্য। এই বলকে কার্যহীন বল বলে। সুতরাং যে বলের প্রয়োগে বস্তুর সরণ বলের অভিমুখের সমকোণে ঘটে তাকে কার্যহীন বল বলে। অভিকেন্দ্র বল (centripetal force) একটি কার্যহীন বল।

অনুধাবনমূলক কাজ : পৃথিবী সূর্যের চারদিকে ঘুরছে কিন্তু কোনো কাজ করছে না কেন ?

পৃথিবী সূর্যের চারদিকে ঘুরছে কিন্তু কোনো কাজ করছে না। এর কারণ হলো প্রতিটি মুহূর্তে পৃথিবীর সরণ ঘটছে মহাকর্ষ বলের লম্ব দিকে। অর্থাৎ এক্ষেত্রে $W = Fs\cos\theta = Fs\cos 90° = 0$ হয়। তাই কোনো কাজ হয় না।

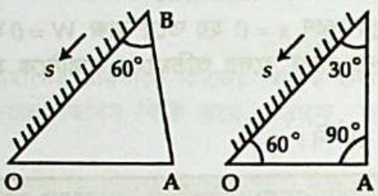
গাণিতিক উদাহরণ ৫.১

১। 150 kg ভরের এক ব্যক্তি 50 kg ভরের একটি বোঝা নিয়ে 4m দীর্ঘ একটি সিঁড়ি বেয়ে নামল। যদি সিঁড়িটি দেওয়ালের সাথে 60° কোণে এবং অনুভূমিকের সাথে 60° কোণে থাকে তবে দুই ক্ষেত্রে কত কাজ করল নির্ণয় কর।

১ম ক্ষেত্রে,

আমরা জানি,

$$W = Fs\cos\theta$$
$$= mgs\cos\theta$$
$$= 200 \times 4 \times 9{\cdot}8 \times \cos 60°$$
$$= 200 \times 4 \times 9{\cdot}8 \times 0{\cdot}5$$
$$= 3920 \text{ J}$$



এখানে,

ভর, $m = 150 + 50 = 200$ kg

অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9{\cdot}8\ \text{ms}^{-2}$

কোণ, $\theta = 60°$

$s = 4$ m

২য় ক্ষেত্রে,

আবার অনুভূমিকের সাথে 60° কোণের ক্ষেত্রে $\theta = 90° - 60° = 30°$

$\therefore$ কাজ, $W = Fs\cos 30° = 200 \times 4 \times 9{\cdot}8 \cos 30° = 6789{\cdot}4$ J

২। একটি কণার উপর $\vec{F} = (5\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k})$ N বল প্রয়োগে কণাটির $\vec{r} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$ m সরণ হয়। বল দ্বারা সম্পাদিত কাজ কত?

আমরা জানি,

$$W = \vec{F}\cdot\vec{r}$$
$$= (5\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k})\cdot(3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$$
$$= 5\times3 - 3\times2 - 2\times1$$
$$= 15 - 6 - 2 = 7 \text{ J}$$

এখানে,

$\vec{F} = (5\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k})$ N

$\vec{r} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$ m

৩। 5 kg ভরের একটি বস্তু 5 m উঁচু থেকে একটি পেরেকের ওপর পড়লে পেরেকটি মাটির ভিতরে 10 cm ঢুকে যায়। মাটির গড় প্রতিরোধ বল নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০০৬]

আমরা জানি,

পতনশীল বস্তুর স্থিতিশক্তি = প্রতিরোধ বলের বিরুদ্ধে কাজ

প্রতিরোধ বলের বিরুদ্ধে কাজ $= F \times s$

$= F \times 0{\cdot}1$

বস্তুটির মোট পতন $= h + s = 5 + 0{\cdot}1$

$= 5{\cdot}1$ m

$\therefore$ বস্তুর স্থিতিশক্তি $= mg(h + s) = (5 \times 9{\cdot}8 \times 5{\cdot}1)$ J

প্রশ্নানুসারে,

$$F \times 0{\cdot}1 = 5 \times 9{\cdot}8 \times 5{\cdot}1$$

$$\therefore F = \frac{5 \times 9{\cdot}8 \times 5{\cdot}1}{0{\cdot}1} = 2499\text{N}$$

উত্তর : গড় প্রতিরোধ বল = 2499N

এখানে,

বস্তুর ভর, $m = 5$ kg

উচ্চতা, $h = 5$ m

সরণ, $s = 10$ cm $= 0{\cdot}1$ m

প্রতিরোধ বল, F = ?

অনুধাবনমূলক কাজ : কী কী শর্তে কাজ শূন্য হয় ?

কাজ শূন্য হওয়ার শর্ত : (ক) সরণ যদি শূন্য হয়, তবে কাজ $W = F \times 0 = 0$ হয়।

(খ) বল ও সরণের মধ্যবর্তী কোণ 90° হলে কাজ $W = Fs\cos 90° = 0$ হয়।

(গ) সংরক্ষণশীল বলের প্রভাবে যদি কোনো বস্তু বৃত্তাকার পথে ঘুরে তখন কাজ শূন্য হয়।

৫.২ বল, সরণ এবং কাজ
Force, displacement and work

মনে কর একটি মার্বেল-এর ভর m এবং এটি v_0 আদি বেগে গতিশীল। এই মার্বেলের ওপর বল প্রয়োগ করা হলো। ফলে বেগ পরিবর্তিত হয়ে v হলো। তাহলে বল প্রয়োগের আগে গতিশক্তি = $\frac{1}{2}mv_0^2$ এবং বল প্রয়োগের পর গতিশক্তি = $\frac{1}{2}mv^2$। এক্ষেত্রে কৃত কাজ হবে গতিশক্তিদ্বয়ের পার্থক্যের সমান।

∴ কাজ = গতিশক্তির পরিবর্তন

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.4)$$

গতির সমীকরণ থেকে আমরা জানি

$$v^2 = v_0^2 + 2as \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.5)$$

এখানে a = ত্বরণ, s = সরণ। এখন (5.5) নং সমীকরণে $\frac{1}{2}m$ দ্বারা উভয় পাশে গুণ করে পাই

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}m(2as)$$

বা, $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mas \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.6)$

বা, $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + Fs \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.7)$

$[\because F = ma]$

বা, $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = Fs \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.8)$

সমীকরণ (5.4) এবং সমীকরণ (5.8) থেকে পাই

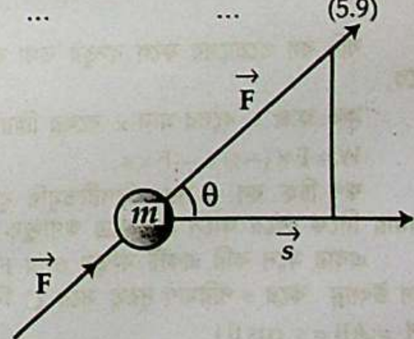
$$W = Fs \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.9)$$

যদি সরণ অভিমুখে প্রযুক্ত বল বিবেচনা না করে বলের দিকে সরণের উপাংশ বিবেচনা করা হয় তাহলে চিত্র ৫.৩ অনুযায়ী

$$W = Fs\cos\theta$$

ভেক্টর আকারে প্রকাশ করলে

$$W = \vec{F}\cdot\vec{s} \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.10)$$



চিত্র ৫.৩

সুতরাং বলা যায় বল ও সরণের স্কেলার গুণন হলো কৃত কাজ। অর্থাৎ সরণ ও সরণ অভিমুখে বলের উপাংশের গুণফলই হলো কৃত কাজ।

কাজের সাধারণ সংজ্ঞা থেকে দেখা যায় বল ক্রিয়া করলেও যদি বলের প্রয়োগ বিন্দুর সরণ $s = 0$ হয় তাহলে কৃত কাজ $W = 0$ হয়। আবার যদি বলের প্রয়োগ বিন্দুর সরণ বলের অভিমুখের লম্ব দিকে হয় অর্থাৎ $\theta = 90°$ হয় তবে $W = Fs\cos 90° = 0$ হয়।

অর্থাৎ কোনো সচল বস্তুর সরণের লম্ব দিকে এক বা একাধিক বল বস্তুটির ওপর ক্রিয়া করতে পারে। এই বলগুলির অভিমুখ সরণের অভিমুখের সাথে 90° কোণে থাকলে বস্তুর সরণের সময় এই বলগুলি কোনো কাজ করে না। এ ধরনের বলকে **কাজহীন বল** বলে।

অনুধাবনমূলক কাজ : কোনো বস্তুকে সমদ্রুতিতে ঘুরালে কাজ হয় কী ? ব্যাখ্যা কর।

কোনো বস্তুকে সমদ্রুতিতে ঘুরালে কাজ হয় না। এক্ষেত্রে বস্তুর ওপর হাত দ্বারা রশির মাধ্যমে প্রযুক্ত টান বা বল কেন্দ্রমুখি বলরূপে কাজ করে। প্রতিটি ক্ষুদ্র মুহূর্তে প্রযুক্ত বল $\vec{F}$ ও সংশ্লিষ্ট ক্ষুদ্র সরণের ($d\vec{s}$) এর মধ্যকার কোণ 90°। কারণ $\vec{F}$ এর দিক বৃত্তের কেন্দ্র বরাবর এবং $d\vec{s}$ এর দিক বৃত্তের স্পর্শক বরাবর। তাই কাজ, $W = Fs\cos\theta = Fs\cos 90° = 0$ হয়।

৫.৩ ধ্রুব বল এবং পরিবর্তনশীল বল কর্তৃক কৃত কাজ
Work done by constant force and variable force

বল সাধারণত দুই প্রকার; যথা— ধ্রুব বল ও পরিবর্তনশীল বল। এখন আমরা ধ্রুব বল ও পরিবর্তনশীল বল দ্বারা কৃত কাজ আলোচনা করব।

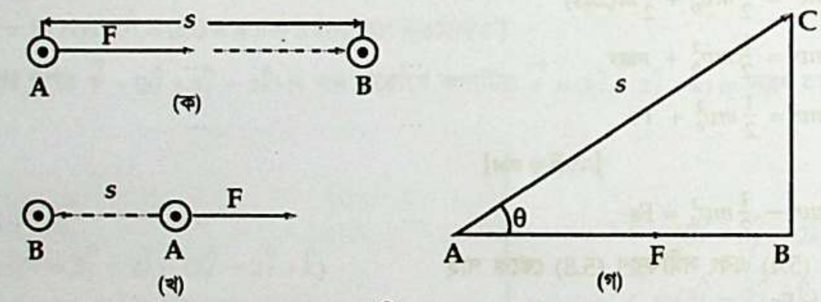
৫.৩.১ ধ্রুব বল কর্তৃক কৃত কাজ
Work done by a constant force

অভিকর্ষীয় বলের প্রভাবে কোনো বস্তুকে অল্প উচ্চতায় ওপরে উঠানো বা নিচে নামানো যায়। উচ্চতার মান কম হওয়ায় এক্ষেত্রে অভিকর্ষীয় বল স্থির (বা ধ্রুব) বল। ($\because$ F = mg, উচ্চতা কম হওয়ায় g এর মান স্থির ধরা যায়; $\therefore$ F ধ্রুব) অর্থাৎ সময়ের প্রেক্ষিতে বলের মান ও দিক পরিবর্তন না হলে তাকে স্থির (বা ধ্রুব) বল বলে।

মনে করি A বিন্দুতে অবস্থিত কোনো একটি বস্তুর ওপর AB বরাবর F বল প্রযুক্ত হওয়ায় বস্তুটি A বিন্দু হতে B বিন্দুতে যেতে s দূরত্ব অতিক্রম করল [চিত্র ৫.৪ (ক)]। তা হলে,

কৃত কাজ = বলের মান × বলের ক্রিয়া রেখা বরাবর সরণের মান

বা, $W = F \times s$ ... ... (5.11)



চিত্র ৫.৪

যদি বল প্রয়োগের ফলে বস্তুর তথা বলের প্রয়োগ বিন্দুর সরণ, বলের বিপরীত দিকে AB = s হয় [চিত্র ৫.৪(খ)] তবে,

কৃত কাজ = বলের মান × বলের ক্রিয়া রেখা বরাবর সরণের মান

$W = F \times (-s) = -F \times s$ ... ... (5.12)

ঋণ চিহ্ন বল ও সরণ বিপরীতমুখি বুঝাতে ব্যবহৃত হয়েছে। সাপের গায়ে লাঠি দিয়ে খোচা দিলে যদি সাপ তোমার দিকে ধেয়ে আসে সেক্ষেত্রে ঋণাত্মক কাজ হয় এবং $W = -Fs$ হয়।

এবার মনে করি একটি বস্তুর ওপর F পরিমাণ বল AB অভিমুখে প্রযুক্ত হওয়ায় বস্তুটি বলের অভিমুখের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে s পরিমাণ দূরত্ব সরে C বিন্দুতে পৌঁছল [চিত্র ৫.৪(গ)]। তা হলে বলের ক্রিয়ারেখা বরাবর বস্তুর সরণ = AB = $s \cos\theta$।

এখানে $BC \perp AB$

$\therefore$ কৃত কাজ, W = বলের মান × বলের ক্রিয়া রেখা বরাবর সরণের মান

বা, $W = Fs \cos\theta$ ... ... (5.13)

= বলের মান × বলের দিকে সরণের উপাংশের মান।

অথবা, $W = Fs\cos\theta$ = সরণের মান × সরণের দিকে বলের উপাংশের মান।

উভয় ক্ষেত্রে কাজের পরিমাণ একই।

ভেক্টর বীজগণিতের সাহায্যে কাজকে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায় :

কাজকে বল ও সরণ এই দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণফল দ্বারা পরিমাপ করা হয়। মনে করি বল $\vec{F}$ একটি ভেক্টর বা দিক রাশি এবং সরণ $\vec{s}$ একটি ভেক্টর বা দিক রাশি।

অতএব কাজ = বল . সরণ

বা $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

$= Fs\cos\theta$, [$s\cos\theta$ হলো বল F-এর দিকে সরণের উপাংশ বা অংশক] ... (5.14)

এখানে θ = $\vec{F}$ এবং $\vec{s}$ -এর মধ্যবর্তী কোণ।

(ক) ধনাত্মক কাজ : $\theta = 0°$ হলে, অর্থাৎ বলের দিকে যখন বস্তুর সরণ হয়, তখন

$$W = \vec{F} . \vec{s} = Fs \cos\theta = Fs \cos 0°$$
$$= Fs \qquad [\because \cos 0° = 1]$$

এখানে কাজ ধনাত্মক (positive)। এক কথায় θ সূক্ষ্মকোণ হলে কাজ ধনাত্মক। কাজ ধনাত্মক হলে বলের দ্বারা কাজ বুঝায়। ধনাত্মক কাজের ক্ষেত্রে গতিশক্তি বৃদ্ধি পায় এবং ত্বরণ হয়।

(খ) শূন্য কাজ : $\theta = 90°$ হলে

$$W = F. s\cos\theta = F.s \cos 90° = 0 \qquad [\because \cos 90° = 0]$$

অর্থাৎ $\theta = 90°$ হলে বল দ্বারা কাজের পরিমাণ শূন্য হবে। কেন্দ্রমুখি বল দ্বারা কাজ শূন্য হয়। কেন্দ্রমুখি বলের দিক বৃত্তের ব্যাসার্ধ বরাবর কেন্দ্রের দিকে, তার সরণের দিক বৃত্তের স্পর্শক বরাবর। ফলে $\theta = 90°$ হয় এবং কাজ শূন্য হয়।

(গ) ঋণাত্মক কাজ : $\theta = 180°$ হলে কাজ ঋণাত্মক (negative) হবে

অর্থাৎ $W = \vec{F}. \vec{s} = Fs \cos 180° = -Fs \qquad [\because \cos 180° = -1]$

কাজ ঋণাত্মক হলে বলের বিরুদ্ধে কাজ বুঝায়। ঋণাত্মক কাজের ক্ষেত্রে গতিশক্তি হ্রাস পায় এবং মন্দন হয়।

অনুধাবনমূলক কাজ : বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণায়মান বস্তু কর্তৃক কৃত কাজ শূন্য—ব্যাখ্যা কর।

বৃত্তাকার পথে যখন একটি বস্তু ঘুরতে থাকে তখন প্রতিটি মুহূর্তে কেন্দ্রমুখি বল (F) এবং ক্ষুদ্র সরণের (s) মধ্যকার কোণ $\theta = 90°$। সুতরাং কাজ $W = \vec{F} . \vec{s} = Fs \cos\theta = 0$। অর্থাৎ কেন্দ্রমুখি বলের দিকে সরণের উপাংশ সর্বদা শূন্য হওয়ায় এক্ষেত্রে কোনো কাজ হবে না।

কাজ : m ভরের একটি বস্তু স্থিরাবস্থা থেকে সমত্বরণে চলছে। t সময় পরে তার বেগ, v। দেখাও যে, T সময় পরে কৃত কাজ $= \frac{1}{2} mv^2T^2/t^2$.

স্থিরাবস্থা থেকে বস্তুটি যাত্রা শুরু করে t সময় পরে এর বেগ v হলে, বস্তুর ত্বরণ, $a = \frac{v}{t}$.

$\therefore$ প্রযুক্ত বল, $F = ma = \frac{mv}{t}$

এখন, T সময়ে সরণ s হলে, $s = u \times T + \frac{1}{2}aT^2 = \frac{1}{2}\frac{v}{t} \times T^2 \quad [\because u = 0]$

$\therefore$ কৃত কাজ, $Fs = \frac{mv}{t} \times \frac{1}{2}\frac{v}{t}T^2$

$$= \frac{1}{2}\frac{mv^2T^2}{t^2} \text{ (প্রমাণিত)}$$

৫.৩.২ পরিবর্তনশীল বল দ্বারা কৃত কাজ
Work done by a variable force

সংজ্ঞা : যে বলের মানের ও দিকের অথবা যে কোনো একটির পরিবর্তন হয় তা-ই পরিবর্তনশীল বল। যেমন একটি স্প্রিংকে টেনে লম্বা করলে বা সংকুচিত করলে যে কাজ হবে তাকে পরিবর্তনশীল বল দ্বারা কাজ বুঝায়। আবার মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে কোনো বস্তুর স্থান পরিবর্তনও পরিবর্তনশীল বল দ্বারা কাজ বুঝায়।

স্বল্প উচ্চতায় বলের পরিবর্তন খুবই নগণ্য। কিন্তু পৃথিবী পৃষ্ঠের বেশ ওপরের দিকে কিংবা নিচের দিকে অভিকর্ষীয় বলের মান কমতে থাকে। সেক্ষেত্রে বল স্থির (বা ধ্রুব) ধরা যায় না। বল একটি ভেক্টর রাশি; সুতরাং এর দিক ও মান উভয়ই আছে। প্রথমে বলের মান পরিবর্তনশীল বিবেচনা করে আমরা নিম্নে কৃত কাজের সমীকরণ বের করব।

ক. বলের মান যখন পরিবর্তনশীল

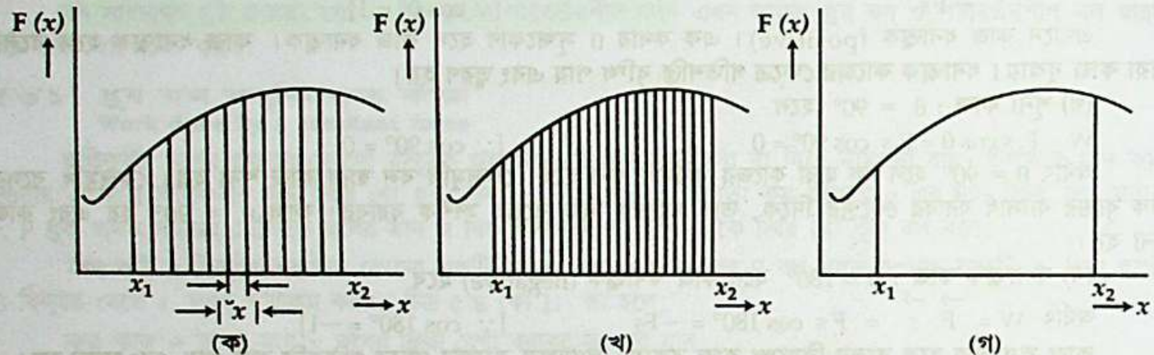
ধরি কোনো একটি পরিবর্তনশীল বল $\vec{F}$ বস্তুর ওপর x-অক্ষ বরাবর ক্রিয়া করায় বস্তুটি x-অক্ষ বরাবর x_1 অবস্থান থেকে x_2 অবস্থানে সরে গেল এবং বলটি মানের সাপেক্ষে পরিবর্তী। এই পরিবর্তী বল দ্বারা বস্তুটির সরণ $(x_2 - x_1)$ ঘটাতে সম্পাদিত কাজ নিম্নোক্ত উপায়ে বের করতে পারি।

এখন মোট সরণ $(x_2 - x_1)$ কে বহুসংখ্যক অতি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সমমানের সরণ Δx-এ বিভক্ত করা হলো [চিত্র ৫.৫ (ক)]। ফলে প্রতিটি ক্ষুদ্র সরণের শুরুতে বস্তুর ওপর যে বল ক্রিয়া করে ওই বলের ক্রিয়াতেই ওই সরণ সংঘটিত হয়েছে বিবেচনা করা যায়। প্রতিটি ক্ষুদ্র অংশে ক্রিয়ারত বল ভিন্ন ভিন্ন মানের। সুতরাং x_1 অবস্থান থেকে $x_1 + \Delta x$ পর্যন্ত ক্ষুদ্র সরণের ক্ষেত্রে F_1 বল ক্রিয়াশীল হলে কাজ,

$$\Delta W_1 = F_1 \Delta x$$

অনুরূপভাবে $x_1 + \Delta x$ থেকে $x_1 + 2\Delta x$ পর্যন্ত সরণ Δx-এর ক্ষেত্রে F_2 বল ক্রিয়াশীল হলে কাজ,

$\Delta W_2 = F_2 \Delta x$



চিত্র ৫.৫

মোট সরণ $(x_2 - x_1)$ কে যদি এরূপ N সমসংখ্যক ক্ষুদ্র সরণ Δx-এ বিভক্ত করা হয় তবে মোট কাজ হবে এই ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশের সরণের জন্য কাজের সমষ্টির সমান।

$$\therefore \text{কৃত কাজ, } W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3 + \ldots\ldots + \Delta W_N$$
$$= F_1\Delta x + F_2\Delta x + F_3\Delta x + \ldots\ldots + F_N\Delta x$$
$$= \sum_{k=1}^{N} F_k \Delta x$$

লক্ষণীয় যে প্রতিটি ক্ষুদ্র অংশ Δx-এ বলের মান ধ্রুব ধরা হয়েছে। কিন্তু এটা সম্পূর্ণ সঠিক নয়। ওই প্রতিটি ক্ষুদ্র অংশকে যদি আরও ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশে ভাগ করি [চিত্র ৫.৫ (খ)] এবং অতি ক্ষুদ্র অংশের জন্য বল স্থির (বা ধ্রুব) ধরি, তবে কৃত কাজের মান আরও সঠিক হবে। এভাবে ক্ষুদ্র অংশ আরও ক্ষুদ্র অর্থাৎ Δx যদি প্রায় শূন্যের কাছাকাছি হয় এবং বিভক্ত অংশের সংখ্যা N-কে অসীম করা হয় তবে সঠিক মান পাওয়া যাবে। অতএব, কাজের সঠিক মান লেখা যায়

$$W = \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \sum_{k=1}^{N} F_k \Delta x$$

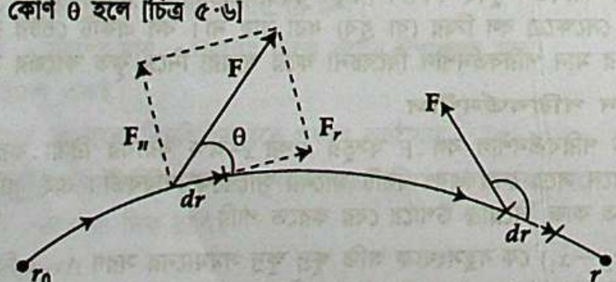
ক্যালকুলাসের ভাষায়,

$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \sum_{k=1}^{N} F_k \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx$$

$$\therefore \quad W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.15)$$

$= x_1$ ও x_2 সীমার মধ্যে আবদ্ধ লেখচিত্রের ক্ষেত্রফল [চিত্র ৫.৫ (গ)]

বল ও সরণের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে [চিত্র ৫.৬]



চিত্র ৫.৬

$$W = \int \vec{F} . \vec{dx} = \int_{x_1}^{x_2} F \cos\theta\, dx, \ F\cos\theta \text{ হচ্ছে X-অক্ষ বরাবর বল } \vec{F}\text{-এর উপাংশ।} \quad \ldots \ (5.16)$$

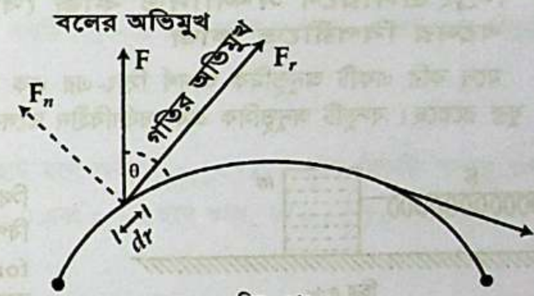
খ. বলের মান ও দিক উভয়ই যখন পরিবর্তনশীল

বল মানে ও অভিমুখে পরিবর্তনশীল হলে ওই বলের ক্রিয়ায় বস্তু একটি রেখায় গতিশীল হতে পারে। বস্তুটির গতি দ্বিমাত্রিক বা ত্রিমাত্রিক। এ ক্ষেত্রে রেখাটির কোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দ্বারা ওই বিন্দুতে বস্তুর গতি অভিমুখ নির্দিষ্ট হবে। এক্ষেত্রে সরণ = $\vec{r}$ ।

কাজেই এই প্রকার বলের কৃত কাজ নির্ণয়ে সমগ্র গতিপথকে অতি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সরণ $d\vec{r}$-এর সমষ্টি হিসেবে গণ্য করা যায়।

প্রত্যেক ক্ষুদ্র সরণের শুরুতে বস্তুর ওপর যে বল F ক্রিয়ারত থাকে ওই বল উক্ত সরণের জন্য ধ্রুব বিবেচনা করা যায়। ধরি কোনো একটি ক্ষুদ্র সরণ $d\vec{r}$ এবং ওই সরণের জন্য ক্রিয়ারত বল $\vec{F}$-এর মধ্যবর্তী কোণ θ [চিত্র ৫.৭]। বলটিকে $d\vec{r}$-বরাবর একটি অংশে এবং তার লম্ব দিকে অপর একটি অংশে বিভক্ত করি। ধরি অংশক দুটি যথাক্রমে

$F_r = F\cos\theta$ এবং $F_n = F\sin\theta$



চিত্র ৫.৭

এই ক্ষুদ্র সরণের জন্য বলের F_n অংশক কর্তৃক কৃত কাজ শূন্য, কেননা এই ক্ষুদ্র সরণ ও F_n-এর মধ্যবর্তী কোণ 90°। তা হলে ওই ক্ষুদ্র সরণের জন্য কাজ

$$dW = F\,dr\cos\theta = \vec{F}.d\vec{r}$$

কাজেই গতিপথের r_0 অবস্থান হতে r অবস্থানে স্থানান্তরের ক্ষেত্রে কাজ,

$$W = \int_{r_0}^{r}(F\cos\theta)\,dr = \int_{r_0}^{r}\vec{F}.d\vec{r} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.17)$$

৫.৪ স্থিতিস্থাপক বল ও অভিকর্ষীয় বল এবং সম্পাদিত কাজ
Elastic force and gravitational force and work done

৫.৪.১ স্থিতিস্থাপক বল দ্বারা কৃত কাজ
Work done by elastic force

একটি স্প্রিংকে টেনে প্রসারিত করলে মনে হয় যে, স্প্রিং আমাদের হাতকে বিপরীত দিকে টানছে। নিউটনের তৃতীয় সূত্র থেকে এরূপ প্রতিক্রিয়া বলের উদ্ভব ব্যাখ্যা করা যায়। স্পষ্টত বিকৃত করার চেষ্টাকে স্প্রিংটি বাধা দেয়; স্প্রিংটিকে ছেড়ে দিলে সেটি সঙ্গে সঙ্গে এর প্রাথমিক দৈর্ঘ্য ফিরে পায়। এক্ষেত্রে যে বলের ক্রিয়ায় বস্তু পূর্বের আকার বা আয়তন ফিরে পেল সেই বলই হলো স্থিতিস্থাপক বল।

অর্থাৎ স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে বাইরে থেকে বল প্রয়োগে কোনো বস্তুর আকার পরিবর্তন ঘটানোর পর বল অপসারণ করলে যে বলের কারণে তা আবার পূর্বের আকার ফিরে পায় তাকে স্থিতিস্থাপক বল বলে।

স্প্রিং-কে বল প্রয়োগে x সরণ সৃষ্টি করলে স্প্রিং দ্বারা কৃত কাজ $W = \frac{1}{2}kx^2$ হবে। এখানে, k = স্প্রিং ধ্রুবক বা বল ধ্রুবক। আবার বল প্রয়োগে স্প্রিংটিকে সংকুচিত করে x সরণ ঘটাতে কৃত কাজও একই হবে। অর্থাৎ উভয় ক্ষেত্রে একই কাজ হবে। সুতরাং স্থিতিস্থাপক বল দ্বারা কাজ সরণের বর্গের সমানুপাতিক অর্থাৎ $W \propto x^2$। স্থিতিস্থাপক বলের বিপরীতে সরণ দুই গুণ হলে কাজ চার গুণ হবে।

৫.৪.২ অভিকর্ষীয় বল দ্বারা কৃত কাজ
Work done by gravitational force

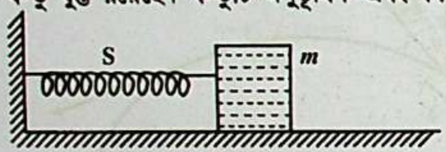
কোনো বস্তুকে ওপর থেকে নিচে নামালে বা নিচ থেকে ওপরে উঠালে অভিকর্ষীয় বল দ্বারা কাজ হয়। অর্থাৎ বস্তুকে ওপরে উঠানো বা নিচে নামানো যা কিছু করা হোক না কেন বস্তু সর্বদা পৃথিবীর কেন্দ্রের দিকে একটি বল দ্বারা আকৃষ্ট হয়। পৃথিবীর এই আকর্ষণ বলকে অভিকর্ষ বল বলে।

পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R, ভর M এবং বস্তুর ভর m এবং h উচ্চতায় বস্তুটি তুলতে বা নামাতে অভিকর্ষ বল দ্বারা কাজ হবে $W = \frac{GMm}{R^2} \times h$, এখানে $\frac{GMm}{R^2}$ ধ্রুব রাশি। সুতরাং অভিকর্ষ বল দ্বারা কাজ উচ্চতা বা সরণের সমানুপাতিক। অর্থাৎ $W \propto h$। সুতরাং অভিকর্ষ বলের বিপরীতে সরণ তিনগুণ হলে কৃত কাজও তিনগুণ হবে।

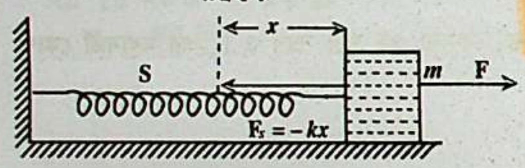
৫·৪·৩ পরিবর্তনশীল বল কর্তৃক কৃত কাজের উদাহরণ
Examples of work done by variable force

ক. স্প্রিং প্রসারণে সম্পাদিত কাজ (বল $\propto x$) বা স্থিতিস্থাপক বল তথা স্প্রিং বলের বিপরীতে কাজ

মনে করি একটি অনুভূমিক আদর্শ স্প্রিং-এর এক প্রান্ত দেয়ালের সাথে আটকিয়ে অপর প্রান্তে m ভরের একটি বস্তু যুক্ত রয়েছে। বস্তুটি অনুভূমিক এবং ঘর্ষণবিহীন তলের ওপর দিয়ে চলাচল করতে পারে [চিত্র ৫·৮]।



চিত্র ৫·৮



চিত্র ৫·৮(ক)

বস্তুটিকে টেনে স্প্রিং S-কে দৈর্ঘ্য বরাবর বিকৃত করলে স্থিতিস্থাপক ধর্মের দরুন স্প্রিং-এ প্রযুক্ত বলের সমান ও বিপরীতমুখি বল সৃষ্টি হয়। একে প্রত্যায়নী বল (restoring force) বলে। স্থিতিস্থাপক সীমা অতিক্রম না করলে, প্রত্যায়নী বলের মান হুকের সূত্রানুযায়ী দৈর্ঘ্য পরিবর্তনের সমানুপাতিক হবে।

মনে করি F_s অনুভূমিক বল প্রয়োগে বস্তুটিকে বাম হতে ডান দিকে সরানোর ফলে স্প্রিং-এর দৈর্ঘ্য অনুভূমিক বরাবর x পরিমাণ বৃদ্ধি পেল [চিত্র ৫·৮(ক)]। এই ক্রিয়ার দরুন স্প্রিং-এ $-kx$ পরিমাণ প্রত্যায়নী বল উৎপন্ন হবে। কেননা

$$F_s \propto -x$$

বা, $$F_s = -kx$$

[এই প্রত্যায়নী বলের দিক বস্তুটির সরণের বিপরীত দিকে হওয়ায় ঋণাত্মক চিহ্ন ব্যবহৃত হয়েছে।]

এখানে k একটি ধ্রুব সংখ্যা। একে স্প্রিং এর বল ধ্রুবক (spring constant) বলা হয়।

সংজ্ঞা : স্প্রিং-এর একক দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির জন্য প্রযুক্ত বলকেই স্প্রিং-এর বল ধ্রুবক বলা হয়। স্প্রিং ধ্রুবকের একক Nm^{-1}। x দৈর্ঘ্য বৃদ্ধিতে F বলের প্রয়োজন হলে স্প্রিং ধ্রুবক, $k = \frac{F}{x}$।

স্প্রিংটিকে প্রসারিত করতে হলে সমমানের বাহ্যিক বল প্রয়োগ করতে হবে। মনে করি প্রযুক্ত বল F।

$$\therefore \quad F = -F_s = -(-kx) = kx \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.18)$$

স্প্রিংটিকে x_1 অবস্থান হতে x_2 অবস্থানে প্রসারিত করতে প্রযুক্ত বল কর্তৃক সম্পাদিত কাজের পরিমাণ

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}(x)\, d\vec{x} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx$$

[$\because$ $\vec{F}$ ও $d\vec{x}$ -এর মধ্যবর্তী কোণ শূন্য]

$$= \int_{x_1}^{x_2} kx dx = k\int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{1}{2}k\left[x^2\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2}k\left[x_2^2 - x_1^2\right]$$

$$W = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.19)$$

এই কাজ ধনাত্মক। সাধিত কাজ স্প্রিং-এর মধ্যে স্থিতিশক্তি হিসেবে সঞ্চিত থাকে।

স্প্রিং-এর আদি অবস্থান $x_1 = 0$ এবং শেষ অবস্থান $x_2 = x$ ধরলে,

$$W = \frac{1}{2}k x^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.20)$$

অর্থাৎ, সরণের পরিমাণ x হলে সঞ্চিত স্থিতিশক্তির পরিমাণ হবে $\frac{1}{2}kx^2$।

[পুনঃ, স্প্রিং-এর দৈর্ঘ্য x পরিমাণ সংকুচিত হলেও সঞ্চিত স্থিতিশক্তির পরিমাণ, $W = \frac{1}{2}kx^2$ হবে]।

জানার বিষয় : স্প্রিং ধ্রুবক নির্ভর করে—

I. স্প্রিং-এর দৈর্ঘ্যের ওপর
II. জ্যামিতিক গঠনের ওপর
III. পদার্থের স্থিতিস্থাপকতার ওপর।

খ. স্প্রিং সংকোচনে কাজ

এক্ষেত্রে $x_1 = 0$ এবং $x_2 = x$ ধরলে স্প্রিং সংকোচনে কাজ $W = \frac{1}{2}kx^2$ হয় অর্থাৎ স্প্রিং-এর দৈর্ঘ্য x পরিমাণ সংকুচিত করলে সঞ্চিত স্থিতিশক্তির পরিমাণ বা কাজ $= \frac{1}{2}kx^2$। একটি স্প্রিং-এর স্প্রিং ধ্রুবক $2.5\ Nm^{-1}$ অর্থ হলো স্প্রিংটির দৈর্ঘ্য 1 m বৃদ্ধি করার জন্য 2.5 N বল প্রয়োগ করতে হবে।

গ. স্প্রিং বল দ্বারা ঋণাত্মক কাজ

বস্তুর আদি সরণের মান শেষ সরণের মানের চেয়ে ছোট হলে অর্থাৎ $|x_1| < |x_2|$ হলে স্প্রিংটি বস্তুর ওপর ঋণাত্মক কাজ করবে। এক্ষেত্রে $F = F_s = -kx$ হবে এবং $x_1 = 0$ এবং $x_2 = x$ হলে কাজ, $W = -\frac{1}{2}kx^2$ হয়।

৫.৪.৪ অভিকর্ষ বল
Force due to gravity

এই বিশ্বের যে কোনো দুটি বস্তুর মধ্যে আকর্ষণ বল ক্রিয়া করে। সাধারণত যে কোনো দুটি বস্তুর মধ্যে আকর্ষণ বলকে মহাকর্ষ বলে। কিন্তু ভূপৃষ্ঠের ওপরে বা নিকটে অবস্থিত প্রতিটি বস্তুর ওপর পৃথিবীর আকর্ষণ বলকে অভিকর্ষ বল (force due to gravity) বলে। অতএব অভিকর্ষ মহাকর্ষেরই একটি বিশেষ ক্ষেত্র, অভিকর্ষ বলতে পৃথিবীর মহাকর্ষ বোঝায়।

কোনো বস্তুকে অবাধে পড়তে দিলে অভিকর্ষের ক্রিয়ায় বস্তুটি খাড়াভাবে নিচের দিকে পড়তে থাকে। বস্তুটিও পৃথিবীকে সমান ও বিপরীতমুখি বলে আকর্ষণ করে। যে কোনো পার্থিব বস্তুর তুলনায় পৃথিবীর ভর বহুগুণ বেশি বলে এই বলের ক্রিয়ায় গতি উপেক্ষা করা যায়। তাই বস্তুটি পৃথিবীর দিকে পড়ে, পৃথিবী বস্তুর দিকে এগিয়ে যায় না।

পৃথিবীকে R ব্যাসার্ধের একটি সমসত্ত্ব গোলক কল্পনা করলে পৃথিবীর সমস্ত ভর এর কেন্দ্রে কেন্দ্রীভূত আছে বলে ধরতে পারি। সুতরাং ভূপৃষ্ঠে অবস্থিত m ভরের কোনো বস্তুকে পৃথিবী নিজ কেন্দ্রের দিকে F বলে আকর্ষণ করলে নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র অনুযায়ী

$$F = \frac{GMm}{R^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.21)$$

পৃথিবীর কেন্দ্রাভিমুখী এই বলই হলো অভিকর্ষ বল। অতএব অভিকর্ষের ক্রিয়ায় পতনশীল বস্তু প্রকৃতপক্ষে পৃথিবীর কেন্দ্রের দিকে এগোয়। এজন্য রাজমিস্ত্রির দেওয়াল সোজা করার কাজে ঝুলন্ত ওলন দড়ি পৃথিবীর কেন্দ্রাভিমুখি বলে সবসময় উল্লম্ব রেখায় থাকে। কোনো বস্তুকে কপিকলের সাহায্যে নিচে নামানো, ক্রেন দিয়ে ওপরে উঠানো এবং শিশু পার্কে বাচ্চাদের মসৃণ তল থেকে পিছলে নিচে পড়া সবই অভিকর্ষ বল দ্বারা কৃত কাজ।

৫.৪.৫ অভিকর্ষীয় বল কর্তৃক কৃত কাজের উদাহরণ
Examples of work done by gravitational force

ক. বস্তু নিচে পতনের ক্ষেত্রে কাজ

মনে করি 'm' ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে অভিকর্ষ বলের প্রভাবে 'h' উচ্চতা হতে ফেলা হলো।

$\therefore$ কৃত কাজ = বল × সরণ

বা, $W = F \times h = mgh \qquad [\because F = mg] \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.22)$

বা, W = ভর × অভিকর্ষীয় ত্বরণ × উচ্চতা

কাজকে অভিকর্ষীয় এককে প্রকাশ করলে, $W = mgh$ অর্থাৎ $W \propto h$। সুতরাং অভিকর্ষ বলের দিকে কাজ সরণ বা উচ্চতার সমানুপাতিক।

খ. বস্তু ওপরে উঠানোর ক্ষেত্রে কাজ

'm' ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে অভিকর্ষ বলের বিরুদ্ধে 'h' উচ্চতা ওপরে উঠালে

কাজ = ভর × অভিকর্ষীয় ত্বরণ × উচ্চতা বা, $W = mgh$

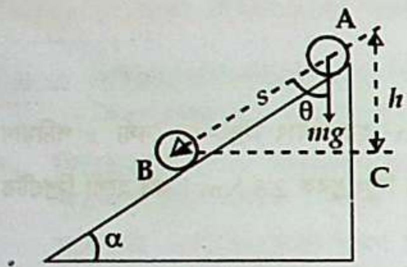
অবশ্য এ কাজ ঋণাত্মক। $\ldots \quad \ldots \quad (5.23)$

অর্থাৎ $W = -mgh \quad \ldots \quad \ldots$

অর্থাৎ $W \propto h$। অর্থাৎ অভিকর্ষের বিপরীতে কৃত কাজ বস্তুর উচ্চতা বা সরণের সমানুপাতিক। $\ldots \quad (5.24)$

গ. আনত তল বেয়ে নামানোর ক্ষেত্রে কাজ

মনে করি 'm' ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু কোনো একটি মসৃণ নত তল বেয়ে A হতে B-তে সরে এল। যদি g অভিকর্ষীয় ত্বরণ হয়, তবে অভিকর্ষ বল mg বস্তুটিকে খাড়াভাবে নিচের দিকে টানবে [চিত্র ৫.৯]।



চিত্র ৫.৯

ধরি সরণের অভিমুখ এবং অভিকর্ষ বলের অভিমুখের মধ্যে θ কোণ আছে এবং $AB = s$

$\therefore$ অভিকর্ষ বল mg-এর দিকে সরণের অংশ $= s\cos\theta$

এখন $AC = h$ দূরত্ব

$\therefore \quad h = s\cos\theta$

$\therefore$ কাজ, $W = mgs\cos\theta$ বা, $W = mgh \quad \ldots \quad (5.25)$

তলটি অনুভূমিকের সাথে α কোণে অবস্থান করলে,

$\theta = (90° - \alpha)$

$\therefore \quad W = mgs\cos(90° - \alpha) = mgs\sin\alpha$

স্থিতিস্থাপক বল এবং অভিকর্ষ বল দ্বারা কাজ থেকে দেখা যায় যে,

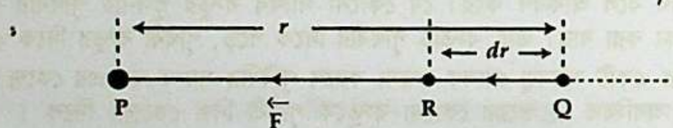
স্থিতিস্থাপক বল দ্বারা কাজ, $W = \frac{1}{2}kx^2 \quad \therefore$ কাজ, $W \propto$ (সরণ)^2

অন্য দিকে অভিকর্ষ বল দ্বারা কাজ, $W = mgh \quad \therefore$ কাজ, $W \propto$ সরণ

সুতরাং বলা যায়, **স্থিতিস্থাপক বল দ্বারা কাজ সরণের বর্গের সমানুপাতিক। অপর দিকে অভিকর্ষ বল দ্বারা কাজ উচ্চতার বা সরণের সমানুপাতিক। অভিকর্ষজ ত্বরণের মান বৃদ্ধি পেলে এই বল দ্বারা কাজও বৃদ্ধি পায়।**

ঘ. মহাকর্ষ বল দ্বারা কৃত কাজ

মনে করি M ভরের একটি বস্তু মহাকর্ষ ক্ষেত্রের P বিন্দুতে অবস্থিত। P থেকে r দূরে m ভরের অন্য একটি বস্তু Q বিন্দুতে অবস্থিত [চিত্র ৫.১০]। এক্ষেত্রে m ভরের বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল মহাকর্ষ বল $F = \frac{GMm}{r^2}$, দিক QP বরাবর।



চিত্র ৫.১০

এখন m ভরের বস্তুকে অসীম হতে ক্ষুদ্র দূরত্ব dr সরিয়ে R বিন্দুতে আনতে কৃত কাজ

$$W = \int_{\infty}^{r} F dr\cos 0° = \int_{\infty}^{r} F dr = \int_{\infty}^{r} \frac{GMm}{r^2} dr$$

$$= GMm \int_{\infty}^{r} r^{-2} dr = -GMm\left[\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r}$$

$$= -GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right) = -\frac{GMm}{r}$$

এখন m ভরের বস্তুটিকে R থেকে ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র দূরত্ব dr সরিয়ে Q বিন্দুতে আনতে মহাকর্ষ বল দ্বারা কাজ,

$$dW = F dr\cos 180° = -F dr$$

যদি বস্তুটির আদি অবস্থান r_a এবং শেষ অবস্থান r_b হয় মোট কাজ নির্ণয়ে $r = r_a$ থেকে $r = r_b$ সীমার মধ্যে উপরোক্ত সমীকরণকে সমাকলন করে পাই,

$$W_{ab} = \int_{r_a}^{r_b} -F dr = -\int_{r_a}^{r_b} \frac{GMm}{r^2} dr$$

$$= -GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_a}^{r_b} = -GMm\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right)$$

মহাকর্ষ বল দ্বারা কৃত ধনাত্মক কাজ : উপরোক্ত সমীকরণ অনুযায়ী বস্তুর কণা দুটির মধ্যে দূরত্ব হ্রাস করা হলে অর্থাৎ $r_b < r_a$ হলে $\frac{1}{r_b} > \frac{1}{r_a}$ হয় ফলে W_{ab} ধনাত্মক হয়; সুতরাং মহাকর্ষ বল দ্বারা কাজ ধনাত্মক কাজ। ওপর থেকে নিচে পতনের ক্ষেত্রে দূরত্ব হ্রাস পায় এবং কাজ ধনাত্মক হয়।

মহাকর্ষ বল দ্বারা কৃত ঋণাত্মক কাজ : উপরোক্ত সমীকরণ অনুযায়ী যদি $r_b > r_a$ হয় অর্থাৎ যদি দুটি কণার মধ্যে দূরত্ব বৃদ্ধি পায়, তাহলে $\frac{1}{r_b} < \frac{1}{r_a}$ হয়, সেক্ষেত্রে কাজ ঋণাত্মক হয়। নিচ থেকে কোনো বস্তুকে ওপরে উঠালে দূরত্ব বৃদ্ধি পায় ফলে মহাকর্ষ বলের জন্য কাজ ঋণাত্মক হয়।

কাজ : অভিকর্ষ বল দ্বারা কাজ এবং স্থিতিস্থাপক বল দ্বারা কাজের তফাৎ কোথায় ?

অভিকর্ষ বল দ্বারা কাজ দূরত্বের সমানুপাতিক অর্থাৎ $W \propto h$, অপর দিকে স্থিতিস্থাপক বলের বিপরীতে কাজ দূরত্বের বর্গের সমানুপাতিক অর্থাৎ $W \propto x^2$ হয়।

জানার বিষয় : I. অভিকর্ষ বল দ্বারা কৃত কাজ সরণের সমানুপাতিক, $W \propto x$ ($\because W = mgx$)

II. স্থিতিস্থাপক বল দ্বারা কাজ সরণের বর্গের সমানুপাতিক, $W \propto x^2$ ($\because W = \frac{1}{2}kx^2$)

গাণিতিক উদাহরণ ৫.২

১। একটি ঘোড়া ভূমির সাথে 30° কোণে 120 N বল প্রয়োগে একটি বস্তুকে টেনে 2 ms⁻¹ সমবেগে সরাতে পারে। 5 min এ ঘোড়াটি কত কাজ করবে ?

আমরা জানি,

$$W = Fs\cos\theta$$
$$= 120 \times 600 \times 0.866$$
$$= 6.35 \times 10^4\ J$$

এখানে,
$F = 120\ N$
$t = 5\ min = 5 \times 60\ s$
$v = 2\ ms^{-1}$
$s = vt = 2 \times 5 \times 60\ m = 600\ m$
$\theta = 30°$

২। অনুভূমিক তলের ওপর অবস্থিত একটি বস্তুকে স্প্রিং এর সাথে যুক্ত করা হলো। 2.4 N বল দ্বারা সাম্যাবস্থা হতে স্প্রিংটিকে 3 cm সংকুচিত করা হলো। স্প্রিং দ্বারা কৃত কাজ কত হবে ?

আমরা জানি,

কাজ, $W = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2} \times 80 \times (.03)^2$
$$= 3.6 \times 10^{-2}\ J$$

এখানে,
$F = 2.4\ N$
$x = 3\ cm = 0.03\ m$
$K = \frac{F}{x} = \frac{2.4}{0.03} = 80\ Nm^{-1}$
$W = ?$

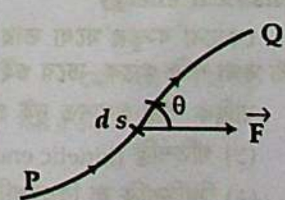
বক্রপথে চলমান কণার ওপর কৃত কাজ
Work done on a particle moving along a curved path

ধরা যাক, একটি কণা পরিবর্তনশীল বল $\vec{F}$-এর ক্রিয়ায় বক্রপথে চলছে [চিত্র ৫.১১]। কণাটির ওপর মোট কৃত কাজের পরিমাণ W।

চিত্রানুসারে কোনো ক্ষুদ্র সরণ $d\vec{s}$ হলে P থেকে Q পর্যন্ত সমগ্র পথটি অতিক্রম করানোর জন্য কণাটির ওপর মোট কৃত কাজের পরিমাণ,

$$W = \int_P^Q \vec{F}.d\vec{s} = \int_P^Q Fs\cos\theta\, d\theta \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.25)$$

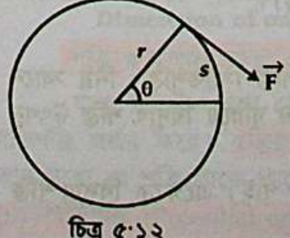
সমীকরণ (5.25)-এ F বা θ কোনোটিই ধ্রুব রাশি নয়।



চিত্র ৫.১১

ঘূর্ণনের ক্ষেত্রে কৃত কাজ
Work done in rotation

ধরা যাক, একটি চাকা স্পর্শক বল $\vec{F}$ এর ক্রিয়ায় তার কেন্দ্রমুখি অক্ষের সাপেক্ষে ঘুরছে। ধরা যাক, চাকাটি ওই বলের ক্রিয়ায় θ কোণে ঘুরে গেল [চিত্র ৫.১২]।



চিত্র ৫.১২

অতএব, বলের প্রয়োগ বিন্দুর রৈখিক সরণ,

$$s = r\theta$$

এখানে, r = চাকার ব্যাসার্ধ

সুতরাং, কৃত কাজ, $W = Fs = Fr\theta$

Fr হচ্ছে ঘূর্ণন বিন্দু সাপেক্ষে (θ রেডিয়ানে প্রকাশিত) বলের ভ্রামক বা টর্ক (τ)

∴ কৃত কাজ, $W = Fr\theta = \tau\theta$ ... ... (i)

অর্থাৎ কৃত কাজ = টর্ক × কৌণিক সরণ

এখন, টর্কের ক্রিয়ায় চাকার n সংখ্যক আবর্তন সম্পূর্ণ হলে,

কৃত কাজ, $W = \tau(2\pi n) = 2\pi\tau n$ জুল ... ... i(a)

৫.৫ শক্তি
Energy

কোনো বস্তু কাজ করতে সক্ষম হলে ধরে নিতে হবে তার শক্তি আছে। কোনো বস্তু মোট যে পরিমাণ কাজ করতে পারে তা দিয়ে বস্তুটির শক্তির পরিমাপ করা হয়। অর্থাৎ কৃত কাজ দিয়ে আমরা শক্তি পরিমাপ করতে পারি। কোনো বস্তু নিজে কাজ করলে বস্তুটির শক্তি কমে। যে বস্তুর ওপর কাজ করা হয় তার শক্তি বাড়ে। শক্তির ভর, ভার, আয়তন নেই। যার কাজ করার সামর্থ্য যত কম তার শক্তিও তত কম। অতএব বলা যায় কাজ শক্তির মাপকাঠি। যদি বলা হয় কোনো বস্তু W পরিমাণ কাজ করল, তবে বুঝতে হবে যে, তার ব্যয়িত শক্তির মান W। কোনো বস্তু বলের বিরুদ্ধে কাজ করলে তখন তা শক্তি হারায়। আবার বস্তুর ওপর বল ক্রিয়া করলে তা শক্তি লাভ করে।

সংজ্ঞা : কাজ করার সামর্থ্যকে শক্তি বলে। কাজের মতো শক্তিও একটি স্কেলার রাশি।

শক্তির পরিমাণ = কৃত কাজ = প্রযুক্ত বল × বল প্রয়োগে বিন্দুর সরণ।

মোটর ইঞ্জিনে পেট্রোলের বাষ্প, বাষ্পীয় ইঞ্জিনে জলীয় বাষ্পের চাপ পিস্টন দ্বারা সৃষ্টি হয়। সুতরাং বাষ্পের শক্তি আছে। আবার বিদ্যুতেরও শক্তি আছে। এই শক্তিতেই ট্রেন ও কল-কারখানা চলে। শক্তি আছে বলে মহাবিশ্ব চলছে। শক্তি রূপ পরিবর্তন করতে পারে, কিন্তু শক্তি সৃষ্টি বা ধ্বংস করা যায় না। তাই রূপান্তর প্রক্রিয়ায় মোট শক্তি অপরিবর্তিত থাকে। এ সম্পর্কে শক্তির নিত্যতার সূত্রে আমরা বিস্তারিত জানব। শক্তির বিভিন্ন রূপ আছে যেমন—

(i) যান্ত্রিক শক্তি (Mechanical energy)
(ii) তাপ শক্তি (Heat energy)
(iii) আলোক শক্তি (Light energy)
(iv) শব্দশক্তি (Sound energy)
(v) চৌম্বক শক্তি (Magnetic energy)
(vi) তড়িৎ শক্তি (Electrical energy)
(vii) রাসায়নিক শক্তি (Chemical energy)
(viii) পারমাণবিক শক্তি (Nuclear energy)
(ix) সৌর শক্তি (Solar energy)

এই অধ্যায়ে আমরা যান্ত্রিক শক্তি আলোচনা করব।

যান্ত্রিক শক্তি
Mechanical energy

কোনো বস্তুর মধ্যে তার পারিপার্শ্বিক অবস্থা বা অবস্থানের সাপেক্ষে অথবা গতির জন্য যদি কাজ করার যে সামর্থ্য তথা শক্তি থাকে, তবে ওই শক্তিকে যান্ত্রিক শক্তি বলে।

যান্ত্রিক শক্তি প্রধানত দুই প্রকার। যথা—

(১) গতিশক্তি (kinetic energy) এবং

(২) স্থিতিশক্তি বা বিভবশক্তি (potential energy)।

৫.৫.১ শক্তির রূপান্তর
Transformation of energy

এই মহাবিশ্ব জুড়ে শক্তি বিভিন্ন রূপে বিরাজিত। বিভিন্ন প্রকার শক্তি পরস্পরের সাথে সম্পর্কযুক্ত। এক শক্তিকে অন্য শক্তিতে রূপান্তর সম্ভব এবং এর নামই শক্তির রূপান্তর (Transformation of energy)।

শক্তি রূপান্তরের কয়েকটি উদাহরণ নিম্নে প্রদত্ত হলো।

(১) পানি উচ্চ স্থান হতে নিম্ন স্থানে প্রবাহিত হয়। উচ্চ স্থানে থাকার সময় তার শক্তি স্থিতিশক্তি। নিম্ন স্থানে প্রবাহিত হবার সময় স্থিতিশক্তি গতিশক্তিতে রূপান্তরিত হয়। এই গতিশক্তির সাহায্যে টারবাইন ঘুরিয়ে বিদ্যুৎ শক্তি উৎপন্ন করা হয়। অর্থাৎ যান্ত্রিক শক্তি বিদ্যুৎ শক্তিতে রূপান্তরিত হয়।

(২) বিদ্যুৎ শক্তি যখন বৈদ্যুতিক বাতির মধ্য দিয়ে প্রবাহিত হয় তখন আমরা আলো পাই। এক্ষেত্রে বিদ্যুৎ শক্তি আলোক শক্তিতে রূপান্তরিত হয়।

(৩) বৈদ্যুতিক ইস্ত্রিতে তড়িৎ বা বিদ্যুৎ চালনা করে তাপ উৎপন্ন করা হয়। এই তাপের সাহায্যে কাপড়-চোপড় ইস্ত্রি করা হয়। এক্ষেত্রে **বিদ্যুৎ শক্তি তাপ শক্তিতে এবং তাপ শক্তি যান্ত্রিক শক্তিতে রূপান্তরিত হয়।**

বৈদ্যুতিক পাখার মধ্য দিয়ে বিদ্যুৎ প্রবাহিত করলে পাখা ঘুরতে থাকে। এ স্থলেও **বৈদ্যুতিক শক্তি যান্ত্রিক শক্তিতে রূপান্তরিত হয়।**

(৪) একটি কাঁচা লোহার ওপর অন্তরীত (insulated) তামার তার জড়িয়ে বিদ্যুৎ চালনা করলে লোহার পাতটি চুম্বকে পরিণত হয়। এক্ষেত্রে **বিদ্যুৎ শক্তি চুম্বক শক্তিতে রূপান্তরিত হয়।**

(৫) ক্যালসিয়াম, পটাসিয়াম, রুবিডিয়াম প্রভৃতি ধাতুর ওপর আলো পড়লে ইলেকট্রন নির্গত হতে দেখা যায়। ফটো-ইলেকট্রিক কোষ এই নীতির ওপর প্রতিষ্ঠিত। এরূপ একটি কোষে আলো ফেলে বিদ্যুৎ প্রবাহ তৈরি করা হয়। এক্ষেত্রে **আলোক শক্তি বিদ্যুৎ শক্তিতে রূপান্তরিত হয়।**

(৬) দুই হাতের তালু পরস্পরের সাথে ঘষলে তাপ উৎপন্ন হয়। এক্ষেত্রে **যান্ত্রিক শক্তি তাপ শক্তিতে রূপান্তরিত হয়।**

(৭) ফটোগ্রাফিক ফিল্মের ওপর আলোক সম্পাত করে রাসায়নিক ক্রিয়ার মাধ্যমে আলোক চিত্র তৈরি করা হয়। এক্ষেত্রে **আলোক শক্তি রাসায়নিক শক্তিতে রূপান্তরিত হয়।**

(৮) ওষুধের কারখানায় শ্রবণোত্তর বা শব্দোত্তর তরঙ্গের সাহায্যে জীবাণু ধ্বংস করা হয় এবং কর্পূরকে পানিতে দ্রবণীয় করা হয়। এ ছাড়া শব্দোত্তর তরঙ্গ দ্বারা বস্ত্রাদির ময়লাও পরিষ্কার করা হয়। এসব ক্ষেত্রে **শব্দ শক্তি যান্ত্রিক শক্তিতে রূপান্তরিত হয়।**

(৯) আমরা জানি বৈদ্যুতিক ঘণ্টা বিদ্যুতের সাহায্যে চলে। টেলিফোনও বিদ্যুতের সাহায্যে চলে। দুই ক্ষেত্রেই আমরা শব্দ শুনতে পাই। এস্থলে **বিদ্যুৎ শক্তি শব্দ শক্তিতে রূপান্তরিত হয়।**

(১০) কয়লা পোড়ালে তাপ উৎপন্ন হয়। রাসায়নিক ক্রিয়ার ফলে এটি ঘটে। এক্ষেত্রে **রাসায়নিক শক্তি তাপ শক্তিতে রূপান্তরিত হয়।**

(১১) বিদ্যুৎ কোষে রাসায়নিক দ্রব্যের বিক্রিয়ার ফলে বিদ্যুৎ উৎপন্ন হয়। এক্ষেত্রে **রাসায়নিক শক্তি তড়িৎ বা বিদ্যুৎ শক্তিতে রূপান্তরিত হয়।**

শক্তি যখন একরূপ হতে অন্যরূপে পরিবর্তিত হয় তখন এর কোনো ঘাটতি বা বাড়তি ঘটে না। অর্থাৎ শক্তির বিনাশ ও সৃষ্টি উভয়ই অসম্ভব। যখন এক প্রকার শক্তি বিলুপ্ত হয় তখন তা অন্যরূপে আত্মপ্রকাশ করে। **এর নাম শক্তির নিত্যতা বা শক্তির অবিনশ্বরতা** (Conservation of Energy)। **এ সম্পর্কে একটি সূত্র বা বিধি আছে। এর নাম শক্তির নিত্যতা সূত্র বা শক্তির নিত্যতা বিধি। একে শক্তির সংরক্ষণ সূত্রও বলা হয়।**

মডেল তৈরি : মাথায় দেওয়া একটি ক্যাপের ওপর সামনের দিকে একটি আয়তাকার সোলার প্যানেল বসাও। সোলার প্যানেলের সাথে সংযোগকারী তার ও ইলেকট্রনিক সংযোগের মাধ্যমে মোবাইল ফোন এবং চার্জিং করার পয়েন্ট প্রবেশ করাও। ক্যাপ মাথায় দিয়ে চলাফেরা করলে সৌরশক্তির মাধ্যমে মোবাইল ফোন চার্জিত হবে [চিত্র ৫.১৩]। এক্ষেত্রে সৌরশক্তি বিদ্যুৎশক্তিতে রূপান্তরিত হচ্ছে।

চিত্র ৫.১৩

৫.৫.২ শক্তির একক
Unit of energy

যেহেতু কৃত কাজ দিয়েই শক্তির পরিমাপ করা হয় সুতরাং কাজ ও শক্তির একক একই। অর্থাৎ এস. আই. (SI) পদ্ধতিতে শক্তির একক জুল (J)।

৫.৫.৩ শক্তির মাত্রা
Dimension of energy

শক্তি ও কাজের মাত্রা একই, $[E] = [ML^2T^{-2}]$

বস্তু গতিশীল হলে সেটি গতিশক্তি অর্জন করে। যেমন m ভরের বস্তু v বেগে গতিশীল হলে $\frac{1}{2}mv^2$ পরিমাণ গতিশক্তি অর্জন করে। শক্তির সবচেয়ে সাধারণ রূপ হচ্ছে যান্ত্রিক শক্তি। কোনো বস্তুর অবস্থান বা গতির কারণে তার মধ্যে যে শক্তি থাকে তাকে যান্ত্রিক শক্তি বলে। যান্ত্রিক শক্তি দুই প্রকার; যথা— (i) গতিশক্তি (Kinetic energy) ও (ii) স্থিতিশক্তি (Potential energy)। এই অধ্যায়ে এ বিষয়ে আলোচনা করব।

নিজে কর : তোমার পড়ার টেবিলে একটি বইকে একটি কলমের দিকে জোরে ঠেলা দাও। কী দেখতে পাবে? কলমটি গতিশীল হলো। কেন গতিশীল হলো ব্যাখ্যা কর।

এক্ষেত্রে কলমটির মধ্যে কাজ করার সামর্থ্য তথা গতিশক্তি জন্মাল। তাই কলমটি সামনের দিকে সরে গেল।

অনুধাবনমূলক কাজ : সমবেগে গতিশীল বস্তুর ক্ষমতা বেগের ওপর নির্ভর করে কি-না ?

নিউটনের প্রথম সূত্রানুযায়ী সমবেগে গতিশীল রাখতে কোনো বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল বল শূন্য হয়। তাই এক্ষেত্রে কোনো কাজ সম্পন্ন হয় না। তাই সমবেগে গতিশীল বস্তুর ক্ষমতা শূন্য হয় যা বেগের ওপর নির্ভরশীল নয়।

৫.৬ গতিশক্তি
Kinetic energy

হাতুড়ি দিয়ে দেয়ালে পেরেক ঠুকলে হাতুড়ি তীব্র বেগে পেরেককে আঘাত করে। তখন পেরেকটি দেয়ালের বাধা অতিক্রম করে ঢুকে যায়। হাতুড়ি তার গতির জন্যই এই কাজ করতে সক্ষম হয় অর্থাৎ হাতুড়িটির গতিশক্তির জন্যই পেরেকটি দেয়ালের বাধা অতিক্রম করতে পারে। তোমরা নদীতে পাল তোলা নৌকা চলতে দেখেছ। নদীর স্রোতের গতিশক্তি নৌকাকে ভাসিয়ে নিয়ে যায়। জোরে বাতাস বইলে পাল টাঙালে নৌকা এগিয়ে যেতে পারে। বায়ু প্রবাহের গতিশক্তিকে পাল টাঙিয়ে কাজে লাগিয়ে নৌকা এভাবে এগোয়।

পাহাড় পর্বত থেকে সমতলে নামার সময় নদী অত্যন্ত খরস্রোতা হয়। স্রোতের গতিশক্তি খুব বেশি বলে নদী বড় বড় পাথর খণ্ডকে গড়িয়ে নিয়ে যায়।

আবার হাই জাম্প বা লং জাম্প দেওয়ার সময় প্রতিযোগীরা স্থির অবস্থা থেকে লাফ দেয় না, কিছু দূর থেকে দৌড়ে এসে লাফ দেয়। ফলে লাফ দিয়ে অনেক দূর যেতে পারে।

ওপরের সকল ঘটনা লক্ষ করলে দেখা যায় যে, বাইরে থেকে বল প্রয়োগ করে কোনো সচল বস্তুকে থামালে থেমে যাওয়ার আগের মুহূর্ত পর্যন্ত বস্তুটি ওই বলের বিরুদ্ধে মোট যে পরিমাণ কাজ করে তাই দিয়ে বস্তুটির গতিশক্তির পরিমাপ করা যায়।

কোনো গতিশীল বস্তু তার গতির জন্য কাজ করার যে সামর্থ্য বা শক্তি লাভ করে তাকে বস্তুটির গতিশক্তি বলে। যে কোনো সচল বস্তুর মধ্যে গতিশক্তি থাকে।

একক : গতিশক্তি ও কাজের একক একই। অর্থাৎ গতিশক্তির একক জুল।

মাত্রা : $[E_k] = [\frac{1}{2}mv^2]$

$= [M]\,[LT^{-1}]^2 = [ML^2T^{-2}]$

কোনো বস্তুর গতি চলন ও ঘূর্ণন অথবা চলন-ঘূর্ণন মিলিয়ে জটিল গতিও হতে পারে। অতএব বস্তুর গতিশক্তি রৈখিক গতিশক্তি (translational kinetic energy) বা ঘূর্ণন গতিশক্তি (rotational kinetic energy) বা এই দুই ধরনের গতিশক্তিই হতে পারে। বিনা বাধায় পতনশীল বস্তুর গতিশক্তি হলো রৈখিক গতিশক্তি। ঘুরন্ত বৈদ্যুতিক পাখার গতিশক্তি হলো আবর্ত বা ঘূর্ণন গতিশক্তি। গাড়ির চাকায় এবং ফুটবলে রৈখিক ও আবর্ত দুই ধরনের গতিশক্তি থাকে।

উদাহরণ :

(১) পাথরকে কাচের সঙ্গে ঠেকিয়ে রাখলে কিছু হয় না, কিন্তু পাথর ছুড়ে মারলে কাচ ভেঙ্গে যায়। গতির জন্য পাথরটি ওই কাজ করার সামর্থ্য পায়।

(২) হাতুড়ি দিয়ে দেয়ালে পেরেক ঠুকলে হাতুড়ি তীব্র বেগে পেরেককে আঘাত করে। তখন পেরেকটি দেওয়ালের বাধা অতিক্রম করে ঢুকে যায়। হাতুড়ি তার গতির জন্যই এ কাজ করতে সক্ষম হয়। অর্থাৎ হাতুড়িটির গতিশক্তির জন্যই পেরেকটি দেওয়ালের বাধা অতিক্রম করতে পারে।

(৩) পাহাড় পর্বত থেকে সমতলে নামার সময় নদী অত্যন্ত খরস্রোতা হয়। স্রোতের গতিশক্তি খুব বেশি বলে বড় বড় পাথর খণ্ডকে গড়িয়ে নিয়ে যায়।

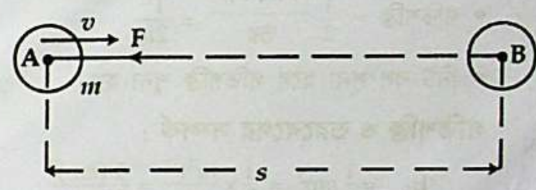
নিজে কর : নদীতে পালহীন একটি নৌকা এবং পালতোলা আর একটি নৌকা পাশাপাশি ভাসিয়ে দাও। জোরে বাতাস বইলে তুমি কী দেখতে পাবে? তুমি দেখবে পালতোলা নৌকা পালহীন নৌকা অপেক্ষা দ্রুত চলছে। এর কারণ ব্যাখ্যা কর।

নদীর স্রোতের গতিশক্তি নৌকাকে ভাসিয়ে নিয়ে যায়। বায়ু প্রবাহের গতিশক্তিকে পাল টাঙিয়ে কাজে লাগিয়ে নৌকা এভাবে এগোয়।

৫.৬.১ গতিশক্তির রাশিমালা প্রতিপাদন
Derivation of equation for kinetic energy

রৈখিক গতির ক্ষেত্রে : গতিশীল বস্তু স্থিতিতে আসার পূর্ব মুহূর্ত পর্যন্ত যে পরিমাণ কাজ সম্পন্ন করে তাই গতিশক্তির পরিমাপ।

মনে করি, 'm' ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু AB বরাবর v বেগে চলছে। গতির বিপরীত দিকে BA বরাবর তার ওপর F পরিমাণ ধ্রুব বল প্রয়োগ করা হলো। এতে সম-মন্দনের সৃষ্টি হবে। মনে করি, সম-মন্দন $= a$ এবং বস্তুটি A হতে s দূরত্ব অতিক্রম করার পর B বিন্দুতে এসে থেমে গেল। এ ক্ষেত্রে শেষ বেগ $v = 0$।



চিত্র ৫.১৪

$\therefore$ গতিশক্তি = স্থিতিতে আসার পূর্ব মুহূর্ত পর্যন্ত কাজ

= বল × স্থিতিতে আসার পূর্ব মুহূর্ত পর্যন্ত অতিক্রান্ত দূরত্ব $= F \times s$

নিউটনের ২য় গতি সূত্র হতে আমরা জানি, বল = ভর × ত্বরণ বা মন্দন $\therefore F = ma$

বর্ণনা অনুসারে, $0 = v^2 - 2as$

বা, $2as = v^2$ বা, $s = \frac{v^2}{2a}$

ওপরের সমীকরণে F এবং s-এর মান বসিয়ে আমরা পাই,

গতিশক্তি $= ma \times \frac{v^2}{2a} = \frac{1}{2} mv^2$ বা, K. E. $= \frac{1}{2} mv^2$

অর্থাৎ গতিশক্তি (K. E.) $= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \times$ ভর × বেগ^2 ... ... (5.26)

ক্যালকুলাস পদ্ধতি : মনে করি, বস্তুর ওপর একটি পরিবর্তনশীল বল F ক্রিয়া করায় প্রযুক্ত বলের অভিমুখে সরণ হলো ds। অতএব, প্রযুক্ত বল দ্বারা কাজ

$$dW = Fds$$
$$= mads \qquad \left[\because F = ma \text{ এবং } a = \frac{dv}{dt}\right]$$
$$= m\frac{dv}{dt} ds$$
$$= m\frac{dv}{ds} \times \frac{ds}{dt} \times ds$$
$$= m\frac{ds}{dt} \times \frac{dv}{ds} \times ds = mvdv \qquad \left[\because v = \frac{ds}{dt}\right]$$

$\therefore dW = mvdv$ ... ... (5.27)

বস্তুর বেগ শূন্য থেকে বেড়ে v হলে প্রযুক্ত বল মোট যে কাজ করে তা দিয়ে বস্তুর গতিশক্তির পরিমাপ করা হয়। সুতরাং সমীকরণ (5.27) কে 0 এবং v, এই দুই সীমার মধ্যে সমাকলন করে পাই,

বস্তুর গতিশক্তি, $E_k = W = \int_0^v dW = m\int_0^v vdv = m\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^v$

$= \frac{1}{2} m (v^2 - 0)$

$\therefore E_k = \frac{1}{2} mv^2$, এখানে m = ধ্রুবক ... ... (5.28)

$\therefore$ গতিশক্তি $= \frac{1}{2} \times$ ভর × বেগ^2

ইহাই গতিশক্তির রাশিমালা।

সমীকরণ (5.28) থেকে আমরা সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে,

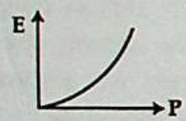
- কোনো মুহূর্তে গতিশক্তি হলো ওই মুহূর্তে বস্তুর বেগের বর্গ ও ভরের গুণফলের অর্ধেক।
- নির্দিষ্ট ভরের কোনো বস্তুর গতিশক্তি $E_k \propto v^2$ অর্থাৎ বেগের বর্গের সমানুপাতিক।
- গতিশক্তি $= \frac{1}{2} \frac{(\text{ভরবেগ})^2}{\text{ভর}} = \frac{P^2}{2m}$
- নিট বল শূন্য হলে গতিশক্তি শূন্য হয়।

গতিশক্তি ও ভরবেগের সম্পর্ক :

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times \frac{m^2v^2}{m} = \frac{1}{2}\frac{(mv)^2}{m}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{P^2}{m} \qquad [\because \text{ভরবেগ}, P = mv]$$

$$\therefore \text{গতিশক্তি} = \frac{1}{2} \times \frac{(\text{ভরবেগ})^2}{\text{ভর}}$$



চিত্র ৫.১৫

বা, $E_k \propto P^2$ অর্থাৎ গতিশক্তি ভরবেগের বর্গের সমানুপাতিক। ভরবেগ ও গতিশক্তির পরিবর্তনের লেখচিত্র হলো—

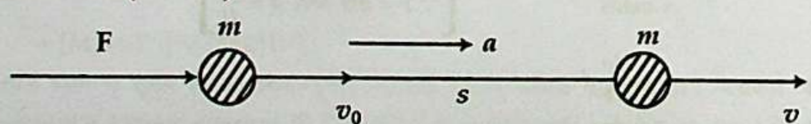
৫.৭ কাজ-শক্তি উপপাদ্য
Work-energy theorem

কোনো বস্তুর ওপর ক্রিয়ারত লব্ধি বল কর্তৃক কৃত কাজ তার গতিশক্তির পরিবর্তনের সমান।

প্রতিপাদন : মনে করি 'm' ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু 'v_0' আদি বেগে চলছে। গতির দিকে নির্দিষ্ট মানের একটি বল F বস্তুর ওপর প্রয়োগ করলে বস্তুর বেগ বৃদ্ধি পাবে। ফলে বস্তু শক্তি লাভ করবে। মনে করি s দূরত্ব অতিক্রম করার পর শেষ বেগ 'v' হলো। তা হলে কৃত কাজ, $W = F \times s$।

বল কর্তৃক সৃষ্ট ত্বরণ, $a = \frac{F}{m} = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} \qquad [\because v^2 = v_0^2 + 2as]$

বা, $F = ma = m\left(\frac{v^2 - v_0^2}{2s}\right)$



চিত্র ৫.১৬

$$\therefore \text{কৃত কাজ}, W = F \times s = m\left(\frac{v^2 - v_0^2}{2s}\right) \times s = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)$$

$$\therefore W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.29)$$

$$= \text{শেষ গতিশক্তি} - \text{আদি গতিশক্তি।}$$

$\therefore$ **বলের দ্বারা কৃত কাজ = শক্তি লাভ = গতিশক্তির পরিবর্তন**

সুতরাং কোনো বস্তুর ওপর ক্রিয়ারত লব্ধি বল কর্তৃক কৃত কাজ তার গতিশক্তির পরিবর্তনের সমান। এটি 'কাজ-শক্তি উপপাদ্য' নামে পরিচিত। সমীকরণ (5.29) উপপাদ্যটি প্রমাণ করে।

[বি.দ্র. পরিবর্তনশীল বলের ক্ষেত্রেও উপপাদ্যটি প্রযোজ্য।]

বিকল্প পদ্ধতি

ধরা যাক m ভরের একটি বস্তুকণা A বিন্দু থেকে AB পথে B বিন্দুতে যায়। এই AB পথের একটি ক্ষুদ্র অংশ $d\vec{s}$ ভেক্টর দ্বারা সূচিত করা হয়েছে [চিত্র ৫.১৭]। কণাটির উপর $d\vec{s}$ সরণের সময় ক্রিয়াশীল বল $\vec{F}$ হয়, তবে কৃত কাজ,

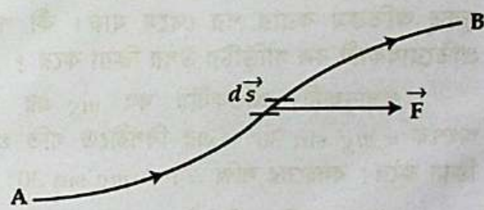
$$dW = \vec{F}.d\vec{s}$$

সুতরাং সম্পূর্ণ পথ AB-এর জন্য কৃত কাজ,

$$W = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F}.\vec{ds} = \int_A^B m\vec{a}.\vec{ds} \quad [\because \vec{F} = m\vec{a}]$$

বা, $$W = m\int_A^B \frac{\vec{dv}}{dt}.\vec{ds} = m\int_A^B \vec{dv}.\frac{\vec{ds}}{dt}$$

$$= m\int_A^B \vec{dv}.\vec{v} = m\int_A^B v\,dv$$



চিত্র ৫.১৭

A ও B বিন্দুতে কণাটির বেগ যথাক্রমে v_a ও v_b হলে.

$$W = m\int_{v_a}^{v_b} v\,dv = \frac{1}{2}m\,[v^2]_{v_a}^{v_b}$$

$$= \frac{1}{2}m\,(v_b^2 - v_a^2)$$

$$= \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$$

অর্থাৎ কৃত কাজ = কণাটির গতিশক্তির পরিবর্তন।

এই সম্পর্কটিই কাজ-শক্তি বা কাজ-গতিশক্তি উপপাদ্য।

উল্লেখ্য, বল স্থির হোক বা পরিবর্তনশীল হোক, কৃত কাজ সর্বদাই কণাটির গতিশক্তির পরিবর্তনের সমান হবে।

কাজটি যাচাই কর : হাই জাম্প বা লং জাম্প দেওয়ার সময় প্রতিযোগীরা স্থির অবস্থা থেকে লাফ দেয় না, কিছু দূর থেকে দৌড়ে এসে লাফ দেয়। ফলে অনেক দূর লাফ দেওয়া যায়। ব্যাখ্যা কর।

সমস্যা সমাধান
Solution of problems

১। গতিশক্তি কি ঋণাত্মক হতে পারে ?

কোনো সচল বস্তুর ভর m এবং বেগ v হলে বস্তুর গতিশক্তি $\frac{1}{2}mv^2$। বস্তুর ভর m কখনোই ঋণাত্মক হতে পারে না। বস্তুর বেগ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে, কিন্তু বেগের বর্গ সবসময় ধনাত্মক হবে। অতএব বস্তুর গতিশক্তি কখনো ঋণাত্মক হতে পারে না।

২। একটি হালকা বস্তু এবং একটি ভারী বস্তুর ভরবেগ সমান। কোনটির গতিশক্তি বেশি ?

মনে করি, ভারী বস্তুর ভর = M এবং বেগ v_1 এবং হালকা বস্তুর ভর = m এবং বেগ = v_2। বস্তু দুটির ভরবেগ সমান হলে,

$$Mv_1 = mv_2 = P$$

$$\therefore \frac{\text{হালকা বস্তুর গতিশক্তি}}{\text{ভারী বস্তুর গতিশক্তি}} = \frac{\frac{1}{2}mv_2^2}{\frac{1}{2}Mv_1^2} = \frac{P^2/2m}{P^2/2M} = \frac{M}{m}$$

$\therefore$ m অপেক্ষা M বড় হলে $(M > m)$ হালকা বস্তুর গতিশক্তি ভারী বস্তুর গতিশক্তির চেয়ে বেশি হবে।

৩। একটি হালকা বস্তু এবং একটি ভারী বস্তুর গতিশক্তি সমান। কোনটির ভরবেগ বেশি ?

মনে করি, ভারী বস্তুর ভর M ও বেগ v_1 এবং হালকা বস্তুর ভর m ও বেগ v_2। অতএব ভারী বস্তুর ভরবেগ $P_1 = Mv_1$ এবং হালকা বস্তুর ভরবেগ $P_2 = mv_2$। কিন্তু দুটি বস্তুর গতিশক্তি সমান।

$$\therefore \quad \frac{1}{2}Mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2$$

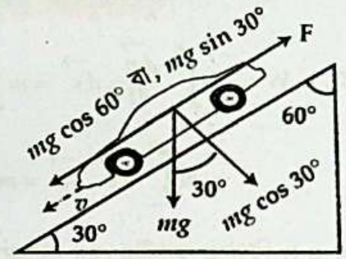
$$\therefore \quad \frac{P_1^2}{2M} = \frac{P_2^2}{2m}$$

$$\therefore \quad \frac{P_1}{P_2} = \sqrt{\frac{M}{m}}$$

m অপেক্ষা M বড় হলে $(M > m)$ ভারী বস্তুর ভরবেগ হালকা বস্তুর ভরবেগের চেয়ে বেশি হবে।

গাণিতিক উদাহরণ ৫.৩

১। 2000 kg ভরের একটি গাড়ি ভূমির সাথে 30° কোণে আনত একটি রাস্তা ধরে $16\ ms^{-1}$ বেগে নিচে নামার সময় গাড়ির চালক ব্রেক প্রয়োগ করায় গাড়িটি 40 m দূরত্ব অতিক্রম করার পর থেমে যায়। কী পরিমাণ গতি প্রতিরোধকারী বল গাড়িটির উপর ক্রিয়া করে ?



প্রশ্নানুযায়ী, অভিকর্ষীয় বল mg এর তল বরাবর অংশক $= mg \sin 30°$। এর বিপরীতে গতি প্রতিরোধ বল ক্রিয়া করে। বলদ্বয়ের লব্ধি $= F - mg \sin 30°$

আমরা জানি, গতিশক্তি = কাজ

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = (F - mg \sin 30°) \times s$$

বা, $$\frac{1}{2} \times 2000 \times (16)^2 = (F - 2000 \times 9{\cdot}8 \times \frac{1}{2}) \times 40$$

$$\therefore \quad F = \frac{2000 \times (16)^2}{2 \times 40} + 2000 \times 9{\cdot}8 \times \frac{1}{2} = 16200\ N$$

এখানে,
$m = 2000$ kg
$v_0 = 16\ ms^{-1}$
$s = 40$ m
$g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$

২। একটি রাইফেলের গুলি একটি তক্তা ভেদ করে। যদি গুলির বেগ তিনগুণ করা হয় তা হলে একই পুরুত্বের কয়টি তক্তা ভেদ করবে ? [রা. বো. ২০০৪]

আমরা জানি,

কৃত কাজ = গতিশক্তির পরিবর্তন

১ম ক্ষেত্রে,

$$max = \frac{1}{2}mv_1^2 - 0 = \frac{1}{2}mv_1^2$$

২য় ক্ষেত্রে,

$$ma.nx = \frac{1}{2}mv_1^2 - 0 = \frac{1}{2}m(3v_1)^2 = \frac{9}{2}mv_1^2$$

এখানে,
ধরি, গুলির ভর $= m$
1টি তক্তার পুরুত্ব $= x$
নির্ণেয় তক্তার সংখ্যা $= n$
$\therefore$ nটি তক্তার পুরুত্ব $= nx$
প্রথম গুলির বেগ $= v_1$
দ্বিতীয় গুলির বেগ $= v_2 = 3v_1$

অতএব, $$\frac{max}{ma.nx} = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2}{\frac{9}{2}mv_1^2}$$

বা, $$\frac{1}{n} = \frac{1}{9}$$

$$\therefore \quad n = 9$$

বিকল্প :

১ম ক্ষেত্রে, $\frac{1}{2}mv^2 =$ কাজ $= mgx$ ... ... (i)

২য় ক্ষেত্রে, $\frac{1}{2}m(3v)^2 = mg \times nx$ ... ... (i)

সমীকরণ (ii)-কে সমীকরণ (i) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{\frac{1}{2}m\,9v^2}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{mgnx}{mgx}$$

$\therefore \quad n = 9$ টি

৩। 2000 কেজি ভরের একটি ট্রাকের ভরবেগ 200 kg ms⁻¹ হলে এর গতিশক্তি কত ?

আমরা জানি,

$$E_k = \frac{P^2}{2m} = \frac{(200)^2}{2 \times 2000} = 10 \text{ J}$$

এখানে,
$m = 2000$ kg
$P = 200$ kg ms^{-1}

৪। 2 kg ভরের একটি বস্তু 30 m উচ্চতা সম্পন্ন একটি বিল্ডিং-এর ছাদ থেকে নিচে ফেলে দেয়া হলো। (i) বস্তুটির প্রাথমিক স্থিতিশক্তি, (ii) বস্তুটি যে বেগে ভূমি স্পর্শ করে, (iii) বস্তুটি সর্বোচ্চ গতিশক্তি এবং (iv) ভূমি হতে 3 m উঁচুতে বস্তুটির গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি নির্ণয় কর।

(i) বস্তুটির প্রাথমিক স্থিতিশক্তি $= mgh = 2 \times 9.8 \times 30 = 588$ J

(ii) মনে করি, বস্তুটি v বেগে ভূমি স্পর্শ করে।

এখন, ছাদে থাকাকালীন বস্তুটির স্থিতিশক্তি = ভূমি স্পর্শ করার সময় বস্তুটির গতিশক্তি অর্থাৎ $mgh = \frac{1}{2} mv^2$

$\therefore \quad 588 = \frac{1}{2} \times 2 \times v^2$

বা, $v^2 = 588$

$\therefore \quad v = \sqrt{588} = 24.25$ ms^{-1}

(iii) বস্তুটির সর্বোচ্চ গতিশক্তি = বস্তুটির প্রাথমিক স্থিতিশক্তি

অতএব, বস্তুর সর্বোচ্চ গতিশক্তি = 588 J

(iv) ভূমি হতে 3 m উঁচুতে বস্তুটির স্থিতিশক্তি $= 2 \times 9.8 \times 3 = 58.8$ J

ওই স্থানে বস্তুটির গতিশক্তি = স্থিতিশক্তি হ্রাস $= 588 - 58.8 = 529.2$ J

৫। একজন বালক ও একজন লোক একত্রে দৌড়াচ্ছেন। বালকটির ভর লোকটির ভরের অর্ধেক এবং লোকটির গতিশক্তি বালকটির গতিশক্তির অর্ধেক। লোকটি যদি তার বেগ 1 ms⁻¹ বৃদ্ধি করেন তবে তার গতিশক্তি বালকটির গতিশক্তির সমান হয়। এদের আদিবেগ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০১১, ২০০৩; সি. বো. ২০০৩]

গতিশক্তির সমীকরণ থেকে পাই,

বালকের গতিশক্তি, $KE_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$

এবং লোকটির গতিশক্তি,

$$KE_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 2m_1 v_2^2$$
$$= m_1 v_2^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$$

এখানে, বালকের ভর $= m_1$
লোকের ভর, $m_2 = 2m_1$
বালকের আদিবেগ, $v_1 = ?$
লোকের আদিবেগ, $v_2 = ?$
লোকের শেষ বেগ, $v_2' = v_2 + 1$

প্রশ্নমতে লোকটির গতিশক্তি $= \frac{1}{2}$ (বালকের গতিশক্তি)

$$m_1 v_2^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2\right)$$

$$\therefore \quad 2m_1 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (iii)$$

আবার, $v_2' = v_2 + 1$ হলে প্রশ্নমতে $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = m_1 (v_2 + 1)^2$

সমীকরণ (iii) থেকে প্রাপ্ত, $\frac{1}{2} m_1 v_1^2$ এর মান বসিয়ে পাই,

$2m_1 v_2^2 = m_1 (v_2 + 1)^2$

বা, $2v_2^2 = v_2^2 + 2v_2 + 1$

বা, $v_2^2 - 2v_2 - 1 = 0$

$$\therefore \quad v_2 = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

বেগ ধনাত্মক বলে, $v_2 = 1 + \sqrt{2} = 2.41\ ms^{-1}$

সমীকরণ (iii) হতে পাই,

$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = 2\, m_1 v_2^2$

বা, $v_1^2 = 4 \times (2.41)^2$

বা, $v_1 = \sqrt{23.2324}$

$\therefore\ v_1 = 4.82\ ms^{-1}$

উত্তর : বালকের আদি বেগ $4.82\ ms^{-1}$ এবং লোকের আদি বেগ $2.41\ ms^{-1}$

৬। 1 km উঁচুতে অবস্থিত একটি বিমান হতে 500 g ভরের একটি বোমা ফেলে দেওয়া হলো। ভূমি স্পর্শ করার পূর্ব মুহূর্তে এর গতিশক্তি কত হবে ?

আমরা জানি,

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2gs = 0 + 2 \times 9.8 \times 10^3\ m$$

$$= 19600\ m^2s^{-2}$$

$$\therefore\ E_k = \frac{1}{2} \times 0.5 \times 19600 = 4900\ J$$

এখানে,

ভর, $m = 500\ g = 0.5\ kg$

সরণ, $h = 1\ km = 10^3\ m$

$E_k = ?$

$v_0 = 0$

৭। 1 kg ভরের একটি বোমা ভূমি হতে 1 km ওপরে অবস্থিত একটি বোমারু বিমান থেকে ফেলে দেওয়া হলো। ভূমি স্পর্শ করার পূর্ব মুহূর্তে এর গতিশক্তি কত ?

আমরা জানি,

ভূমি স্পর্শ করার পূর্ব মুহূর্তে বেগ v হলে,

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

কিন্তু $v^2 = v_0^2 + 2gs$

বা, $v^2 = 0 + 2 \times 9.8 \times 10^3$

$= 19600\ m^2s^{-2}$

$$\therefore\ K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 19600 = 9800\ J$$

এখানে,

ভর, $m = 1\ kg$

উচ্চতা, $h = 1\ km = 10^3\ m$

গতিশক্তি, $K = ?$

৮। 6 kg ওজনের একটি ব্লক মসৃণ অনুভূমিক টেবিলের ওপর $3\ ms^{-1}$ বেগে চলাকালীন অবস্থায় একটি স্প্রিংকে আঘাত করল এবং স্থিরাবস্থায় এল। স্প্রিং-এর বল ধ্রুবক $25\ Nm^{-1}$ হলে স্প্রিংটি কতটা সঙ্কুচিত হবে ?

আমরা জানি,

ব্লকের গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2} m v^2$

$= \frac{1}{2} \times 6 \times (3)^2 = 27\ J$

এখানে,

ব্লকের ভর, $m = 6\ kg$

ব্লকের বেগ, $v = 3\ ms^{-1}$

বল ধ্রুবক, $K = 25\ Nm^{-1}$

এই গতিশক্তি স্প্রিংটিকে সঙ্কুচিত করতে ব্যয়িত হয়।

এখন, স্প্রিং-এর সংকোচন x হলে, আমরা পাই,

$$\frac{1}{2} K x^2 = 27$$

$$\therefore\ x = \sqrt{\frac{27 \times 2}{25}} = 1.47$$

৯। ভূমি হতে 5 m উঁচু স্থান থেকে 2 kg ভরের একটি বস্তু 3 ms⁻¹ বেগে খাড়া ওপরের দিকে উৎক্ষেপণ করা হলো। ভূমি স্পর্শ করার ঠিক আগের মুহূর্তে বস্তুটির গতিশক্তি কত ?

ধরা যাক, ভূমি স্পর্শ করার আগের মুহূর্তে বস্তুটির বেগ $= v$

বস্তুটি যখন প্রক্ষেপণ বিন্দুতে ফিরে আসে তখন এর বেগ $3\ ms^{-1}$ (নিচের দিকে)।

অতএব,

$$v^2 = u^2 + 2gh$$
$$= (3)^2 + 2 \times 9{\cdot}8 \times 5$$
$$= 9 + 98 = 107\ (ms^{-1})^2$$

এখানে,
$h = 5\ m$
$u = 3\ ms^{-1}$
$m = 2\ kg$
$E = ?$

সুতরাং, ভূমি স্পর্শ করার পূর্ব মুহূর্তে বস্তুর গতিশক্তি,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 107 = 107\ J$$

১০। একটি বস্তুর ওপর একটি স্থির বল, $F = (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$ N ক্রিয়া করছে। নিম্নোক্ত ক্ষেত্রগুলিতে কৃত কাজ নির্ণয় কর : (i) Z-অক্ষ বরাবর 3 m সরণ হলে এবং (ii) Y-অক্ষ বরাবর 4 m সরণ হলে।

(i) এখানে, Z-অক্ষ বরাবর সরণ $s = 3\hat{k}$ m

$\therefore$ কৃত কাজ, $W = \vec{F} \cdot \vec{s} = (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) \cdot 3\hat{k} = 9\ J$

(ii) Y-অক্ষ বরাবর বস্তুটির সরণ $s = 4\hat{j}$ m

$\therefore$ কৃত কাজ, $W = \vec{F} \cdot \vec{s} = (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) \cdot 4\hat{j} = -8\ J$

৫·৮ স্থিতিশক্তি বা বিভবশক্তি
Potential energy

বস্তু তার অবস্থানের জন্য যে শক্তি অর্জন করে অথবা বস্তুস্থিত কণাসমূহের পারস্পরিক অবস্থান পরিবর্তনের জন্য বস্তু যে শক্তি অর্জন করে তাকে বস্তুর স্থিতিশক্তি বা বিভবশক্তি বলে।

ধর এক খণ্ড ইট ছাদের ওপর উঠিয়ে রেখে দিলে, আবার মোটরের সাহায্যে পানি তুলে ছাদের ওপর রক্ষিত একটি ট্যাংকে রেখে দিলে। উভয় ক্ষেত্রে দেখা যাবে যে ইট এবং পানি কম-বেশি শক্তি প্রাপ্ত হয়েছে। এরূপ সকল শক্তিই হলো স্থিতিশক্তি। কোনো বস্তুর স্থিতিশক্তি বস্তুর ভর, ভূমি থেকে উচ্চতা এবং পরীক্ষাধীন স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণের ওপর নির্ভর করে।

উদাহরণ :

(ক) খেলনার মোটর গাড়িতে স্প্রিং লাগানো থাকে [চিত্র ৫·১৮]। এই স্প্রিং-এ দম দিলে তা আকারে ছোট হয়। এই আকার পরিবর্তনের জন্য আমরা কাজ করি যা স্থিতিশক্তিরূপে স্প্রিং-এ সঞ্চিত হয়। দম ছেড়ে দিলে স্প্রিং-এর প্যাঁচ খুলে পুনরায় পূর্বের অবস্থায় ফিরে আসে। স্প্রিং-এর সাথে খেলনার চাকা লাগানো থাকে। ফলে চাকা ঘুরতে থাকে অর্থাৎ স্প্রিং স্থিতিশক্তির দরুন গাড়ি চালাতে কাজ করে।

(খ) হাত ঘড়িতে স্থিতিস্থাপক স্প্রিং-এর সাথে ঘড়ির চাকা যুক্ত থাকে [চিত্র ৫·১৮]। এই স্প্রিং-এ দম দিলে তা আকারে ছোট হয়। এই আকার পরিবর্তন তথা দম দেওয়ার জন্য আমরা কাজ করি যা স্প্রিং-এর মধ্যে স্থিতিশক্তিরূপে সঞ্চিত হয়। স্প্রিং-এর সাথে ঘড়ির কাঁটার এমন একটি সংযোগ থাকে যে স্প্রিং প্যাঁচ খুলে উল্টা দিকে ঘুরে আগের অবস্থায় ফিরে আসার সময় ঘড়ির কাঁটা ঘুরতে থাকে। স্প্রিং-এর স্থিতিশক্তি গতিশক্তিতে পরিণত হয়।

চিত্র ৫·১৮

এরূপ ধনুকের ছিলাতে তীর লাগিয়ে টানলে, ধাতব পাতকে বাঁকালে, রবারকে প্রসারণ করলে সকলেই আকার পরিবর্তনের জন্য স্থিতিশক্তি লাভ করে।

(গ) উচ্চে অবস্থিত পানিতে, পাহাড়ের চূড়ায় বরফে এবং আকাশের মেঘে অবস্থান পরিবর্তনের জন্য স্থিতিশক্তি সঞ্চিত থাকে।

কোনো একটি বস্তু বর্তমান অবস্থা হতে অন্য কোনো স্বাভাবিক বা প্রমাণ অবস্থানে আসতে যে পরিমাণ কাজ সম্পন্ন করে তাই স্থিতিশক্তির পরিমাপ।

কাজ : সূর্যের চারদিকে আবর্তনের জন্য গ্রহগুলির স্থিতিশক্তি ও গতিশক্তি কেমন হয় ব্যাখ্যা কর।

সূর্যের চারদিকে আবর্তনকালে গ্রহগুলির মোটশক্তি ধ্রুব বা স্থির থাকে। প্রতিটি গ্রহ সূর্যকে উপবৃত্তের ফোকাসে রেখে উপবৃত্তাকার পথে সূর্যকে প্রদক্ষিণ করে। সূর্য থেকে গ্রহের দূরত্ব অনেক বেশি, তাই এর গতি খুব ধীর হয়। অর্থাৎ এর গতিশক্তি খুব কম হয়। পক্ষান্তরে এর স্থিতিশক্তি সর্বাধিক হয়। এখন কক্ষপথে গ্রহের দূরত্ব যখন কম হয় তখন এর গতিশক্তি বাড়ে এবং স্থিতিশক্তি কমে; কিন্তু মোট শক্তি সবসময়ই ধ্রুব থাকে।

৫.৮.১ স্থিতিশক্তির প্রকারভেদ
Types of potential energy

স্থিতিশক্তি বা বিভব শক্তি বিভিন্ন প্রকার; যথা—

(১) অভিকর্ষীয় স্থিতিশক্তি বা অভিকর্ষীয় বিভবশক্তি (Gravitational potential energy)

(২) স্থিতিস্থাপক বিভবশক্তি (Elastic potential energy)

(৩) তড়িৎ বিভবশক্তি (Electric potential energy)

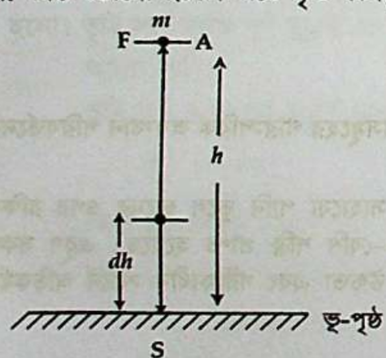
এখানে অভিকর্ষীয় বিভবশক্তি, স্থিতিস্থাপক বিভবশক্তি ও তড়িৎ বিভবশক্তি আলোচনা করা হলো।

১. অভিকর্ষীয় স্থিতিশক্তি বা বিভবশক্তি
Gravitational potential energy

কোনো একটি বস্তুকে অভিকর্ষের বিরুদ্ধে ওপরে তুলতে বাইরের কোনো উৎস বা এজেন্টের প্রয়োজন হয়। এই কাজ বস্তুর মধ্যে স্থিতিশক্তি বা বিভবশক্তি হিসেবে সঞ্চিত থাকে। এর নাম অভিকর্ষীয় বিভবশক্তি। এক্ষেত্রে ভূপৃষ্ঠকে প্রামাণ্য তল (reference level) হিসেবে বিবেচনা করা হয়।

এখন শক্তির পরিমাপ করা যাক—

ক্যালকুলাস পদ্ধতি : মনে করি m ভরের একটি বস্তুকে ভূপৃষ্ঠ থেকে অভিকর্ষ বলের বিরুদ্ধে অতি ক্ষুদ্র উচ্চতা dh পর্যন্ত উঠানো হলো। এতে কৃত কাজ,



চিত্র ৫.১৯

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dh}$$

বা, $$dW = F dh \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.30)$$

$[\because \theta = 0°]$

এখানে F = বাহ্যিক উৎস কর্তৃক প্রযুক্ত বল এবং F ও dh-এর মধ্যবর্তী কোণ শূন্য।

একটি বস্তুকে ওপরে উঠাতে হলে এর ওজনের সমপরিমাণ বল উপর দিকে প্রয়োগ করতে হবে।

$\therefore$ প্রযুক্ত বল, F = বস্তুর ওজন = mg

সুতরাং, বস্তুটিকে h উচ্চতায় A স্থানে [চিত্র ৫.১৯] উঠাতে হলে মোট কৃত কাজের পরিমাণ সমীকরণ (5.30)-এ প্রদত্ত ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র কাজের সমষ্টির সমান।

$\therefore$ অভিকর্ষীয় বিভবশক্তি = বস্তুটিকে ভূপৃষ্ঠ থেকে h উচ্চতায় তুলতে মোট কাজ

$$P.E. = \int_0^h F dh = \int_0^h mg\,dh$$

স্বল্প উচ্চতার জন্য g-এর মান ধ্রুব ধরে আমরা লিখতে পারি,

$$P.E. = mg\int_0^h dh = mg[h]_0^h = mg[h-0] = mgh$$

অর্থাৎ অভিকর্ষীয় বিভবশক্তি

$$P.E. = mgh \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.31)$$

= ভর × অভিকর্ষীয় ত্বরণ × উচ্চতা

উল্লেখ্য বস্তু যতই নিচে নামতে থাকবে h-এর মান ততই কমবে এবং অভিকর্ষীয় বিভবশক্তিও কমতে থাকবে। ভূপৃষ্ঠে h-এর মান শূন্য হওয়ায় অভিকর্ষীয় বিভব শক্তি শূন্য হবে।

কোনো বস্তুর অভিকর্ষীয় বিভবশক্তির মান প্রামাণ্য তলের সাপেক্ষে বস্তুর অবস্থানের ওপর নির্ভর করে। সমুদ্র পৃষ্ঠকে প্রামাণ্য তল বিবেচনা করে কোনো অবস্থানের বিভবশক্তি এবং কোনো উঁচু পাহাড়ের চূড়া প্রামাণ্য তল বিবেচনা করলে ওই একই অবস্থানের বিভবশক্তি এক হবে না, ভিন্নতর হবে। প্রকৃতপক্ষে কোনো স্থানের বিভবশক্তির পরম মান নির্ণয় করা যায় না, প্রমাণ তল বা প্রসঙ্গ তল সাপেক্ষে বিভবশক্তির পরিবর্তন নির্ণয় করা হয়।

বিভবশক্তির মান ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক উভয়ই হতে পারে। এটা নির্ভর করে প্রসঙ্গ বা প্রামাণ্য তলের ওপর। ভূপৃষ্ঠকে প্রামাণ্য তল বিবেচনা করলে ওপরের দিকে বিভব শক্তি ধনাত্মক হবে আবার ভূগর্ভে বা খনিতে বিভব শক্তি ঋণাত্মক হবে।

কাজ : দুটি পানিপূর্ণ চৌবাচ্চা নাও যাদের নির্গম নল একই আকৃতির। একটি চৌবাচ্চাকে ভূমিতে রাখ। অন্য চৌবাচ্চাকে দালানের ছাদের ওপর স্থাপন কর। এবার দুটি চৌবাচ্চার নির্গম নলকে খুলে দাও। কোন চৌবাচ্চার পানির বেগ বেশি হবে?

ছাদের ওপরের চৌবাচ্চা উঁচু জায়গায় থাকার জন্য স্থিতিশক্তি অর্জন করে। তাই নির্গম নল খুলে দিলে ভূমিতে রাখা চৌবাচ্চা অপেক্ষা ছাদে রাখা চৌবাচ্চার পানি বেশি বেগে প্রবাহিত হবে।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : একটি বস্তুর শক্তি আছে কিন্তু ভরবেগ নেই অথবা ভরবেগ আছে কিন্তু শক্তি নেই—এরকম হওয়া কী সম্ভব?

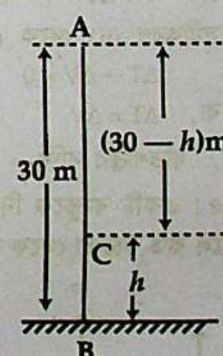
উঁচুতে অবস্থিত স্থির কোনো বস্তুর স্থিতিশক্তি থাকে; কিন্তু কোনো ভরবেগ থাকে না। আবার কোনো বস্তুর ভরবেগ থাকলে অবশ্যই বেগ থাকবে। সুতরাং ওই বস্তুর গতিশক্তি থাকবে। অতএব কোনো বস্তুর শক্তি থাকলে ভরবেগ নাও থাকতে পারে, তবে ভরবেগ থাকলে অবশ্যই শক্তি থাকবে।

গাণিতিক উদাহরণ ৫.৪

১। 30 m উচ্চতা থেকে একটি বস্তুকে বিনা বাধায় পড়তে দিলে কোথায় উহার গতিশক্তি বিভবশক্তির দ্বিগুণ হবে ?

মনে করি, ভূমি হতে h ওপরে এবং ওপর হতে $(30 - h)$ m নিচে গতিশক্তি বিভবশক্তির দ্বিগুণ হবে।

এখানে,
$h = 30$ m
$v_0 = 0$



আমরা জানি,

বিভবশক্তি, $E_p = mgh$

গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

প্রশ্নমতে, $E_k = 2E_p$ ... ... (i)

এখানে, $v^2 = v_0^2 + 2g(30 - h)$

বা, $v^2 = 0 + 2g(30 - h) = 2g(30 - h)$

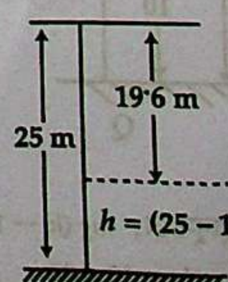
$\therefore \quad E_k = \frac{1}{2} m \times 2g(30 - h) = mg(30 - h)$

সমীকরণ (i) অনুযায়ী, $mg(30 - h) = 2mgh$

$\therefore \quad 2h = 30 - h$ বা, $h = 10$ m

২। 25 m উচ্চতা হতে 4 kg ভর মুক্তভাবে অভিকর্ষের টানে পড়তে থাকলে 2s পরে ভরটির গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি কত হবে ?

এখানে,
$m = 4$ kg
$g = 9.8\ ms^{-2}$
$t = 2$ s



2 sec পর সরণ $h = v_0t + \frac{1}{2}gt^2$

$= 0 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times 4 = 19.6$ m

$v^2 = v_0^2 + 2gh = 0 + 2 \times 9.8 \times 19.6$

$= 2 \times 9.8 \times 19.6$

$\therefore$ 2 sec পর গতিশক্তি,

$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times 9.8 \times 19.6$

$= 768.32$ J

স্থিতিশক্তি, $E_p = mg(25 - 19.6) = 211.68$ J

৩। একটি বন্দুকের স্প্রিংকে 4 cm সংকুচিত করে 10 g ভরের একটি গুলি ছোড়া হলো। স্প্রিংটি যখন সাম্যাবস্থায় পৌঁছে তখন সদ্যমুক্ত গুলির বেগ কত? (স্প্রিং ধ্রুবকের মান 200 Nm^{-1})

দেওয়া আছে,

k = স্প্রিং ধ্রুবক = 200 Nm^{-1}

দৈর্ঘ্য সংকোচন, $x = 4\text{ cm} = 4 \times 10^{-2}\text{ m}$

m = গুলির ভর = $10\text{ g} = 10^{-2}\text{ kg}$

এখানে সংকুচিত স্প্রিং-এর গতিশক্তি $= \frac{1}{2}kx^2$

গুলির গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv^2$

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2$

বা, $kx^2 = mv^2$

বা, $v^2 = \frac{kx^2}{m}$

$= \frac{200 \times (4 \times 10^{-2})^2}{10^{-2}} = 32$

$\therefore \quad v = 5\cdot657\text{ ms}^{-1}$

৪। দেখাও যে, পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে নির্দিষ্ট দূরত্ব অতিক্রমে গতিশক্তি যতটুকু বৃদ্ধি পায় বিভবশক্তি ততটুকু হ্রাস পায়।

মনে করি, গতিশক্তি = T

বিভবশক্তি = V

মোট শক্তি, E = T + V ... ... (i)

আরো মনে করি নির্দিষ্ট দূরত্ব অতিক্রমে, গতিশক্তি ΔT পরিমাণ বৃদ্ধিতে বিভবশক্তি ΔV পরিমাণ হ্রাস পায়।

$\therefore \quad T + \Delta T + V - \Delta V = E$ ... ... (ii)

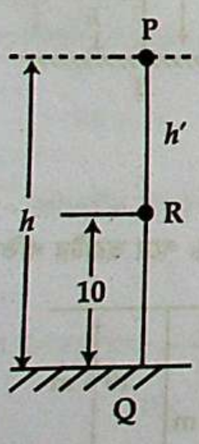
সমীকরণ (ii) থেকে (i) বিয়োগ করে পাই,

$\Delta T - \Delta V = 0$

বা, $\Delta T = \Delta V$

$\therefore$ গতিশক্তির বৃদ্ধি = বিভবশক্তি হ্রাস।

৫। একটি বস্তুকে নির্দিষ্ট উচ্চতা থেকে ফেলে দেয়া হলো। ভূমি হতে 10m উচ্চতায় গতিশক্তি বিভবশক্তির দ্বিগুণ হলে কত উচ্চতা থেকে বস্তুটি ফেলা হয়েছিল? [য. বো. ২০০৬]



মনে করি, P বিন্দু হতে m ভরের বস্তুটিকে ফেলা হলো এবং R বিন্দুতে বস্তুটির গতিশক্তি = 2 × বিভবশক্তি

R বিন্দুতে বিভবশক্তি, $E_p = mgx$

$= mg \times 10 = 10\,mg$ ... ... (i)

ধরা যাক, R বিন্দুতে বস্তুটির বেগ = v

আমরা জানি, $v^2 = v_0^2 + 2gh'$

বা, $v^2 = 2g(h - x)$ $[\because v_0 = 0]$

$= 2g(h - 10)$

R বিন্দুতে গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \times 2g(h - 10)$

$= mg(h - 10)$

প্রশ্নানুসারে, $mg(h - 10) = 2 \times 10\,mg = 20\,mg$ ... (ii)

$\therefore \quad h - 10 = 20$

বা, $h = 20 + 10 = 30\text{ m}$

উত্তর : উচ্চতা 30 m

৬। স্থির অবস্থায় থাকা 50 kg ভরের একটি গাড়ি নির্দিষ্ট বলের ক্রিয়ায় 2 s পর 15 ms^{-1} বেগ অর্জন করে। এর ওপর প্রযুক্ত বল নির্ণয় কর এবং 4 s পর এর গতিশক্তি কত হবে ?

এখানে,
$m = 50$ kg
$v_0 = 0$
$v = 15\ ms^{-1}$
$t = 2$ s
ত্বরণ, $a = ?$
বল, $F = ?$
$t_1 = 4s$
4 sec পর বেগ, $v_1 = ?$
4 sec পর গতিশক্তি, $K = ?$

আমরা জানি, $F = ma$

আবার, $v = v_0 + at$

বা, $15 = 0 + a \times 2$

বা, $a = \frac{15}{2} = 7{\cdot}5\ ms^{-2}$

$\therefore\ F = ma = 50 \times 7{\cdot}5 = 375$ N

আবার, $v_1 = v_0 + at_1$

$= 0 + 7{\cdot}5 \times 4 = 30\ ms^{-1}$

গতিশক্তি, $K = \frac{1}{2} mv_1^2 = \frac{1}{2} \times 50 \times (30)^2 = 22500$ J

৭। পুত্রের ভর পিতার ভরের অর্ধেক। পিতার গতিশক্তি পুত্রের গতিশক্তির অর্ধেক। পিতার বেগ 1 ms^{-1} বাড়ালে তার গতিশক্তি পুত্রের গতিশক্তির সমান হয়। উভয়ের বেগ নির্ণয় কর। [BUET Admission Test, 2015-16]

এখানে,
পুত্রের ভর $= m_1$
পিতার ভর $m_2 = 2m_1$
পিতার বেগ $= v_2$
পুত্রের বেগ $= v_1$

প্রশ্নানুসারে,

$KE_1 = 2KE_2$

বা, $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = 2 \times \frac{1}{2} m_2 v_2^2$

বা, $m_1 v_1^2 = 2 \times 2m_1 v_2^2$

বা, $v_1^2 = 4v_2^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (i)

আবার, $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 (v_2 + 1)^2$

বা, $m_1 v_1^2 = m_2 (v_2 + 1)^2$

বা, $m_1 v_1^2 = 2m_2 (v_2 + 1)^2$

বা, $v_1^2 = 2 (v_2 + 1)^2$

বা, $4v_2^2 = 2 (v_2^2 + 2v_2 + 1)$

বা, $v_2^2 - 2v_2 - 1 = 0$

বা, $v_2 = 1 \pm \sqrt{2} = 2{\cdot}41\ ms^{-1}$

(i)নং থেকে পাই,

$v_1^2 = 4v_2^2$

$\therefore\ v_1 = 4{\cdot}82\ ms^{-1}$

৮। 100 m উচ্চতা থেকে 5 kg ভর মুক্তভাবে অভিকর্ষের টানে পড়তে থাকলে 4 sec পরে ভরটির গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি কত হবে ? [RUET Admission Test, 2010-11]

আমরা জানি,

$v = u + gt = 0 + 9{\cdot}8 \times 4 = 39{\cdot}2\ ms^{-1}$

$\therefore$ গতিশক্তি $= \frac{1}{2} mv^2$

$= \frac{1}{2} \times 5 \times (39{\cdot}2)^2 = 3841{\cdot}6$ J

4s-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব h হলে,

$h = \frac{1}{2} \times gt^2 = \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8 \times 4^2 = 78{\cdot}4$ m

ভূমি হতে উচ্চতা, $h_1 = 100 - h = 21{\cdot}6$ m

স্থিতিশক্তি, $mgh_1 = 5 \times 9{\cdot}8 \times 21{\cdot}6 = 1058{\cdot}6$ J

অনুধাবনমূলক কাজ : একটি হাল্কা বস্তু এবং একটি ভারী বস্তুর গতিশক্তি সমান। বস্তু দুটির কোনটির ভরবেগ বেশি? ব্যাখ্যা কর।

ধরা যাক, হাল্কা বস্তুর ভর = m ও বেগ = v এবং ভারী বস্তুর ভর = M ও বেগ = V.

প্রশ্নানুসারে,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}MV^2$$

বা, $mv^2 = MV^2$

বা, $\frac{v^2}{V^2} = \frac{M}{m}$

বা, $\frac{V}{v} = \sqrt{\frac{m}{M}}$

$$\therefore \frac{\text{ভারী বস্তুর ভরবেগ}}{\text{হাল্কা বস্তুর ভরবেগ}} = \frac{MV}{mv}$$

$$= \frac{M}{m}\sqrt{\frac{m}{M}} = \sqrt{\frac{M}{m}} > 1$$

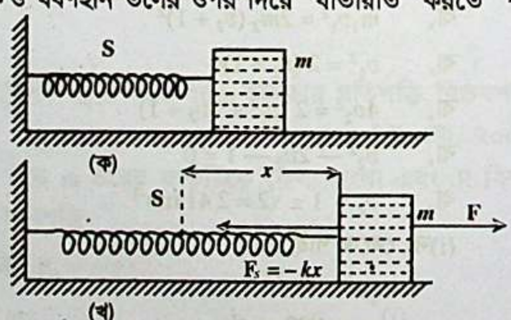
সুতরাং, ভারী বস্তুর ভরবেগ হাল্কা বস্তুর ভরবেগ অপেক্ষা বেশি।

২. স্থিতিস্থাপক বিভবশক্তি
Elastic potential energy

স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে একটি বস্তুর ওপর বল প্রয়োগ করা হলে বস্তুর বিকৃতি ঘটে। বিকৃতি ঘটাতে বস্তুর উপর কাজ সাধিত হয়। এই কাজ বস্তুর মধ্যে স্থিতি বা বিভবশক্তি হিসেবে সঞ্চিত থাকে। এর নাম স্থিতিস্থাপক বিভব শক্তি।

স্প্রিং-এ সৃষ্ট বিভবশক্তি নিম্নের আলোচনা থেকে বোঝা সহজ হবে।

স্প্রিং-এর বিভবশক্তি : ধরি একটি অনুভূমিক আদর্শ স্প্রিং-এর এক প্রান্ত দেওয়ালের সাথে আটকানো এবং অপর প্রান্তে m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু যুক্ত আছে। বস্তুটি অনুভূমিক ও ঘর্ষণহীন তলের ওপর দিয়ে যাতায়াত করতে পারে [চিত্র ৫·২০]। বস্তুটিকে টেনে স্প্রিংটিকে দৈর্ঘ্য বরাবর বিকৃত করলে স্থিতিস্থাপক ধর্মের দরুন প্রযুক্ত বলের বিপরীতে স্প্রিং-এ প্রত্যায়নী বলের উদ্ভব ঘটবে। F অনুভূমিক বল প্রয়োগে স্প্রিংটিকে বাম হতে ডানদিকে অনুভূমিক বরাবর তার দৈর্ঘ্য x পরিমাণ বৃদ্ধি পেলে স্প্রিং-এ $-kx$ পরিমাণ প্রত্যায়নী বল উৎপন্ন হবে। এখন বস্তুটিকে x দূরত্ব সরাতে তার ওপর এর সমান ও বিপরীতমুখি $F = kx$ বল প্রয়োগ করে কাজ করতে হবে। এই সম্প্রসারণে প্রযুক্ত বল দ্বারা কৃত কাজই হবে স্প্রিংটির মধ্যে সঞ্চিত বিভবশক্তি।



চিত্র ৫·২০

সুতরাং বিভবশক্তি, $U = \int_0^x F dx = \int_0^x kx\, dx$

$$= k\int_0^x x\, dx = \frac{1}{2}k\,[x^2]_0^x$$

$$= \frac{1}{2}kx^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad (5.32)$$

স্প্রিংটিকে দৈর্ঘ্য x পরিমাণ সংকুচিত করলেও সঞ্চিত বিভব শক্তি $\frac{1}{2}kx^2$ হবে। এখানে k = স্প্রিং ধ্রুবক = $\frac{F}{x}$

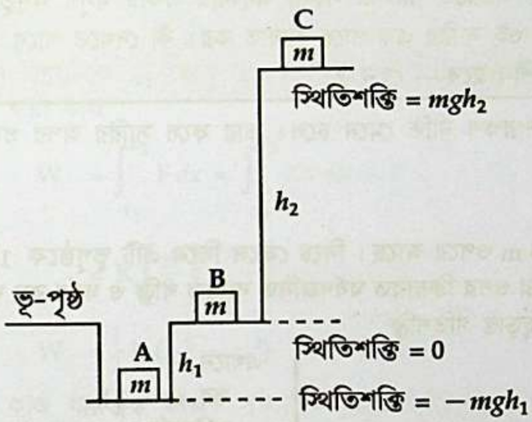
অনুধাবনমূলক কাজ : কোনো একটি স্প্রিং এর প্রত্যায়নী বল (restoring force) কোনো মুহূর্তে 15 N বলতে কী বুঝ ?

কোনো স্প্রিং এর প্রত্যায়নী বল 15 N বলতে বুঝায় স্প্রিংটি 15 N বলে টেনে ছেড়ে দিলে এটি একই বলে পূর্বের অবস্থায় ফিরে আসে।

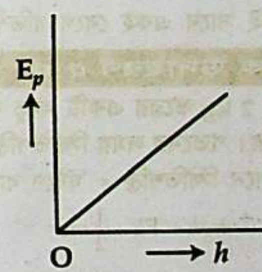
সমস্যা সমাধান
Solution of problems

১। স্থিতিশক্তি কি ঋণাত্মক হতে পারে ?

নির্দেশনা : স্থিতিশক্তি ঋণাত্মক হতে পারে। যেমন অভিকর্ষীয় স্থিতিশক্তির বেলায় ভূপৃষ্ঠের ওপর যে কোনো বিন্দুতে বস্তুর স্থিতিশক্তি ধনাত্মক হয়। ভূপৃষ্ঠের নিচে যেমন খনির ভিতরে অবস্থিত বস্তুর স্থিতিশক্তি ঋণাত্মক হয় [চিত্র ৫.২১]। এই চিত্রে ভূপৃষ্ঠের B বিন্দুতে বস্তুটির স্থিতিশক্তি শূন্য। h_2 উচ্চতায় C বিন্দুতে স্থিতিশক্তি mgh_2। C থেকে B-তে নেমে আসার সময় বস্তুর স্থিতিশক্তি কমতে থাকে। একইভাবে B থেকে নিচে A বিন্দুতে যাওয়ার সময়



চিত্র ৫.২১



চিত্র ৫.২১ক)

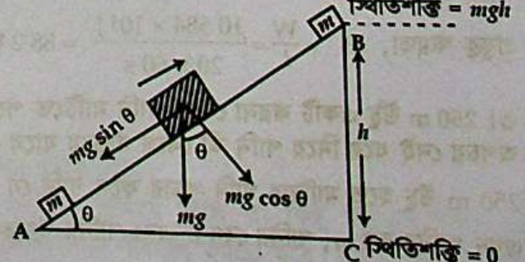
বস্তুর স্থিতিশক্তি কমবে। অতএব, B বিন্দুতে স্থিতিশক্তি শূন্য বলে A বিন্দুতে স্থিতিশক্তি ঋণাত্মক হবে। A বিন্দু যদি h_1 গভীরতায় থাকে, তবে ওই বিন্দুতে বস্তুর স্থিতিশক্তি $-mgh_1$ হবে। বস্তুটিকে আবার A থেকে B বিন্দুতে নিয়ে যেতে হলে বস্তুটির ওপর ওজন অর্থাৎ অভিকর্ষ বলের বিরুদ্ধে কাজ করতে হবে। উচ্চতা ও বিভবশক্তির সম্পর্ককে ৫.২১(ক) চিত্রে দেখানো হলো।

২। একটি বস্তুর স্থিতিশক্তি কীভাবে শূন্য হয় ?

নির্দেশনা : প্রমাণ অবস্থান বা আকৃতি থেকে বস্তুকে অন্য অবস্থান বা আকৃতিতে নিয়ে যেতে হলে বস্তুটির ওপর সবসময়ই কোনো বলের বিরুদ্ধে কাজ করতে হয়। এই কাজ বস্তুটিতে স্থিতিশক্তি রূপে সঞ্চিত থাকে। বস্তুটি তার প্রমাণ অবস্থান বা আকৃতিতে ফিরে আসার সময় এই স্থিতিশক্তির দরুন নিজে কাজ করতে পারে। নিজে কাজ করায় বস্তুটির স্থিতিশক্তি ক্রমশ হ্রাস পায় এবং হ্রাস পেতে পেতে প্রমাণ অবস্থান বা আকৃতিতে ফিরে এলে বস্তুটির স্থিতিশক্তি শূন্য হয়। এই অবস্থায় বস্তুটি আর কাজ করে না।

৩। অভিকর্ষীয় স্থিতিশক্তি কেবলমাত্র h-এর ওপর নির্ভর করে কিন্তু পথের ওপর নির্ভর করে না কেন ?

নির্দেশনা : কোনো বস্তুকে খাড়াভাবে h উচ্চতায় কোনো পথে নেওয়া হলে স্থিতিশক্তি তার ওপর নির্ভর করে না। অর্থাৎ বস্তুটিকে খাড়াভাবে h উচ্চতায় না তুলে অন্য যে কোনো পথে যদি এই উচ্চতায় নিয়ে যাওয়া হয়, তাহলেও স্থিতিশক্তির মান একই থাকে। যেমন m ভরের বস্তুকে C বিন্দু হতে খাড়া B বিন্দুতে নিলে বস্তুটির স্থিতিশক্তি $= mgh$ [চিত্র ৫.২২]।



চিত্র ৫.২২

আবার মনে করি m ভরের বস্তুটি একটা ঘর্ষণহীন নততল AB এর উপর দিয়ে টেনে h উচ্চতায় তোলা হলো। নততল বরাবর নিচের দিকে বস্তুর ওজন mg-এর উপাংশ হলো $mg \sin\theta$। নততল বরাবর বস্তুকে ওপরে টেনে তুলতে এই উপাংশের বিরুদ্ধে কাজ করতে হয়। বস্তুর ওজনের অন্য উপাংশ $mg \cos\theta$ বস্তুর সরণের লম্ব দিকে ক্রিয়া করে বলে কোনো কাজ করে না। নততল বরাবর বস্তুর সরণ হলো AB। অতএব,

$$\text{মোট কাজ} = \text{বল} \times \text{সরণ} = mg \sin\theta \times AB = mg \times AB \sin\theta = mg \times BC = mgh$$

সংজ্ঞা অনুযায়ী এই কাজ হলো বস্তুটির স্থিতিশক্তি। অতএব কোনো বস্তুকে যে পথেই ওপরে তোলা যাক না কেন, নির্দিষ্ট উচ্চতায় এর অভিকর্ষীয় স্থিতিশক্তির মান একই হয়।

হিসাব কর : 50N ওজনের একটি বস্তুকে 6 m উচ্চতায় উঠানোর জন্য একটি লিফ্‌ট ব্যবহার করা হলো। এটি 70 J শক্তি ব্যয় করে। অপচয়কৃত শক্তির পরিমাণ কত হবে হিসাব কর।

এখানে সরবরাহকৃত শক্তি = কাজ = বল $\times$ সরণ = ওজন $\times$ উচ্চতা $= 50 \times 6 = 300$ J

অপচয়কৃত শক্তি = সরবরাহকৃত শক্তি − ব্যয়িত শক্তি $= 300\text{ J} - 70\text{ J} = 230$ J

কাজ : কয়েকটি সমান ভরের কাচের মার্বেল একই সারিতে পরস্পর সংলগ্ন অবস্থায় একটি মসৃণ অনুভূমিক টেবিলের ওপর রাখ। অনুরূপ দুটি মার্বেল একত্রে গড়িয়ে দিয়ে ওই সারির এক প্রান্তে আঘাত কর। কী দেখতে পাবে ? সারির অপর প্রান্ত থেকে দুটি মার্বেল এক সাথে একই বেগে গতিশীল হবে— কেন ?

এক্ষেত্রে ভরবেগ ও যান্ত্রিক শক্তি উভয়েই সংরক্ষণ নীতি মেনে চলে। তার ফলে সারির অপর প্রান্ত থেকে দুটি মার্বেল একই সাথে একই বেগে গতিশীল হবে।

গাণিতিক উদাহরণ ৫.৫

১। 2 kg ভরের একটি বস্তু ভূপৃষ্ঠ হতে 15 m ওপরে আছে। নিচে ফেলে দিলে এটি ভূপৃষ্ঠকে 10 ms⁻¹ বেগে আঘাত করে। পতনের সময় স্থিতিশক্তি এবং বস্তুটির ওপর ক্রিয়ারত ঘর্ষণজনিত ব্যয়িত শক্তি ও ঘর্ষণ বল কত হবে ?

এখানে স্থিতিশক্তি = ঘর্ষণে ব্যয়িত শক্তি + চূড়ান্ত গতিশক্তি

$$mgh = Fh + \frac{1}{2}mv^2$$

বা, $Fh = mgh - \frac{1}{2}mv^2$

$= 2 \times 9.8 \times 15 - \frac{1}{2} \times 2\,(10)^2$

$= 294 - 100 = 194$ J

$\therefore F = \frac{194}{h} = \frac{194}{15} = 12.9$ N

এখানে,
ভর, $m = 2$ kg
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8\text{ ms}^{-2}$
উচ্চতা, $h = 15$ m
বেগ, $v = 10\text{ ms}^{-1}$

২। 60 kg ভরের জনৈক ব্যক্তি 20 মিনিটে 180 m উচ্চ একটি চূড়ায় আরোহণ করেন। তার বিভবশক্তি কত ? কাজ ও প্রযুক্ত ক্ষমতা নির্ণয় কর।

প্রশ্নানুসারে অভিকর্ষীয় বলের বিরুদ্ধে কাজ,

W = বল $\times$ বলের ক্রিয়া রেখায় সরণ
= ওজন $\times$ উল্লম্ব সরণ
$= mg \times h$

এখানে, $m = 60$ kg
$g = 9.8\text{ ms}^{-2}$
$h = 180$ m

$\therefore$ নির্ণেয় কাজ, $W = 60\text{ kg} \times 9.8\text{ ms}^{-2} \times 180\text{ m} = 10.584 \times 10^4$J

$\therefore$ 180 মিটার উচ্চতায় বিভব শক্তি = অভিকর্ষীয় বলের বিরুদ্ধে কৃত কাজ $= 10.584 \times 10^4$J

প্রযুক্ত ক্ষমতা, $P = \frac{W}{t} = \frac{10.584 \times 10^4\text{ J}}{20 \times 60\text{ s}} = 88.2$ W

এখানে,
$t = 20$ মিনিট $= 20 \times 60$ s

৩। 250 m উঁচু একটি ঝরনা থেকে পানি মাটিতে পড়ে অনুভূমিকভাবে নির্দিষ্ট গতিবেগে গড়িয়ে যাচ্ছে। শক্তির কোনো অপচয় নেই ধরে নিয়ে পানি কী বেগে গড়িয়ে যাবে বের কর।

250 m উঁচু হতে মাটিতে পানি পড়ার ফলে পানি যে পরিমাণ স্থিতিশক্তি হারায়, তাই গতিশক্তিতে রূপান্তরিত হয়। এখন পানির ভর m, পানির বেগ v এবং পানির উচ্চতা h হলে আমরা লিখতে পারি,

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

বা, $v = \sqrt{2gh}$

$= \sqrt{2 \times 9.8 \times 250}$

$= 70\text{ ms}^{-1}$

৫.৯ ব্যবহারিক
Experimental

পরীক্ষণের নাম :	স্প্রিং এর বিভবশক্তি নির্ণয়
পিরিয়ড : ২	**Determination of potential energy of a spring**

তত্ত্ব : মনে করি, একটি স্প্রিং-এর প্রান্তে m ভরের ভার ঝুলালে বা F পরিমাণ বল প্রয়োগে স্প্রিংটি x পরিমাণ সম্প্রসারিত হয়। স্প্রিংটির সরণ প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক হয় অর্থাৎ $F \propto x$ হয়

বা, $F = Kx$ ... ... (i)

[এখানে K = স্প্রিং ধ্রুবক]

এখন স্প্রিংটিকে x_1 থেকে x_2 অবস্থানে প্রসারিত করতে বাইরের বল দ্বারা কাজ

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx = \int_{x_1}^{x_2} Kx\,dx = K\int_{x_1}^{x_2} x\,dx$$

$$= K\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{K}{2}(x_2^2 - x_1^2)$$

$$\therefore \quad W = \frac{1}{2}K(x_2^2 - x_1^2) \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

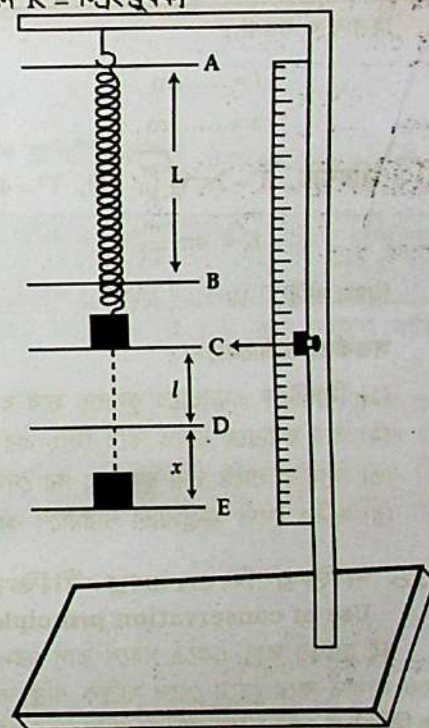
এই কাজ ধনাত্মক কাজ। সম্পাদিত এই কাজ স্প্রিং-এর মধ্যে বিভব শক্তিরূপে সঞ্চিত থাকবে।

$x_1 = 0$ এবং $x_2 = x$ ধরলে

$$W = \frac{1}{2}K(x^2 - 0)$$

$$\text{বা,} \quad W = \frac{1}{2}Kx^2 \quad \ldots \quad \ldots \text{(iii)}$$

m পরিমাণ ভরের জন্য স্প্রিংটি l পরিমাণ প্রসারিত হয় এবং এই অবস্থায় স্প্রিংটিকে x পরিমাণ টেনে ছেড়ে দিলে ইহা সরল ছন্দিত গতিতে স্পন্দিত হয় এবং এর দোলন কাল, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ হয়।



চিত্র ৫.২৩

যন্ত্রপাতি :

(১) পরীক্ষণীয় স্প্রিং।
(২) একটি মিটার স্কেল।
(৩) সুবিধাজনক কয়েকটি ভার।
(৪) স্প্রিং ঝুলাবার জন্য হুক।
(৫) একটি স্টপ ওয়াচ।

কার্যপদ্ধতি :

(১) চিত্র অনুযায়ী স্প্রিংটিকে একটি হুক থেকে ঝুলিয়ে দিতে হবে।

(২) এর প্রান্তে অর্থাৎ নিচের হুকে একটি ওজন বা ভার ঝুলিয়ে দিলে তা কিছু পরিমাণ লম্বা হবে। স্থির অবস্থান এবং পরিবর্তিত অবস্থানের মধ্যবর্তী দূরত্ব মিটার স্কেল দিয়ে পরিমাপ করতে হবে। ইহাই বর্ধিত দৈর্ঘ্য, l।

(৩) এরপর ভারটিকে নিচের দিকে টেনে x পরিমাণ সম্প্রসারণ করে ছেড়ে দিতে হবে। পুনরায় মিটার স্কেল দিয়ে দৈর্ঘ্য সম্প্রসারণ x পরিমাপ করতে হবে।

(৪) স্প্রিংটি এই অবস্থায় ওপরে নিচে স্পন্দিত হবে। একটি স্টপওয়াচের সাহায্যে 20 দোলনের সময় নির্ণয় করতে হবে। এই সময়কে দোলন সংখ্যা দিয়ে ভাগ করে পর্যায়কাল T নির্ণয় করতে হবে।

(৫) ভার পরিবর্তন করে (৩) ও (৪)নং পরীক্ষণটি কয়েকবার সম্পন্ন করা হয়।

ডাটা ছক–১ (T এবং x নির্ণয়ের ছক)

পর্যবেক্ষণ সংখ্যা	স্প্রিং এর আদি দৈর্ঘ্য L(m)	ভার ঝুলাবার পর দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি l (m)	বল প্রয়োগ করে দোলন দেওয়ার জন্য স্প্রিং এর সম্প্রসারণ x (m)	20 দোলনের সময় (sec)	পর্যায়কাল T (sec)	স্প্রিং ধ্রুবক K	বিভব শক্তি $W = \frac{1}{2}Kx^2$ (J)	গড় W (J)

হিসাব ও গণনা :

$l = ...$ m

$x = ...$ m

পর্যায়কাল, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ বা, $T^2 = 4\pi^2\frac{m}{K}$

$\therefore \quad K = 4\pi^2\frac{m}{T^2}$

বিভব শক্তি, $W = \frac{1}{2}Kx^2 = ...$ Joule

সতর্কতা ও আলোচনা :

(১) স্প্রিংটিকে এমনভাবে ঝুলাতে হবে যাতে এর প্রান্তে ভার ঝুলাবার পর এটি ওপরের হুক থেকে খুলে না যায়।
(২) ভার ক্রমান্বয়ে বর্ধিত করে স্প্রিং-এর সম্প্রসারণ নির্ণয় করা হয়।
(৩) স্প্রিংটির প্রান্তে ভার ঝুলাবার পর দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির সময় যাতে বাধা প্রাপ্ত না হয় সেদিকে লক্ষ রাখতে হবে।
(৪) সঠিক দৈর্ঘ্য সম্প্রসারণ পরিমাপে ক্যাথেডোমিটার ব্যবহার করা উচিত।

৫.১০ শক্তির নিত্যতার নীতির ব্যবহার
Use of conservation principle of energy

দুই হাতের তালু একত্রে ঘষলে তালু গরম হয়; এক্ষেত্রে যান্ত্রিক শক্তি তাপশক্তিতে রূপান্তরিত হয়। পতনশীল বস্তু মাটিতে আঘাত করে থেমে গেলে যান্ত্রিক শক্তি তাপশক্তিতে এবং কিছুটা শব্দ শক্তিতে রূপান্তরিত হয়। আবার যে কোনো যন্ত্রের বিভিন্ন অংশের মধ্যে ঘর্ষণের ফলে তাপ শক্তির উদ্ভব হয়। এই ঘটনাগুলি লক্ষ করলে দেখা যায় যে, শক্তি এক রূপ থেকে অন্য রূপে রূপান্তরিত হয়। আবার আইনস্টাইনের আপেক্ষিক তত্ত্বে দেখা যায় যে, ভর শক্তিতে রূপান্তরিত হয়। কোনো বস্তুর মধ্যে শক্তির পরিমাণ বাড়লে ওই বস্তুর ভরও বাড়ে। আবার বস্তুর মধ্যে শক্তির পরিমাণ কমলে এর ভরও কমে। মেঝের ওপর দিয়ে একটি বাক্সকে টানলে ঘর্ষণে তাপ সৃষ্টি হয়।

উপরোক্ত সকল ক্ষেত্রে (সংরক্ষিত বা অসংরক্ষিত) দেখা যায় যে, শক্তি কেবল এক রূপ থেকে অন্য রূপে রূপান্তরিত হচ্ছে কিন্তু এই শক্তি শেষ বা ধ্বংস হয় না। এটাই শক্তির নিত্যতা।

সূত্র : শক্তি অবিনশ্বর, শক্তি সৃষ্টি বা ধ্বংস করা যায় না। কেবল এক রূপ থেকে অন্য রূপে রূপান্তরিত করা যায় (Energy is eternal, it can neither be created nor destroyed, but can only be converted from one form to another)। বিশ্বের মোট শক্তির পরিমাণ ধ্রুবক। বৈদ্যুতিক ইস্ত্রিতে তড়িৎ বা বিদ্যুৎ চালনা করলে তাপ উৎপন্ন হয়। এই তাপ দিয়ে আমরা কাপড় ইস্ত্রি করি। এক্ষেত্রে বিদ্যুৎ শক্তি তাপ শক্তিতে এবং তাপ শক্তি যান্ত্রিক শক্তিতে রূপান্তরিত হয়। এক্ষেত্রে শক্তির কোনো ক্ষয় বা বিনাশ নেই। কেবলমাত্র রূপান্তর আছে।

নিউক্লিয়ার রিয়্যাক্টরের কথা তোমরা শুনেছ। নিউক্লিয়ার রিয়্যাক্টরের মধ্যে একটি নিউট্রন দ্বারা ভারী পরমাণু $\left(U^{235}_{92}\right)$ কে আঘাত করে নিউক্লিও ফিশন বিক্রিয়া ঘটানো হয়। এই বিক্রিয়ায় প্রচুর পরিমাণে তাপ শক্তি উৎপন্ন হয়। এই তাপ শক্তিকে কাজে লাগিয়ে টারবাইন ঘুরিয়ে আবার বিদ্যুৎ শক্তি উৎপন্ন করা হয়। এক্ষেত্রে দেখা যায় পারমাণবিক শক্তি তাপ শক্তিতে রূপান্তরিত হয় এবং তাপ শক্তি আবার বিদ্যুৎ শক্তিতে রূপান্তরিত হয়। এক্ষেত্রেও শক্তির কোনো বিনাশ বা ধ্বংস নেই। এক রূপ থেকে অন্য রূপে রূপান্তরিত হচ্ছে।

শক্তি যখন এক রূপ থেকে অন্য রূপে পরিবর্তিত হয় তখন এর কোনো ঘাটতি বা বাড়তি ঘটে না। অর্থাৎ শক্তির বিনাশ বা সৃষ্টি উভয়ই অসম্ভব। যখন এক প্রকার শক্তি বিলুপ্ত হয় তখন তা অন্য রূপে কোথাও আত্মপ্রকাশ করে। এর নাম শক্তির নিত্যতা বা শক্তির অবিনশ্বরতা (Conservation of energy)।

যান্ত্রিক শক্তির রূপান্তরের এরকম অসংখ্য দৃষ্টান্ত দেওয়া যায়— যেমন সরল দোলকের দোলন এবং নততলে বস্তুর গতি। আমরা জানি, শক্তি সৃষ্টি বা ধ্বংস করা যায় না। অতএব, এই সব উদাহরণে বস্তুর গতিশক্তি স্থিতিশক্তিতে ও স্থিতিশক্তি গতিশক্তিতে রূপান্তরিত হয় মাত্র; স্থিতিশক্তি ও গতিশক্তির যোগফল অর্থাৎ বস্তুর মোট যান্ত্রিক শক্তি সব সময় স্থির থাকে। একে **যান্ত্রিক শক্তির সংরক্ষণ নীতি** (Principle of conservation of mechanical energy) বলে। কিন্তু ঘর্ষণ বল থাকলে এই বল সব সময় বস্তুর গতিকে বাধা দেয়। ফলে কিছু পরিমাণ যান্ত্রিক শক্তি এই বাধা অতিক্রম করার জন্য অপচয় হয় এবং তাপশক্তিতে রূপান্তরিত হয়।

উপরের উদাহরণের ক্ষেত্রে শক্তির নিত্যতার সূত্র প্রযোজ্য হয়। কোনো অপচয়ী বল না থাকলে এবং সংঘর্ষটি সম্পূর্ণ স্থিতিস্থাপক হলে মোট শক্তি অপরিবর্তিত থাকে। অতএব

সংঘর্ষের আগে গতিশক্তি = সঞ্চিত স্থিতিশক্তি $= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$

কোনো প্রক্রিয়ায় কোনো রাশির মান সবসময় অপরিবর্তিত থাকলে রাশিটি সংরক্ষিত (conserved) আছে বলা হয়। অতএব মোট যান্ত্রিক শক্তি সংরক্ষিত আছে।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : একটি গ্যাস বেলুন ওপরের দিকে ওঠার সময় এর গতিশক্তি এবং স্থিতিশক্তি উভয়ই বৃদ্ধি পায়। এক্ষেত্রে শক্তির সংরক্ষণ সূত্র লঙ্ঘিত হয় কি-না—ব্যাখ্যা কর।

এক্ষেত্রে শক্তির সংরক্ষণ সূত্র লঙ্ঘিত হয় না। ঊর্ধ্বগামী কোনো বস্তুর ওপর অভিকর্ষ ছাড়া অন্য কোনো বাহ্যিক বল ক্রিয়াশীল হলে শক্তির সংরক্ষণসূত্র প্রযোজ্য হয় না।

গ্যাসপূর্ণ বেলুনের মোট ওজন অপেক্ষা এর ওপর প্লবতা অর্থাৎ ঊর্ধ্বমুখি ঘাত অনেক বেশি। ফলে বেলুনের ওপর একটি ঊর্ধ্বমুখি বল (প্লবতা-ওজন) ক্রিয়া করে। অর্থাৎ অভিকর্ষ ছাড়া আর একটি বল ওই বেলুনের ওপর ক্রিয়াশীল হয়। মোট ঊর্ধ্বমুখি বলের জন্য বেলুনের ওপর একটি ঊর্ধ্বমুখি ত্বরণ থাকে। ফলে বেলুনটির ওপরের দিকের বেগ ধীরে ধীরে বাড়ে, তাই গতিশক্তিও ধীরে ধীরে বাড়ে। আবার ওপরের দিকে ওঠার ফলে অভিকর্ষের বিরুদ্ধে কৃত কাজও বাড়ে। এতে বেলুনের স্থিতিশক্তিও বাড়তে থাকে।

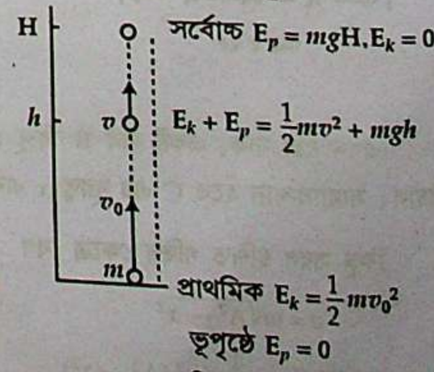
ক. উৎক্ষিপ্ত বস্তুর সর্বোচ্চ উচ্চতায় শক্তির নিত্যতার সূত্র
Conservation of energy of a body thrown up at maximum height

গতির জন্য বস্তুতে গতিশক্তি এবং অবস্থানের জন্য স্থিতিশক্তি থাকে। একটি সচল বস্তুর গতিশক্তি (E_k) এবং স্থিতিশক্তি (E_p) দুই-ই থাকতে পারে। যেমন একটি উড়ন্ত বিমানের বা ওপর দিকে ছোড়া পাথরের গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি দুই-ই থাকে। তখন বস্তুর মোট যান্ত্রিক শক্তি বলতে এর গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির যোগফল বোঝায়। অতএব, মোট যান্ত্রিক শক্তি—

$$E_T = E_k + E_p \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (5.33)$$

বস্তুর গতিশক্তি স্থিতিশক্তিতে বা স্থিতিশক্তি গতিশক্তিতে রূপান্তরিত হতে পারে। এরকম রূপান্তরের অনেক উদাহরণ দেওয়া যায়। এখন আমরা উৎক্ষিপ্ত বস্তুর সর্বাধিক উচ্চতার শক্তির নিত্যতা সূত্র প্রয়োগ করব।

মনে করি, ভূপৃষ্ঠ থেকে m ভরের একটি পাথরকে v_0 বেগে ওপরের দিকে খাড়াভাবে নিক্ষেপ করা হলো [চিত্র ৫.২৪]। ভূপৃষ্ঠকে নির্দেশ তল ধরে নিলে পাথরটির প্রাথমিক স্থিতিশক্তি = 0 ও প্রাথমিক গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv_0^2$। পাথরটি যত ওপরে ওঠে এর অভিকর্ষীয় স্থিতিশক্তি তত বাড়তে থাকে; কিন্তু সাথে সাথে পাথরটির বেগ কমতে থাকে অর্থাৎ এর গতিশক্তি কমতে থাকে। অতএব, ওপরে ওঠার সময় পাথরটির গতিশক্তি স্থিতিশক্তিতে রূপান্তরিত হতে থাকে। h উচ্চতায় পাথরটির ওপরের দিকে বেগ যদি v হয় ($v < v_0$), তবে এই বিন্দুতে পাথরটির গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv^2$ ও স্থিতিশক্তি $= mgh$ হয়। সুতরাং পাথরটির মোট যান্ত্রিক শক্তি হয় $= \frac{1}{2}mv^2 + mgh$। সর্বোচ্চ অবস্থানে পৌঁছে পাথরটি মুহূর্তের জন্য স্থির থাকে। তখন পাথরটির গতিশক্তি শূন্য কিন্তু এর স্থিতিশক্তি সবচেয়ে বেশি হয়। পাথরটির সর্বোচ্চ উচ্চতা যদি H হয় তবে এই অবস্থানে পাথরটির স্থিতিশক্তি $= mgH$ হয়।



চিত্র ৫.২৪

অতএব সর্বোচ্চ অবস্থানে পাথরটির সম্পূর্ণ গতিশক্তি স্থিতিশক্তিতে রূপান্তরিত হয়ে যায়।

সর্বোচ্চ অবস্থানে পৌছানোর পর পাথরটি আবার নিচের দিকে পড়তে থাকে। তখন ঠিক বিপরীত ক্রিয়া হয়; পাথরটির স্থিতিশক্তি ক্রমশ কমতে থাকে এবং গতিশক্তি বাড়তে থাকে। নির্দেশ তলে বস্তুটির কেবল গতিশক্তি থাকে; ওর স্থিতিশক্তি আবার শূন্য হয়।

এক্ষেত্রে সহজে প্রমাণ করা যায় যে, ঘর্ষণ বলের মতো কোনো অপচয়ী বল (dissipative force) না থাকলে প্রাথমিক অবস্থানে পাথরটির নীট শক্তি (যা সম্পূর্ণই গতিশক্তি) সর্বোচ্চ অবস্থানে পাথরটির মোট শক্তির (যা সম্পূর্ণই স্থিতিশক্তি) সমান হয়, অর্থাৎ $\frac{1}{2}mv_0^2 = mg\text{H}$। অর্থাৎ আগের কোনো বিন্দুতেও মোট শক্তি অপরিবর্তিত থাকে। অতএব,

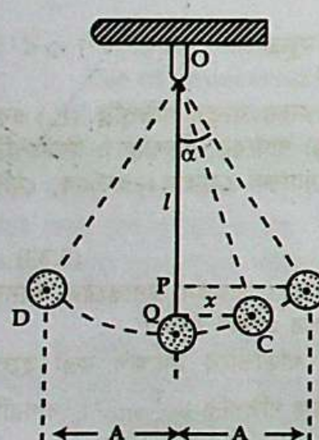
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mg\text{H} = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.34)$$

অবাধে পতনশীল বস্তুর ক্ষেত্রেও এই নীতি প্রযোজ্য হয়। যে স্থান থেকে বস্তুকে ওপরের দিকে v_0 বেগে ছোঁড়া হয়েছিল, বস্তুটি যখন আবার সেই প্রাথমিক অবস্থানে ফিরে আসে তখন এর বেগ v_0 হয়। এই সময় বস্তুটির শক্তি সম্পূর্ণই গতিশক্তি। অতএব এর মোট শক্তি পুনরায় $\frac{1}{2}mv_0^2$ হয়। অতএব উৎক্ষিপ্ত বস্তু সর্বাধিক উচ্চতায় শক্তির নিত্যতার সূত্র মেনে চলে।

খ. সরল ছন্দিত গতির শক্তি
Energy of simple harmonic motion

সরল দোলকের গতি হলো সরল ছন্দিত গতি। সরল দোলক যখন দুলতে থাকে তখন কখনো দোলকের গতিশক্তি স্থিতিশক্তিতে, আবার কখনো দোলকের স্থিতিশক্তি গতিশক্তিতে রূপান্তরিত হয়। কিন্তু প্রতি মুহূর্তে দোলকের গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির যোগফল ধ্রুব থাকে।

মনে করি, সরল দোলকের ববের ভর m এবং সাম্যাবস্থা 0। দোলায়মান অবস্থার সাম্যাবস্থা থেকে যে কোনো এক দিকে A দূরত্ব অতিক্রম করে সর্বোচ্চ বিন্দু B তে পৌছলে [চিত্র ৫.২৫] B বিন্দুতে বেগ $v = 0$ বলে এর সকল শক্তি বিভবশক্তি। সরল দোলকের ওপর ক্রিয়ারত বল F হলে $\text{F} = -kx$। অতএব সর্বোচ্চ বিন্দু B তে বিভবশক্তি



চিত্র ৫.২৫

$$\text{E}_p = \int_0^{\text{A}} -\text{F}\,dx = \int_0^{\text{A}} k\,x dx$$

$$= k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\text{A}} = \frac{1}{2}k\text{A}^2$$

আমরা জানি,

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \quad \therefore \ k = \omega^2 m$$

$$\therefore \quad \text{E}_p = \frac{1}{2} \times m\omega^2\text{A}^2 \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.35)$$

যেহেতু B বিন্দুর গতিশক্তি $\text{E}_k = 0$ অতএব B বিন্দুতে ববের মোট শক্তি

$$\text{E} = \frac{1}{2}m\omega^2\text{A}^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.36)$$

এখন ধরা যাক, একটি বব B বিন্দু থেকে সাম্যাবস্থায় 0 এর দিকে যাত্রা করে কোনো এক সময় C বিন্দুতে পৌছাল। সাম্যাবস্থান হতে C এর দূরত্ব x এবং এর ববের বেগ v হলে C বিন্দুর গতিশক্তি $\text{E}_{k\text{C}} = \frac{1}{2}mv^2$

কিন্তু সরল ছন্দিত গতির ক্ষেত্রে বেগ

$$v = \omega\sqrt{\text{A}^2 - x^2}$$

অতএব $\text{E}_{k\text{C}} = \frac{1}{2}m\omega^2(\text{A}^2 - x^2) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.37)$

C বিন্দুতে ববের কিছু বিভবশক্তি থাকবে। যার পরিমাণ

$$E_{pC} = \int_0^x k\,x dx$$

$$= k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x = \frac{1}{2}kx^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \quad [\because k = m\omega^2] \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.38)$$

C বিন্দুতে মোট শক্তি

$$E_k = E_{kC} + E_{pC}$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2 + x^2)$$

$$E_k = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.39)$$

মন্তব্য : ওপরের সমীকরণ থেকে দেখা যায় যে, B ও C বিন্দুর মোট শক্তি একই। অর্থাৎ দোলায়মান একটি সরল দোলক 'শক্তির নিত্যতার সূত্র' মেনে চলে।

গাণিতিক উদাহরণ ৫.৬

১। একটি সরল দোলকের ববের ভর 0·2 kg ও কার্যকর দৈর্ঘ্য 1 m। উল্লম্ব রেখা হতে 0·4 m দূরে টেনে ছেড়ে দিলে গতিপথের সাম্যাবস্থান অতিক্রম কালে ববের গতিশক্তি ও বেগ নির্ণয় কর। A ও B বিন্দুতে শক্তির সংরক্ষণশীলতা প্রযোজ্য হয় কি-না বিশ্লেষণ কর।

ধরি নির্ণেয় বেগ $= v$

শক্তির নিত্যতা সূত্র অনুসারে, O বিন্দু হতে ঝুলন্ত ববের সর্বোচ্চ বিন্দু B-তে স্থিতিশক্তি = সাম্যাবস্থান বিন্দু A-তে গতিশক্তি

এখন, OA বরাবর সর্বোচ্চ উল্লম্ব সরণ

$$AN = OA - ON$$

$$= OA - \sqrt{OB^2 - NB^2}$$

$$= 1 - \sqrt{(1)^2 - (0{\cdot}4)^2}$$

$$= 0{\cdot}083 \text{ m}$$

এখানে,

ববের ভর, $m = 0{\cdot}2$ kg

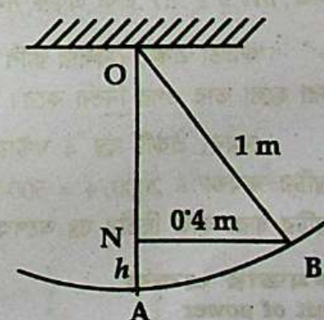
সর্বোচ্চ বিন্দু $B = 0{\cdot}4$ m

সাম্যাবস্থায় $A = 0$

$$OB^2 = ON^2 + BN^2$$

বা, $ON^2 = OB^2 - BN^2$

$\therefore$ $ON = \sqrt{OB^2 - BN^2}$



এখন, সর্বোচ্চ বিন্দুতে স্থিতিশক্তি $= mgh$

প্রশ্নানুসারে,

গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = mgh = 0{\cdot}2 \times 9{\cdot}8 \times {\cdot}083 = 0{\cdot}163$ J

আবার, $\frac{1}{2}mv^2 = mgh \therefore v^2 = 2gh$

বা, $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9{\cdot}8 \times 0{\cdot}083}$

$= 1{\cdot}275 \text{ ms}^{-1}$

শক্তির নিত্যতার সূত্রানুসারে ঝুলন্ত বিন্দু হতে ববের সর্বোচ্চ বিন্দু (B)-তে স্থিতিশক্তি = সাম্যাবস্থান বিন্দু (A) তে গতিশক্তি।

স্থির অবস্থায় গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 0{\cdot}2 \times (1{\cdot}275)^2 = 0{\cdot}163$ J

আবার সর্বোচ্চ উচ্চতায় বিভবশক্তি = $mgh = 0{\cdot}2 \times 9{\cdot}8 \times {\cdot}083 = 0{\cdot}163$ J

A বিন্দুতে মোট শক্তি E = বিভবশক্তি + গতিশক্তি $= 0 + {\cdot}163 = 0{\cdot}163$ J

B বিন্দুতে মোট শক্তি E′ = বিভবশক্তি + গতিশক্তি $= 0{\cdot}163 + 0 = 0{\cdot}163$ J

যেহেতু $E = E'$, কাজেই A ও B বিন্দুতে শক্তির সংরক্ষণশীলতা প্রযোজ্য হয়।

৫.১১ ক্ষমতা
Power

ক্ষমতার ধারণা
Concept of power

বল প্রয়োগে কোনো যন্ত্র বা বস্তু গতির পরিবর্তন ঘটালে ওই যন্ত্র বা বস্তুকে আমরা কাজ করার ক্ষমতা আছে বলে ধরে নেই। বলের ক্রিয়ায় বস্তুর সরণ দ্রুত না ধীরে কীভাবে সম্পন্ন হয়েছে কাজের পরিমাণ দ্বারা তা বুঝা যায় না, ক্ষমতা দ্বারা বুঝা যায়। একক সময়ে কী পরিমাণ কাজ সম্পন্ন হয় তাই ক্ষমতা।

কোনো একটি উৎসের কাজ করার হারকে ক্ষমতা বলে এবং একক সময়ের কৃত কাজ দ্বারা ক্ষমতা পরিমাপ করা হয়।

ব্যাখ্যা : মনে করি কোনো ব্যক্তি বা উৎস t সময়ে W পরিমাণ কাজ সম্পন্ন করে।

∴ একক সময়ের কৃত কাজ বা ক্ষমতা,

$$P = \frac{\text{কাজ}}{\text{সময়}} = \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t} = Fv \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.40)$$

কাজ সম্পাদনের হার সুষম না হলে তাৎক্ষণিক ক্ষমতা

$$P = \frac{dW}{dt}$$

$\vec{F}$ পরিমিত একটি ধ্রুব বল কোনো কণার উপর dt সময় ক্রিয়া করে $d\vec{r}$ সরণ ঘটালে, ওই ধ্রুব বল কর্তৃক কৃত কাজ, $dW = \vec{F}.d\vec{r}$ এবং একক সময়ে কৃত কাজ বা ক্ষমতা $= \frac{dW}{dt} = \vec{F}.\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$

ক্ষমতা একটি স্কেলার রাশি। ক্ষমতা কেবল কাজের মোট পরিমাণের ওপর নির্ভর করে না, কত সময়ে ওই কাজ করা হলো তার ওপর নির্ভর করে। কম সময়ে একই কাজ করলে ক্ষমতা বেশি হয়।

যেমন, একটি যন্ত্র 4 ঘণ্টায় 2000 জুল কাজ করে। অপর একটি যন্ত্র 6 ঘণ্টায় 2400 জুল কাজ করে। প্রথম যন্ত্রটির ক্ষমতা = 2000/4 = 500 জুল/ঘণ্টা। দ্বিতীয় যন্ত্রটির ক্ষমতা 2400/6 = 400 জুল/ঘণ্টা। সুতরাং যদিও প্রথম যন্ত্রটির দ্বারা কাজ দ্বিতীয় যন্ত্র অপেক্ষা কম, কিন্তু প্রথম যন্ত্রটির ক্ষমতা বেশি।

ক্ষমতার একক
Unit of power

ক্ষমতার সংজ্ঞা হতে এর একক বের করা যায়।

$$\text{ক্ষমতা} = \frac{\text{কাজ}}{\text{সময়}} = \frac{\text{জুল}}{\text{সেকেন্ড}} = \text{জুল/সেকেন্ড } (Js^{-1})$$

মাত্রা : $[P] = [ML^2T^{-3}]$

এস. আই. বা আন্তর্জাতিক পদ্ধতিতে ক্ষমতার একক জুল/সে. বা ওয়াট (watt)। এক সেকেন্ডে এক জুল কাজ করার ক্ষমতাকে এক জুল/সে. বা এক ওয়াট বলে।

"কোনো যন্ত্রের ক্ষমতা 50 জুল/সে।"—উক্ত উক্তি দ্বারা বুঝি যন্ত্রটি প্রতি সেকেন্ডে 50 জুল কাজ করতে পারে।

ওয়াট অপেক্ষা বড় মানের আরও একটি একক ক্ষমতা প্রকাশের জন্য ব্যবহৃত হয়। এর নাম কিলোওয়াট (K. W.)।

অশ্ব-ক্ষমতা
Horse-power

প্রতি সেকেন্ডে 746 জুল কাজ করার ক্ষমতাকে এক অশ্ব-ক্ষমতা বলে।

∴ 1 অশ্ব-ক্ষমতা = 746 জুল/সে = 746 ওয়াট (Watt)।

বৈদ্যুতিক ব্যবহারিক একক

ক্ষমতার বৈদ্যুতিক ব্যবহারিক একককে ওয়াট (Watt) বলে। পরিমাপের আন্তর্জাতিক পদ্ধতিতেও 'ওয়াট' ক্ষমতার একক।

∴ 1 ওয়াট = 1 জুল/সে

∴ 1 কিলোওয়াট = 1000 ওয়াট। অর্থাৎ কিলোওয়াট ওয়াট অপেক্ষা এক হাজার গুণ বড়। আধুনিক কালে কিলোওয়াট অপেক্ষা হাজার গুণ বড় অর্থাৎ ওয়াট অপেক্ষা দশ লক্ষ গুণ বড় ক্ষমতার আর একটি একক ব্যবহৃত হচ্ছে। এর নাম মেগাওয়াট (Mega watt)।

∴ 1 মেগাওয়াট (MW) = 1000 কিলোওয়াট

$= 10^6$ ওয়াট $= 10^6$ জুল/সে।

'কোনো বিদ্যুৎ উৎপাদন কেন্দ্রের ক্ষমতা 2 মেগাওয়াট'। এর অর্থ—কেন্দ্রের সরবরাহকৃত বিদ্যুৎ শক্তি দ্বারা প্রতি সেকেন্ডে 2×10^6 জুল বা 2 মেগা-জুল কাজ করা যায়।

ক্ষমতার মাত্রা সমীকরণ (Dimension of power)

আমরা জানি, ক্ষমতা, $P = \frac{W}{t} = \frac{\text{বল} \times \text{সরণ}}{\text{সময়}}$

∴ ক্ষমতার মাত্রা সমীকরণ, $[P] = \frac{[\text{বল}]\,[\text{সরণ}]}{[\text{সময়}]}$

$$= \left[\frac{MLT^{-2} \times L}{T}\right]$$

$$= [ML^2T^{-3}]$$

ক্ষমতা, বল ও বেগের মধ্যে সম্পর্ক
Relation among power, force and velocity

মনে করি, কোনো বস্তুর ওপর F বল t সময় ধরে ক্রিয়া করল। এই সময়ে যদি বস্তুটি প্রযুক্ত বলের অভিমুখে s দূরত্ব সরে যায়, তবে ওই বল দ্বারা কাজ, $W = F \times s$

আবার ক্ষমতা, $P = \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t} = Fv$ ... ... (5.41) $\left[\because s = \frac{v}{t}\right]$

অতএব ক্ষমতা = প্রযুক্ত বল × বস্তুর বেগ

বস্তুর সরণ প্রযুক্ত বলের অভিমুখে না হয়ে যদি এর সঙ্গে θ কোণে ক্রিয়াশীল হয়, তবে

$P = Fv\cos\theta$ ... ... (5.42)

এই সমীকরণ দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল বোঝায়।

∴ ভেক্টর চিহ্ন অনুযায়ী $P = \vec{F}.\vec{v}$ ... ... (5.43)

এই সমীকরণ ক্ষমতা, বল ও বেগের মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করে।

আবর্ত ঘূর্ণন গতির ক্ষেত্রে ক্ষমতা :

আবর্ত গতির ক্ষেত্রে আমরা জানি, কাজ, W = টর্ক × কৌণিক সরণ।

∴ ক্ষমতা, $P = \frac{W}{t} = \frac{\text{টর্ক} \times \text{কৌণিক সরণ}}{\text{সময়}}$

∴ ক্ষমতা, P = টর্ক × কৌণিক বেগ

গাণিতিক উদাহরণ ৫.৭

১। 300 kg ভরের একটি পাথরকে ক্রেনের সাহায্যে 0·1 ms^{-1} বেগে ছাদের ওপরে উঠাতে ক্রেনের কত শক্তি ব্যয় করতে হবে ?

আমরা জানি,

$$P = Fv = 2940 \times 0.1 = 294.0 \text{ W}$$

এখানে,

$m = 300$ kg

$F = 300 \text{ kg} \times 9.8 \text{ ms}^{-2} = 2940$ N

২। একটি 20 W ক্ষমতার বৈদ্যুতিক পাখা মিনিটে 200 বার ঘুরছে। পাখার মোটর কত টর্ক উৎপন্ন করছে ?

ধরা যাক, মোটর কর্তৃক উৎপন্ন টর্ক = τ Nm

সুতরাং, 200 বার ঘূর্ণনে কৃত কাজ, $W = 200 \times 2\pi \times \tau$ জুল

প্রশ্নানুসারে, $\frac{200 \times 2\pi \times \tau}{60} = 20$

বা, $\tau = \frac{20 \times 60}{200 \times 2\pi} = \frac{1200}{200 \times 2 \times 3.14}$ m

$= 0.995$ Nm

৫·১২ কর্মদক্ষতা
Efficiency

আমরা যখন কোনো যন্ত্র বা বস্তু থেকে কাজ পাই তা ওই যন্ত্র বা বস্তুকে কর্মক্ষম করার জন্য সরবরাহকৃত শক্তি অপেক্ষা কম। কেবল যন্ত্রের ক্ষেত্রেই নয়, বাস্তব জীবনের অনেক ক্ষেত্রেই যে শক্তি প্রয়োগ করা হয় তার অংশ বিশেষ কাজে লাগে। বাকী অংশ অপচয় হয়। ইঞ্জিনের ক্ষেত্রে এই অপচয় হওয়া শক্তি ব্যয় হয় চাকার ঘর্ষণ, ইঞ্জিন গরম হওয়া ইত্যাদি কাজে। এ অপচয় সম্পূর্ণরূপে বন্ধ করা যায় না, তবে বিভিন্ন প্রযুক্তি ব্যবহারের মাধ্যমে এই অপচয় হ্রাস করা যায়। এক্ষেত্রে শক্তির সমীকরণ হলো প্রদত্ত শক্তি = লভ্য কার্যকর শক্তি + অন্যভাবে ব্যয়িত শক্তি।

সংজ্ঞা : কোনো যন্ত্রে সরবরাহকৃত শক্তি এবং কাজে পরিণত হওয়ার শক্তির অনুপাতকে কর্মদক্ষতা বলে।

অর্থাৎ কর্মদক্ষতা, $\eta = \frac{\text{কার্যকর শক্তি}}{\text{মোট সরবরাহকৃত শক্তি}}$

কর্মদক্ষতাকে শতকরা হিসেবে প্রকাশ করা যায়। কর্মদক্ষতার একক HP

1 HP = 746 Watt

মনে করি, কোনো যন্ত্রে E_1 পরিমাণ শক্তি প্রদান করা হলো এবং E_2 পরিমাণ শক্তির অপচয় ঘটল। তাহলে কর্মদক্ষতা

$$\eta = \frac{E_1 - E_2}{E_1} = \left(1 - \frac{E_2}{E_1}\right) \times 100\% \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.44)$$

কোনো যন্ত্রেরই কর্মদক্ষতা 100% পাওয়া যায় না। কোনো যন্ত্রের কর্মদক্ষতা 80% বলতে বুঝায় 100 একক শক্তি সরবরাহ করলে তার মাত্র 80 একক শক্তি কাজে লাগবে, বাকি 20 একক শক্তি অপচয় হবে।

৫·১৩ বলের প্রকারভেদ
Types of force

বল দুই প্রকার; যথা— (১) সংরক্ষণশীল বল (Conservative force) এবং
(২) অসংরক্ষণশীল বল (Non-conservative force)

৫·১৩·১ সংরক্ষণশীল বল
Conservative force

যে সংস্থায় বা সিস্টেমে যান্ত্রিক শক্তি সংরক্ষিত থাকে তাকে সংরক্ষণশীল সংস্থা বা সিস্টেম বলে এবং এরূপ সংস্থায় ক্রিয়াশীল বলকে সংরক্ষণশীল বল বলে। অন্যভাবে বলা যায়, একটি বন্ধ পথে কোনো বল দ্বারা মোট কৃত কাজের পরিমাণ শূন্য হলে সেই বলকে সংরক্ষণশীল বল বলা হয়।

অথবা, যে বল কোনো বস্তুর ওপর ক্রিয়া করলে তাকে যে কোনো পথে ঘুরিয়ে পুনরায় প্রাথমিক অবস্থানে আনলে বল কর্তৃক কৃত কাজ শূন্য হয় তাকে সংরক্ষণশীল বল বলে। উদাহরণ—অভিকর্ষীয় বল, বৈদ্যুতিক বল, আদর্শ স্প্রিং-এর বিকৃতি প্রতিরোধী বল প্রভৃতি।

সংরক্ষণশীল বলের বৈশিষ্ট্য :

(১) এই বল শুধু অবস্থানের ওপর নির্ভর করে।

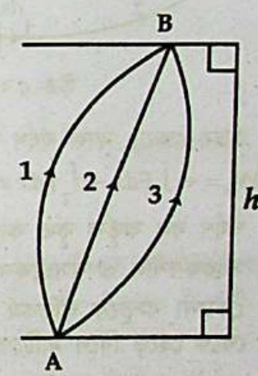
(২) সংরক্ষণশীল বল দ্বারা কৃত কাজ সম্পূর্ণভাবে পুনরুদ্ধার করা যায়।

(৩) একটি বস্তুকে এক স্থান হতে অন্য স্থানে স্থানান্তরে কাজ পথের ওপর নির্ভর করে না; কেবল বস্তুর আদি ও চূড়ান্ত অবস্থানের ওপর নির্ভর করে।

(৪) সংরক্ষণশীল বলের ক্রিয়ায় যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতার সূত্র পালিত হয়।

(৫) পূর্ণচক্রে মোট কাজ শূন্য হয়।

ধরি m ভরের একটি বস্তুকে A বিন্দু হতে ওপরে উঠিয়ে B বিন্দুতে স্থাপন করা হলো এবং এতে বস্তুটির উল্লম্ব সরণ হলো h [চিত্র ৫.২৬]। এই স্থানান্তর 1নং, 2নং বা 3নং পথে হলেও প্রত্যেক পথের সকল বিন্দুতে অভিকর্ষীয় বল mg খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করে এবং প্রত্যেক পথে অভিকর্ষীয় বলের ক্রিয়া রেখা বরাবর বস্তুর সরণ h। এই তিন পথের প্রত্যেক পথে কাজের পরিমাণ সমান এবং কাজ $W = -mgh$।



চিত্র ৫.২৬

আবার বস্তুটিকে A বিন্দু হতে 1নং পথে B বিন্দুতে এনে পুনরায় তাকে B বিন্দু হতে A বিন্দুতে স্থানান্তর করলে, প্রথম স্থানান্তরে অভিকর্ষীয় বলের বিপরীত দিকে সরণ = h ও কাজ $W_1 = -mgh$ এবং দ্বিতীয় স্থানান্তরে অভিকর্ষীয় বলের অভিমুখে সরণ = h ও কাজ $W_2 = mgh$.

$\therefore$ মোট কৃত কাজ, $W_2 + W_1 = mgh + (-mgh) = 0$

কাজেই অভিকর্ষীয় বল সংরক্ষণশীল বল এবং এই বল কর্তৃক কৃত কাজ পুনরুদ্ধার করা সম্ভব। সংরক্ষণশীল বলের বৈশিষ্ট্য অনুসারে এর আর একটি সংজ্ঞা দেয়া যায়। যেমন **যে বলের ক্রিয়ায় কোনো বস্তুকে এক বিন্দু হতে অপর কোনো বিন্দুতে নিয়ে যেতে ওই বল কর্তৃক কৃত কাজ শুধু বিন্দুদ্বয়ের অবস্থানের ওপর নির্ভর করে—পথের ওপর নির্ভর করে না তাকে সংরক্ষণশীল বল বলে।**

অনুধাবনমূলক কাজ : "মহাকর্ষ বল সংরক্ষণশীল বল"—ব্যাখ্যা কর।

মহাকর্ষ বল দ্বারা কাজ আদি ও চূড়ান্ত অবস্থানের ওপর নির্ভর করে, গতিপথের ওপর নয়। এই বল দ্বারা কাজ পুনরুদ্ধার করা যায়। মহাকর্ষ ক্ষেত্রে কোনো বস্তুকে যেকোনো পথে ঘুরিয়ে আদি অবস্থানে আনলে কাজ শূন্য হয়। তাই মহাকর্ষ বল সংরক্ষণশীল বল।

৫.১৩.২ অসংরক্ষণশীল বল
Non-conservative force

যে বল কোনো বস্তুর ওপর ক্রিয়া করলে তাকে যে কোনো পথে ঘুরিয়ে পুনরায় প্রাথমিক অবস্থানে আনলে ওই বল কর্তৃক কৃত কাজ শূন্য হয় না তাকে অসংরক্ষণশীল বল বলে। উদাহরণ—ঘর্ষণ বল, সান্দ্র বল প্রভৃতি।

অথবা, যে সংস্থায় বা সিস্টেমে বাধাজনিত বল উপস্থিত থাকে সেখানে যান্ত্রিক শক্তি সংরক্ষিত থাকে না, বরং যান্ত্রিক শক্তির অপচয় হয়, এ ধরনের সংস্থা বা সিস্টেমকে অসংরক্ষণশীল সংস্থা বলা হয় এবং এই বাধাজনিত বলকে অসংরক্ষণশীল বল বলা হয়।

অন্যভাবে বলা যায়, **একটি বন্ধ পথে কোনো বল দ্বারা কৃত মোট কাজের পরিমাণ যদি শূন্য না হয় তবে সেই বলকে অসংরক্ষণশীল বল বলা হয়।**

অসংরক্ষণশীল বলের বৈশিষ্ট্য :

(১) এই বল শুধু অবস্থানের ওপর নির্ভর করে না।

(২) একটি বস্তুকে এক স্থান থেকে আরেক স্থানে স্থানান্তরে কাজ পথের ওপর নির্ভর করে।

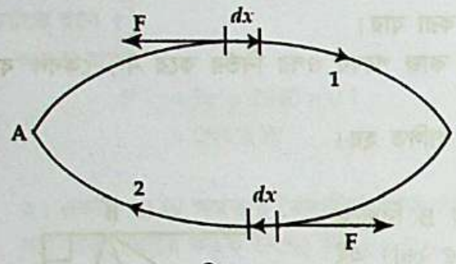
(৩) অসংরক্ষণশীল বল দ্বারা কাজ সম্পূর্ণরূপে পুনরুদ্ধার করা যায় না।

(৪) অসংরক্ষণশীল বলের ক্রিয়ায় যান্ত্রিক সূত্রের নিত্যতার সূত্র সংরক্ষিত হয় না।

(৫) পূর্ণচক্রে মোট কাজ শূন্য হয় না।

ধরি একটি বস্তুকে মসৃণ অনুভূমিক মেঝের ওপর দিয়ে ঠেলে A বিন্দু হতে 1নং পথে B বিন্দুতে আনা হলো [চিত্র ৫.২৭]। এই ক্ষেত্রে ঘর্ষণ বল বস্তুর গতি অভিমুখের বিপরীতে ক্রিয়া করবে। কাজেই এই স্থানান্তরে ঘর্ষণ বলের

বিরুদ্ধে কাজ করতে হবে; কারণ ঘর্ষণ বল সর্বদাই গতিপ্রতিরোধী বল। গতিপথে একটি ক্ষুদ্র সরণ dx এবং এই সরণ গড় F ঘর্ষণ বলের বিপরীতে সংঘটিত হলে, কাজ $W = -Fdx$।



চিত্র ৫.২৭

∴ 1নং পথে A হতে B পর্যন্ত নিতে মোট কৃত কাজ এরূপ ছোট ছোট কাজের সমষ্টির সমান ও মোট কাজ, $W_1 = -\int_1 Fdx$।

এখন যদি বস্তুটিকে B হতে 2নং পথে পুনরায় A বিন্দুতে নিয়ে যাওয়া হয় তবে এই ক্ষেত্রেও ঘর্ষণ বল বস্তুর গতিপথের বিপরীতে ক্রিয়া করবে।

কাজেই এই ক্ষেত্রেও কাজ,

$$W_2 = -\int_2 Fdx.$$

উভয় ক্ষেত্রে কাজ ঘর্ষণ বলের বিরুদ্ধে হওয়ায় উভয় কাজ ঋণাত্মক এবং তাদের যোগফল শূন্য হবে না। অর্থাৎ $W_1 + W_2 = -\int_1 Fdx - \int_2 Fdx \neq 0$

ঘর্ষণ বল কর্তৃক কৃত কাজ পুনরুদ্ধার করা সম্ভব নয়। অতএব ঘর্ষণ বল অসংরক্ষণশীল বল।

সংরক্ষণশীল ও অসংরক্ষণশীল বল ক্ষেত্রের বৈশিষ্ট্য অনুযায়ী দেখানো যায় যে,

কোনো বস্তুকে অভিকর্ষ বল F-এর বিরুদ্ধে মাটি হতে h ওপরে তুলতে কাজের পরিমাণ $= -Fh$। এখন তাকে সেখান থেকে ছেড়ে দিলে মাটিতে ফিরে আসতে অভিকর্ষ বল দ্বারা কাজের পরিমাণ হবে $+ Fh$.

সুতরাং বস্তুর মাটি হতে ওপরে ওঠার পর আবার মাটিতে ফিরে আসতে অভিকর্ষ বল দ্বারা কাজের পরিমাণ $(-Fh + Fh)$ শূন্য হবে। সুতরাং অভিকর্ষ বা মাধ্যাকর্ষণ বল সংরক্ষণশীল বল। তেমনি বিদ্যুৎ বল, চৌম্বক বল ইত্যাদি সংরক্ষণশীল বল।

অপর পক্ষে, ঘর্ষণের ক্ষেত্রে, ঘর্ষণ বল বস্তুকে চলতে বাধা দেয়। সেজন্যে এর দ্বারা বস্তুর ওপর কাজ ঋণ হয়। অতএব ঘর্ষণ বল হলো অসংরক্ষণশীল বল।

অনুধাবনমূলক কাজ : ঘর্ষণ বল সংরক্ষণশীল বল নয় কেন ? ব্যাখ্যা কর।

এক্ষেত্রে কোনো এক বিন্দু হতে যাত্রা শুরু করে যে কোনো পথ ঘুরে আবার ওই বিন্দুতে ফিরে এলে কৃত কাজ শূন্য হয় না। ঘর্ষণ বল দ্বারা কাজ আদি ও চূড়ান্ত পথের ওপর নির্ভর করে না, গতিপথের ওপর নির্ভর করে। ঘর্ষণ বল কর্তৃক কাজ পুনরুদ্ধার করা সম্ভব নয়। অতএব ঘর্ষণ বল অসংরক্ষণশীল বল।

গাণিতিক উদাহরণ ৫.৮

১। 270 kg ভরের একটি বোঝা একটি ক্রেনের সাহায্যে 0·1 ms⁻¹ বেগে ওঠানো হলো। ক্রেনের ক্ষমতা নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \times s}{t} = Fv$$
$$= mgv \quad [\because F = mg]$$
$$\therefore \quad P = 270 \times 9{\cdot}8 \times 0{\cdot}1 \text{ W} = 264{\cdot}6 \text{ W}$$

এখানে,
ভর, $m = 270$ kg
বেগ, $v = 0{\cdot}1$ ms^{-1}
$g = 9{\cdot}8$ ms^{-2}
ক্ষমতা, P = ?

২। 900 kg ভরের একটি লিফট 350 kg ভরের বোঝাসহ 100 s-এ নিচতলা থেকে 18 তলায় 75 m ওপরে ওঠে। কৃত কাজ ও প্রযুক্ত ক্ষমতা নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

কৃত কাজ, $W = mgh$

$$\therefore \quad W = 1250 \times 9{\cdot}8 \times 75$$
$$= 9{\cdot}187 \times 10^5 \text{ J}$$

আবার, ক্ষমতা, $P = \frac{W}{t}$

$$\therefore \quad P = \frac{9{\cdot}187 \times 10^5}{100} = 9{\cdot}187 \times 10^3 = 9{\cdot}187 \text{ kW}$$

এখানে,
মোট ভর, $m = 900 + 350 = 1250$ kg
উচ্চতা, $h = 75$ m
সময়, $t = 100$ s
$g = 9{\cdot}8$ ms^{-2}
W = ?
P = ?

৩। 3430 W ক্ষমতাসম্পন্ন একটি মোটর চালিত পাম্প দ্বারা একটি কূপ হতে গড়ে 7·20 m উচ্চতায় পানি উঠানো হয়। মোটরের দক্ষতা 90% হলে প্রতি মিনিটে কত কিলোগ্রাম পানি ওঠে ? [ব. বো. ২০০৬]

ধরি নির্ণেয় ভর = m kg

আমরা জানি, কার্যকর ক্ষমতা (P′) = দক্ষতা (η) × প্রকৃত ক্ষমতা (P)

প্রশ্নানুযায়ী মোটরের কার্যকর ক্ষমতা $P' = \eta \times P = \frac{90}{100} \times 3430\text{ W} = 3087\text{ W}$

প্রতি মিনিটে প্রাপ্ত কাজ, $W = mg \times h = (m \times 9{\cdot}8) \times 7{\cdot}20\text{ J}$

$\therefore$ কার্যকর ক্ষমতা, $P = \frac{W}{t} = \frac{m \times 9{\cdot}8 \times 7{\cdot}20}{60}\text{ W}$

শর্তানুযায়ী, $\frac{m \times 9{\cdot}8 \times 7{\cdot}20}{60} = 3087$

$\therefore m = \frac{3087 \times 60}{9{\cdot}8 \times 7{\cdot}20} = 2625\text{ kg}$

এখানে, $P = 3430\text{ W}$
$\eta = 90\% = 90/100$
$g = 9{\cdot}8\text{ ms}^{-2}$
$h = 7{\cdot}20\text{ m}$
t = 1 মিনিট = 60 s

৪। একটি কূয়া থেকে ইঞ্জিনের সাহায্যে প্রতি মিনিটে 1000 kg পানি 10 m গড় উচ্চতায় ওঠানো হয়। যদি ইঞ্জিনটির ক্ষমতা 40% নষ্ট হয়, তাহলে এর অশ্বক্ষমতা নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০০৮; ব. বো. ২০০৫]

আমরা জানি, কার্যকর ক্ষমতা, $P' = \frac{P \times 60}{100}$

$\therefore \quad P = \frac{P' \times 100}{60}$

এক্ষেত্রে ইঞ্জিনটির ক্ষমতা 40% নষ্ট হওয়াতে কার্যকর ক্ষমতা = (100 − 40) % = 60%

$\therefore \quad P = \frac{mgh \times 100}{60 \times t} = \frac{1000 \times 9{\cdot}8 \times 10 \times 100}{60 \times 60}$

$= 2{\cdot}7222 \times 10^3$ watt

$= \frac{2{\cdot}7222 \times 10^3}{746}\text{ HP} = 3{\cdot}65\text{ HP}$

$\therefore \quad P = 3{\cdot}65\text{ HP}$

এখানে,
$P' = \frac{mgh}{t}$
$m = 1000\text{ kg}$
$g = 9{\cdot}8\text{ ms}^{-2}$
$h = 10\text{ m}$
$t = 60\text{ s}$

৫। $v_1 = 16\text{ ms}^{-1}$ গতিবেগে ছুটে আসা একটি টেনিস্ বল র‍্যাকেট দিয়ে বিপরীত দিকে $v_2 = 20\text{ ms}^{-1}$ বেগে ফেরত পাঠানো হলো। বলটির গতিশক্তির পরিবর্তন $\Delta E = 9{\cdot}25\text{ J}$ হলে বলটির ভরবেগের পরিবর্তন নির্ণয় কর।

ধরা যাক, টেনিস বলের ভর $= m$

প্রশ্নানুসারে গতিশক্তির পরিবর্তন,

$\Delta E = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} m (20^2 - 16^2)$

$\therefore \quad 9{\cdot}25 = \frac{1}{2} m \times 144 = 72\,m$

$\therefore \quad m = \frac{9{\cdot}25}{72} = 0{\cdot}1285\text{ kg}$

এখানে,
$v_1 = 16\text{ ms}^{-1}$
$v_2 = 20\text{ ms}^{-1}$
$\Delta E = 9{\cdot}25\text{ J}$
$\Delta mv = ?$

এখন, ভরবেগের পরিবর্তন, $\Delta mv = m\,[v_2 - (-v_1)] = 0{\cdot}1285\,(20 + 16) = 4{\cdot}626\text{ kg ms}^{-1}$

৬। একটি কপিকলের রশি পানি ভর্তি একটি বালতিকে কুয়া হতে $0{\cdot}70\text{ ms}^{-1}$ সমদ্রুতিতে ওপরে তুলতে পারে। রশিটি 20 kW ক্ষমতা প্রয়োগ করলে রশির ওপর টান কত হবে ?

আমরা জানি,

$P = Fv$

বা, $F = \frac{P}{v}$

$= \frac{20 \times 10^3}{0{\cdot}70} = 28{\cdot}57 \times 10^3\text{ N}$

এখানে,
$v = 0{\cdot}70\text{ ms}^{-1}$
$P = 20\text{ kW} = 20 \times 10^3\text{ W}$
টান, F = ?

৭। একটি পানিপূর্ণ কুয়ার গভীরতা এবং ব্যাস যথাক্রমে 10 m ও 1·5 m। একটি পাম্প 25 মিনিটে কুয়াটিকে পানি শূন্য করতে পারে। পাম্পের অশ্বক্ষমতা নির্ণয় কর। 0·4 HP ক্ষমতার আরও একটি পাম্প যুক্ত করলে কী পরিমাণ সময় সাশ্রয় হবে ? [য. বো. ২০১৫]

আমরা জানি,

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \times h}{t}$$

$$= \frac{mgh}{t} \qquad [\because m = v\rho = \pi r^2 l\rho]$$

$$= \frac{\pi r^2 l\rho gh}{t}$$

$$= \frac{3·14 \times (0·75)^2 \times 10 \times 10^3 \times 9·8 \times 5}{1500}$$

$$= 576·975 \text{ W} = \frac{576·975}{746} \text{ HP} = 0·773 \text{ HP}$$

এখানে,
কুয়ার গভীরতা, $l = 10$ m
কুয়ার ব্যাস, $d = 1·5$ m
কুয়ার ব্যাসার্ধ, $r = 0·75$ m
সময়, $t = 25$ min $= 25 \times 60 = 1500$ s
গড় উচ্চতা, $h = \frac{0 + 10}{2} = 5$ m
পাম্পের ক্ষমতা, $P = ?$
অপর পাম্পের ক্ষমতা, $P_1 = 0·4$ HP
$g = 9·8 \text{ ms}^{-2}$

$\therefore$ মোট ক্ষমতা $P + P_1 = 0·773 + 0·4 = 1·173 \text{ HP} = 1·173 \times 746 \text{ Js}^{-1}$

মিলিত পাম্প দ্বারা পানি শূন্য করতে প্রয়োজনীয় সময় t_1 হলে

$$P + P_1 = \frac{W}{t_1}$$

বা, $$t_1 = \frac{W}{P + P_1} = \frac{\pi r^2 l\rho gh}{1·173}$$

$$= \frac{3·14 \times (0·75)^2 \times 10^3 \times 9·8 \times 5}{1·173 \times 746}$$

$$= 989·0345 \text{ s} = 16·48 \text{ min.}$$

$\therefore$ সময় সাশ্রয় হবে $= (25 — 16·48)$ min $= 8·52$ min

৮। একটি ক্রেন প্রতিটি 50 kg ওজনের 12টি সিমেন্টের ব্যাগ সমদ্রুতিতে 160 m উঁচু একটি নির্মাণাধীন ভবনের ছাদে ওঠাতে 1 min 10 sec সময় নেয়। ক্রেনটির ক্ষমতা অশ্বশক্তিতে বের কর। [BUET Admission Test, 2017-18]

আমরা জানি,

$$P = \frac{mgh}{t \times 746} \text{HP}$$

$$= \frac{600 \times 9·8 \times 160}{70 \times 746} \text{HP}$$

$$= 18·016 \text{ HP}$$

এখানে,
$m = 50 \times 12 = 600$ kg
$h = 160$ m
$t = 1$ min 10 sec $= 70$ sec

৯। একটি ইঞ্জিন 200 m গভীর কূপ থেকে প্রতি মিনিটে 500 kg পানি উত্তোলন করে। যদি 20% ক্ষমতার অপচয় হয় তাহলে ইঞ্জিনটির প্রকৃত ক্ষমতা কত ? [BUET Admission Test, 2012-13]

আমরা জানি,

$$P' = \frac{mgh}{t} = \frac{500 \times 9·8 \times 200}{60}$$

$$= 16·33 \text{ kW}$$

এবং $$\eta = \frac{P'}{P}$$

বা, $$0·8 = \frac{16·33}{P}$$

বা, $$P = \frac{16·33}{0·8}$$

$\therefore$ $$P = 20·41 \text{ kW}$$

১০। একটি পানি পূর্ণ কুয়ার দৈর্ঘ্য 10 m, প্রস্থ 6 m এবং গভীরতা 10 m। 80% কর্মদক্ষতাবিশিষ্ট একটি পাম্প 30 মিনিটে কুয়াটিকে পানি শূন্য করতে পারে। পাম্পটির অশ্বক্ষমতা নির্ণয় কর। [CUET Admission Test, 2009-10]

আমরা জানি,

$$P' = \frac{mgh}{t} = \frac{\rho V \times g \times h}{t}$$

$$= \frac{10^3 \times 10 \times 6 \times 10 \times 9.8 \times \frac{10}{2}}{30 \times 60}$$

$$= 16333.33 \text{ W}$$

আবার,

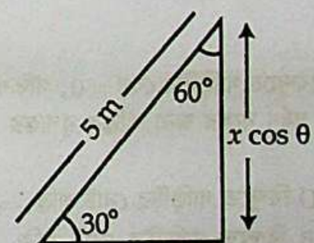
$$P = \frac{P'}{\eta}$$

বা, $P = \frac{P'}{0.8} = \frac{16333.33}{0.8 \times 746} \text{ HP} = 27.36 \text{ HP}$

১৭। একটি দালানের ছাদের সাথে লাগানো 5 m লম্বা একটি মই অনুভূমিকের সাথে 30° কোণ করে আছে। 60 kg ভরের এক ব্যক্তি 20 kg ভরের ইট সহ 10 sec-এ ছাদে উঠলে তার অশ্বক্ষমতা বের কর।

[RUET Admission Test, 2011-12]

আমরা জানি,



$$P = \frac{W}{t} = \frac{Fx\cos\theta}{t} = \frac{mgx\cos\theta}{t}$$

$$P = \frac{60 \times 9.8 \times 5 \times \cos 60°}{10}$$

$$= \frac{1470}{10} = 147 \text{ W}$$

$$= \frac{147}{746} \text{ HP} = 0.197 \text{ HP}$$

প্রয়োজনীয় গাণিতিক সূত্রাবলি

কাজ, $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ ... ... (1)

কাজ, $W = Fs\cos\theta$ ... ... (2)

স্প্রিং প্রসারণে কাজ, $W = \frac{1}{2}Kx^2$ ... ... (3)

স্প্রিং ধ্রুবক, $K = \frac{F}{x}$ ... ... (4)

বিভব শক্তি, $E_p = mgh$ ... ... (5)

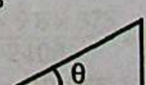
গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ ... ... (6)

ক্ষমতা, $P = \frac{W}{t} = \frac{mgh}{t} = Fv$ ... ... (7)

স্থিতিস্থাপক বিভব শক্তি, $E_p = \frac{1}{2}Kx^2$ ... ... (8)

যান্ত্রিক শক্তি, $E = E_p + E_k$ ... ... (9)

কর্মদক্ষতা, $\eta = \frac{\text{কার্যকর শক্তি}}{\text{প্রদত্ত মোট শক্তি}}$ ... ... (10)

ক্ষমতা, $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv\cos\theta$ 

... ... (11)

কার্যকর ক্ষমতা, $P' = \eta \times$ প্রকৃত ক্ষমতা (P) ... ... (12)

কাজ, $W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$ ... ... (13)

$W = \Delta K$ ... ... (14)

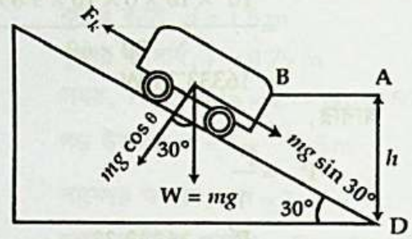
উচ্চতর দক্ষতাভিত্তিক নমুনার গাণিতিক উদাহরণ

১। একজন ড্রাইভার 1000 kg ভরের একটি ট্রাক মাটির সাথে 30° কোণে একটি আনত তলের ওপর দিয়ে 25 ms^{-1} বেগে চালাচ্ছিল। সামনে 50 m দূরে এক বালককে দেখে ট্রাকটি থেমে গেল।

(ক) ট্রাকটি ভূমি হতে কত উঁচুতে আছে ?

(খ) এক্ষেত্রে B ও D বিন্দুতে সংরক্ষণশীলতার নীতি পালিত হবে কি?—ব্যাখ্যা কর। [ধর ঘর্ষণ বল = 11150 N]

(ক) মনে করি, ট্রাকটি B বিন্দু হতে 50 m অতিক্রম করে D বিন্দুতে থেমে যায়। তাহলে B হতে D বিন্দুর উল্লম্ব দূরত্ব $AD = h$



$\therefore \sin 30° = \frac{h}{50}$ বা, $\frac{1}{2} = \frac{h}{50}$ বা, $h = \frac{50}{2} = 25\,m$

B বিন্দুতে ট্রাকটি ভূমি হতে 25 m উচ্চতায় অবস্থিত।

(খ) B বিন্দুতে ট্রাকটির মোট শক্তি = গতিশক্তি + বিভবশক্তি

$= \frac{1}{2} mv_B^2 + mgh$

$= \frac{1}{2} \times 1000 \times (25)^2 + 1000 \times 9.8 \times 25$

$= 500 \times (25)^2 + 25000 \times 9.8$

$= 312500 + 245000 = 557500$ J

এখানে,
$m = 1000$ kg
$\theta = 30°$
$s = 50$ m
শেষ বেগ, $v = 0$
B বিন্দুতে ট্রাকটির বেগ, $v_B = 25\ ms^{-1}$
ঘর্ষণ বল = 11150 N

D বিন্দুতে গাড়িটির বেগ = 0, গতিশক্তি = 0, বিভবশক্তি = 0

$\therefore$ ঘর্ষণ বলের জন্য শক্তির রূপান্তর = D বিন্দুতে গাড়িটিকে থামাতে প্রয়োজনীয় শক্তি

= ঘর্ষণ বল × সরণ $= F_k \times s = 11150 \times 50 = 557500$ J

$\therefore$ D বিন্দুতে গাড়িটির মোট শক্তি $= 557500 + 0 + 0 = 557500$ J

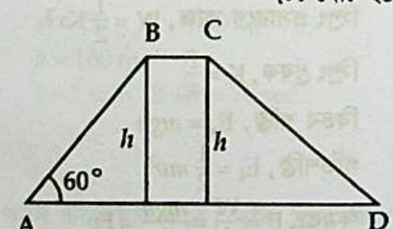
$\therefore$ B বিন্দুতে গাড়িটির মোট শক্তি = D বিন্দুতে গাড়িটির মোট মক্তি। কাজেই গাড়িটি সংরক্ষণশীলতার নীতি মেনে চলে।

২। চিত্রে প্রদর্শিত AB মই বেয়ে 30 kg ভরের একটি বালক ওপরে ওঠে এবং CD আনত তল বেয়ে নিচে নেমে আসে। তলের ঘর্ষণ বল 50 N।

চিত্রে AB = 4 m, BC = 1 m এবং CD = 5 m [চ. বো. ২০১৫]

(ক) বালকটি A হতে C বিন্দুতে পৌঁছাতে অভিকর্ষ বল দ্বারা কৃত কাজ হিসাব কর।

(খ) CD পথে নামার সময় বালকটির ত্বরণ অভিকর্ষজ ত্বরণ থেকে কম না বেশি হবে? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।



(ক) AD হতে BC তলের উচ্চতা h হলে $\frac{h}{AB} = \sin 60°$

$\therefore h = AB \sin 60° = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.46$ m

B থেকে C বিন্দুতে যেতে কৃত কাজ $W = mg \times BC = m \times 0 \times BC = 0$

$\therefore$ A হতে C বিন্দুতে পৌঁছাতে অভিকর্ষ বলের বিরুদ্ধে কাজ, $W = E_p = 30 \times 9.8 \times 3.46 = 1018.4$ J

(খ) CD পথে কোনো ঘর্ষণ না থাকলে CD তল বরাবর নিচের দিকে বালকটির ত্বরণ হতো $g' = g \sin \theta$, θ হলো ভূমির সাথে CD তলের আনতি।

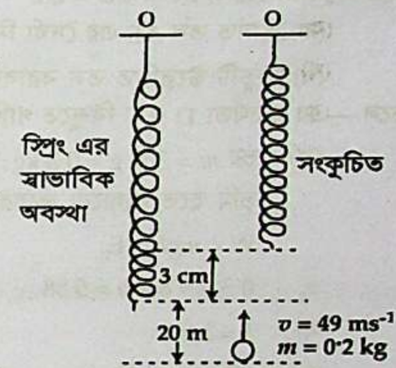
আবার $\sin \theta = \frac{h}{CD} = \frac{3.46}{5} = 0.6928$

বা, $\theta = \sin^{-1}(0.6928) = 43.85°$

$\therefore g' = 9.8 \times \sin 43.85° = 6.79\ ms^{-2}$ [সূত্র : যে কোনো হেলানো তলে অভিকর্ষজ ত্বরণ $g' = g \times \sin \theta$]

$\therefore g' < g$। সুতরাং কোনো ঘর্ষণ না থাকলে CD বরাবর নিচের দিকে ত্বরণ হতো 6.79 ms^{-2}, আর ঘর্ষণ থাকলে ত্বরণ আরো কম হবে। অতএব CD পথে নামার সময় বালকটির ত্বরণ অভিকর্ষজ ত্বরণের চেয়ে কম হবে।

৩। চিত্রে একটি স্প্রিং এর এক প্রান্ত O বিন্দু হতে ঝুলানো হলো। 0·2 kg ভরের একটি বলকে 49 ms^{-1} বেগে নিক্ষেপ করায় এটি 20 m উপরে স্প্রিংটির অপর প্রান্তে আঘাত করে 3 cm সংকুচিত করে, স্প্রিংটিও বলের ওপর প্রত্যায়নী বল প্রয়োগ করে। [রা. বো. ২০১৫]



(ক) ভূমিতে আঘাতের পূর্ব মুহূর্তে বলটির বেগ নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপক থেকে স্প্রিং বল দ্বারা কৃত কাজ নির্ণয় সম্ভব কি-না? গাণিতিক যুক্তি দিয়ে ব্যাখ্যা কর।

(ক) ভূমিতে আঘাতের পূর্ব মুহূর্তে বলটির বেগের মান নিক্ষেপের সময় বেগের মানের সমান কিন্তু দিক বিপরীত হবে অর্থাৎ বেগের মান 49 ms^{-1} হবে। কারণ বলটিকে নিক্ষেপ করা হতে ভূমিতে ফিরে আসা পর্যন্ত এর ওপর ক্রিয়াশীল, অভিকর্ষ বল এবং স্প্রিং বল উভয়ই সংরক্ষণশীল এবং একটি পূর্ণচক্র সম্পন্ন করে পূর্বের অবস্থানে ফিরে এলে সংরক্ষণশীল বল দ্বারা কাজ শূন্য হয়।

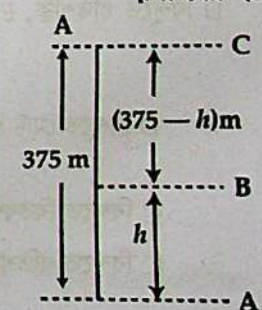
(খ) স্প্রিং বল দ্বারা কৃত কাজ শূন্য। কারণ বলটি স্প্রিংটিকে স্পর্শ করার সময় এর যে বেগ থাকবে, স্প্রিং থেকে মুক্ত হওয়ার সময় সে বেগ প্রাপ্ত হবে। স্প্রিং সংকোচনের সময় স্প্রিং বল দ্বারা ঋণাত্মক কাজ হবে এবং প্রসারণের সময় সমপরিমাণ ধনাত্মক কাজ হবে; ফলে মোট কৃত কাজ শূন্য হবে।

স্প্রিং বল দ্বারা কৃত কাজ = আঘাত করার মুহূর্তে বলটির গতিশক্তি

$$= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 0·2 \times 2000 = 200·9 \text{ J}$$

সুতরাং উদ্দীপক থেকে স্প্রিং বল দ্বারা কৃত কাজ নির্ণয় করা সম্ভব।

৪। পেট্রোনাস টুইন টাওয়ারের শীর্ষতলের উচ্চতা 375 m। কাসেম 10 kg ভরের একটি বস্তুসহ শীর্ষতলে আরোহণ করে। এতে সময় লাগে 40 মিনিট। সে শীর্ষতল থেকে বস্তুটি নিচে ফেলে দিল। উহা বিনা বাধায় ভূমিতে পতিত হলো। মনির বলল, "আমি এ কাজটি করতে পারব।" কাসেমের ভর এবং মনিরের ভর যথাক্রমে 60 kg ও 55 kg। [সি. বো. ২০১৫]



(ক) ভূমি থেকে কত উচ্চতায় বস্তুটির বিভব শক্তি এর গতিশক্তির দ্বিগুণ হবে?

(খ) মনির কি একই সময়ে কাজটি করতে পারবে? গাণিতিক বিশ্লেষণ পূর্বক মতামত দাও।

(ক) মনে করি ভূমি হতে h উচ্চতায় বিভবশক্তি গতিশক্তির দ্বিগুণ।

ভূমি হতে h উচ্চতায় বিভবশক্তি $E_p = mgh$ ... ... (i)

যেহেতু টাওয়ারের উচ্চতা 375 m কাজেই ওপর থেকে B বিন্দুর উচ্চতা = $(375 - h)$ m

গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\,[v_0{}^2 + 2g(375 - h)] = \frac{1}{2}m\,[2g(375 - h)]$

$E_k = mg\,(375 - h)$ ... ... (ii)

প্রশ্নমতে, $E_p = 2E_k$

বা, $mgh = 2 \times mg\,(375 - h)$

বা, $h = 2\,(375 - h)$

বা, $h = 750 - 2h$

বা, $3h = 750$

$\therefore$ $h = 250$ m

(খ) উদ্দীপক অনুযায়ী টাওয়ারের উচ্চতা, $h = 375$ m

কাসেমের ক্ষেত্রে ভর, $m = (10 + 60)$ kg $= 70$ kg

সময়, $t = 40$ min $= 40 \times 60$ sec $= 2400$ sec

$\therefore$ ক্ষমতা, $P = \frac{W}{t} = \frac{mgh}{t} = \frac{70 \times 9·8 \times 375}{2400} = 107·2$ watt

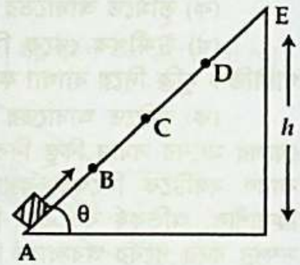
আবার মনিরের ক্ষেত্রে ভর, $m' = (10 + 55)$ kg $= 65$ kg

সময় $t = 40$ min $= 2400$ sec

ক্ষমতা, $P' = \frac{W'}{t} = \frac{m'gh}{t} = \frac{65 \times 9·8 \times 375}{2400} = 99·5$ watt

মনির 99·5 watt ক্ষমতা প্রয়োগ করলে একই সময়ে কাজটি করতে পারবে।

৫। 300 g ভরের একটি বস্তু অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে রক্ষিত হলে 5·88 J গতিশক্তি প্রয়োগে A থেকে E বিন্দুতে ঘর্ষণহীনভাবে ঠিক পৌছে যায়। পরক্ষণে বস্তুটি E বিন্দু থেকে উক্ত তল বরাবর A এর দিকে পড়তে থাকে। চিত্র অনুযায়ী AB = BC = CD = DE



(ক) আনত তল AE এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(খ) বস্তুটি উল্লেখিত তল বরাবর পড়ার সময় যান্ত্রিক শক্তির সংরক্ষণ সূত্র মেনে চলে—এর যথার্থতা D ও C বিন্দুতে গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণের মাধ্যমে মূল্যায়ন কর।

(ক) ভর $m = 300\text{ g} = 0·3\text{ kg}$; মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = 30°$; গতিশক্তি, $E_k = 5·88\text{ J}$

ভূমি হতে হেলানো তলের উচ্চতা h হলে,

$W = mgh = E_p$

$\therefore \quad 0·3 \times 9·8 \times h = 5·88$

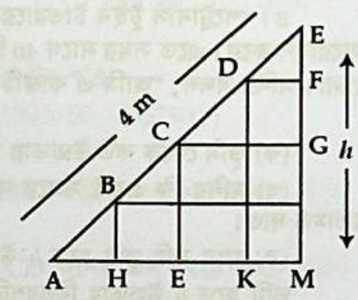
বা, $h = 2\text{m}$

আবার চিত্র অনুযায়ী $\sin 30° = \frac{h}{AE}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{2}{AE}$

$\therefore AE = 4\text{m}$

(খ) 'ক' হতে প্রাপ্ত $h = 2\text{m}$, $AE = 4\text{m}$। আবার যেহেতু AB = BC = CD = DE সেহেতু AC = EC = 2 m, AD = 3m এবং ED = 1m



আমরা পাই, $\sin A = \frac{h}{AE}$

D বিন্দুতে বিভবশক্তি, $E_p = mg \times DK$ ... ... (i)

D বিন্দুতে গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\,[v_0^2 + 2g\,(EF)]$

$= \frac{1}{2}m\,[2g\,(EM - DK)] \quad [\because v_0 = 0]$ ... (ii)

$\therefore$ D বিন্দুতে মোট শক্তি $= E_p + E_k = mgDK + mgEM - mgDK$

$= mgEM$

C বিন্দুতে বিভবশক্তি, $E_p = mg\,E'C$ ... ... (iii)

C বিন্দুতে গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\,(2g\,EG)$

$= \frac{1}{2}m \times 2g\,(EM - E'C)$

$= mg\,EM - mgE'C$ ... (iv)

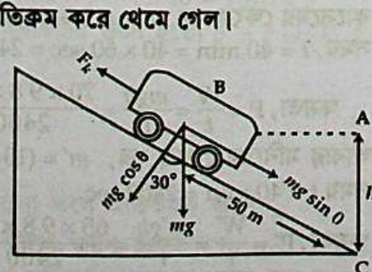
$\therefore$ C বিন্দুতে মোট শক্তি $= E_p + E_k = mgE'C + mgEM - mgE'C = mgEM$

দেখা যায় যে, D ও C বিন্দুতে মোট শক্তি সমান। তাই আনত তলে D ও C বিন্দুতে যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা মেনে চলে।

৬। সফিক 1500 kg ভরের একটি গাড়ি নিয়ে পাহাড়ি রাস্তায় চলছে, যা ভূমির সাথে 30° কোণে আনত। গাড়িটির বেগ 25 ms⁻¹। সামনে একটি গাড়ি দেখে গাড়িটি 50 m দূরত্ব অতিক্রম করে থেমে গেল।

(ক) গাড়িটির ওপর ক্রিয়াশীল ঘর্ষণ বল কত হবে?

(খ) এক্ষেত্রে গাড়িটি শক্তির সংরক্ষণশীলতা নীতি মেনে চলে কি-না বিশ্লেষণ কর।



(ক) দেওয়া আছে, গাড়িটির ভর, $m = 1500\text{ kg}$

সরণ, $s = 50\text{ m}$

শেষ বেগ, $v = 0$

আদিবেগ, $v_0 = 25\ ms^{-1}$
ধরি বাধাদানকারী বল $= F_k$
নিট বল দ্বারা কৃত কাজ = বস্তুর গতিশক্তির পরিবর্তন
বা, বল × সরণ = আদি গতিশক্তি − শেষ গতিশক্তি

বা, $(F_k - mg \sin 30°) \times 50 = \frac{1}{2} mv_0^2 - \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mv_0^2 \quad (\because v = 0)$

বা, $\left(F_k - 1500 \times 9.8 \times \frac{1}{2}\right) \times 50 = \frac{1}{2} \times 1500 \times (25)^2$

বা, $F_k = \frac{1500 \times (25)^2}{100} + \frac{1500 \times 9.8}{2}$

$\therefore F_k = 16725\ N$

(খ) আবার মনে করি গাড়িটি B বিন্দু হতে 50 m অতিক্রম করে C বিন্দুতে থেমে গেল। চিত্র অনুযায়ী B ও C বিন্দুর মধ্যবর্তী উল্লম্ব দূরত্ব, $AC = h$

$\therefore \sin 30° = \frac{h}{50}$

বা, $h = 50 \times \frac{1}{2} = 25\ m$

B বিন্দুতে গাড়িটির মোট শক্তি = গতিশক্তি + বিভবশক্তি

$= \frac{1}{2} mv^2 + mgh$

$= \frac{1}{2} \times 1500 \times (25)^2 + 1500 \times 9.8 \times 25 = 836250\ J$

C বিন্দুতে গাড়িটির বেগ $= 0$
গতিশক্তি $= 0$
ভূমি হতে গাড়িটির উচ্চতা, $h = 0$
বিভবশক্তি $= 0$

ঘর্ষণ বলের দরুন শক্তির রূপান্তর = গাড়িটিকে থামাতে প্রয়োজনীয় শক্তি
= ঘর্ষণ বল × সরণ
$= F_k \times s = (16725 \times 50)$
$= 836250\ J$

C বিন্দুতে মোট শক্তি = স্থিতিশক্তি + গতিশক্তি + ঘর্ষণ বলের দরুন শক্তির রূপান্তর
$= 0 + 0 + 836250 = 836250\ J$

সুতরাং, B ও C বিন্দুতে মোট শক্তির পরিমাণ একই। তাই B ও C বিন্দুতে গাড়িটি শক্তির সংরক্ষণশীলতা নীতি মেনে চলে।

৭। সোহেল সাহেব ভূগর্ভস্থ রিজার্ভ ট্যাংক হতে বিল্ডিং-এর ছাদে সম্পূর্ণ পানি উঠানোর জন্য 1.2 kW ক্ষমতার একটা পাম্প ক্রয় করলেন। পাম্পটির গায়ে কর্মদক্ষতা 90% লেখা আছে। ট্যাংকটি সিলিন্ডার আকৃতির এবং ব্যাস 2m ও উচ্চতা 4 m। ট্যাংক হতে ছাদের উচ্চতা 28m।

(ক) পানির পাম্পটি দৈনিক সর্বোচ্চ কী পরিমাণ কাজ করতে পারবে ?

(খ) পাম্পটি ক্রয় করা সঠিক ছিল কি-না ? —গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

(ক) এখানে, পাম্প কর্তৃক ব্যয়িত বৈদ্যুতিক ক্ষমতা, $P = 1.2\ kW$
কর্মদক্ষতা, $\eta = 90\% = 0.9$

সুতরাং কার্যকর ক্ষমতা = কর্মদক্ষতা × প্রকৃত ক্ষমতা

$P' = 0.9 \times 1.2\ kW = 1.08\ kW$

একদিন $= 24 \times 60 \times 60 = 86400\ sec$

পাম্পটি দৈনিক সর্বোচ্চ কাজ করতে পারে,

$W = P \times t = 1.08\ kW \times 86400\ sec$

$= 1.08 \times 10^3\ W \times 8600\ sec = 93.3 \times 10^6\ J$

(খ) সিলিন্ডার আকৃতির ভূগর্ভস্থ ট্যাংকের ব্যাস, $d = 2\ m$, উচ্চতা, $h = 4\ m$

$\therefore$ অভ্যন্তরীণ আয়তন $V = \frac{1}{4} \pi r^2 h = \frac{1}{4} \times 3.14 \times (2)^2 \times 4 = 12.56\ m^3$

ট্যাংকটি পুরাপুরি পানি দ্বারা পূর্ণ থাকলে, উক্ত পানির ভর,

$m = V\rho = 12.56 \times 1000 = 12560$ kg

উত্তোলিত পানির গড় উচ্চতা, $h = \left(28 + \frac{4}{2}\right)$ m $= 30$m

$\therefore$ পাম্প কর্তৃক প্রতি ঘণ্টায় প্রযুক্ত ক্ষমতা $P = \frac{W}{t} = \frac{mgh}{t} = \frac{12560 \times 9.8 \times 30}{3600}$

$= 1025.8$ W $= 1.0258$ kW

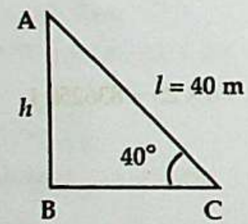
প্রয়োজনীয় পাম্পের ক্ষমতা 1.0258 kW, যা সোহেল সাহেবের ক্রয়কৃত পাম্পের ক্ষমতা অপেক্ষা কম। পাম্পটি 1 ঘণ্টার কম সময়ে ট্যাংক হতে সম্পূর্ণ পানি ছাদে তুলতে পারবে; সুতারং পাম্পটি ক্রয় করা সঠিক ছিল।

৮। 80 kg ভরের একজন লোক 20 kg ভরের বোঝা মাথায় নিয়ে 40 m দৈর্ঘ্যের মই দিয়ে একটি দালানের ছাদে উঠল। মইটি অনুভূমিকের সাথে 40° কোণ উৎপন্ন করে দালানের ছাদে লাগানো ছিল।

(ক) লোকটি কর্তৃক কৃত কাজ বের কর।

(খ) মইটির দৈর্ঘ্য 60m হলে অনুভূমিকের সাথে কত কোণে স্থাপন করলে একই পরিমাণ কাজ সম্পাদিত হবে এবং এক্ষেত্রে কোনো সুবিধা পাওয়া যাবে কি-না—গাণিতিকভাবে মতামত দাও। [রা. বো. ২০১৭]

(ক)



এখানে,

মোট ভর, $m = (80 + 20)$ kg $= 100$ kg

মই এর দৈর্ঘ্য, $l = 40$ m

অনুভূমিকের সাথে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 40°$

ছাদের উচ্চতা $= h$

কৃত কাজ, W = ?

আমরা জানি, $\sin\theta = \frac{h}{l}$

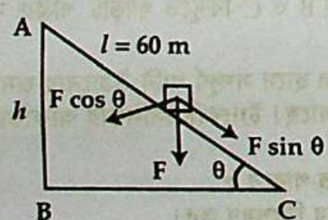
$\therefore h = l \times \sin\theta = 40 \sin 40° = 25.71$ m

এবং কৃত কাজ, $W = mgh$

$= 100 \times 9.8 \times 25.71$

$= 25195.8$ J

(খ)



এখানে,

মোট ভর, $m = 100$ kg

মইটির দৈর্ঘ্য, $l = 60$ m

ছাদের উচ্চতা, $h = 25.71$ m

যেহেতু উভয় ক্ষেত্রে ছাদের উচ্চতা একই সেহেতু কাজের পরিমাণও একই।

আবার ধরি মইটি অনুভূমিকের সাথে θ কোণে স্থাপন করা হলো।

$\therefore$ ছাদের উচ্চতা, $h = l \sin\theta = 60 \times \sin\theta$

$\therefore \quad 25.71 = 60 \times \sin\theta$

বা, $\sin\theta = \frac{25.71}{60} = 0.4285$

$\therefore \quad \theta = \sin^{-1}(0.4285) = 25.37°$

এক্ষেত্রে একই কাজ সম্পাদিত হবে যদি মইটিকে অনুভূমিকের সাথে 25.37° কোণে স্থাপন করা হয়। θ এর মান যত কম হবে চিত্র অনুযায়ী F sin θ এর মান তত কম হবে এবং ওপরে উঠতে তত কম কষ্ট হবে।

যেহেতু θ এর মান পূর্বের তুলনায় হ্রাস পেয়েছে সেহেতু এক্ষেত্রে লোকটির উপরে ওঠতে কম কষ্ট হবে।

৯। একটি পানিপূর্ণ কুয়ার গভীরতা 20 m ও ব্যাস 2 m। কুয়াটিকে পানিশূন্য করার জন্য 5 HP এর একটি পাম্প লাগানো হলো। অর্ধেক পানি তোলার পর পাম্পটি নষ্ট হয়ে গেল। বাকি পানি তোলার জন্য একই ক্ষমতাসম্পন্ন আর একটি পাম্প লাগানো হলো।

(ক) প্রথম পাম্প দ্বারা সম্পাদিত কাজের পরিমাণ নির্ণয় কর।

(খ) প্রথম ও দ্বিতীয় পাম্প দ্বারা পানি তুলতে একই সময় লাগবে কি-না—গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে দেখাও। [চ. বো. ২০১৭]

(ক) ১ম পাম্পের ক্ষেত্রে, উত্তোলিত পানির আয়তন,

$$V = \frac{\pi r^2 l}{2} = \frac{3.1416 \times (1)^2 \times 20}{2}$$
$$= 31.416 \text{ m}^3$$

এখানে,
কুয়ার গভীরতা, $l = 20$ m
কুয়ার ব্যাসার্ধ, $r = \frac{2}{2}\text{m} = 1\text{m}$
$\rho = 1000 \text{ kgm}^{-3}$

উত্তোলিত পানির ভর,

$$m = V\rho = 31.416 \times 1000 = 31.416 \times 10^3 \text{ kg}$$

পানির গড় সরণ, $h_1 = \frac{l}{4} = \frac{20}{4} = 5\text{m}$

১ম পাম্প দ্বারা সম্পাদিত কাজ,

$$W = mgh$$
$$= 31.416 \times 10^3 \times 9.8 \times 5$$
$$= 1.54 \times 10^6 \text{ J}$$

(খ) উভয় পাম্পের ক্ষমতা, $P = 5 \text{ HP} = 5 \times 746 = 3730$ watt

উভয় ক্ষেত্রে পানির ভর, $m = 31.416 \times 10^3$ kg

১ম ক্ষেত্রে গড় সরণ, $h_1 = \frac{l}{4} = \frac{20}{4} = 5\text{m}$

২য় ক্ষেত্রে গড় সরণ, $h_2 = \frac{3l}{4} = \frac{3 \times 20}{4} = 15\text{ m}$

১ম ও ২য় পাম্প দ্বারা পানি তুলতে যথাক্রমে t_1 ও t_2 সময় লাগলে

১ম ক্ষেত্রে, $P = \frac{W_1}{t_1} \quad \therefore t_1 = \frac{mgh_1}{P} = \frac{31.416 \times 10^3 \times 9.8 \times 5}{3730} = 412.70$ sec

২য় ক্ষেত্রে, $P = \frac{W_2}{t_2} \quad \therefore t_2 = \frac{mgh_2}{P} = \frac{31.416 \times 10^3 \times 9.8 \times 15}{3730} = 1238.11$ sec

গাণিতিকভাবে দেখা যায়, $t_1 < t_2$। অতএব ১ম ও ২য় পাম্প দ্বারা পানি তুলতে একই সময় লাগবে না, ২য় পাম্প দ্বারা পানি তুলতে সময় বেশি লাগবে।

১০। 10 kg ভরের একটি বস্তুর ওপর 196 N মানের একটি ঊর্ধ্বমুখি বল প্রয়োগ করে সেটিকে 10 m উচ্চতায় তোলা হয়।

(ক) ঊর্ধ্বমুখি বল দ্বারা কৃত কাজ ও অভিকর্ষের বিরুদ্ধে কৃত কাজ নির্ণয় কর।

(খ) গাণিতিকভাবে দেখাও যে বস্তুটির মোট শক্তির পরিমাণ এবং ঊর্ধ্বমুখি বল দ্বারা কৃত কাজ সমান। এক্ষেত্রে শক্তির নিত্যতা সূত্র বজায় থাকছে কী ? ($g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$)

(ক) আমরা জানি,

ঊর্ধ্বমুখি বল দ্বারা কৃত কাজ,

$$W = Fs = 196 \times 10 = 1960 \text{ J}$$

এবং অভিকর্ষের বিরুদ্ধে কৃত কাজ,

$$W' = mgs = 190 \times 9.8 \times 10 = 980 \text{ J}$$

এখানে,
বল, $F = 196$ N
সরণ, $s = 10$ m
কৃত কাজ, $W = ?$
$g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$

(খ) অভিকর্ষের অনুপস্থিতিতে বস্তুটির ত্বরণ,

$$a' = \frac{\text{ঊর্ধ্বমুখি বল}}{\text{ভর}} = \frac{196}{10} = 19.6 \text{ ms}^{-2}$$

আবার, নিম্নমুখি অভিকর্ষের উপস্থিতিতে বস্তুটির ত্বরণ,

$a = a' - g = 19.6 - 9.8 = 9.8 \text{ ms}^{-2}$

স্থিরাবস্থা থেকে এই ত্বরণে 10 m উচ্চতায় ওঠার পর বস্তুটির বেগ v হলে, আমরা পাই

$$v^2 = u^2 + 2as = 2as \qquad [\because u = 0]$$

$$= 2 \times 9.8 \times 10 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$$

সুতরাং, ওই উচ্চতায় বস্তুটির স্থিতিশক্তি,

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 2 \times 9.8 \times 10 = 980 \text{ J}$$

আবার, ওই উচ্চতায় বস্তুটির স্থিতিশক্তি,

$$u = mgh = 10 \times 9.8 \times 10 = 980 \text{ J}$$

$\therefore$ বস্তুটির মোটশক্তি, $E = K + u = 980 + 980 = 1960 \text{ J}$

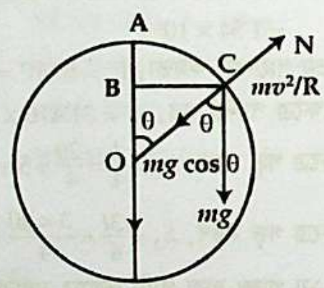
অর্থাৎ বস্তুটির মোট শক্তির পরিমাণ উর্ধ্বমুখি বল দ্বারা কৃত কাজের সমান।

এক্ষেত্রে উর্ধ্বমুখি বল দ্বারা কৃত কাজের একটি অংশ বস্তুটির গতিশক্তিতে এবং অন্য অংশ স্থিতিশক্তিতে রূপান্তরিত হয়। সুতরাং শক্তির নিত্যতা সূত্র বজায় থাকে।

১১। R ব্যাসার্ধের একটি গোলকের শীর্ষ বিন্দু থেকে m ভরের একটি ক্ষুদ্র বস্তু গোলকের গা বেয়ে গড়িয়ে পড়ছে। ধর শীর্ষ বিন্দুতে বস্তুর স্থিতিশক্তি শূন্য।

(ক) কৌণিক সরণের সঙ্গে বস্তুর স্থিতিশক্তির পরিবর্তন এবং গতিবেগের পরিবর্তন নির্ণয় কর।

(খ) বস্তুর কৌণিক সরণ কত হলে এটি গোলকের পৃষ্ঠ থেকে বিচ্ছিন্ন হবে ? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে মতামত দাও।



(ক) ধরা যাক, বস্তুটি যখন C বিন্দুতে তখন কৌণিক সরণ θ। বস্তুটির স্থিতিশক্তির হ্রাস,

$$E_p = mg\,(AB)$$

$$\therefore E_p = mg\,(AO - OB) = mg\,(R - R\cos\theta)$$

$$= mgR\,(1 - \cos\theta)$$

আবার, গতিশক্তি বৃদ্ধি = স্থিতিশক্তি হ্রাস

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR\,(1 - \cos\theta)$$

$$\therefore v^2 = 2gR\,(1 - \cos\theta)$$

বা, $v = \sqrt{2gR\,(1 - \cos\theta)}$

(খ) C বিন্দুতে সাম্যাবস্থার জন্য

$$mg\cos\theta = N + \frac{mv^2}{R} \qquad [\text{এখানে } N = \text{লম্ব প্রতিক্রিয়া}]$$

এখন বস্তুটি গোলকের সঙ্গে সংযোগ বিচ্ছিন্ন করলে, $N = 0$

$$\therefore mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R} = \frac{m}{R} \times 2gR\,(1 - \cos\theta)$$

বা, $\cos\theta = 2(1 - \cos\theta)$

বা, $3\cos\theta = 2$

$\therefore \cos\theta = \frac{2}{3}$

বা, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \simeq 48.2°$

সুতরাং, কৌণিক সরণ 48.2° হলে বস্তুটি গোলকের সঙ্গে সংযোগ বিচ্ছিন্ন করবে।

১২। খালিদের বাড়িতে 12 m গভীর ও 1·8 m ব্যাসবিশিষ্ট একটি পানিপূর্ণ কুয়া খালি করার জন্য একটি পাম্প চালু করা হলো। কিন্তু দেখা গেল, পানি শূন্য করতে পাম্পটির 21 মিনিট সময় লাগে। খালিদ হিসাব করে দেখল যথাসময়ে কুয়াটিকে পানি শূন্য করতে 2 HP ক্ষমতার পাম্প দরকার।

(ক) 2 kg ভরের বস্তুকে ছেড়ে দিলে পানিশূন্য কুয়ার শীর্ষ হতে তলায় পৌঁছাতে কত সময় লাগবে ?

(খ) গাণিতিক বিশ্লেষণসহ খালিদের হিসাবের যথার্থতা যাচাই কর। [দি. বো. ২০১৬]

(ক) আমরা জানি,

$$s = h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$\therefore \quad 12 = 0 + \frac{1}{2} \times 9·8 \times t^2$$

$$\text{বা,} \quad t^2 = \frac{2 \times 12}{9·8}$$

$$\therefore \quad t = \sqrt{\frac{2 \times 12}{9·8}} = 1·56 \text{ s}$$

এখানে,
বস্তুর আদিবেগ, $v_0 = 0$
কুয়ার গভীরতা বা দূরত্ব, $h = 12$ m
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9·8$ ms^{-2}
সময়, $t = ?$

(খ) আমরা জানি, ক্ষমতা

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t} = \frac{Fh}{t}$$

এখানে, F = পানির ওজন $= mg$

এখন পানির ভর, $m = v\rho = \pi r^2 h\rho$ $\quad [\because v = \pi r^2 h]$

$$\text{অতএব, } P = \frac{Fh}{t} = \frac{mgh}{t} = \frac{\pi r^2 h\rho gh}{t}$$

$$\therefore \quad P = \frac{3·14 \times (0·9)^2 \times 12 \times 1000 \times 9·8 \times 6}{1260}$$

$$= 1424·3 \text{ W} = \frac{1424·3}{746} \text{ H. P.}$$

$$= 1·914 \text{ H. P.}$$

এখানে,
কুয়ার ব্যাস, $d = 1·8$ m
কুয়ার ব্যাসার্ধ, $r = \frac{d}{2} = \frac{1·8}{2}$ m $= 0·9$ m
কুয়ার গভীরতা, $l = 12$ m
সময়, $t = 21$ min $= 21 \times 60$ s $= 1260$ s
পানি তোলার গড় উচ্চতা,
$h = \frac{0 + 12\text{ m}}{2} = 6$ m
ক্ষমতা, $P = ?$
পানির ঘনত্ব, $\rho = 1000$ kgm^{-3}

এখন পানি তোলার জন্য খালিদের হিসাবকৃত পাম্পের ক্ষমতা = 2 H. P. যথার্থ।

উত্তর : (ক) 1·56 s (খ) খালিদের হিসাব যথার্থ।

সার-সংক্ষেপ

কাজ : কোনো বস্তুর ওপর বল প্রয়োগে বস্তুর সরণ ঘটলে প্রযুক্ত বল ও বলের অভিমুখে সরণের উপাংশের গুণফলকে কাজ বলে।

কাজের একক : কাজের একক নিউটন-মিটার বা জুল।

শক্তি : কাজ করার সামর্থ্যকে শক্তি বলে।

স্থিতিস্থাপক বল : স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে বাইরে থেকে বল প্রয়োগে কোনো বস্তুর আকার পরিবর্তন ঘটালে বল অপসারণ করলে যে বলের কারণে তা আবার পূর্বের আকার ফিরে পায় তাকে স্থিতিস্থাপক বল বলে।

ধনাত্মক কাজ : বলের দ্বারা কৃত কাজকে ধনাত্মক কাজ বলে।

ঋণাত্মক কাজ : বলের বিপরীতে কৃত কাজকে ঋণাত্মক কাজ বলে।

কাজহীন বল : বস্তুর সরণের লম্বদিকে ক্রিয়াশীল বল বস্তুর সরণের সময় কোনো কাজ করে না। এ ধরনের বলকে কাজহীন বল বলে।

অভিকর্ষ বল : ভূপৃষ্ঠের ওপর বা নিকটে অবস্থিত প্রতিটি বস্তুর উপর পৃথিবীর আকর্ষণ বলকে অভিকর্ষ বল বলে।

গতিশক্তি : কোনো গতিশীল বস্তু তার গতির জন্য কাজ করার যে সামর্থ্য বা শক্তি লাভ করে তাকে বস্তুটির গতিশক্তি বলে।

স্থিতিশক্তি : বস্তু তার অবস্থানের কারণে যে শক্তি অর্জন করে অথবা বস্তুস্থিত কণাসমূহের পারস্পরিক অবস্থানের পরিবর্তনের জন্য যে শক্তি অর্জন করে তাকে বস্তুর স্থিতিশক্তি বলে।

ক্ষমতা : কোনো একটি উৎসের কাজ করার হারকে ক্ষমতা বলে। একক সময়ের কৃত কাজ দ্বারা ক্ষমতা পরিমাপ করা হয়।

ক্ষমতার একক	:	ক্ষমতার একক জুল/সে. (J/s)।
1 ওয়াট	:	এক সেকেন্ডে এক জুল কাজ করার ক্ষমতাকে 1 ওয়াট বলে।
1 অশ্ব ক্ষমতা	:	প্রতি সেকেন্ডে 746 জুল কাজ করার ক্ষমতাকে এক অশ্ব ক্ষমতা বলে।
সংরক্ষণশীল বল	:	যে বল কোনো বস্তুর উপর ক্রিয়া করলে তাকে যে কোনো পথে ঘুরিয়ে পুনরায় প্রাথমিক অবস্থানে আনলে বল কর্তৃক কৃত কাজ শূন্য হয় তাকে সংরক্ষণশীল বলে।
অসংরক্ষণশীল বল	:	কোনো বলের ক্রিয়া অভিমুখ যদি বস্তুর গতি অভিমুখের ওপর নির্ভর করে তবে ওই বল অসংরক্ষণশীল বলে।
কর্মক্ষমতা	:	কোনো যন্ত্রে সরবরাহকৃত শক্তি এবং কাজে পরিণত হওয়ার শক্তিকে কর্মক্ষমতা বলে।
যান্ত্রিক শক্তির সংরক্ষণ নীতি	:	শক্তি অবিনশ্বর, শক্তি সৃষ্টি বা ধ্বংস করা যায় না। এক রূপ হতে অন্য রূপে রূপান্তরিত করা যায়। বস্তুর গতিশক্তি স্থিতিশক্তিতে এবং স্থিতিশক্তি গতিশক্তিতে রূপান্তরিত হয় মাত্র। বস্তুর মোট যান্ত্রিক শক্তি সব সময় স্থির থাকে। একে যান্ত্রিক শক্তির সংরক্ষণ নীতি বলে।

বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তরের জন্য প্রয়োজনীয় বিষয়াবলির সার-সংক্ষেপ

১। সিঁড়ি বেয়ে ওপরে উঠতে কষ্ট হয় কারণ—অভিকর্ষ বলের বিরুদ্ধে কাজ হয়। কাজের অভিকর্ষীয় একক কেজি-মিটার।

২। গতিশীল কোনো বস্তুর ভরবেগ P এবং গতিশক্তি K হলে এদের মধ্যে সম্পর্ক হলো : $K = \frac{\vec{P}.\vec{P}}{2m}$ বা, $\frac{P^2}{2m}$। বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণনরত বস্তু কর্তৃক কৃত কাজ শূন্য হয়। কোন বস্তুকে ওপরে তুললে যন্ত্রের ক্ষমতা, $P = F \times v = mgv$. মহাকর্ষীয় বিভবের সর্বোচ্চ মান হয় অসীমে এবং সর্বোচ্চ মান শূন্য।

৩। বৈদ্যুতিক বাল্বের মাধ্যমে বৈদ্যুতিক শক্তি আলোক শক্তিতে রূপান্তরিত হয়। অভিকর্ষীয় বলের বিপরীত কাজ $W \propto h$.

৪। বস্তুর ভর ও বেগ উভয়ই দ্বিগুণ হলে গতিশক্তি পূর্বের 4 গুণ হয়। কেন্দ্রমুখি বল দ্বারা কাজ শূন্য হয়।

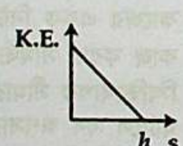
৫। একটি স্প্রিংকে সংকুচিত করলে তাতে স্থিতিশক্তি সঞ্চিত থাকে। স্থিতিস্থাপক বলের বিরুদ্ধে কাজ $W \propto x^2$.

৬। ক্ষমতা, $P = \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t} = Fv = mgv$। গতিশক্তির মাত্রা $[ML^2T^{-2}]$. ধনাত্মক কাজের ক্ষেত্রে গতিশক্তি বৃদ্ধি পায় এবং ত্বরণ হয়।

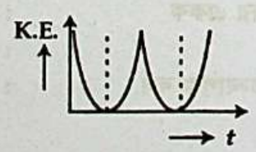
৭। সংরক্ষণশীল বলের ক্ষেত্রে—(১) পূর্ণচক্রে মোট কাজ শূন্য হয় (২) কাজের পরিমাণ কণার গতিপথের ওপর নির্ভর করে না (৩) শক্তি নিত্যতার সূত্র পালিত হয় (৪) কাজ পুনরুদ্ধার করা যায়। এই বলের উদাহরণ—অভিকর্ষীয় বল, বৈদ্যুতিক বল, স্প্রিং-এ বিকৃতি প্রতিরোধকারী বল।

৮। অসংরক্ষণশীল বলের ক্ষেত্রে— (১) পূর্ণচক্রে মোট কাজ শূন্য হয় না। (২) কাজের পরিমাণ কণার গতিপথের ওপর নির্ভর করে। (৩) শক্তির নিত্যতা পালিত হয় না। (৪) কাজ সম্পূর্ণরূপে পুনরুদ্ধার করা যায় না। এই বলের উদাহরণ হলো—ঘর্ষণ বল, সান্দ্র বল।

৯। একটি বস্তুকে ভূমি হতে উল্লম্বভাবে ওপরে নিক্ষেপ করা হলো। h উচ্চতায় ওঠে আবার ভূমিতে পতিত হলো। পাশের লেখচিত্র (ক) ইহা নির্দেশ করে। গতিশক্তির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান বনাম সময় লেখচিত্র (খ)-এ দেখানো হলো।

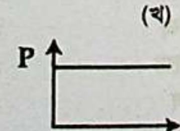


(ক)



(খ)

১০। স্থির অবস্থার একটি বস্তুকে একটি স্থির মানের বল ক্রিয়া করায় বস্তুটি চলতে শুরু করে। ঘর্ষণকে বিবেচনা না করলে পাশের লেখচিত্র বস্তুর ক্ষমতা প্রকাশ করে। কেন্দ্রমুখি বল দ্বারা কৃত কাজ শূন্য হয়।



১১। বস্তুর ভরবেগের মান উহার গতিশক্তির সমান হলে বস্তুটির বেগ $2\ ms^{-1}$ হয়।

১২। সিঁড়ি বেয়ে ওপরে ওঠা ঋণাত্মক কাজ। আর নিচে নামা ধনাত্মক কাজ। শক্তির মাত্রা $[ML^2T^{-2}]$.

১৩। বল ও সরণের মধ্যবর্তী কোণ $0°$ হলে কাজ সর্বোচ্চ হয় এবং $90°$ হলে সর্বনিম্ন হয়।

১৪। ক্ষমতার মাত্রা সমীকরণ $[ML^2T^{-3}]$। h উচ্চতাবিশিষ্ট ঘনকের মধ্যে m ভরের গ্যাসের বিভব শক্তি শূন্য।

১৫। সমান গতিশক্তিসম্পন্ন 9 g এবং 4 g ভরের দুটি বস্তু A ও B এর রৈখিক ভরবেগের অনুপাত হবে 3 : 2।

১৬। কোনো বস্তুর ভরবেগ 100% বৃদ্ধি করলে গতিশক্তি 300% বৃদ্ধি পায়।

১৭। কোনো যন্ত্রের কার্যকর শক্তি ও প্রদত্ত শক্তির অনুপাতকে দক্ষতা বলে।

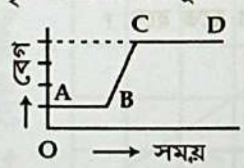
১৮। গতিশক্তি 4 গুণ বৃদ্ধি পেলে ভরবেগ 2 গুণ বৃদ্ধি পায়। ধনাত্মক কাজে গতিশক্তি বৃদ্ধি পায়, ত্বরণ হয়।
১৯। বল ও সরণের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে ঋণাত্মক কাজের শর্ত হবে $180° \geq \theta \geq 90°$
২০। বলের দ্বারা কাজ বা ধনাত্মক কাজের শর্ত হবে $0° \leq \theta < 90°$। কাজের অভিকর্ষীয় একক কেজি-মিটার।
২১। কাজের মান সর্বনিম্ন বা শূন্য হবে যদি বল ও সরণের মধ্যবর্তী কোণ 90° হয়।
২২। বস্তুর আকার পরিবর্তনের জন্য স্থিতিশক্তি লাভ করে—ধনুকে তীর লাগিয়ে টানলে, ধাতব পাতকে বাঁকালে।
২৩। পরিবর্তনশীল বল দ্বারা কাজের উদাহরণ (i) মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে কৃত কাজ (ii) তড়িৎ বল কর্তৃক কৃত কাজ।
২৪। শূন্য কাজের শর্ত হলো— (i) $\cos\theta = 0$, (ii) বস্তুর উপর বল প্রয়োগেও কোনো সরণ না ঘটলে।
২৫। বস্তুর স্থিতিশক্তি নির্ভর করে ভর ও উচ্চতার উপর। বল ধ্রুবক বা স্প্রিং ধ্রাবক, $K = \frac{F}{x}$। মাত্রা MT^{-2}.

২৬। একটি ভারী বস্তুকে মাথায় করে অনুভূমিক বরাবর রাস্তার ওপর দিয়ে এক স্থান হতে অন্য স্থানে সরানো হলো—(১) ঘর্ষণ বলের বিরুদ্ধে কাজ হয় (২) অভিলম্বিক প্রতিক্রিয়া দ্বারা কাজ শূন্য।

২৭। দুটি বস্তুকণার মধ্যকার দূরত্ব বৃদ্ধি করলে— (i) মহাকর্ষ বল দ্বারা কৃত কাজ ঋণাত্মক (ii) বাহ্যিক বল দ্বারা কৃত কাজ ধনাত্মক (iii) মহাকর্ষ বল দ্বারা কৃত কাজ দূরত্বের আদি ও চূড়ান্ত মানের ওপর নির্ভর করবে। মধ্যবর্তী কোনো মানের উপর নয়। মহাকর্ষ বিভব (V) ও প্রাবল্য (E) এর মধ্যে সম্পর্ক হলো, $E = -\frac{dV}{dr}$।

২৮। স্প্রিং সংকোচন ও প্রসারণের ক্ষেত্রে কাজ ও স্থিতিশক্তি প্রকাশের সমীকরণ, $W = \frac{1}{2}Kx^2$। অর্থাৎ স্থিতিস্থাপক বল দ্বারা কাজ সরণের বর্গের সমানুপাতিক।

২৯। উড়োজাহাজ থেকে নিক্ষিপ্ত বোমা মাঝপথে ফেটে গেলে মোট ভরবেগ কমবে। অভিকর্ষীয় স্থিতিশক্তি বল দ্বারা সৃষ্ট সরণের সমানুপাতিক।

৩০।


(i) চিত্র অনুযায়ী CD অংশের ভরবেগ হবে AB অংশের ভরবেগের চারগুণ।
(ii) CD অংশের বেগ দ্বিগুণ হলে গতিশক্তি AB অংশের চারগুণ হবে।

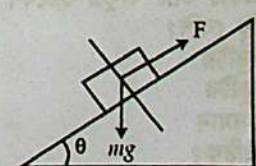
অনুশীলনী

(ক) বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। প্রযুক্ত বল এবং সরণের দিক পরস্পর বিপরীত দিকে হলে কৃত কাজ কেমন হবে ?
ⓚ ধনাত্মক
ⓚh ঋণাত্মক
ⓖ শূন্য
ⓖh সর্বাধিক

২। 10 N বল প্রয়োগে একটি গাড়িকে 100 m সরাতে কত কাজ করতে হবে ? বল ও সরণের মধ্যবর্তী কোণ 60°।
[BUET Admission Test, 2013-14]
ⓚ 500 J
ⓚh 1000 J
ⓖ 100 J
ⓖh 50 J

৩। 10 kg ভরের একটি বস্তুকে স্প্রিং থেকে ঝুলানো হলো যার স্প্রিং ধ্রুবক 200 N/m। স্প্রিং-এর দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি হবে—
[BUET Admission Test, 2013-14]
ⓚ 0.05 m
ⓚh 20.0 m
ⓖ 2.4 m
ⓖh 0.49 m

৪।


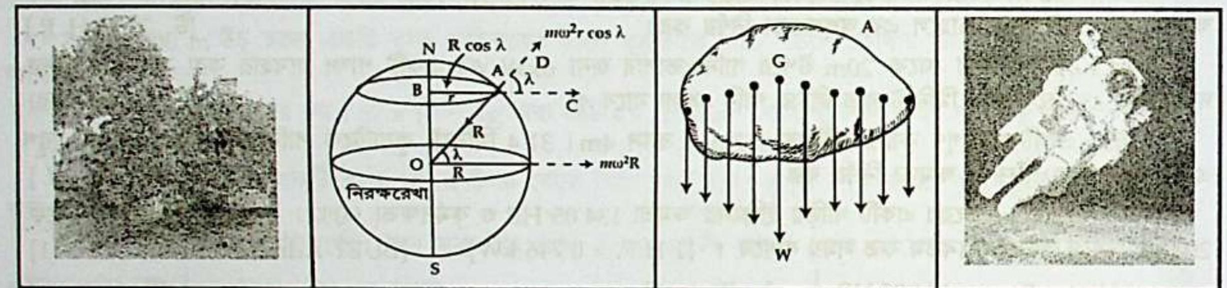
চিত্রে F বলের প্রভাবে ব্লকটি আনত তল বেয়ে ওপরের দিকে উঠছে। এখানে কোন বলের বিরুদ্ধে কাজ হয়েছে?
ⓚ F
ⓚh mg
ⓖ $mg \sin\theta$
ⓖh $mg \cos\theta$

৫। θ এর মানের ক্ষেত্রে—
(i) $0° \leq \theta \geq 90°$ হলে বলের দ্বারা কাজ সম্পন্ন হবে
(ii) $90° < \theta \leq 135°$ হলে বলের বিরুদ্ধে কাজ সম্পন্ন হবে
(iii) $135° \leq \theta \leq 180°$ হলে ঋণাত্মক কাজ সম্পন্ন হবে
নিচের কোনটি সঠিক ?
ⓚ i ও ii
ⓚh i ও iii
ⓖ ii ও iii
ⓖh i, ii ও iii

৬ মহাকর্ষ ও অভিকর্ষ

GRAVITATION AND GRAVITY

প্রধান শব্দ (Key Words) : গ্যালিলিওর সূত্র, কেপলারের সূত্র, মহাকর্ষ বল, অভিকর্ষজ ত্বরণ, স্বাভাবিক উপগ্রহ, কৃত্রিম উপগ্রহ, ভূ-স্থির উপগ্রহ, মুক্তিবেগ, মহাকর্ষ সূত্রের ব্যবহার।



ভূমিকা
Introduction

এই বিশ্বের যেকোনো দুটি বস্তু পরস্পর পরস্পরকে আকর্ষণ করে। পদার্থের এই সর্বজনীন ধর্মই হলো মহাকর্ষ। গ্রহগুলি সূর্যকে কেন্দ্র করে নিজ নিজ কক্ষপথে প্রদক্ষিণ করছে। সপ্তদশ শতাব্দিতে জার্মান বিজ্ঞানী কেপলার গ্রহের এই ঘূর্ণন সম্পর্কে গুরুত্বপূর্ণ সূত্র এবং তথ্য প্রদান করেন। কিন্তু কী ধরনের বল ক্রিয়াশীল তা সঠিকভাবে বুঝাতে সক্ষম হননি। এই সূত্রগুলি ব্যাখ্যা করতে 1681 খ্রিস্টাব্দে স্যার আইজ্যাক নিউটন (Sir Issac Newton) প্রথম "মহাকর্ষ সূত্র" আবিষ্কার করেন।

এই অধ্যায় পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা—

- পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে গ্যালিলিওর সূত্র ব্যাখ্যা করতে ও পড়ন্ত বস্তুর সূত্র যাচাই করতে পারবে।
  ব্যবহারিক : পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে গ্যালিলিওর সূত্রের যাচাই।
- গ্রহের গতি সংক্রান্ত কেপলারের সূত্র বর্ণনা করতে পারবে।
- নিউটনের সূত্র ব্যবহার করে কেপলারের সূত্র, গ্রহের গতি ইত্যাদি আলোচনা করতে পারবে।
- মহাকর্ষ সূত্র প্রয়োগ করে মহাকর্ষ বিভব, প্রাবল্য পরিমাপ ও তাদের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবে।
- অভিকর্ষজ ত্বরণ, মুক্তিবেগের গাণিতিক রাশিমালা প্রতিপাদন করতে পারবে।
- মহাকর্ষ সূত্রের ব্যবহার সম্বন্ধে জানতে পারবে।

৬.১ পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে গ্যালিলিওর সূত্র
Galileo's laws for a falling body

আমরা সর্বদা দেখি যে, কোনো বস্তুকে ওপর থেকে নিচে ছেড়ে দিলে তা সরাসরি নিচে পৌছায়। এর কারণ কি কখনও আমরা ভেবে দেখেছি? একই সাথে ভারী এবং হালকা বস্তুকে একই স্থান থেকে নিচে ছেড়ে দিলে এগুলো কি একই সাথে একই সময়ে ভূপৃষ্ঠে পৌছায় ?

আমরা দেখি যে, ভারী বস্তু ও হালকা বস্তু একই উচ্চতা থেকে পড়তে দিলে ভারী বস্তু আগে মাটিতে পৌছায়। যেহেতু বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল অভিকর্ষজ ত্বরণ বস্তুর ভরের ওপর নির্ভর করে না, তাই ভারী ও হালকা বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল অভিকর্ষজ ত্বরণ একই। সুতরাং এদের একই সময়ে মাটিতে পৌছানোর কথা। ভারী ও হালকা বস্তুর পতনের সময়ের যে পার্থক্য পাওয়া যায় তা বায়ুর বাধার জন্য। গ্যালিলিও উঁচু মান মন্দিরের ছাদ থেকে বিভিন্ন রকমের ভারী বস্তু ফেলে দেখান যে, এরা প্রায় একই সময়ে মাটিতে পৌছায়। বাতাসের বাধা না থাকলে এগুলো একত্রেই মাটিতে পৌছাত। বাতাসের মধ্যে বস্তুদ্বয় থাকার জন্য এদের ওজনের বিপরীত দিকে বাতাসের প্লবতা কাজ করে। ভারী বস্তুর চেয়ে হালকা কাগজের ওপর প্লবতা বা ঊর্ধ্বমুখি বল বেশি হওয়ায় কাগজ দেরিতে মাটিতে পৌছে। যেহেতু বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল অভিকর্ষজ ত্বরণ বস্তুর ভরের ওপর নির্ভর করে না, তাই ভারী বস্তু ও কাগজের ওপর ক্রিয়াশীল অভিকর্ষজ ত্বরণ একই।

পড়ন্ত বস্তু সম্পর্কে গ্যালিলিও তিনটি সূত্র দিয়েছেন। এগুলোকে পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে গ্যালিলিওর সূত্র বলে যা স্থির অবস্থা থেকে বিনা বাধায় পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

সূত্রগুলো নিম্নে প্রদত্ত হলো :

১ম সূত্র : বায়ুশূন্য স্থানে বা বাধাহীন পথে সকল বস্তুই নিশ্চল অবস্থা হতে যাত্রা করে সমান দ্রুততায় নিচে নামে অর্থাৎ সমান সময়ে সমান দূরত্ব অতিক্রম করে।

ব্যাখ্যা : ছোট, বড় ও বিভিন্ন ওজনের কতকগুলো বস্তু একই উচ্চতা হতে ও স্থিরাবস্থা হতে ছেড়ে দিলে বাধাহীন পথে তারা সমান দ্রুততায় অর্থাৎ ত্বরণে গতিশীল থাকবে এবং একই সময়ে মাটিতে পড়বে।

২য় সূত্র : বাধাহীন পথে পড়ন্ত বস্তুর নির্দিষ্ট সময়ে প্রাপ্ত বেগ ওই সময়ের সমানুপাতিক। কোনো পড়ন্ত বস্তু t সময়ে v বেগ প্রাপ্ত হলে, গাণিতিকভাবে লেখা যায়, $v \propto t$।

ব্যাখ্যা : অভিকর্ষের টানে স্থিরাবস্থা হতে বাধাহীন পথে নিচের দিকে পড়বার সময় কোনো বস্তুর বেগ যদি এক সেকেন্ড পরে v হয় তবে তার বেগ দুই সেকেন্ড পরে $v \times 2$, তিন সেকেন্ড পরে $v \times 3$ ইত্যাদি হবে। সাধারণভাবে বলা যায় যে, কোনো একটি পড়ন্ত বস্তুর বেগ t_1 ও t_2 সময়ে যথাক্রমে v_1 ও v_2 হলে,

$$\frac{v_1}{t_1} = \frac{v_2}{t_2} \text{ বা, } \frac{v_1}{v_2} = \frac{t_1}{t_2} \quad \therefore v \propto t$$

৩য় সূত্র : বাধাহীন পথে পড়ন্ত বস্তুর নির্দিষ্ট সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব ওই সময়ের বর্গের সমানুপাতিক। কোনো পড়ন্ত বস্তু t সময়ে h দূরত্ব অতিক্রম করলে গাণিতিক নিয়মে লেখা যায়, $h \propto t^2$।

ব্যাখ্যা : অভিকর্ষের টানে স্থিতাবস্থা হতে বাধাহীন পথে নিচের দিকে পড়বার সময় কোনো বস্তু যদি প্রথম সেকেন্ডে h দূরত্ব অতিক্রম করে তবে বস্তুটি দুই সেকেন্ডে $2^2 \times h$, তিন সেকেন্ডে $3^2 \times h$ ইত্যাদি দূরত্ব অতিক্রম করবে।

কাজেই বস্তুটি t_1 ও t_2 সেকেন্ডে যথাক্রমে h_1 ও h_2 দূরত্ব অতিক্রম করলে,

$$\frac{h_1}{t_1^2} = \frac{h_2}{t_2^2} \text{ বা, } \frac{h_1}{h_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2} \quad \therefore h \propto t^2$$

ক্রিয়াকর্ম : একটি লোহার বল এবং একটি কাগজ ছাদের ওপর থেকে নিচে ফেলে দিলে একত্রে মাটিতে পড়ে না কেন?

বাতাসের মধ্যে বস্তুদ্বয় পতনের সময় এদের ওজনের বিপরীতে বাতাসের প্লবতা (buoyancy) কাজ করে। ভারী বস্তুর চেয়ে হালকা বস্তুতে প্লবতা বা উর্ধ্বমুখি বল বেশি হওয়ায় তা দেরিতে মাটিতে পৌঁছায়।

কাজ : যে কোনো উচ্চতা থেকে পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে অভিকর্ষীয় ত্বরণ সুষম থাকে না—ব্যাখ্যা কর।

অভিকর্ষীয় ত্বরণ উচ্চতার ওপর নির্ভর করে। তাই বিভিন্ন উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ বিভিন্ন হয়। কম উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ বেশি এবং বেশি উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ কম।

৬.২ ব্যবহারিক
Experimental

পরীক্ষণের নাম :	পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে গ্যালিলিওর সূত্রের যাচাই
পিরিয়ড : ২	Verification of Galileo's law of a falling body

তত্ত্ব (Theory) : যেকোনো বস্তুকে ওপর থেকে ছেড়ে দিলে অভিকর্ষের ক্রিয়ায় নিচের দিকে পড়ে। সাধারণ-ভাবে বস্তু যে উচ্চতা থেকে পড়ে তা পৃথিবীর ব্যাসার্ধের তুলনায় অত্যন্ত ক্ষুদ্র। এজন্য বস্তুর নিম্নমুখি গতির ক্ষেত্রে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান স্থির থাকে বলে ধরা যায়। অভিকর্ষের ক্রিয়ায় পতনশীল বস্তুর ওপর যদি বায়ুর বাধা না থাকে অর্থাৎ বস্তু যদি অবাধে পতনশীল হয়, তবে নিম্নোক্ত সহজ সূত্রগুলো ওই গতির ক্ষেত্রে প্রযোজ্য হয়।

স্থিরাবস্থা থেকে অবাধে পতনশীল বস্তুর ক্ষেত্রে—

১. শূন্যস্থানে সকল বস্তুই সমান দ্রুততায় নিচে নামে।
২. কোনো নির্দিষ্ট সময়ে বস্তু যে বেগ লাভ করে তা ওই সময়ের সমানুপাতিক হয়।
৩. কোনো নির্দিষ্ট সময়ে বস্তু যে দূরত্ব অতিক্রম করে তা ওই সময়ের বর্গের সমানুপাতিক হয়।

প্রথম সূত্র : একই উচ্চতায় স্থির অবস্থান থেকে বিনা বাধায় বিভিন্ন আকারের সকল পড়ন্ত বস্তু সমান সময়ে সমান দূরত্ব অতিক্রম করে।

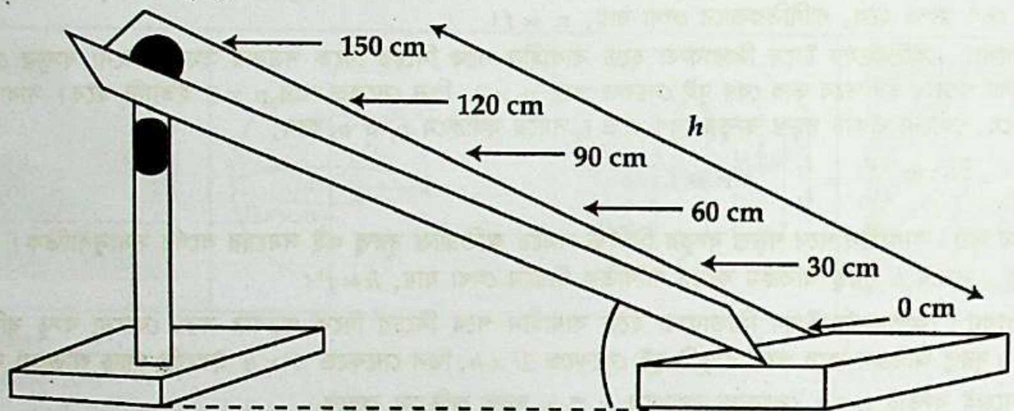
দ্বিতীয় সূত্র : স্থির অবস্থা থেকে বিনা বাধায় কোনো পড়ন্ত বস্তুর বেগ সময়ের সমানুপাতিক। অর্থাৎ পড়ন্ত বস্তুটি t_1 সময়ে v_1 বেগ, t_2 সময়ে v_2 বেগ এবং t_3 সময়ে v_3 বেগ প্রাপ্ত হলে,

$$\frac{v_1}{t_1} = \frac{v_2}{t_2} = \frac{v_3}{t_3} = \text{ধ্রুবক হবে বা } \frac{v}{t} = \text{ ধ্রুবক বা } v \propto t \text{ হবে।}$$

তৃতীয় সূত্র : স্থির অবস্থান থেকে বিনা বাধায় কোনো পতনশীল বস্তু নির্দিষ্ট সময়ে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তা ওই সময়ের বর্গের সমানুপাতিক। ধরা যাক, কোনো পড়ন্ত বস্তু t_1 সময়ে h_1 দূরত্ব, t_2 সময়ে h_2 দূরত্ব এবং t_3 সময়ে h_3 দূরত্ব অতিক্রমে করল। তাহলে,

$\frac{h_1}{t_1^2} = \frac{h_2}{t_2^2} = \frac{h_3}{t_3^2} =$ ধ্রুবক হবে বা $\frac{h}{t^2} =$ ধ্রুবক বা $h \propto t^2$ হবে।

পরীক্ষার সাহায্যে সূত্রগুলোর প্রমাণ :



চিত্র ৬১

যন্ত্রপাতি : ১. একটি আনত মসৃণ তল, ২. একটি মিটার স্কেল, ৩. একটি স্টপওয়াচ, ৪. কয়েকটি মার্বেল।

পরীক্ষণ পদ্ধতি (Experimental procedure) :

১. একটি আনত তলকে ভূমি বা টেবিলের ওপর চিত্রানুযায়ী স্থাপন কর। আনত তলটির শীর্ষবিন্দু এর উচ্চতা ভূমি থেকে মিটার স্কেল দিয়ে পরিমাপ কর। এবার একটি চকের সাহায্যে আনত তলের উপর 30 cm ব্যবধানে কয়েকটি দাগ দাও।

২. প্রথমে একটি মার্বেলকে উপরের দাগাঙ্কিত বিন্দু হতে ছাড়ার সাথে সাথে স্টপওয়াচ চালু কর। মার্বেলটি ভূমি বা টেবিল স্পর্শ করার সাথে সাথে স্টপওয়াচ বন্ধ কর। স্টপওয়াচ থেকে সময় (t_1) এবং মিটার স্কেলের সাহায্যে মার্বেল কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব (h_1) নির্ণয় কর। এই পদ্ধতিতে আরো দুইবার পাঠ নিয়ে তিনটি পাঠের গড় মান নির্ণয় কর।

৩. পুনরায় মার্বেলটিকে উপর থেকে দ্বিতীয় দাগাঙ্কিত বিন্দু হতে ছাড়ার সাথে সাথে স্টপওয়াচ চালু কর। মার্বেলটি ভূমি বা টেবিল স্পর্শ করার সাথে সাথে স্টপওয়াচ বন্ধ কর। স্টপওয়াচ থেকে সময় (t_2) এবং মিটার স্কেলের সাহায্যে মার্বেল কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব (h_2) নির্ণয় কর। এই পদ্ধতিতে আরো দুইবার পাঠ নিয়ে তিনটি পাঠের গড় মান নির্ণয় কর।

৪. একইভাবে মার্বেলটিকে অন্যান্য দাগাঙ্কিত বিন্দু হতে ছেড়ে দিয়ে ভূমি পর্যন্ত দূরত্ব এবং সময় পরিমাপ কর এবং নিচের ছকে তা লিপিবদ্ধ কর।

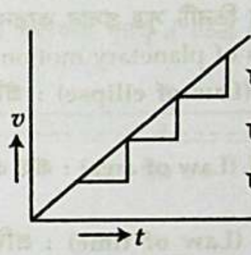
পরীক্ষণ ছক–১

পর্যবেক্ষণ সংখ্যা	দূরত্ব h (cm)	সময় t (s)	গড় সময় t (s)	বেগ $v = \frac{s}{t}$ (cms^{-1})	t^2 (s^2)	$\frac{h}{t^2}$ (cms^{-2})
1	150					
2	120					
3	90					
4	60					
5	30					
6	0					

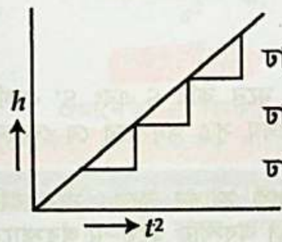
হিসাব :

I. $v—t$ লেখচিত্র অঙ্কন :

X অক্ষ বরাবর t এবং Y অক্ষ বরাবর v নিয়ে লেখচিত্র অঙ্কন করলে মূল বিন্দুগামী একটি সরলরেখা পাওয়া যায়। এই সরলরেখার বিভিন্ন বিন্দুতে কয়েকটি ঢাল নির্ণয় করা হয়। দেখা যায় যে,



প্রতি ক্ষেত্রে ঢাল $= \frac{v}{t}$ = ধ্রুব রাশি হয় বা $v \propto t$ হয়।



II. $h—t^2$ লেখচিত্র অঙ্কন :

X অক্ষ বরাবর t^2 এবং Y অক্ষ বরাবর h নিয়ে লেখচিত্র অঙ্কন করলে মূল বিন্দুগামী একটি সরলরেখা পাওয়া যায়। এই সরলরেখার বিভিন্ন বিন্দুতে কয়েকটি ঢাল নির্ণয় করা হয়। দেখা যায় যে,

প্রতি ক্ষেত্রে $\frac{h}{t^2} = \frac{1}{ঢাল}$ = ধ্রুবক হয় বা h = ধ্রুবক $\times t^2$ হয় বা

$h \propto t^2$ হয়।

ফলাফল :

১. প্রাপ্ত মান থেকে দেখা যায় সমান সময়ে মার্বেলটি সমান দূরত্ব অতিক্রম করে। অতএব প্রথম সূত্রটি প্রমাণিত হলো।

২. $v—t$ লেখচিত্র হতে দেখা যায় যে, $v \propto t$ হয় অতএব দ্বিতীয় সূত্রটি প্রমাণিত হলো।

৩. $h—t^2$ লেখচিত্র হতে দেখা যায় যে, $h \propto t^2$ হয় অতএব তৃতীয় সূত্রটি প্রমাণিত হলো।

সতর্কতা এবং আলোচনা :

(১) প্রতিটি মার্বেল আনত তলের শীর্ষে একই বিন্দু থেকে ছাড়তে হবে।
(২) মার্বেল পতনে যেন কোনো বাধার সৃষ্টি না হয় সেদিকে লক্ষ রাখতে হবে।
(৩) দূরত্ব এবং সময় সঠিকভাবে পরিমাপ করতে হবে।
(৪) পরীক্ষণীয় স্থানে বাতাস যেন মার্বেল পতনে বাধার সৃষ্টি করতে না পারে সেদিকে লক্ষ রাখতে হবে।

গাণিতিক উদাহরণ ৬.১

১। অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে আনত 60 m দৈর্ঘ্যের একটি ঘর্ষণহীন তলে একটি মার্বেলকে সর্বোচ্চ অবস্থান থেকে ছেড়ে দেয়া হলো। প্রথম সেকেন্ডে মার্বেলটি 2·5 m দূরত্ব অতিক্রম করলে ভূমিতে পৌঁছতে মার্বেলটির কত সময় লাগবে ?

আমরা জানি,

$h = at^2$

বা, $2.5 = a(1)^2$

$a = 2.5\ \text{ms}^{-2}$

এখানে, $h = 2.5$ m

ভূমিতে পৌঁছতে t সময় লাগে,

$\therefore h = at^2$

বা, $60 = at^2$

বা, $at^2 = 60$

বা, $t^2 = \frac{60}{a}$

$\therefore t = \sqrt{\frac{60}{a}} = \sqrt{\frac{60}{2.5}} = 4.9$ sec

এখানে, $h = 60$ m, $t = ?$

৬.৩ গ্রহের গতি সম্পর্কিত কেপলারের সূত্র

Kepler's laws about motion of the planets

অতি প্রাচীনকাল হতে গ্রহ-নক্ষত্রের গতিবিধি সম্পর্কে বিজ্ঞানীদের যথেষ্ট আগ্রহ ছিল। ষোড়শ শতাব্দীতে ডেনমার্কের জ্যোতির্বিদ টাইকো ব্রে (Tycho-Brahe) মঙ্গলগ্রহের গতিবিধি লক্ষ করেন এবং কিছু তথ্য সংগ্রহ করেন।

তাঁর এ গবেষণা লব্ধ তথ্য এবং অন্যান্য পর্যবেক্ষণের সাহায্যে 1618 খ্রিস্টাব্দে ডেনমার্কের অপর জ্যোতির্বিদ জোহান কেপলার (Johann Kepler) সিদ্ধান্তে উপনীত হন যে, গ্রহগুলো কোনো এক বলের প্রভাবে সূর্যকে কেন্দ্র করে অবিরাম ঘুরছে। এই সম্পর্কে তিনি তিনটি সূত্র প্রদান করেন। তাঁর নাম অনুসারে এই তিনটি সূত্রকে কেপলার-এর গ্রহ সম্পর্কীয় গতিসূত্র (Kepler's laws of planetary motion) বলা হয়। সূত্র তিনটি নিম্নে আলোচিত হলো—

(১) **উপবৃত্ত সূত্র (Law of ellipse)** : প্রতিটি গ্রহ সূর্যকে উপবৃত্তের ফোকাসে রেখে একটি উপবৃত্তাকার পথে প্রদক্ষিণ করছে।

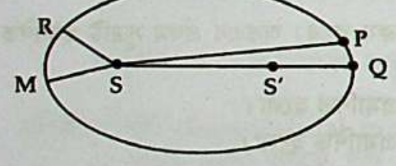
(২) **ক্ষেত্রফল সূত্র (Law of area)** : গ্রহ এবং সূর্যের সংযোগকারী ব্যাসার্ধ রেখা সমান সময়ে সমান ক্ষেত্রফল অতিক্রম করে।

(৩) **সময়ের সূত্র (Law of time)** : প্রতিটি গ্রহের পর্যায়কালের বর্গ সূর্য হতে তার গড় দূরত্বের ঘনফলের সমানুপাতিক। অর্থাৎ $T^2 \propto a^3$।

ব্যাখ্যা :

১ম সূত্র : এই সূত্র সূর্যের চারদিকে গ্রহের কক্ষপথের আকৃতি প্রকাশ করে। মনে করি S এবং S′ একটি উপবৃত্তের দুটি নাভি। ধরি S নাভিটি সূর্যের ফোকাসে অবস্থিত [চিত্র ৬·২]। কেপলারের প্রথম সূত্র অনুসারে যে কোনো গ্রহ সূর্যকে S বিন্দুতে রেখে একটি উপবৃত্তাকার পথে ঘুরছে।

২য় সূত্র : এই সূত্র কক্ষীয় বেগ এবং সূর্য ও গ্রহের মধ্যবর্তী দূরত্বের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করে। মনে করি কোনো গ্রহ t সময়ে P অবস্থান হতে Q অবস্থানে আসে। যদি একই সময়ে ওই গ্রহ M অবস্থান হতে R অবস্থানে আসে, তবে কেপলারের দ্বিতীয় সূত্র হতে পাই, PQS-এর ক্ষেত্রফল এবং MSR-এর ক্ষেত্রফল সমান হবে।



চিত্র ৬২

৩য় সূত্র : এই সূত্র গ্রহের কক্ষপথের আকার এবং অতিক্রান্ত সময়ের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করে। মনে করি T গ্রহের পর্যায়কাল অর্থাৎ সূর্যকে একবার প্রদক্ষিণ করতে যে সময় লাগে তার মান T। যদি পরাক্ষের দৈর্ঘ্য $2a$ হয়, তবে কেপলারের তৃতীয় সূত্র হতে আমরা পাই, $T^2 \propto 8a^3$

যেহেতু 8 একটি ধ্রুব সংখ্যা, সেহেতু, $T^2 \propto a^3$

উক্ত সমীকরণ হতে কেপলারের তৃতীয় সূত্রটিকে সামান্য পরিবর্তন করে নিম্নরূপে লেখা যায়—

প্রতিটি গ্রহের পর্যায়কালের বর্গ গ্রহের কক্ষপথের পরাক্ষের অর্ধেকের ঘন-এর সমানুপাতিক।

উপরের সূত্র থেকে দেখা যায় যে, কোনো গ্রহের আবর্তন কাল এবং সূর্য থেকে এর গড় দূরত্ব জানা থাকলে অন্য যেকোনো গ্রহের আবর্তন কাল পর্যবেক্ষণ করে সূর্য থেকে এই দ্বিতীয় গ্রহের গড় দূরত্ব নির্ণয় করা যায়।

কেপলারের সূত্র বিশ্লেষণে নিম্নলিখিত বিষয়গুলি লক্ষণীয় :

(১) গ্রহের আবর্তনকাল এর ভরের ওপর নির্ভর করে না।

(২) সূর্য থেকে গ্রহের গড় দূরত্ব যত কম হয় অর্থাৎ গ্রহ সূর্যের যত নিকটে থাকে এর আবর্তনকাল তত কম হয়।

৬·৪ মহাকর্ষ
Gravitation

মহাকর্ষ বল (Gravitational force) : বিখ্যাত বিজ্ঞানী স্যার আইজাক নিউটন আবিষ্কার করেন যে, এ মহাবিশ্বের যেকোনো দুটি বস্তুকণার মধ্যে একটি পারস্পরিক আকর্ষণ বল রয়েছে। দুটি বস্তুকণার মধ্যকার এই পারস্পরিক আকর্ষণ বলকে কখনও মহাকর্ষ আবার কখনও অভিকর্ষ বলে। এ দুটি বলের মধ্যে পার্থক্য রয়েছে। তাহলে প্রশ্ন জাগে মহাকর্ষ ও অভিকর্ষ কী ?

মহাকর্ষ : নভোমণ্ডলে অবস্থিত দুটি বস্তু বা বস্তুকণার মধ্যকার পারস্পরিক আকর্ষণ বলকে মহাকর্ষ বলে।

অভিকর্ষ : পৃথিবী এবং অন্য একটি বস্তু বা বস্তুকণার মধ্যকার আকর্ষণ বলকে অভিকর্ষ বা মাধ্যাকর্ষণ বলে।

উদাহরণ : সূর্য ও চন্দ্রের মধ্যকার আকর্ষণ বল মহাকর্ষ; অন্যদিকে পৃথিবী এবং গাছের আমের মধ্যকার আকর্ষণ বল অভিকর্ষ।

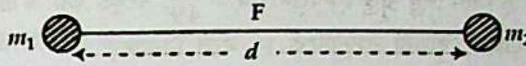
৬·৪·১ নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র
Newton's law of gravitation

1687 খ্রিস্টাব্দে বিখ্যাত বিজ্ঞানী স্যার আইজাক নিউটন আপেল পতন এবং গ্রহ উপগ্রহের গতি পর্যবেক্ষণ করে মহাকর্ষের যে সূত্র আবিষ্কার করেন তা নিম্নোক্তভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায় :

সূত্র : মহাবিশ্বের যেকোনো দুটি বস্তুকণা পরস্পরকে আকর্ষণ করে। এই আকর্ষণ বল বস্তু দুটির ভরের গুণফলের সমানুপাতিক এবং এদের মধ্যকার দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক।

ব্যাখ্যা : নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র বিশ্লেষণ করলে দেখা যায় যে এই সূত্রে তিনটি অংশ আছে। দুটি অংশ বলের পরিমাণ সম্বন্ধীয় এবং একটি অংশ বলের প্রকৃতি সম্বন্ধীয়।

মনে করি, দুটি বস্তুকণার ভর যথাক্রমে m_1 ও m_2 এবং এদের মধ্যকার দূরত্ব d [চিত্র ৬·৩]। যদি তাদের মধ্যে আকর্ষণ বল F হয়, তাহলে মহাকর্ষ সূত্রানুসারে



চিত্র ৬·৩

(i) $F \propto m_1 m_2$

(ii) $F \propto \frac{1}{d^2}$

(i) ও (ii)-কে যুক্ত করলে

$$F \propto \frac{m_1 m_2}{d^2} \quad \text{বা,} \quad F = \text{ধ্রুবক}\ \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

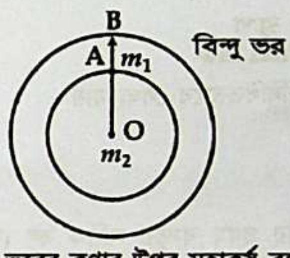
$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (6.1)$$

এখানে G = মহাকর্ষ ধ্রুবক বা সর্বজনীন ধ্রুবক। ইহা বস্তু দুটির মধ্যকার প্রকৃতি, যেমন প্রবেশ্যতা, প্রবণতা, দিকদর্শিতা এবং বস্তুকণা দুটির ভৌত অবস্থার ওপর নির্ভর করে না। G এর মান $6{\cdot}67 \times 10^{-11}\ \text{Nm}^2\,\text{kg}^{-2}$

গাণিতিক উদাহরণ ৬.২

১। একটি সুষম গোলকের ভর 1×10^4 kg এবং ব্যাসার্ধ 1 m, গোলক কর্তৃক গোলকের কেন্দ্র হতে 0·5 m দূরত্বে অবস্থিত m_1 ভরের একটি কণার উপর মহাকর্ষ বলের মান কত ? [$G = 6{\cdot}673 \times 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2$]

[BUET Admission Test, 2016-17]



চিত্র অনুযায়ী

OB = 1 m

OA = 0·5 m

O বিন্দু থেকে OA দূরত্বে অবস্থিত m_1 ভরের কণার উপর মহাকর্ষ বলের মান OA ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গোলক ও m_1 কণার মধ্যবর্তী মহাকর্ষ বলের সমান।

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi(OB)^3} = \frac{10^4}{\frac{4}{3} \times \pi \times (1)^3}$$

$$m_2 = V\rho = \frac{4}{3}\pi\,(OA)^3 \times \rho$$

$$= \frac{4}{3}\pi\,(0{\cdot}5)^3 \times \frac{10^4}{\frac{4}{3}\pi\,(1)^3} = 10^4 \times (0{\cdot}5)^3 = 1250\ \text{kg}$$

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2} = \frac{Gm_1 \times 1250}{(0{\cdot}5)^2}$$

$$= \frac{6{\cdot}673 \times 10^{-11} \times 1250\, m_1}{(0{\cdot}5)^2} = 3{\cdot}34 \times 10^{-7}\, m_1\ \text{N}$$

২। M ভরের বস্তুকে কেটে m ও $(M - m)$ ভরের বস্তুতে রূপান্তরিত করা হলো। $\frac{M}{m}$ এর অনুপাত কী হলে এদের মধ্যে মহাকর্ষ বল সর্বোচ্চ হবে ? [BUET Admission Test, 2015-16]

$$F = Gm\frac{(M - m)}{d^2}$$

F এর মান সর্বোচ্চ হবে যদি $m\,(M - m)$ সর্বোচ্চ হয়।

$\therefore\ m(M - m) = mM - m^2$

$$\frac{d}{dm}(mM - m^2) = M - 2m$$

সর্বোচ্চ মানের জন্য, $M - 2m = 0$

বা, $m = \frac{M}{2}\ \therefore\ \frac{M}{m} = \frac{M}{M/2} = 2$

৩। যদি পৃথিবীর ভর চন্দ্রের ভরের 49 গুণ এবং তাদের কেন্দ্রে মধ্যবর্তী দূরত্ব $R = 40 \times 10^4$ km হয় তবে চন্দ্র ও পৃথিবীর সংযোগকারী রেখার কোথায় কোন বস্তুর ওপর উভয়ের টান সমান হবে ?

[RUET Admission Test, 2015-16]

ধরি পৃথিবী থেকে x দূরত্বে টান সমান হবে,

পৃথিবীর ভর = M, চন্দ্রের ভর = $\frac{M}{49}$, বস্তুর ভর = m

এখন, পৃথিবী বস্তুটিকে F_1 বলে টানলে,

$$F_1 = \frac{GMm}{x^2}$$

চন্দ্র বস্তুটিকে F_2 বলে টানলে $F_2 = \dfrac{G \times \frac{M}{49} m}{(40 \times 10^4 \times 10^3 - x)^2}$

$$F_1 = F_2 \text{ হলে, } \frac{G \times M/49\ m}{(40 \times 10^7 - x)^2} = \frac{GMm}{x^2}$$

$$\frac{1}{49\,(40 \times 10^7 - x)^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$x^2 = (40 \times 10^7 - x)^2 \times 49$$

$$x = 7(40 \times 10^7 - x) = 7 \times 40 \times 10^7 - 7x$$

$$\therefore \quad 8x = 7 \times 40 \times 10^7 = 35 \times 10^7 \text{ m}$$

৬.৪.২ মহাকর্ষ সূত্রের ভেক্টর রূপ
Vector form of gravitational law

মহাকর্ষ সূত্রকে ভেক্টর রাশি দ্বারা নিম্নলিখিতভাবে লেখা যায় :

$$\vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\,\vec{r}_{12}$$

এখানে $\vec{F}_{21}$ হচ্ছে দ্বিতীয় বস্তুর উপর প্রথম বস্তুর সদিক বল (আকর্ষণ), $\vec{r}_{12}$ হচ্ছে প্রথম বস্তু হতে দ্বিতীয় বস্তুর সদিক দূরত্ব।

যেহেতু প্রথম বস্তু আকর্ষণ করে দ্বিতীয় বস্তুকে নিজের দিকে টানছে অর্থাৎ $\vec{F}_{21}$ এবং দিক $\vec{r}_{12}$ এর বিপরীত, সুতরাং উপরোক্ত সমীকরণে ঋণাত্মক চিহ্ন ব্যবহৃত হয়েছে। কিন্তু মহাকর্ষ বলের মান ধ্রুবক। সুতরাং ঋণাত্মক চিহ্ন ব্যবহৃত হয়নি।

৬.৪.৩ মহাকর্ষ বলের প্রকৃতি
Nature of gravitational force

(i) মহাকর্ষ বল দুটি বস্তুর মধ্যকার পারস্পরিক আকর্ষণ বল।

(ii) মহাকর্ষ বল বস্তু দুটির সংযোগ সরলরেখা বরাবর ক্রিয়া করে।

(iii) মহাকর্ষ বল বস্তুদ্বয়ের মাধ্যমের প্রকৃতির ওপর নির্ভর করে না।

(iv) মহাকর্ষ বল বস্তুদ্বয়ের ভরের গুণফলের সমানুপাতিক হয়।

উপর থেকে কোনো বস্তুকে অবাধে নিচে পড়তে দিলে তা নিচে পড়ে অর্থাৎ পৃথিবী পৃষ্ঠে পড়ে। আম গাছের আম সব সময় মাটিতে পতিত হয়। কিন্তু কখনও কি ভেবে দেখেছ, আম কেন গাছ থেকে নিচে পড়ে, ওপরের দিকে যায় না? আসলে কোনো বস্তুকে পৃথিবী তার কেন্দ্রের দিকে টানে। আবার বস্তুটিও পৃথিবীকে সমান ও বিপরীতমুখি বলে আকর্ষণ করে। যেকোনো পার্থিব বস্তুর তুলনায় পৃথিবীর ভর বহুগুণে বেশি হয়। তাই এই বলের ক্রিয়ায় পৃথিবীর গতি উপেক্ষণীয় হয়, তাই সব সময় বস্তুটি পৃথিবীর দিকে পড়ে, পৃথিবী বস্তুর দিকে এগিয়ে যায় না। সেজন্য গাছ থেকে আম নিচে পড়ে, ওপরের দিকে যায় না।

ওপরের আলোচনায় স্পষ্ট যে, প্রত্যেক বস্তুকে পৃথিবী তার কেন্দ্রের দিকে টানে বা আকর্ষণ করে। এই আকর্ষণ বলই হলো বস্তুর ওজন। অর্থাৎ ওজন হলো কোনো বস্তুর ওপর প্রযুক্ত অভিকর্ষ। এই ওজন সর্বদা বস্তুর ভারকেন্দ্র দিয়ে খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করে।

m ভরের বস্তুর ওজন W হলে আমরা লেখতে পারি,

$$W = mg \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.2)$$

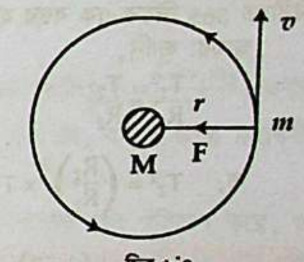
অর্থাৎ ওজন = ভর × অভিকর্ষজ ত্বরণ

অভিকর্ষজ ত্বরণের মান পরিবর্তিত হলে বস্তুর ওজনও সমহারে পরিবর্তিত হয়। অর্থাৎ বস্তুর ওজন পরিবর্তনশীল, বস্তুর ওজন স্থান নিরপেক্ষ নয়। বস্তুর ওজন তার একটি মৌলিক বৈশিষ্ট্য নয়। বস্তুর ওজন থাকতে পারে, নাও থাকতে পারে।

কোনো একটি বস্তু যে পরিমাণ বল দ্বারা পৃথিবীর কেন্দ্রের দিকে আকৃষ্ট হয় তাকে তার ওজন বা ভার বলে।

৬.৫ নিউটনের সূত্র থেকে কেপলারের সূত্র
Kepler's law from Newton's law

মনে করি সূর্যকে কেন্দ্র করে r ব্যাসার্ধের কক্ষপথে একটি গ্রহ v দ্রুতিতে আবর্তন করছে [চিত্র ৬.৪]। সূর্যের ভর M, গ্রহের (পৃথিবী) ভর m এবং গ্রহের পর্যায়কাল T হলে,



চিত্র ৬.৪

নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র অনুযায়ী দুটি বস্তুর মধ্যকার মহাকর্ষ বল

$$F_g = \frac{GMm}{r^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.3)$$

এখানে G = মহাকর্ষীয় ধ্রুবক

আবার গ্রহের বৃত্তাকার গতির জন্য প্রয়োজনীয় কেন্দ্রমুখি বল

$$F_C = \frac{mv^2}{r} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.4)$$

গ্রহের উপর পৃথিবীর আকর্ষণ বলই এই কেন্দ্রমুখি বল যোগান দেয়।

$\therefore \quad F_g = F_C$

বা, $\dfrac{GMm}{r^2} = \dfrac{mv^2}{r}$

বা, $\dfrac{GM}{r} = v^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.5)$

উপগ্রহটির পর্যায়কাল T হলে অর্থাৎ r ব্যাসার্ধের কক্ষপথে সূর্যকে একবার আবর্তন করতে T সময় প্রয়োজন হলে এর রৈখিক বেগ হবে $v = \dfrac{2\pi r}{T}$

$\therefore$ (6.5) নং সমীকরণে মান বসিয়ে পাই

$$\frac{GM}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2$$

বা, $\dfrac{GM}{r} = \dfrac{4\pi^2 r^2}{T^2}$

$\therefore \quad T^2 = \left(\dfrac{4\pi^2}{GM}\right) \times r^3 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.6)$

এই সমীকরণে $\left(\dfrac{4\pi^2}{GM}\right)$ ধ্রুবরাশি।

$\therefore \quad T^2 =$ ধ্রুবক $\times r^3$

$T^2 \propto r^3 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.7)$

অর্থাৎ গ্রহের পর্যায়কালের বর্গ সূর্য হতে গ্রহের কক্ষপথের মধ্যবর্তী দূরত্বের ঘন-এর সমানুপাতিক। ইহাই কেপলারের সূত্র (তৃতীয় সূত্র)।

৬.৫.১ সূর্যের ভর নির্ণয়
Determination of mass of the sun

মনে করি, সূর্যের ভর M এবং m ভরের একটি গ্রহের পর্যায়কাল T এবং গ্রহটি সূর্য হতে r দূরে থেকে সূর্যের চারদিকে এটি ω কৌণিক বেগে বৃত্তাকার পথে পরিভ্রমণ করে। তাহলে গ্রহের কেন্দ্রমুখি বলের জন্য লেখা যায়,

$$\frac{GMm}{r^2} = mr\omega^2 = \frac{mr4\pi^2}{T^2}$$

$$\therefore \quad M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

এখানে, $T = 365$ দিন $= 365 \times 24 \times 3600$ s, $r = 1.5 \times 10^{11}$ m, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2}। এই মানগুলি উপরোক্ত সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$M = \frac{4 \times 9.87 \times (1.5 \times 10^{11})^3}{6.67 \times 10^{-11} \times (365 \times 24 \times 3600)^2}$$

$$= 2 \times 10^{30} \text{ kg}$$

গাণিতিক উদাহরণ ৬.৩

১। সূর্যের চারদিকে আবর্তনরত মঙ্গলগ্রহের কক্ষপথের ব্যাসার্ধ পৃথিবীর কক্ষপথের ব্যাসার্ধের 1.53 গুণ। পৃথিবীতে 365 দিনে এক বছর হলে মঙ্গলগ্রহে কত দিনে এক বছর হবে ?

আমরা জানি,

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3}$$

বা, $T_2^2 = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 \times T_1^2$

$\therefore \quad T_2 = \left\{\left(\frac{1.53}{1}\right)^3 \times (365)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = 691$ d

এখানে,
পৃথিবীর পর্যায়কাল, $T_1 = 365$ d
মঙ্গলগ্রহের পর্যায়কাল, $T_2 = ?$
পৃথিবী ও মঙ্গলগ্রহের কক্ষপথের ব্যাসার্ধ R_1 ও R_2 হলে, $\frac{R_2}{R_1} = \frac{1.53}{1}$

হিসাব কর : কোনো কারণে সূর্য থেকে পৃথিবীর গড় দূরত্ব কমে অর্ধেক হলে বছরের দৈর্ঘ্য বা পৃথিবীর প্রদক্ষিণ কাল কত হবে তা বের কর।

কেপলারের তৃতীয় সূত্র অনুসারে, প্রতিটি গ্রহের পর্যায়কালের বর্গ সূর্য হতে তার গড় দূরত্বের ঘন-এর সমানুপাতিক। অর্থাৎ $T^2 \propto r^3$ যেখানে, T = পর্যায়কাল এবং r = গ্রহ হতে সূর্যের দূরত্ব।

এক্ষেত্রে, মনে করা যাক, সূর্য হতে পৃথিবীর বর্তমান দূরত্ব = r এবং প্রদক্ষিণ কাল, $T = 365$ d, দূরত্ব কমে $r_1 = \frac{r}{2}$ হলে ধরা যাক প্রদক্ষিণ কাল $= T_1$।

এখন, কেপলারের সূত্রানুসারে,

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{T_1^2}{r_1^3}$$

বা, $T_1^2 = T^2 \frac{r_1^3}{r^3}$

$$T_1 = T\sqrt{\frac{r_1^3}{r^3}} = 365 \times \sqrt{\frac{\left(\frac{r}{2}\right)^3}{r^3}}$$

$$= 365 \times \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{365}{2\sqrt{2}} = 129 \text{ d}$$

নিজে কর : পৃথিবীর ব্যাসার্ধ হঠাৎ অর্ধেক হয়ে গেল কিন্তু ভর অপরিবর্তিত রইল, সেক্ষেত্রে ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান কী পরিবর্তন হবে ?

আমরা জানি, পৃথিবীর ভর M এবং ব্যাসার্ধ R হলে ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ,

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

এখন, ভর M স্থির থেকে ব্যাসার্ধ অর্ধেক অর্থাৎ $\frac{R}{2}$ হলে ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ,

$$g' = \frac{GM}{\left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{4GM}{R^2} = 4g$$

সুতরাং অভিকর্ষজ ত্বরণ চারগুণ হবে।

৬·৬ জড়তা ভর ও মহাকর্ষীয় ভর
Inertial mass and gravitational mass

জড়তা ভর (Inertial mass) : নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র থেকে আমরা জানি, $F = ma$। এখানে F হলো প্রযুক্ত বল, m হলো বস্তুর ভর ও a বস্তুর সৃষ্ট ত্বরণ।

ওপরের সম্পর্ক থেকে দেখা যায় যে ধ্রুব প্রযুক্ত বলের জন্য বস্তুর ত্বরণ বস্তুর ভরের ওপর নির্ভর করে। অর্থাৎ,

$$a \propto \frac{1}{m} \qquad [\because F = \text{ধ্রুবক}]$$

বস্তুর এই ভর m-কে জড়তা ভর বলে। এই ভর বস্তুর এমন একটি ধর্ম যা ত্বরণকে বাধা দেয়। সুতরাং, জড়তা ভর বস্তুর জড়তার পরিমাপ এবং এর মান প্রযুক্ত বল ও সৃষ্ট ত্বরণের অনুপাতের সমান।

মহাকর্ষীয় ভর (Gravitational mass) : নিউটনের মহাকর্ষীয় সূত্র থেকে আমরা জানি, $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$। এখানে m_1 ও m_2 দুটি বস্তুর ভর এবং r হলো এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব। এই সম্পর্ক থেকে দেখা যায় যে, বস্তুর ওপর মহাকর্ষীয় বল বা টান বস্তুর ভরের সমানুপাতিক।

এই সূত্র ব্যবহার করে কোনো বস্তুর ওপর কোনো বৃহৎ বস্তুর (যেমন পৃথিবী) আকর্ষণ বল পরিমাপ করে, ওই বস্তুর ভর নির্ণয় করা যায়। বস্তুর এই ভরকে **মহাকর্ষীয় ভর** বলে। বস্তুর মহাকর্ষীয় ভর এমন একটি ভর যার ওপর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে মহাকর্ষীয় টান নির্ভর করে।

৬·৭ মহাকর্ষীয় ধ্রুবক ও অভিকর্ষজ ত্বরণ
Gravitational constant and acceleration due to gravity

৬·৭·১ মহাকর্ষীয় ধ্রুবক
Gravitational constant

নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র অনুযায়ী M ও m ভরের দুটি বস্তুর মধ্যে আকর্ষণ বল,

$F = \frac{GMm}{d^2}$, এখানে G = মহাকর্ষীয় ধ্রুবক এবং d = বস্তু দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব

মনে করি বস্তু দুটির মধ্যকার ভর এক একক এবং তাদের মধ্যবর্তী দূরত্বও এক একক অর্থাৎ $M = 1$ একক, $m = 1$ একক এবং $d = 1$ একক হলে

$$F = \frac{G \times 1 \times 1}{1 \times 1}$$

বা, $F = G$ ... ... (6.8)

এই সমীকরণ অনুযায়ী মহাকর্ষীয় ধ্রুবককে নিম্নলিখিত উপায়ে সংজ্ঞায়িত করতে পারি :

একক ভরবিশিষ্ট দুটি বস্তুকণা একক দূরত্বে থেকে যে পরিমাণ বল দ্বারা পরস্পরকে আকর্ষণ করে তার সংখ্যাগত মানকে মহাকর্ষীয় ধ্রুবক বলে। G এর মান বস্তুর ভরের ওপর বা ভরকেন্দ্র হতে বস্তুর দূরত্বের ওপর নির্ভর করে না। আবার বস্তুদ্বয়ের মধ্যবর্তী মাধ্যমের প্রকৃতি, উপাদানের ওপরও নির্ভর করে না। আবার যেহেতু মহাকর্ষ বল কেলাসের দিকদর্শিতা এবং প্রবেশ্যতার উপর নির্ভর করে না, তাই G এর মান দিকদর্শিতা ধর্মের ওপর নির্ভর করে না। এই জন্য G-কে সর্বজনীন ধ্রুবক বলে।

এস. আই. পদ্ধতিতে এর মান $6{\cdot}67 \times 10^{-11}\ N\text{-}m^2kg^{-2}$

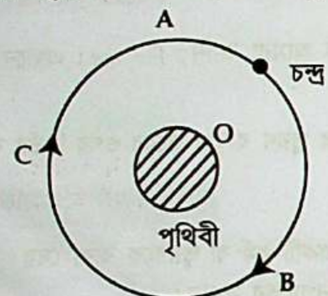
মহাকর্ষীয় ধ্রুবকের মাত্রা : $[G] = [M^{-1}T^{-2}L^3]$

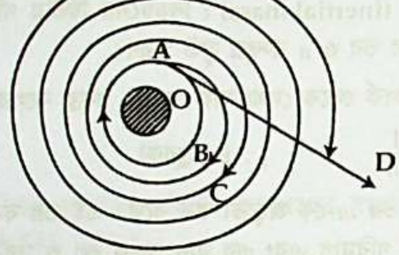
মহাকর্ষীয় ধ্রুবক, G কে সর্বজনীন ধ্রুবক বলে।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : যদি মহাকর্ষীয় ধ্রুবক G-এর মান ধীরে ধীরে কমতে থাকে, তবে তা চন্দ্রের গতিতে কী প্রভাব ফেলবে? ব্যাখ্যা কর।

ধরা যাক O বিন্দুতে পৃথিবী অবস্থিত। একে কেন্দ্র করে চন্দ্র ABC বৃত্তাকার পথে পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করছে। এখন, G-এর মান অপরিবর্তিত থাকলে চন্দ্র ABC পথেই গতিশীল থাকবে। অর্থাৎ গতিপথ অপরিবর্তিত থাকবে। এখন যদি

হঠাৎ G-এর মান শূন্য হয় তবে চন্দ্রের ওপর পৃথিবীর আকর্ষণ শূন্য হবে, ফলে চন্দ্র কক্ষপথের স্পর্শক বরাবর AD পথে





ছিটকে বেরোবে। কিন্তু G-এর মান খুব ধীরে ধীরে কমতে থাকলে চন্দ্রের গতিপথ আস্তে আস্তে বাড়তে থাকবে, অর্থাৎ চন্দ্র ক্রমশ পৃথিবী থেকে দূরে সরে যেতে থাকবে এবং গতিপথটি হবে সর্পিল (spiral)।

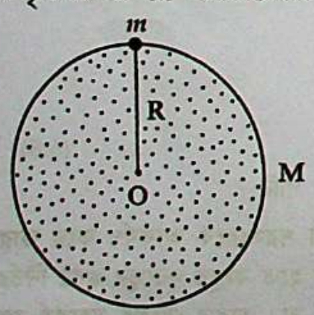
৬·৭·২ অভিকর্ষজ ত্বরণ
Acceleration due to gravity

নিউটনের গতির সূত্র অনুসারে বস্তুর ওপর বল প্রয়োগ করলে ত্বরণ সৃষ্টি হয়। অভিকর্ষও একটি বল। এই বল কোনো একটি বস্তুর ওপর ক্রিয়া করে ত্বরণ সৃষ্টি করবে। অতএব, **বস্তুতে অভিকর্ষ বল কর্তৃক যে ত্বরণ উৎপন্ন হয় তাকে অভিকর্ষজ ত্বরণ বলে।** অথবা **কোনো স্থানে অভিকর্ষের টানে মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুর বেগ যে হারে বৃদ্ধি পায় তাকে ওই স্থানের অভিকর্ষজ বা অভিকর্ষীয় ত্বরণ বলে**। একে 'g' দ্বারা প্রকাশ করা হয়। পরীক্ষার সাহায্যে জানা গেছে, বাধাহীন পথে ও একই স্থান হতে সকল বস্তু সমত্বরণে পৃথিবীর কেন্দ্রের দিকে পতিত হয়। স্থানভেদে এই ত্বরণের মান বিভিন্ন। সুতরাং **অভিকর্ষজ ত্বরণ বস্তু নিরপেক্ষ, স্থান নিরপেক্ষ নয়। পৃথিবীর 45° অক্ষাংশে অভিকর্ষজ ত্বরণকে আদর্শ মান ধরা হয়।**

একক ও মাত্রা : এর একক এম.কে.এস. ও আন্তর্জাতিক SI পদ্ধতিতে মিটার/সে^{2}। এর মাত্রা সমীকরণ = $[LT^{-2}]$।

৬·৭·৩ মহাকর্ষীয় ধ্রুবক ও অভিকর্ষজ ত্বরণের সম্পর্ক
Relation between gravitational constant and acceleration due to gravity

মনে করি 'm' ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকণা পৃথিবী পৃষ্ঠে অবস্থিত এবং পৃথিবী একটি গোলাকার বস্তু [চিত্র ৬·৫]। যদি পৃথিবীর ভর 'M' এবং ব্যাসার্ধ 'R' হয়, তবে নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র হতে আমরা পাই,



চিত্র ৬·৫

$$F = G\frac{Mm}{R^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.9)$$

পুনরায়, নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র হতে আমরা পাই,

বল = ভর × ত্বরণ

∴ অভিকর্ষীয় বল = বস্তুর ভর × অভিকর্ষজ ত্বরণ। অর্থাৎ,

$$F = mg \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.10)$$

∴ সমীকরণ (6.9) এবং সমীকরণ (6.10) হতে আমরা পাই,

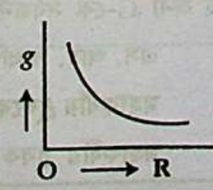
$$mg = G\frac{Mm}{R^2}$$

$$\text{বা,} \quad g = \frac{GM}{R^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.11)$$

এই সমীকরণ মহাকর্ষীয় ধ্রুবক ও অভিকর্ষজ ত্বরণের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করে।

$$\text{অর্থাৎ অভিকর্ষজ ত্বরণ} = \frac{\text{মহাকর্ষ ধ্রুবক} \times \text{পৃথিবীর ভর}}{(\text{পৃথিবীর ব্যাসার্ধ})^2}$$

অভিকর্ষজ ত্বরণ এবং পৃথিবীর ব্যাসার্ধের মধ্যে সম্পর্ককে [চিত্র ৬·৬] এর সাহায্যে প্রকাশ করা যায়।



চিত্র ৬·৬

আমরা জানি G এবং M ধ্রুব রাশি। সুতরাং, সমীকরণ (6.11) থেকে পাই, $g \propto \frac{1}{R^2}$

অর্থাৎ কোনো স্থানে g-এর মান পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে ওই স্থানের দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক।

অতএব ভূ-পৃষ্ঠের কোনো স্থানে 'g'-এর মান ভূ-কেন্দ্র হতে ওই স্থানের দূরত্বের ওপর নির্ভর করে। এটি হতে এই সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় যে, ভূ-পৃষ্ঠের কোনো একটি স্থানে g-এর মান নির্দিষ্ট, কিন্তু স্থানভেদে এর পরিবর্তন

ঘটে। পৃথিবীর ভর $M = 5.983 \times 10^{24}$ kg এবং ব্যাসার্ধ $R = 6.36 \times 10^{6}$ m ধরে উপরের সমীকরণ অনুসারে ভূপৃষ্ঠে g-এর মান হয়,

$$g = \frac{6.657 \times 10^{-11} \text{ N-m}^2 \text{ kg}^{-2} \times 5.983 \times 10^{24} \text{ kg}}{(6.36 \times 10^{6} \text{ m})^2} = 9.8465 \text{ ms}^{-2}$$

সমীকরণ (6.11) থেকে আরও দেখা যায় যে, কোনো স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান বস্তুর ভরের (m) ওপর নির্ভর করে না; অর্থাৎ কোনো নির্দিষ্ট স্থানে অবাধে পতনশীল হাল্কা ও ভারী সব বস্তুই একই অভিকর্ষজ ত্বরণ 'g' নিয়ে নিচে পড়ে।

পৃথিবীর গড় ঘনত্ব ρ হলে পৃথিবীর ভর, $M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

সুতরাং, ভূ-পৃষ্ঠে অবস্থিত কোনো বস্তুর ক্ষেত্রে ($r = R$) অভিকর্ষজ ত্বরণের মান হবে,

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{G \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{R^2} = \frac{4}{3}\pi G R \rho$$

কাজ : (ক) একজন লোক মোটর গাড়িতে বসে আছে। তার ভর 70 kg। মোটর গাড়িটি 4 ms^{-2} ত্বরণসহ চলছে। লোকটির ওপর অভিকর্ষ বল কত ?
(খ) একটি লিফ্ট 15 ms^{-1} বেগে ওপরে উঠছে। 60 kg ভরের একজন মানুষ লিফ্টে অবস্থান করলে লিফ্টের ওপর তার প্রতীয়মান ওজন কত ?

(ক) অভিকর্ষ বল, $W = m(g + 0) = 70(9.8 + 0) = 686$ N

(খ) ওজন, $W = m(g + 0) = 60(9.8 + 0) = 588$ N

মহাকর্ষীয় ধ্রুবক ও অভিকর্ষীয় ত্বরণ এর মধ্যে সম্পর্ক থেকে আমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলি জানতে পারি—

(i) G একটি সর্বজনীন ধ্রুবক, অন্যদিকে g একটি পরিবর্তনশীল রাশি

(ii) G এর মান $6.657 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$, অন্যদিকে g এর মান 9.8 ms^{-2}

(iii) G একটি স্কেলার রাশি, অন্যদিকে g একটি ভেক্টর রাশি।

(iv) G এর মান বস্তুর ভরের ওপর বা ভূকেন্দ্র হতে বস্তুর দূরত্বের ওপর নির্ভর করে না। অন্যদিকে g এর মান ভরের ওপর নির্ভর করে না। কিন্তু ভূকেন্দ্র হতে বস্তুর দূরত্বের ওপর নির্ভর করে।

G এবং g এর সম্পর্ক থেকে শিক্ষার্থীদের প্রশ্ন করা হলো—পৃথিবী কেন ভর নিরপেক্ষভাবে সকল বস্তুতে সমান ত্বরণ সৃষ্টি করে? এর জবাবে নিশ্চয় তোমরা বলবে, পৃথিবীর ভর ও ব্যাসার্ধ যথাক্রমে M ও R ধরা হলে, পৃথিবী পৃষ্ঠে m ভরের কোনো বস্তুর ক্ষেত্রে, $mg = G\frac{mM}{R^2}$।

$\therefore \quad g = \frac{GM}{R^2}$ যেহেতু এই সমীকরণে বস্তুর ভর m অনুপস্থিত, কাজেই অভিকর্ষজ ত্বরণ বস্তুর ভর নিরপেক্ষ। সুতরাং R ধ্রুবক হলে কোনো স্থানের অভিকর্ষজ ত্বরণ ধ্রুবক ও বস্তুর ভর নিরপেক্ষ হয়।

৬.৮ পৃথিবীর ভর ও গড় ঘনত্ব নির্ণয়
Determination of mass and average density of earth

পৃথিবীর ভর M, ব্যাসার্ধ R ধরে এবং পৃথিবীকে সুষম গোলক বিবেচনা করে লেখা যায়, $g = \frac{GM}{R^2}$

$\therefore M = \frac{gR^2}{G}$

এখানে, $R = 6.4 \times 10^6$ m এবং $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$

প্রতিটি রাশির মান বসিয়ে পৃথিবীর ভর পাওয়া যায়, $M = \frac{9.8 \times (6.4 \times 10^6)^2}{6.67 \times 10^{-11}} = 6 \times 10^{24}$ kg

আবার, পৃথিবীর গড় ঘনত্ব ρ হলে, $\rho = \frac{M}{V}$ হয়। এখানে V = পৃথিবীর আয়তন $= \frac{4}{3}\pi R^3$

$$\therefore \rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{3g}{4\pi G R}$$

গাণিতিক উদাহরণ ৬.৪

১। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $R = 6.4 \times 10^3$ km, অভিকর্ষজ ত্বরণ $g = 9.8$ ms^{-2} এবং মহাকর্ষীয় ধ্রুবক $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2} হলে পৃথিবীর ভর M ও পৃথিবীর উপাদানের গড় ঘনত্ব নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

$$M = \frac{gR^2}{G} = \frac{9.8 \times (6.4 \times 10^6)^2}{6.67 \times 10^{-11}}$$

$$= 6.02 \times 10^{24} \text{ kg}$$

আবার

আমরা জানি,

$$\rho = \frac{3g}{4\pi GR} = \frac{3 \times 9.8}{4 \times 3.14 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 6.4 \times 10^6}$$

$$= 5.49 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

এখানে,
পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6.4 \times 10^3$ km $= 6.4 \times 10^6$ m
মহাকর্ষীয় ধ্রুবক, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}
পৃথিবীর ভর, $M = ?$
পৃথিবীর গড় ঘনত্ব, $\rho = ?$

২। ভূপৃষ্ঠে কোনো লোকের ওজন 648 N হলে তিনি চাঁদে গেলে কতটুকু ওজন হারাবেন ? পৃথিবীর ভর ও ব্যাসার্ধ যথাক্রমে চাঁদের ভর ও ব্যাসার্ধের 81 গুণ এবং 4 গুণ।

আমরা জানি,
ওজন $W = mg$

$\therefore$ ভূপৃষ্ঠে, $W_e = mg_e$ ... ... (i)

চাঁদের পৃষ্ঠে, $W_m = mg_m$ ... ... (ii)

সমীকরণ (ii) কে সমীকরণ (i) দিয়ে ভাগ করে

আমরা পাই, $\frac{W_m}{W_e} = \frac{g_m}{g_e}$ ... ... (iii)

কিন্তু অভিকর্ষজ ত্বরণ, ভূপৃষ্ঠে, $g_e = \frac{GM_e}{R_e^2}$

এবং চাঁদের পৃষ্ঠে, $g_m = \frac{GM_m}{R_m^2}$

এখানে,
ধরা যাক, লোকের ভর $= m$
চাঁদের ভর $= M_m$
পৃথিবীর ভর $= M_e = 81\ M_m$
পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $= R_e$
চাঁদের ব্যাসার্ধ $= R_m$
$\therefore R_e = 4\ R_m$
পৃথিবীর পৃষ্ঠে ওজন $W_e = 648$ N
চাঁদের পৃষ্ঠে ওজন $W_m = ?$
চাঁদে হারানো ওজন $W = W_e - W_m = ?$

সমীকরণ (iii) থেকে পাই,

$$\frac{W_m}{W_e} = \frac{GM_m}{R_m^2} \times \frac{R_e^2}{GM_e} = \frac{M_m}{M_e} \times \left(\frac{R_e}{R_m}\right)^2 = \frac{M_m}{81\ M_m} \times \left(\frac{4\ R_m}{R_m}\right)^2 = \frac{16}{81}$$

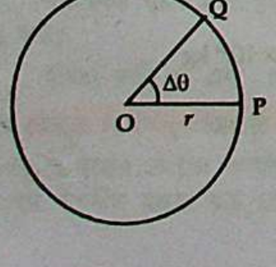
$$\therefore W_m = \frac{16}{81} \times W_e = \frac{16}{81} \times 648 \text{ N} = 128 \text{ N}$$

$$\therefore W = W_e - W_m = 648 \text{ N} - 128 \text{ N} = 520 \text{ N}$$

৩। পৃথিবী সূর্যের চারদিকে বৃত্তাকার পথে ঘুরছে ধরে দেখাও যে, একক সময়ে পৃথিবীর কক্ষপথ যে ক্ষেত্রফল তৈরি করে তা একটি ধ্রুবক।

মনে করি পৃথিবী সূর্যের চারদিকে r ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে ω ধ্রুব বেগে ঘুরছে এবং Δt সময়ে কেন্দ্রে $\Delta\theta$ কোণ উৎপন্ন করে।

পৃথিবী ও সূর্যের সংযোজক সরলরেখা দ্বারা Δt সময়ে অঙ্কিত ক্ষেত্রফল $= \Delta OPQ$ এর ক্ষেত্রফল। এখন r উচ্চতা ও $r\Delta\theta$ ভূমিবিশিষ্ট ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল ΔOPQ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফলের প্রায় সমান।



ΔOPQ এর ক্ষেত্রফল $\simeq \frac{1}{2} r \times r\Delta\theta = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$

$\therefore$ একক সময়ে অঙ্কিত ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times \frac{r^2 \Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \omega$

এখানে, r, ω ধ্রুবক, কাজেই ক্ষেত্রফলও ধ্রুবক।

৬.৯ অভিকর্ষীয় ত্বরণের পরিবর্তন
Variation of acceleration due to gravity

মহাকর্ষ সূত্র থেকে জেনেছি যে, অভিকর্ষজ ত্বরণের মান (g) বস্তুর ভর (m)-এর উপর নির্ভর করে না। g-এর মান ভূকেন্দ্র হতে ওই স্থানের দূরত্বের ওপর নির্ভর করে। এটি হতে এই সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারি যে, ভূপৃষ্ঠে কোনো স্থানে g-এর মান নির্দিষ্ট, কিন্তু স্থানভেদে এর পরিবর্তন ঘটে, পৃথিবীর ভর $M = 5.983 \times 10^{24}$ kg এবং ব্যাসার্ধ $R = 6.36 \times 10^6$ m ধরে ভূপৃষ্ঠে g-এর মান হয়,

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

বা, $$g = \frac{6.67 \times 10^{-11}\ \text{Nm}^2\ \text{kg}^{-2} \times 5.983 \times 10^{24}\ \text{kg}}{(6.36 \times 10^6\ \text{m})^2}$$

$$\therefore \quad g = 9.8465\ \text{ms}^{-2}$$

পৃথিবী পৃষ্ঠে g-এর মান বেশি হয়। আবার মেরু অঞ্চল অপেক্ষা বিষুব অঞ্চলে কম হয়। পৃথিবীর কেন্দ্রে শূন্য হয়। আবার পৃথিবী পৃষ্ঠে ও চাঁদের পৃষ্ঠে অভিকর্ষীয় ত্বরণের মানের অনুপাত 81 : 16 এবং এর ওজনের অনুপাতও 81 : 16.

অভিকর্ষজ ত্বরণ g ধ্রুবক নয়। তিনটি কারণে অভিকর্ষজ ত্বরণের পরিবর্তন ঘটে।

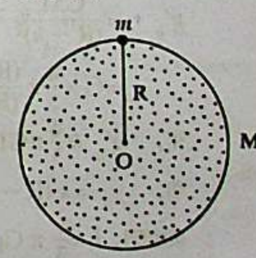
(১) উচ্চতার ক্রিয়া (Altitude effect)

(২) অক্ষাংশ ক্রিয়া বা আকৃতি ক্রিয়া (Latitude effect or effect of shape)

(৩) পৃথিবীর ঘূর্ণন ক্রিয়া বা পৃথিবীর আহ্নিক গতি ক্রিয়া (Rotational effect of the earth or effect of diurnal rotation of the earth)

(১) উচ্চতার ক্রিয়া (Altitude effect) : পৃথিবীর কেন্দ্র হতে কোনো স্থানের দূরত্বের তারতম্য ভেদে অভিকর্ষজ ত্বরণ 'g'-এর মানের পরিবর্তন ঘটে। এটি আলোচনা করতে হলে তিনটি বিষয় আলোচনা করতে হয়; যথা—

ক. কোনো বস্তু পৃথিবী পৃষ্ঠে অবস্থিত : যদি 'M' ভর এবং 'R' ব্যাসার্ধবিশিষ্ট কোনো বস্তু পৃথিবী পৃষ্ঠে অবস্থান করে [চিত্র ৬.৭] তবে ওই বস্তুর ওপর তথা ভূপৃষ্ঠে,



চিত্র ৬.৭

$$g = G\frac{M}{R^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.12)$$

$$= \frac{G}{R^2} \times \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = \frac{4}{3}\pi G R \rho$$

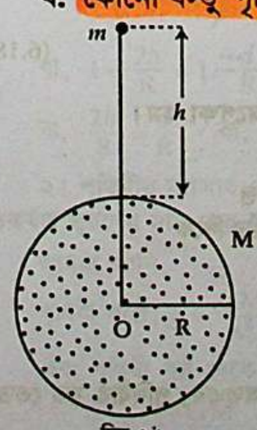
$$\therefore g = \frac{4}{3}\pi G R \rho \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.13) \quad (\because M = V\rho = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho)$$

এখানে, ρ = পৃথিবীর উপাদানের গড় ঘনত্ব ও $\frac{4}{3}\pi R^3$ = পৃথিবীর আয়তন।

হাতে-কলমে কাজ : দার্জিলিং-এ কোনো জিনিস স্প্রিং তুলায় মেপে কেনা লাভজনক নাকি সাধারণ তুলায় মেপে কেনা লাভজনক?

দার্জিলিং সমুদ্র পৃষ্ঠ থেকে অনেক ওপরে অবস্থিত বলে g-এর মান কিছুটা কম। এই জ্ঞান কাজে লাগাও।

খ. কোনো বস্তু পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে ওপরে অবস্থিত : মনে করি M পৃথিবীর ভর এবং R তার ব্যাসার্ধ। যদি বস্তু পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় অবস্থান করে [চিত্র ৬.৮] তবে ওই বস্তুর ওপর তথা ভূপৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় অভিকর্ষীয় ত্বরণ,

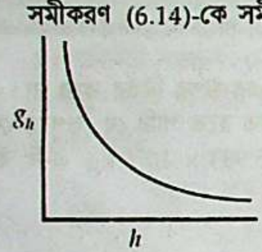


চিত্র ৬.৮

$$g_h = G\frac{M}{(R+h)^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.14)$$

আমরা জানি, ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ $g = G\frac{M}{R^2}$। অতএব দেখা যায় যে, এই সমীকরণ অপেক্ষা সমীকরণ (6.14)-এ হরের মান বেশি। কাজেই ভাগফল অর্থাৎ অভিকর্ষীয় ত্বরণ-এর মান কম হবে। অতএব পৃথিবী পৃষ্ঠ অপেক্ষা ওপরে অভিকর্ষীয় ত্বরণ-এর মান কম হবে এবং দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতে পরিবর্তিত হবে। সুতরাং দূরত্ব বাড়লে অভিকর্ষীয় ত্বরণ-এর মান কমবে এবং দূরত্ব কমলে অভিকর্ষীয় ত্বরণ-এর মান বাড়বে। এই কারণে পাহাড়ের উপর অভিকর্ষীয় ত্বরণ-এর মান পৃথিবী পৃষ্ঠে অভিকর্ষীয় ত্বরণ-এর মান অপেক্ষা কম হয়।

সমীকরণ (6.14)-কে সমীকরণ (6.12) দ্বারা ভাগ করে পাওয়া যায়,



চিত্র ৬·৮(ক)

$$\frac{g_h}{g} = \frac{GM}{(R+h)^2} \times \frac{R^2}{GM}$$

বা, $$\frac{g_h}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}$$

$$= \left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2}, \quad h \ll R \text{ হলে}, \frac{g_h}{g} = 1 - \frac{2h}{R}$$

বা, $g_h = g\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$ ... ... (6.15)

অর্থাৎ, $g_h < g$। সুতরাং বলা যায় h উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান ভূপৃষ্ঠের ত্বরণের মান অপেক্ষা কম [চিত্র ৬·৮(ক)]।

গ. কোনো বস্তু পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে নিচে অবস্থিত : মনে করি পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে h দূরত্ব নিচে B বিন্দুতে কোনো বস্তু আছে এবং ওই স্থানে অভিকর্ষীয় ত্বরণ g'_h [চিত্র ৬·৯]। B বিন্দুতে অবস্থিত যে কোনো বস্তুর ওপর ভূ-কেন্দ্র O-এর দিকে পৃথিবীর আর্কষণ $(R-h)$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট AB গোলকের আর্কষণের সমান। এই গোলকের বাইরের অংশ বস্তুর ওপর কার্যকর কোনো আকর্ষণ প্রয়োগ করে না।

এখন OB গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi(R-h)^3$

OB গোলকের ভর M′ ধরলে,

$M' = \text{আয়তন} \times \text{ঘনত্ব} = \frac{4}{3}\pi(R-h)^3 \times \rho$

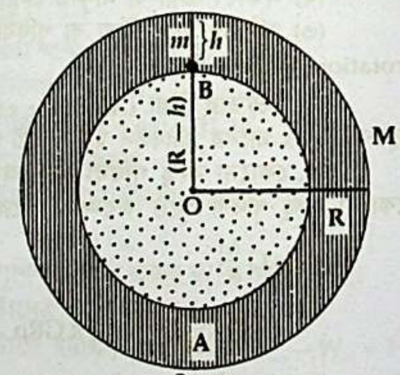
$$g'_h = \frac{GM'}{(R-h)^2}$$

$$= G \times \frac{4}{3}\pi \frac{(R-h)^3\rho}{(R-h)^2}$$

বা, $g'_h = \frac{4}{3}\pi G(R-h)\rho$ ... ... (6.16)

বা, $g_h = k(R-h)$ ... ... (6.17)

এখানে, $k = \frac{4}{3}\pi G\rho$ = একটি ধ্রুব রাশি।



চিত্র ৬·৯

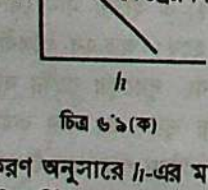
সমীকরণ (6.16)-কে সমীকরণ (6.13) দ্বারা ভাগ করে পাওয়া যায়

$$\frac{g_h'}{g} = \frac{\frac{4}{3}\pi G(R-h)\rho}{\frac{4}{3}\pi GR\rho}$$

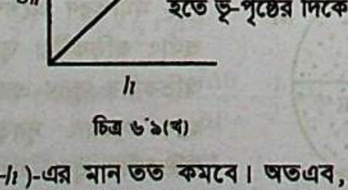
বা, $$\frac{g_h'}{g} = \frac{R-h}{R} = \left(1-\frac{h}{R}\right)$$

$\therefore$ $g_h' = g\left(1-\frac{h}{R}\right)$ ... ... (6.18)

অর্থাৎ, $g_h' < g$। সুতরাং h গভীরে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান ভূপৃষ্ঠের ত্বরণের মান অপেক্ষা কম।



চিত্র ৬·৯(ক)



চিত্র ৬·৯(খ)

ওপরের সমীকরণ অনুসারে h-এর মান যত বাড়বে, $(R-h)$-এর মান তত কমবে। অতএব, পৃথিবীর যত ভেতরের দিক যাওয়া যাবে, অভিকর্ষীয় ত্বরণ-এর মান ততই কমবে [চিত্র ৬·৯(ক)]।

আবার ভূকেন্দ্র হতে ভূপৃষ্ঠের দিকে অভিকর্ষীয় ত্বরণ দূরত্বের সমানুপাতে বৃদ্ধি পায় [চিত্র ৬.৯(খ)]। অর্থাৎ কেন্দ্র হতে পৃষ্ঠের দিকে যতই যাওয়া যায় ততই অভিকর্ষজ ত্বরণ বৃদ্ধি পায়। এভাবে যেতে যেতে যদি ভূ-কেন্দ্রে পৌঁছা যায় তবে h-এর মান R-এর সমান হবে। অর্থাৎ $h = R$ হয়।

অতএব ভূকেন্দ্রে, $g_h' = k(R-R)$ বা, $g_h' = 0$ ... ... (6.19)

সুতরাং পৃথিবীর অভ্যন্তরে, যেমন কোনো খনির ভেতরে g-এর মান ভূ-পৃষ্ঠে g-এর মান অপেক্ষা কম হয়।

সিদ্ধান্ত : ভূপৃষ্ঠের ওপরে গেলে 'g'-এর মান কমে, আবার পৃথিবীর অভ্যন্তরে গেলে 'g'-এর মান কমে। পৃথিবীর কেন্দ্রে কোনো আকর্ষণ নেই। সুতরাং পৃথিবীর কেন্দ্রে 'g'-এর মান শূন্য এবং ভূ-পৃষ্ঠেই 'g'-এর মান সর্বাপেক্ষা বেশি।

যাচাই কর : একটি দালানের ছাদে ওঠে একটি বলকে ওপরের দিকে এবং অন্য একটি বলকে নিচের দিকে একই বেগে ছোঁড়া হলো। কোন বলটি অধিক গতিবেগে মাটিতে পড়বে? ব্যাখ্যা কর।

হিসাব কর : ভূপৃষ্ঠ থেকে কত উঁচুতে গেলে সেখানকার অভিকর্ষজ ত্বরণের মান ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মানের শতকরা একাশি ভাগ হবে ? পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6.4×10^6 m.

ভূ-পৃষ্ঠে $g = \frac{GM}{R^2}$ এবং ভূ-পৃষ্ঠ থেকে h উচ্চতায়, $g' = \frac{GM}{(R+h)^2}$

$$\therefore \frac{g'}{g} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

বা, $\frac{81}{100} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2$ বা, $\frac{9}{10} = \left(\frac{R}{R+h}\right)$

বা, $9R + 9h = 10R$ বা, $9h = 10R - 9R = R$

$$\therefore h = \frac{R}{9} = \frac{6.4 \times 10^6}{9} = 0.71 \times 10^6 \text{ m}$$

গাণিতিক উদাহরণ ৬.৫

১। পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় এবং পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে d গভীরতায় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান সমান। d-এর সাপেক্ষে h-এর মান নির্ণয় কর।

আমরা জানি, ভূপৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায়, $g_h = g\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$

এবং ভূপৃষ্ঠ হতে d গভীরতায়, $g_d = g\left(1 - \frac{d}{R}\right)$

প্রশ্নানুসারে, $g_h = g_d$

$$\therefore g\left(1 - \frac{2h}{R}\right) = g\left(1 - \frac{d}{R}\right)$$

বা, $1 - \frac{2h}{R} = 1 - \frac{d}{R}$

বা, $\frac{2h}{R} = \frac{d}{R}$ বা, $2h = d$ $\therefore h = \frac{d}{2}$

২। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6.4×10^6 m এবং পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ 9.8 ms^{-2}। ভূ-পৃষ্ঠ থেকে 6.4×10^5m উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান বের কর। [য. বো. ২০০১]

আমরা জানি,

পৃথিবী পৃষ্ঠে, $g = \frac{GM}{R^2}$ ... ... (i)

এবং পৃথিবী পৃষ্ঠ থেকে h উচ্চতায়,

$g' = \frac{GM}{(R+h)^2}$ ... ... (ii)

এখানে, $R = 6.4 \times 10^6$ m

$h = 6.4 \times 10^5$ m

$g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$

সমীকরণ (i) ও (ii) থেকে পাই,

$$\frac{g'}{g} = \frac{\frac{GM}{(R+h)^2}}{\frac{GM}{R^2}} = \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

বা, $g' = \frac{R^2}{(R+h)^2}g$

$$\therefore\ g' = \frac{(6.4\times10^6)^2}{(6.4\times10^6+6.4\times10^5)^2}\times 9.8 = 8.099\ ms^{-2}$$

বিকল্প : $g' = g\left(1-\frac{2h}{R}\right) = 9.8\left(1-\frac{2\times6.4\times10^5}{6.4\times10^6}\right) = 8.099\ ms^{-2}$

৩। ভূপৃষ্ঠের 2 km ঊর্ধ্বে অভিকর্ষজ ত্বরণ কত হবে ? (পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6400 km, ভূপৃষ্ঠে g-এর মান $9.8\ ms^{-2}$)।

এখানে,
ব্যাসার্ধ, $R = 6400\ km = 64\times10^5\ m$
উচ্চতা, $h = 2\ km = 0.02\times10^5\ m$
$g = 9.8\ ms^{-2}$
$g' = ?$

আমরা জানি,
R-এর তুলনায় h অত্যন্ত ক্ষুদ্র।
∴ আমরা পাই,

$$g' = g\left(1-\frac{2h}{R}\right) = 9.8\left(1-\frac{2\times0.02\times10^5}{64\times10^5}\right)$$

$$= 9.8\left(1-\frac{0.04}{64}\right) = 9.8\left(\frac{64-0.04}{64}\right)$$

$$= 9.8\times\frac{63.96}{64} = 9.7938\ ms^{-2}$$

৪। পৃথিবীকে 6400 km ব্যাসার্ধের একটি গোলক ধরলে ভূপৃষ্ঠ হতে কত উচ্চতায় অভিকর্ষীয় ত্বরণের মান ভূপৃষ্ঠের অভিকর্ষীয় ত্বরণের মানের $\frac{1}{64}$ অংশ হবে ? [চ. বো. ২০১০; সি. বো. ২০০৬]

এখানে,
পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6400\ km = 6400\times10^3\ m = 6.4\times10^6\ m$
ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ $= g$
h উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g' = \frac{g}{64}$
পৃথিবীর ভর $= M$
উচ্চতা, $h = ?$

আমরা জানি,

$$g = \frac{GM}{R^2}\ \ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \text{(i)}$$

h উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g' = \frac{GM}{(R+h)^2}$ ... ... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$$\frac{g'}{g} = \frac{GM}{(R+h)^2}\times\frac{R^2}{GM} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

বা, $\frac{g/64}{g} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2$

বা, $\frac{1}{64} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2$

বা, $\left(\frac{R+h}{R}\right)^2 = 64 = 8^2$

বা, $\frac{R+h}{R} = 8$

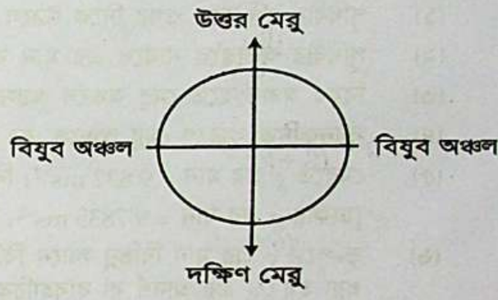
∴ $1+\frac{h}{R} = 8$

$\frac{h}{R} = 8-1 = 7$

∴ $h = 7R = 7\times6.4\times10^6 = 44.8\times10^6 m = 4.48\times10^4\ km$

(২) অক্ষাংশ ক্রিয়া বা আকৃতি ক্রিয়া (Latitude effect or effect of shape) :

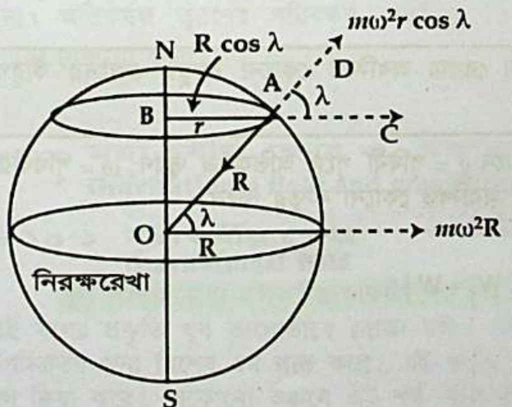
পৃথিবী সম্পূর্ণ গোলাকার নয়; উত্তর-দক্ষিণ কিছুটা চাপা এবং নিরক্ষীয় অঞ্চলে কিছুটা স্ফীত, অর্থাৎ পৃথিবী আকৃতিতে হ্রস্বাক্ষ উপগোলক (oblate spheriod) [চিত্র ৬.১০]। পৃথিবীর মেরু-ব্যাসার্ধের (polar radius) চেয়ে নিরক্ষীয়-ব্যাসার্ধ (equatorial radius) প্রায় 22 km বেশি। ভূ-পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক বলে মেরু অঞ্চলে g-এর মান সর্বোচ্চ এবং নিরক্ষীয় অঞ্চলে সর্বনিম্ন হয়। কারণ অন্য যেকোনো স্থানে g-এর মান এই দুটি প্রান্তিক মানের মধ্যে থাকে।



চিত্র ৬.১০

(৩) পৃথিবীর ঘূর্ণন ক্রিয়া বা পৃথিবীর আহ্নিক গতি ক্রিয়া (Rotational effect of the earth or effect of diurnal rotation of the earth) :

পৃথিবী নিজ অক্ষের চারদিকে ঘুরছে বলে একমাত্র দুটি মেরুতে অবস্থিত বস্তু ছাড়া ভূ-পৃষ্ঠের অন্য সব বস্তুই বৃত্তাকার পথে ঘুরছে। বৃত্তাকার পথগুলির কেন্দ্র পৃথিবীর অক্ষের ওপর থাকে। এ কারণে বস্তুগুলির উপর অপকেন্দ্র বল ক্রিয়া করে। এই বলের মান নিরক্ষরেখায় অবস্থিত বস্তুর ক্ষেত্রে সর্বোচ্চ এবং দুটি মেরুর ক্ষেত্রে শূন্য হয়। এই বল অভিকর্ষের বিপরীত অভিমুখে ক্রিয়া করায় বস্তুর ওজনের আপাত হ্রাস হয়।



চিত্র ৬.১১

মনে করি m ভরের কোনো বস্তু ভূ-পৃষ্ঠে λ অক্ষাংশে A বিন্দুতে আছে [চিত্র ৬.১১]। পৃথিবী কৌণিক বেগে নিজ অক্ষ NS-এর চারদিকে ঘুরছে বলে ঐ বস্তু ω কৌণিক বেগে $AB = r$ ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে ঘোরে। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R হলে $r = R\cos\lambda$। এই ঘূর্ণনের জন্য বস্তুর উপর AC অভিমুখে অপকেন্দ্র বল $m\omega^2 r$ ক্রিয়া করে। অভিকর্ষের জন্য বস্তুর ওপর $F = mg$ বল পৃথিবীর কেন্দ্র অর্থাৎ AO অভিমুখে ক্রিয়া করে। বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল অপকেন্দ্র বল D অভিমুখে অর্থাৎ অভিকর্ষের বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে। এর উপাংশ হলো $m\omega^2 r\cos\lambda$। অতএব, A বিন্দুতে অভিকর্ষজ ত্বরণ g' হলে A বিন্দুতে অবস্থিত বস্তুর আপাত ওজন,

$$mg' = mg - m\omega^2 r\cos\lambda$$
$$= mg - m\omega^2 R\cos^2\lambda \quad [\because r = R\cos\lambda]$$

এখানে, $\omega^2 R\cos^2\lambda$ = অভিকর্ষজ ত্বরণ হ্রাসের মান।

A বিন্দুতে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান g' হলে বস্তুটির আপাত ওজন হয় mg'.

অতএব $$g' = g\left(1 - \frac{\omega^2 R\cos^2\lambda}{g}\right) \quad \ldots \quad (6.20)$$

এখানে,
$\omega = \frac{2\pi}{T}$
T = পৃথিবীর নিজ অক্ষের উপর আবর্তনকাল = 24 ঘণ্টা

নিরক্ষরেখায় $\lambda = 0°$; কাজেই $\cos\lambda = 1$

$$\therefore \quad g' = g\left(1 - \frac{\omega^2 R}{g}\right) = g - \omega^2 R \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.21)$$

অর্থাৎ নিরক্ষরেখাতে অভিকর্ষজ ত্বরণ পৃথিবী পৃষ্ঠ থেকে কম।

আবার, মেরু বিন্দুতে $\lambda = 90°$; কাজেই $\cos\lambda = 0$; $\therefore \; g' = g$। অর্থাৎ মেরু এবং ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান একই।

সুতরাং পৃথিবীর নিজ অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণনের দরুন g-এর মান পরিবর্তিত হয়। নিরক্ষরেখায় g-এর মান সর্বনিম্ন এবং দুটি মেরুতে সর্বোচ্চ হয়। অন্যান্য স্থানে g-এর মান এই দুটি প্রান্তিক মানের মধ্যে থাকে। স্পষ্টত পৃথিবীর আকৃতি ও আহ্নিক গতির দরুন g-এর মানের একই ধরনের পরিবর্তন হয়।

পূর্বের আলোচনা এবং পরীক্ষালব্ধ ফলাফল হতে g-এর মান সম্পর্কে আমরা নিম্নলিখিত সিদ্ধান্ত নিতে পারি।

(১) পৃথিবীর পৃষ্ঠ হতে ওপর দিকে উঠলে এর মান কমে।
(২) পৃথিবীর অভ্যন্তরে নামলে এর মান কমে।
(৩) বিষুব অঞ্চল হতে মেরু অঞ্চলে অগ্রসর হলে এর মান বাড়ে।
(৪) ঘূর্ণনজনিত কারণে মেরু অঞ্চলে এর মান অল্প কমে, কিন্তু বিষুবীয় অঞ্চলে বেশি কমে।
(৫) মেরুতে g এর মান $= 9{\cdot}832\ ms^{-2}$; বিষুব অঞ্চলে g এর মান $= 9{\cdot}780\ ms^{-2}$।
[ঢাকায় g এর মান $= 9{\cdot}7835\ ms^{-2}$; রাজশাহীতে g এর মান $= 9{\cdot}790\ ms^{-2}$]
(৬) ভূ-পৃষ্ঠে g এর মান বিভিন্ন স্থানে বিভিন্ন বলে সমুদ্র পৃষ্ঠে এবং 45° অক্ষাংশে g-এর মানকে আদর্শ মান ধরা হয়। g এর আদর্শ বা ব্যবহারিক মান $= 9{\cdot}81\ ms^{-2}$।
(৭) g এর মান জেনে পৃথিবীর গড় ঘনত্ব সম্বন্ধে ধারণা লাভ করা যায়।
(৮) পৃথিবীর নিজ অক্ষের ওপর আবর্তনকাল 24 ঘণ্টা।
(৯) নিরক্ষীয় অঞ্চলে এর মান সর্বনিম্ন, মেরুতে সর্বাধিক।

ব্যাখ্যা কর : একটি যাত্রীপূর্ণ নৌকার যাত্রীদের দাঁড়াতে নিষেধ করা হয় কেন ?

যাত্রীরা বসা অবস্থায় নৌকার ভারকেন্দ্র যেখানে অবস্থিত থাকে যাত্রীরা দাঁড়ালে ওই অবস্থায় তা কিছুটা ওপরে ওঠে যায় বিধায় যাত্রীপূর্ণ নৌকা অস্থির সাম্যাবস্থায় পৌঁছায়। এতে নৌকাটি উল্টে যেতে পারে, তাই যাত্রীদের দাঁড়াতে নিষেধ করা হয়।

অনুসন্ধান : কোনো কারণে পৃথিবীর আবর্তন বন্ধ হলে নিরক্ষীয় রেখায় অবস্থিত কোনো বস্তুর ওজনের কীরূপ পরিবর্তন হবে? ব্যাখ্যা কর।

নিরক্ষরেখায় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান, $g' = g - \omega^2R$। এখানে g = পৃথিবী পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ, ω = পৃথিবীর কৌণিক বেগ। সুতরাং, পৃথিবীর আহ্নিক গতির জন্য নিরক্ষীয় রেখায় অবস্থিত কোনো বস্তুর ওজন,

$$W = W' - m\omega^2R$$

এখন পৃথিবীর আবর্তন বন্ধ হয়ে গেলে, $\omega = 0$ হয়। অতএব, $W' = W$।

এক্ষেত্রে বস্তুর ওজন বৃদ্ধি $\Delta W = m\omega^2R$।

অতএব, ওজনের শতকরা বৃদ্ধি,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta W}{W}\times 100 &= \frac{m\omega^2R}{mg}\times 100\\ &= \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\times\frac{R}{g}\times 100\\ &= \frac{4\pi^2}{(24\times 60\times 60)^2}\times\frac{6400\times 10^3}{9{\cdot}8}\times 100\\ &= 0{\cdot}3465\%\end{aligned}$$

অর্থাৎ বস্তুটির আপাত ওজন 0·3465% বৃদ্ধি পাবে।

গাণিতিক উদাহরণ ৬.৬

১। পৃথিবীর আহ্নিক গতির কৌণিক দ্রুতি $7{\cdot}3\times10^{-5}\ rad\ s^{-1}$। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6400 km এবং মেরু অঞ্চলে অভিকর্ষজ ত্বরণ $9{\cdot}8\ ms^{-2}$ হলে, বিষুব রেখায় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

$$\begin{aligned}g' &= g - \omega^2R\\ &= 9{\cdot}8 - (7{\cdot}3\times10^{-5})^2\times 6{\cdot}4\times10^6\\ &= 9{\cdot}76\ ms^{-2}\end{aligned}$$

এখানে,
মেরু অঞ্চলে অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$
কৌণিক দ্রুতি, $\omega = 7{\cdot}3\times10^{-5}\ rad\ s^{-1}$
পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6400\ km = 6{\cdot}4\times10^6\ m$
বিষুব অঞ্চলে অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g' = ?$

২। ঢাকার অক্ষাংশ 23° উত্তর। আহ্নিক গতি না থাকলে ঢাকায় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান কতটুকু বৃদ্ধি পেত? (পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6400 km)

এখানে, দেওয়া আছে,
ঢাকার অক্ষাংশ, $\lambda = 23°$
পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6400\ m = 6.4 \times 10^6\ m$
আহ্নিক গতির অনুপস্থিতিতে অভিকর্ষজ ত্বরণের বৃদ্ধি, $g - g' = ?$

আমরা জানি,

$$g' = g(1 - \omega^2 R \cos^2 \lambda)$$

$$\therefore \quad g' = g - g\omega^2 R \cos^2 \lambda$$

$$g - g' = \omega^2 R \cos^2 \lambda$$

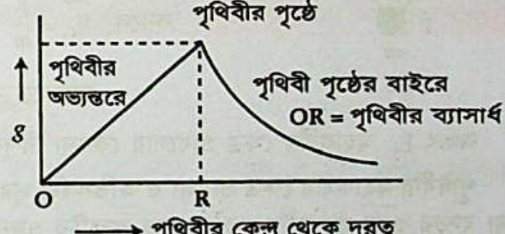
কিন্তু পৃথিবীর কৌণিক বেগ,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3.14}{86400\ s} = 7.269 \times 10^{-5}\ rad\ s^{-1}$$

$$\therefore \quad g - g' = (7.269 \times 10^{-5})^2 \times 6.4 \times 10^{-6} \cos^2 23° = 0.0286\ ms^{-2}$$

কাজ : পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান এবং দূরত্বের লেখচিত্রটি কীরূপ হবে ?

পৃথিবীর বাইরে অভিকর্ষজ ত্বরণ পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক। অভিকর্ষজ ত্বরণ পৃথিবী আর পৃথিবীর ভেতরে কেন্দ্র থেকে দূরত্বের সমানুপাতিক। পৃথিবীর কেন্দ্রে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান শূন্য। অভিকর্ষজ ত্বরণের পরিবর্তন লেখচিত্রে [চিত্র ৬.১২] দেখানো হলো।



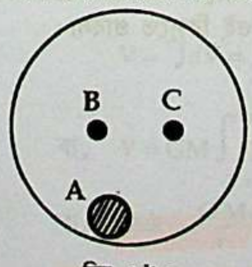
চিত্র ৬.১২

৬.১০ মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র ও মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র প্রাবল্য
Gravitational field and gravitational field intensity

৬.১০.১ মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র
Gravitational field

দুটি বস্তুর মধ্যে মহাকর্ষীয় আকর্ষণ বল বস্তু দুটির সংস্পর্শ ছাড়াই ক্রিয়া করে। মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের ধারণা থেকে এই বলের প্রকৃতি খুব ভালোভাবে বোঝা যায়। এই ধারণা অনুযায়ী একটি বস্তুর চারদিকের অঞ্চল ওই বস্তুর উপস্থিতির জন্য বিশেষ ধর্ম লাভ করে। এই ধর্মের দরুন ওই অঞ্চলে অন্য কোনো বস্তু আনলে তার ওপর মহাকর্ষীয় বল ক্রিয়া করে। যেকোনো অঞ্চলে এই শর্ত পূরণ হলে বোঝা যায় যে, ওই অঞ্চলে একটি মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র আছে। অতএব মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র মহাকর্ষীয় বল সঞ্চালন প্রক্রিয়ায় মধ্যস্থতার ভূমিকা পালন করে।

কোনো বস্তুর চারপাশে যে অঞ্চলব্যাপী এর মহাকর্ষীয় প্রভাব বজায় থাকে, অর্থাৎ অন্য কোনো বস্তু রাখা হলে সেটি আকর্ষণ বল লাভ করে, তাকে বস্তুর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র বলে। তাত্ত্বিকভাবে একটি বস্তুর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।



চিত্র ৬.১৩

চিত্র ৬.১৩ এ একটি বক্ররেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের মধ্যে A বিন্দুতে একটি বড় ভরের বস্তু আছে। এর কারণে বক্ররেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রব্যাপী একটি মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র সৃষ্টি হয়েছে। এখন B অথবা C বিন্দুতে যেকোনো ভরের বস্তু রাখলে তার ওপর মহাকর্ষীয় বল ক্রিয়াশীল হবে। B ও C বিন্দুর দূরত্ব যত বেশি হবে বলের মান তত কমতে থাকবে। প্রকৃতপক্ষে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।

কোনো বস্তুর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের মধ্যে সর্বত্র এর প্রভাব সমান থাকে না। বিভিন্ন বিন্দুতে এর প্রভাব বিভিন্ন হয়। এই প্রভাব পরিমাপ করা হয় মহাকর্ষ ক্ষেত্র প্রাবল্য বা তীব্রতা দ্বারা। মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে একক ভরের বস্তু রেখে ওই বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল বল দ্বারা মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র পরিমাপ করা হয়।

৬.১০.২ মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র প্রাবল্য
Gravitational field intensity

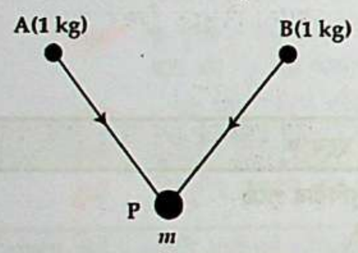
মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের যেকোনো বিন্দুতে একটি একক ভরের বস্তু স্থাপন করলে ওই ভরের ওপর যে বল ক্রিয়া করে, তাকে ওই বিন্দুতে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের প্রাবল্য বলে। মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে m ভরের বস্তুর ওপর F বল ক্রিয়া করলে ওই বিন্দুতে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের প্রাবল্য হবে

$$E = \frac{F}{m} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.22)$$

এই সমীকরণ থেকে দেখা যায় যে, m-এর মান বৃদ্ধি পেলে E হ্রাস পায়। প্রাবল্য একটি ভেক্টর রাশি। এর মান ও দিক আছে। কোনো বিন্দুতে একাধিক প্রাবল্য ক্রিয়াশীল হলে ভেক্টর যোগের পদ্ধতি অনুযায়ী ওই বিন্দুতে লব্ধি প্রাবল্য গণনা করা যায়। প্রাবল্যের অভিমুখই মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের অভিমুখ নির্দেশ করে। অনেক সময় মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের প্রাবল্য বোঝাতে শুধু মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র লেখা হয়।

একক ও মাত্রা : এস. আই. পদ্ধতিতে প্রাবল্যের একক Nkg^{-1} এবং এর মাত্রা হলো LT^{-2}।

এখন প্রাবল্যের দিক কোন দিকে হবে তা বোঝার জন্য মনে করি P বিন্দুতে m ভরের একটি বস্তু রাখা আছে [চিত্র ৬.১৪]। ওই বস্তুর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের মধ্যে A বিন্দুতে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র প্রাবল্য নির্ণয় করতে হলে ওই বিন্দুতে একটি একক ভরের বস্তু আছে বলে বিবেচনা করা হয়। এখন A বিন্দুতে স্থাপিত একক ভরের বস্তুটি PA বরাবর আকর্ষণ বল লাভ করবে। সুতরাং A বিন্দুতে প্রাবল্যের দিক হবে AP বরাবর। অনুরূপভাবে B বিন্দুতেও প্রাবল্যের দিক হবে BP বরাবর। সুতরাং সমীকরণ (6.22) অনুযায়ী প্রাবল্যকে ভেক্টররূপে প্রকাশ করলে, $\vec{E}_G = \frac{\vec{F}}{m}$ হয় এবং



চিত্র ৬.১৪

সেক্ষেত্রে বল, $\vec{F} = \vec{E}_G \times m$

অর্থাৎ E_G মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র প্রাবল্যের কোনো বিন্দুতে m ভরের বস্তু রাখলে তার ওপর mE_G বল ক্রিয়া করে।

পৃথিবীর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র প্রাবল্য ও অভিকর্ষজ ত্বরণ : ভূ-পৃষ্ঠে কোনো বস্তুর অভিকর্ষজ ত্বরণ g হলে m ভরের কোনো বস্তুর ওপর মহাকর্ষীয় বল F হচ্ছে বস্তুটির ওজন $F = mg$। আবার ভূপৃষ্ঠে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র প্রাবল্য E_G হলে

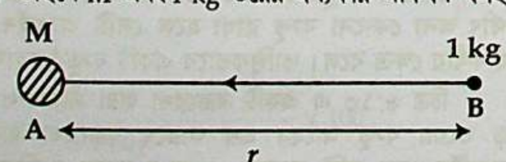
$$E_G = \frac{F}{m} = \frac{mg}{m} = g$$

অর্থাৎ পৃথিবীর ক্ষেত্রে কোনো বিন্দুর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র প্রাবল্য আর ওই বিন্দুর অভিকর্ষজ ত্বরণ g একই।

এখন আমরা দেখব মহাকর্ষ ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুর প্রাবল্য $4\ \text{Nkg}^{-1}$ কথাটির অর্থ কী ? এর উত্তরে বলা যায় যে মহাকর্ষ ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে 1 kg ভরের একটি বস্তু রাখলে তার ওপর প্রযুক্ত আকর্ষণ বল হবে 4 N অথবা মহাকর্ষের কোনো বিন্দুতে 4 kg ভরের একটি বস্তু রাখলে তার ওপর প্রযুক্ত আকর্ষণ বল হবে 1 N।

৬.১১ বিন্দু ভরের জন্য প্রাবল্য
Gravitational intensity due to a point mass

M ভরের একটি বিন্দু ভরের জন্য r দূরত্বে B বিন্দুতে প্রাবল্য নির্ণয় করতে হলে B বিন্দুতে একক ভরের একটি বস্তু বিবেচনা করি [চিত্র ৬.১৫]। তাহলে M এবং 1 kg ভরের মধ্যকার আকর্ষণ বলই হবে ওই বিন্দুতে প্রাবল্য।



চিত্র ৬.১৫

নিউটনের মহাকর্ষ সূত্রানুযায়ী

প্রাবল্য, $E = \frac{GM \times 1}{r^2}$ $\therefore$ $E = \frac{GM}{r^2}$ ... ... (6.23)

এর দিক BA বরাবর।

জানার বিষয় : (i) সুষম গোলাকার খোলকের বা গোলকের ভেতরে অবস্থিত সকল বিন্দুতে প্রাবল্য শূন্য হয়।

(ii) কোনো সুষম নিরেট গোলক বা সুষম গোলাকার গোলকের ক্ষেত্রে সমস্ত ভর এদের নিজ নিজ কেন্দ্রে কেন্দ্রীভূত আছে ধরে নিয়ে ওই গোলক বা গোলকের বাইরে অবস্থিত বিন্দুতে প্রাবল্য নির্ণয় করা হয়।

(iii) অভিকর্ষীয় প্রাবল্য এবং অভিকর্ষীয় ত্বরণ এর সংখ্যা মান সমান ($E = g$).

৬.১২ মহাকর্ষীয় বিভব
Gravitational Potential

কোনো বস্তুর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব হবে অসীম থেকে একক ভরের কোনো বস্তুকে ওই বিন্দুতে আনতে মহাকর্ষীয় বল দ্বারা সম্পন্ন কাজের পরিমাণ।

অর্থাৎ অসীম দূর হতে একক ভরের কোনো বস্তুকে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে আনতে যে পরিমাণ কাজ সাধিত হয়, তাকে ওই বিন্দুর মহাকর্ষীয় বিভব বলে। একে সাধারণত V দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $\therefore V = \frac{W}{m}$।

উল্লেখ্য, দুটি বস্তুর মধ্যে আকর্ষণ বলই কাজ করে থাকে। বাইরের কোনো বল বা শক্তির প্রয়োজন হয় না। সুতরাং মহাকর্ষীয় বিভবকে ঋণ রাশি দ্বারা প্রকাশ করা হয় অর্থাৎ মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে বিভব ঋণাত্মক। এটা একটি স্কেলার রাশি। অসীমে মহাকর্ষীয় বিভব শূন্য ধরা হয়।

এম. কে. এস. বা এস. আই. পদ্ধতিতে এর একক জুল/কিলোগ্রাম (Jkg^{-1}) এর মাত্রা হলো L^2T^{-2}.

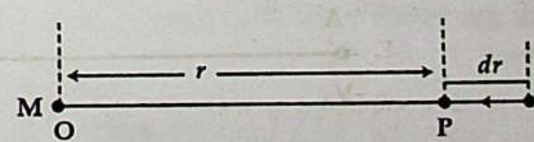
বিভব পার্থক্য (Potential difference) : একক ভরের কোনো বস্তুকে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের এক বিন্দু হতে অন্য বিন্দুতে আনতে যে পরিমাণ কাজ সাধিত হয়, তাকে ওই দুই বিন্দুর মধ্যে মহাকর্ষীয় বিভব পার্থক্য বলে।

আকর্ষণ বলের অভিমুখে সরণ হলে বিভব পার্থক্য ঋণাত্মক এবং আকর্ষণ বলের বিরুদ্ধে সরণ হলে বিভব পার্থক্য ধনাত্মক হবে।

৬.১২.১ বিন্দু ভরের দরুন মহাকর্ষীয় বিভব
Gravitational potential due to a point mass

আমরা জানি, অসীম দূরত্ব হতে একক ভরের কোনো বস্তুকে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে আনতে যে পরিমাণ কাজ সাধিত হয়, তাকে উক্ত বিন্দুর মহাকর্ষীয় বিভব বলে। এখন বিন্দু ভরের দরুন মহাকর্ষীয় বিভবের সাধারণ সমীকরণ বের করা যাক।

মনে করি, O বিন্দুতে M ভরের একটি বিন্দু ভর বস্তু অবস্থিত [চিত্র ৬.১৬]। O হতে r দূরে P একটি বিন্দু। P বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব বের করতে হবে।



চিত্র ৬.১৬

P বিন্দুতে একক ভরের উপর O বিন্দু অভিমুখী প্রযুক্ত বল অর্থাৎ মহাকর্ষীয় প্রাবল্য $= \frac{GM}{r^2}$। এখন একক ভরকে সামান্য দূরত্ব dr নিয়ে যেতে কাজের পরিমাণ অর্থাৎ বিভব,

$$dV = \text{বল} \times \text{সরণ} = \text{প্রাবল্য} \times \text{সরণ} = \frac{GM}{r^2} dr$$

$\therefore$ একক ভরকে অসীম দূরত্ব হতে P বিন্দুতে আনতে কাজের পরিমাণ অর্থাৎ P বিন্দুতে বিভব

$$V = \int dV = \int_{r=\infty}^{r=r} \frac{GM}{r^2} \times dr$$

$$\text{বা,} \quad V = GM \int_{r=\infty}^{r=r} \frac{1}{r^2} dr \quad \text{বা,} \quad V = GM \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^{r}$$

$$\text{বা,} \quad V = -\frac{GM}{r} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.24)$$

এখানে ঋণচিহ্ন এই অর্থ প্রকাশ করে যে, বাহ্যিক কোনো বল বা শক্তি দ্বারা কাজ সম্পন্ন হয়নি, মহাকর্ষীয় বলই কাজ সম্পন্ন করেছে। দূরত্ব বৃদ্ধি পেলে মহাকর্ষ বিভব বৃদ্ধি পায়। অসীমে কোনো বস্তুর মহাকর্ষীয় বিভব সর্বোচ্চ হয় এবং অসীমে এর সর্বোচ্চ মান হচ্ছে শূন্য।

বিশেষ ক্ষেত্র :

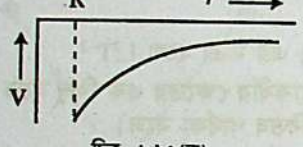
(i) কোনো সুষম নিরেট গোলক বা সুষম গোলকের ক্ষেত্রে সমস্ত ভর এদের নিজ নিজ কেন্দ্রে কেন্দ্রীভূত আছে ধরে নিয়ে ওই গোলক বা গোলকের বাইরে অবস্থিত বিন্দুতে বিভব নির্ণয় করা যায়।

(ii) সুষম গোলকের ভেতরে অবস্থিত সকল বিন্দুতে বিভব স্থির থাকে। এই বিভব গোলকের পৃষ্ঠের বিভবের সমান হয়। গোলকের ভর M এবং ব্যাসার্ধ a হলে ভেতরে অবস্থিত যে কোনো বিন্দুর বিভব, $V = \frac{-GM}{a}$।

বিভব পার্থক্য (Potential difference) : কোনো মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের দুটি বিন্দুর বিভব পার্থক্য বলতে বুঝায়—একটি একক ভরের বস্তুকে এক বিন্দু থেকে অন্য বিন্দুতে নিতে কোনো বাহ্যিক বল দ্বারা সম্পাদিত কাজের পরিমাণ। যেমন m ভরকে A বিন্দু থেকে B বিন্দুতে নিতে যদি W_{AB} কাজ করতে হয় তাহলে ওই দুই বিন্দুর বিভব পার্থক্য হবে, $V_B - V_A = V = \frac{W_{AB}}{m}$

বিভব পার্থক্য এবং বিভবের একক অভিন্ন।

অনুধাবনমূলক কাজ : মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে দূরত্বের সাপেক্ষে মহাকর্ষীয় বিভবের পরিবর্তন ব্যাখ্যা কর।

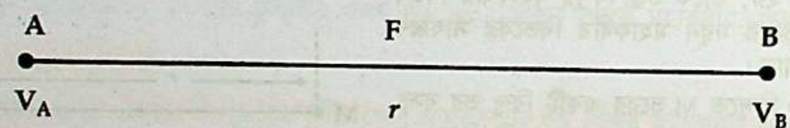


চিত্র ৬.১৬(ক)

আমরা জানি, মহাকর্ষ বিভব, $V = \frac{-GM}{r}$। সুতরাং দূরত্ব বৃদ্ধির সাথে $\frac{GM}{r}$ এর মান দূরত্বের ব্যস্তানুপাতে কমে কিন্তু বিভব –ve হওয়ায় V এর মান বাড়ে। অসীম দূরত্বের জন্য বিভব শূন্য। এর লেখচিত্র ৬.১৬(ক) চিত্রে দেখানো হলো।

৬.১৩ প্রাবল্য ও বিভব পার্থক্যের মধ্যে সম্পর্ক
Relation between intensity and potential

মহাকর্ষীয় প্রাবল্য এবং মহাকর্ষীয় বিভবের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করতে গিয়ে ধরি, A ও B মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে অবস্থিত কাছাকাছি দুটি বিন্দু [চিত্র ৬.১৭]। মনে করি এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব r। A বিন্দুর বিভব = V_A এবং B বিন্দুর



চিত্র ৬.১৭

বিভব = V_B। যেহেতু A ও B বিন্দু দুটি মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কাছাকাছি অবস্থিত, সেহেতু বিন্দু দুটির মহাকর্ষীয় প্রাবল্য সমান ধরে নেয়া হয়। মনে করি এই প্রাবল্য = F

এখন, একক ভরের কোনো বস্তুকে B বিন্দু হতে A বিন্দুতে আনতে কাজের পরিমাণ = প্রাবল্য × দূরত্ব

$= F \times AB = F \times r$ [$\because F = E$ একক ভরের জন্য]

এটাই হলো A বিন্দু এবং B বিন্দুর বিভব পার্থক্য অর্থাৎ $(V_A - V_B)$

$\therefore \quad F \times AB = V_A - V_B$

বা, $F = \frac{V_A - V_B}{AB} = \frac{V_A - V_B}{r}$ ... ... (6.25)

অর্থাৎ, দূরত্ব সাপেক্ষে বিভবের পরিবর্তনের হারকে প্রাবল্য বলে।

ক্ষেত্রের অভিমুখে ক্ষুদ্র সরণ $A'B' = dr$ হলে এবং A' বিন্দুর বিভব V ও B' বিন্দুর বিভব $(V + dV)$ হলে, $V_{A'} - V_{B'} = -dV$

$\therefore \quad F = E = -\frac{dV}{dr}$ ... ... (6.26)

এটাই প্রাবল্য এবং বিভবের মধ্যে সম্পর্ক। অর্থাৎ দূরত্বের সাপেক্ষে মহাকর্ষীয় বিভবের হ্রাসের হার। ঋণাত্মক অন্তরকই হচ্ছে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য।

ব্যাখ্যা কর : তোমার জানা অন্যান্য বিভবের সাথে মহাকর্ষীয় বিভব-এর তফাৎ কোথায় ?

মহাকর্ষ সর্বদা আকর্ষণধর্মী বলে মহাকর্ষীয় বিভব সর্বদা ঋণাত্মক। কিন্তু তড়িৎ এবং চৌম্বক বল আকর্ষণ ও বিকর্ষণ উভধর্মী হওয়ায় বিভব ঋণাত্মক বা ধনাত্মক দুইই হতে পারে। আবার মহাকর্ষীয় বিভব মাধ্যমের প্রকৃতির ওপর নির্ভর করে না। কিন্তু অন্য বিভবগুলি মাধ্যমের প্রকৃতির ওপর নির্ভর করে।

গাণিতিক উদাহরণ ৬.৭

১। প্রমাণ কর যে,

(ক) অভিকর্ষজ ত্বরণ এবং মহাকর্ষীয় প্রাবল্যের সংখ্যাগত মান সমান।

(খ) একটি ভারী বস্তু হতে অসীম দূরত্বে অবস্থিত কোনো বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব এবং মহাকর্ষীয় প্রাবল্য উভয়ের মান শূন্য।

(ক) মনে করি M = পৃথিবীর ভর এবং R = পৃথিবীর ব্যাসার্ধ। অতএব পৃথিবী পৃষ্ঠে অবস্থিত কোনো বিন্দুতে অভিকর্ষজ ত্বরণ $g = \frac{GM}{R^2}$ ... ... (i) এখানে G = মহাকর্ষীয় ধ্রুবক।

উক্ত বিন্দুতে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য, $E = \frac{GM}{R^2}$ ... ... (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) হতে পাই, $g = E$ ... ... (iii) (প্রমাণিত)

(খ) মনে করি ভারী বস্তুটির ভর $= M$

বস্তু হতে r দূরে অবস্থিত কোনো বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব $V = -\frac{GM}{r}$ ... ... (i)

যদি বিন্দুটি অসীম দূরত্বে অবস্থিত হয়, তবে $r = \infty$

$\therefore$ সমীকরণ (i) হতে পাই, $V = -\frac{GM}{\infty} = -0 = 0$ (শূন্য) ... ... (ii)

পুনঃ, মহাকর্ষীয় প্রাবল্য

$$E = \frac{GM}{r^2} = \frac{GM}{(\infty)^2} = 0 \quad \text{... ... (iii)}$$

$\therefore$ সমীকরণ (ii) এবং (iii) হতে আমরা পাই, $V = E = 0$ (প্রমাণিত)

২। পৃথিবীকে $5{\cdot}5 \times 10^3$ kg m^{-3} গড় ঘনত্বের তৈরি 64×10^5 m ব্যাসার্ধের একটি গোলক হিসেবে ধরে এর পৃষ্ঠে বিভব নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০৫]

আমরা জানি, $V = \frac{-GM}{R}$

পৃথিবীর ভর, $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$

$\therefore \quad V = -G\,\frac{4}{3}\frac{\pi R^3 \rho}{R} = -\frac{4}{3}\pi G R^2 \rho$

$= -\frac{4}{3} \times 3{\cdot}14 \times 6{\cdot}67 \times 10^{-11} \times (6{\cdot}4 \times 10^6)^2 \times 5{\cdot}5 \times 10^3$ Nm kg^{-1}

$= -6{\cdot}291 \times 10^7$ Nm kg^{-1} $= -6{\cdot}291 \times 10^7$ Jkg^{-1}

এখানে,
ব্যাসার্ধ, $R = 64 \times 10^5$ m $= 6{\cdot}4 \times 10^6$ m
ঘনত্ব, $\rho = 5{\cdot}5 \times 10^3$ kg m^{-3}
মহাকর্ষ ধ্রুবক, $G = 6{\cdot}67 \times 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2}

সম্প্রসারিত কর্মকাণ্ড : পৃথিবীর ব্যাস বরাবর এক প্রান্ত থেকে অপর প্রান্ত পর্যন্ত একটি সুড়ঙ্গ পথে একটি বস্তুখণ্ড ছেড়ে দিলে তা কী অপর প্রান্তে পৌঁছাবে ? এর গতির প্রকৃতি কী হবে ?

পৃথিবীকে ρ ঘনত্বের সমসত্ত্ব গোলক ধরলে পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে x দূরত্বে m ভরের বস্তুর ওপর প্রযুক্ত মহাকর্ষীয় বল, $F = \frac{4}{3}\pi G \rho m x$

অর্থাৎ $F \propto x \left[\because \frac{4}{3}\pi G\rho m = \text{ধ্রুবক} \right]$

আবার এই বল সর্বদা কেন্দ্রমুখি। সুতরাং বস্তুটি পৃথিবীর কেন্দ্রকে মধ্য অবস্থানে রেখে পৃথিবীর এক প্রান্ত থেকে অপর প্রান্ত পর্যন্ত সরল দোলগতিতে দুলতে থাকবে।

চিত্র ৬.১৮

ক্রিয়াকর্ম : একক ভরের কোনো বস্তুকে অসীম দূরত্ব থেকে কোনো বিন্দুতে আনতে কৃত কাজ ঋণাত্মক হয় কেন ? রকেট ভূ-পৃষ্ঠ হতে ওপরের দিকে উঠতে থাকলে, রকেটের অবস্থান অনুসারে পৃথিবীর জন্য বিভবের মান বাড়তে থাকে না কমতে থাকে ? পৃথিবীর অভ্যন্তরে কোনো বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব ওই বিন্দুর অবস্থানের ওপর নির্ভর করে কী ? ব্যাখ্যা কর।

১ম অংশ : এক্ষেত্রে যে কাজ সম্পাদিত হয় তা বস্তুটির ওপর আকর্ষণ বল বা মহাকর্ষ বলই করে থাকে, বাইরের কোনো শক্তি করে না। তাই কৃত কাজ ঋণাত্মক হয়।

২য় অংশ : রকেট যত ওপরে উঠবে, বিভবের মান তত বাড়বে। কারণ এই বিভব $V = -\frac{GM}{r}$। অর্থাৎ r বাড়লে V-এর মান বাড়তে থাকবে। r অসীম হলে V-এর মান সর্বোচ্চ হবে।

৩য় অংশ : পৃথিবীকে একটি নিরেট গোলক ধরে এর অভ্যন্তরে কেন্দ্র হতে r দূরত্বে কোনো বিন্দুতে বিভব $V = -GM \times \frac{3R^2 - r^2}{2R^3}$, যেখানে M এবং R যথাক্রমে পৃথিবীর ভর ও ব্যাসার্ধ। তাই r-এর মান পরিবর্তনে বিভবের মান পরিবর্তিত হবে।

৬·১৪ মহাকর্ষ সূত্রের প্রয়োগ
Uses of gravitation law

নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র কেবলমাত্র দুটি কণার মধ্যে আকর্ষণ বল নির্ণয় করতে সক্ষম। কিন্তু বাস্তবে প্রত্যেক বস্তুরই নির্দিষ্ট আকার থাকে। যখন দুটি বিস্তৃত বস্তুর দূরত্ব এদের আকারের তুলনায় অনেক বেশি হয়, কেবলমাত্র তখনই আমরা বস্তু দুটির আকার উপেক্ষা করে এদেরকে কণা বলে ধরে নিতে পারি। এক্ষেত্রে বস্তু দুটির ভর ওদের নিজ নিজ ভরকেন্দ্রে কেন্দ্রীভূত আছে বলে ধরে নিয়ে নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র প্রয়োগ করে আকর্ষণ বল নির্ণয় করা যায়। আকার উপেক্ষা করতে না পারলে বিস্তৃত বস্তুর ক্ষেত্রে মহাকর্ষীয় আকর্ষণ বল সহজে গণনা করা যায় না।

বিভিন্ন জায়গায় বস্তুর ভর অপরিবর্তিত থাকলেও অভিকর্ষজ ত্বরণের মান পরিবর্তিত হয়। ফলে বস্তুর ওজন বিভিন্ন স্থানে বিভিন্ন হয়। অভিকর্ষ বলের প্রভাবে এবং অবস্থানের তারতম্যের কারণে অভিকর্ষজ ত্বরণসহ গোলকের ভিতরে ও বাইরে মহাকর্ষ বিভব ও প্রাবল্যের মানের তারতম্য ঘটে।

কোনো সুষম নিরেট গোলক বা সুষম গোল খোলকের সমস্ত ভর এদের নিজ নিজ কেন্দ্রে কেন্দ্রীভূত আছে ধরে নিয়ে ওই গোলক বা গোলকে অবস্থিত কণার ওপর মহাকর্ষ সূত্র ব্যবহার করে আকর্ষণ বল নির্ণয় করা যায়।

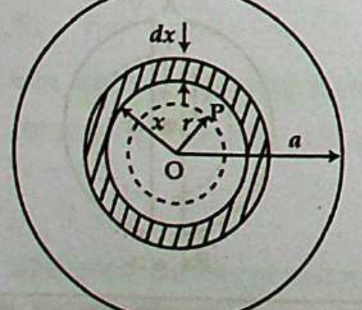
সুষম গোলাকার খোলকের ভেতর অবস্থিত কণার ওপর কোনো আকর্ষণ বল ক্রিয়া করে না। কোনো নিরেট গোলকের জন্য অন্য কোনো বিন্দুতে মহাকর্ষ সূত্র প্রয়োগ করতে গেলে অর্থাৎ বিভব ও প্রাবল্যসহ মহাকর্ষ বল নির্ণয় করতে গেলে তিনটি ঘটনা ঘটতে পারে।

(I) বিন্দু গোলকের অভ্যন্তরে অবস্থিত হতে পারে।
(II) বিন্দু গোলকের ওপরে অবস্থিত হতে পারে।
(III) বিন্দু গোলকের বাইরে অবস্থিত হতে পারে।

ক. নিরেট গোলকের অভ্যন্তরে মহাকর্ষীয় সূত্রের ব্যবহার (বিভব ও প্রাবল্য নির্ণয়)
Uses of gravitational law at a point inside a solid sphere (Determination of potential and intensity)

যখন বিন্দুটি গোলকের ভেতর অবস্থিত

মনে করি P বিন্দুটি গোলকের উপাদানের ভেতর কেন্দ্র হতে r দূরে অবস্থিত। O-কে কেন্দ্র করে r ব্যাসার্ধের একটি গোলক আঁকা হলো। বলা যায়, সমগ্র গোলকটি দুটি গোলকের যোগফল অর্থাৎ একটি হলো r ব্যাসার্ধের নিরেট গোলক এবং অপরটি $(a - r)$ বেধের ফাঁপা গোলক [চিত্র ৬.১৯]। নিরেট গোলকের দরুন P বিন্দুতে মহাকর্ষ সূত্র প্রয়োগ করে পাই,



চিত্র ৬.১৯

$$\text{বিভব } (V_p)_1 = -\frac{GM}{r} = \frac{-G\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r} = -\frac{4}{3}\pi\rho G r^2$$

এখানে M = গোলকের ভর = $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

ρ = উপাদানের ঘনত্ব

a = গোলকের ব্যাসার্ধ

r = গোলকের কেন্দ্র হতে নির্ণেয় বিন্দুর দূরত্ব।

আবার $(a - r)$ বেধের ফাঁপা গোলকটিকে x ব্যাসার্ধের এবং dx বেধের অনেকগুলি পাতলা খোলকের সমষ্টি ভাবা যেতে পারে। এরকম একটি খোলকের দরুন খোলকের ভেতরের বিন্দু P তে বিভব,

$$(dV_p)_2 = -\frac{G\,4\pi x^2\,dx\rho}{x} = -4\pi G\,\rho x dx$$

$(a-r)$ বেধের সমগ্র গোলকের দরুন বিভব,

$$(V_p)_2 = -4\pi G\rho \int_r^a x dx = -2\pi G\rho(a^2 - r^2)$$

তাহলে সমগ্র নিরেট গোলকের দরুন P বিন্দুর বিভব,

$$\begin{aligned}(V_p)_i &= (V_p)_1 + (V_p)_2 \\ &= -\frac{4}{3}\pi G\rho r^2 - 2\pi G\rho(a^2 - r^2) \\ &= -2\pi G\rho\left(\frac{2}{3}r^2 + a^2 - r^2\right) \\ &= -\frac{2}{3}\pi G\rho\,(2r^2 + 3a^2 - 3r^2) \\ &= -\frac{2}{3}\pi G\rho\,(3a^2 - r^2) \\ &= -\frac{4}{3}\pi G a^3\rho\left(\frac{3a^2 - r^2}{2a^3}\right)\end{aligned}$$

কিন্তু $\frac{4}{3}\pi a^3\rho = M = a$ ব্যাসার্ধের নিরেট গোলকের ভর

$$\therefore \quad V = \frac{-GM(3a^2 - r^2)}{2a^3} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.27)$$

এবং ক্ষেত্র প্রাবল্য $(E_p)_i = -\frac{d}{dr}(V_p) = -\frac{d}{dr}(V_p)_i$

$$= -\frac{d}{dr}\left(\frac{-GM}{2a^3}(3a^2 - r^2)\right) = \frac{GM}{2a^3}\frac{d}{dr}(3a^2 - r^2)$$

$$\therefore \quad (E_p)_i = \frac{-GM}{a^3}r \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.28)$$

এখানে $-$ve চিহ্ন আকর্ষণ বল বোঝায়। শুধু মান বিবেচনা করলে $E_{pi} = \frac{GM}{a^3}r$ হয়।

খ. নিরেট গোলকের বাইরে কোনো বিন্দুতে মহাকর্ষ সূত্রের ব্যবহার (বিভব ও প্রাবল্য নির্ণয়)
Use of gravitational law at a point outside the sphere (Determination of potential and intensity)

যখন বিন্দুটি গোলকের বাইরে অবস্থিত

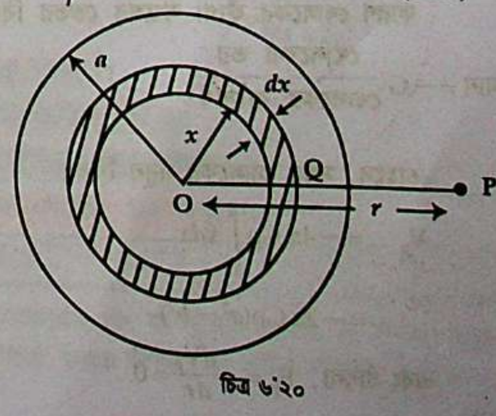
৬·২০ চিত্রানুযায়ী a ব্যাসার্ধ এবং M ভরের নিরেট গোলকের কেন্দ্র O হতে r দূরে গোলকের বাইরে P বিন্দু অবস্থিত। সমগ্র গোলকটিকে x ব্যাসার্ধের এবং dx বেধের অনেকগুলো সমকেন্দ্রিক পাতলা খোলকের সমষ্টি ভাবা যেতে পারে।

গোলকটির ভর $dm = 4\pi x^2\, dx\rho$, এখানে ρ = উপাদানের ঘনত্ব। dm কে O বিন্দুতে কেন্দ্রীভূত ভাবা যেতে পারে। সুতরাং এর দরুন P বিন্দুতে বিভব $dV_p = -\frac{Gdm}{r}$

এবং সমগ্র গোলকের দরুন P বিন্দুতে বিভব, $(V_p)_0 = \frac{-G\sum dm}{r} = \frac{-GM}{r} \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.29)$

এবং প্রাবল্য, $(E_p)_0 = +\frac{d}{dr}\left(-\frac{GM}{r}\right)$

$$= +\frac{GM}{r^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.29a)$$



চিত্র ৬·২০

যখন বিন্দুটি গোলকের পৃষ্ঠের ওপর অবস্থিত : ৬·২০ চিত্রানুযায়ী (6.29) এবং [6.29(a)] সমীকরণে $r = a$ বসিয়ে পাই,

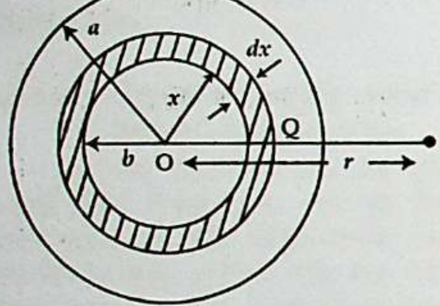
বিভব, $V_p = -\frac{GM}{a}$

এবং প্রাবল্য, $E_p = \frac{+GM}{a^2}$

গ. ফাঁপা গোলকের বাইরে মহাকর্ষীয় সূত্রের ব্যবহার (বিভব ও প্রাবল্য নির্ণয়)
Use of gravitational law outside the hollow sphere (Determination of potential and intensity)

যখন বিন্দুটি গোলকের বাইরে অবস্থিত

৬·২১ নং চিত্রে ফাঁপা গোলকের কেন্দ্র O ভেতরের পিঠের ব্যাসার্ধ b এবং বাইরের পিঠের ব্যাসার্ধ a। P হলো বাইরের একটি বিন্দু, যখন $OP = r$। গোলকটিকে অনেকগুলি সমকেন্দ্রিক সরু বেধের খোলকের সমষ্টি ভাবা যেতে পারে। এরকম একটি খোলক নেয়া হলো যার ব্যাসার্ধ x এবং বেধ dx। গোলকের উপাদানের ঘনত্ব ρ হলে, সরু বেধের খোলকটির ভর $= 4\pi x^2 dx\rho$.



চিত্র ৬·২১

উক্ত খোলকের দরুন P বিন্দুতে বিভব,

$$dV_p = -G\frac{\text{খোলকের ভর}}{r}$$

$$= \frac{-G\,4\pi x^2 dx\rho}{r}$$

$\therefore$ **সমগ্র গোলকের বিভব,** $V_p = -\frac{4\pi G\rho}{r}\int_b^a x^2\,dx$

$$= \frac{-4\pi G\rho}{r} \times \frac{(a^3-b^3)}{3} = \frac{-GM}{r} \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.30)$$

আবার P বিন্দুতে ক্ষেত্র প্রাবল্য, $E_p = \frac{d}{dr}\left(\frac{-GM}{r}\right) = \frac{+GM}{r^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.31)$

ঘ. ফাঁপা গোলকের ভেতরে মহাকর্ষীয় সূত্রের ব্যবহার (বিভব ও প্রাবল্য নির্ণয়)
Use of gravitational law inside the hollow sphere (Determination of potential and intensity)

যখন বিন্দুটি গোলকের ভেতরে অবস্থিত

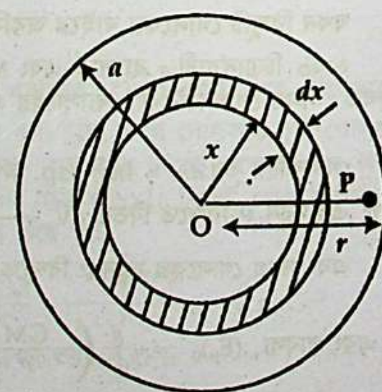
গোলকের ভেতর ফাঁপা অংশে P বিন্দু নেয়া হলো [চিত্র ৬·২২]। $OP = r$; x ব্যাসার্ধের এবং dx বেধের একটি পাতলা খোলক নেয়া হলো। খোলকটির ভর $= 4\pi x^2 dx\rho$

উক্ত খোলকের দরুন P বিন্দুতে বিভব,

$$dV_p = -G\frac{\text{খোলকের ভর}}{x}$$

$$= -G\frac{4\pi x^2 dx\rho}{x}$$

$$= -4\pi G\rho x dx$$



চিত্র ৬·২২

কারণ খোলকের ফাঁপা অংশের ভেতর বিভব সর্বত্র সমান যার

মান $= -G\frac{\text{খোলকের ভর}}{\text{খোলকের ব্যাসার্ধ}}$

তাহলে, **সমগ্র গোলকের দরুন বিভব**

$$V_p = -4\pi G\rho\int_b^a x dx$$

$$= -2\pi G\rho(a^2-b^2) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.32)$$

এবং প্রাবল্য, $E_p = +\frac{dV_p}{dr} = 0$

কাজ : একটি বস্তুকে পৃথিবী পৃষ্ঠ থেকে খাড়া ওপরের দিকে v বেগে উৎক্ষেপণ করা হলো। এটি পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে কত উচ্চতায় উঠবে? ধরে নাও, বস্তুটি বাধাহীন পথে ওপরে উঠছে।

v বেগে ভূপৃষ্ঠ থেকে উৎক্ষিপ্ত m ভরের বস্তুটির ভূপৃষ্ঠে গতিশক্তি $=\frac{1}{2}mv^2$। ধরা যাক বস্তুটি সর্বাধিক r উচ্চতায় উঠতে পারে। সেখানে বস্তুটির বেগ শূন্য হবে। ফলে গতিশক্তি $= 0$। পৃথিবীর ভর M এবং ব্যাসার্ধ R হলে ভূপৃষ্ঠে বস্তুটির স্থিতিশক্তি $= -\frac{GMm}{R}$ এবং r উচ্চতায় স্থিতিশক্তি $= -\frac{GMm}{r}$।

এখন, শক্তির নিত্যতা সূত্র অনুসারে, ভূপৃষ্ঠে বস্তুটির মোট শক্তি $= r$ উচ্চতায় বস্তুটির মোট শক্তি।

সুতরাং, $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = 0 - \frac{GMm}{r}$

বা, $\frac{GMm}{r} = \frac{GMm}{R} - \frac{1}{2}mv^2$

বা, $\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \frac{mv^2}{2GMm}$

বা, $r = \frac{2GMR}{2GM - v^2R}$

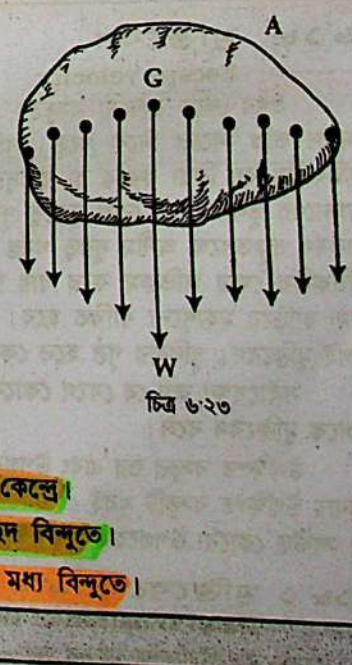
$= \frac{2gR^2.R}{2gR^2 - v^2R}$ $[\because GM = gR^2]$

$\therefore$ সর্বাধিক উচ্চতা $= \frac{2gR^2}{2gR^2 - v^2}$

৬.১৫ অভিকর্ষ কেন্দ্র
Centre of gravity

আমরা জানি, কোনো একটি বস্তু পৃথিবীর কেন্দ্রের দিকে যে পরিমাণ বল দ্বারা আকৃষ্ট হয় তাকে বস্তুর ওজন বা ভার বলে। কোনো বস্তুকে যেভাবেই রাখা হোক না কেন তার ওজন একটি বিন্দুর মধ্য দিয়ে বস্তুর ওপর সর্বদা ক্রিয়া করে। ওই বিন্দুই হলো অভিকর্ষ কেন্দ্র বা ভারকেন্দ্র।

মনে করি A একটি দৃঢ় বস্তু। তা কতকগুলো বস্তুকণার সমষ্টি। প্রতিটি কণাই অভিকর্ষ বল দ্বারা পৃথিবীর কেন্দ্রের দিকে আকৃষ্ট হবে। এই সব বল মিলিত হয়ে একটি লব্ধি বল সৃষ্টি করবে। বস্তুটিকে ঘুরে ফিরে যেভাবেই রাখা হোক না কেন কণাগুলোর ওপর পৃথিবীর আকর্ষণ বলের পরিমাণ, অভিমুখ ও ক্রিয়াবিন্দুর এবং সেই সঙ্গে ওই বলগুলোর লব্ধির পরিমাণ, অভিমুখ ও ক্রিয়াবিন্দুর কোনো পরিবর্তন হবে না। এই লব্ধি বলই বস্তুর ওজন। চিত্র ৬.২৩-এ ওজন বা বল বস্তুর 'G' বিন্দুর মধ্য দিয়ে ক্রিয়া করছে। এই বিন্দুই বস্তুটির অভিকর্ষ কেন্দ্র বা ভারকেন্দ্র।



চিত্র ৬.২৩

জানার বিষয় :
I. সুষম দণ্ডের ক্ষেত্রে অভিকর্ষ কেন্দ্র—মধ্য বিন্দুতে।
II. বৃত্ত ও আংটির ক্ষেত্রে অভিকর্ষ কেন্দ্র—জ্যামিতিক কেন্দ্রে।
III. সামান্তরিকের ক্ষেত্রে অভিকর্ষ কেন্দ্র—কর্ণদ্বয়ের ছেদ বিন্দুতে।
IV. বেলনাকৃতি বস্তুর ক্ষেত্রে অভিকর্ষ কেন্দ্র—অক্ষের মধ্য বিন্দুতে।

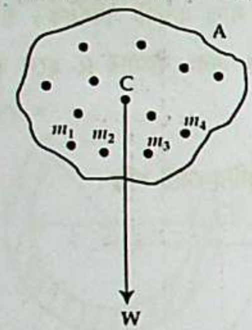
ব্যাখ্যা কর : বস্তুর ভারকেন্দ্র বস্তুর উপাদানের বাইরে থাকতে পারে কী ?

একটি ধাতব রিং বা বৃত্তাকার আংটা বা হাতে পরার চুড়ি এর ভারকেন্দ্র রিং বা বৃত্তের কেন্দ্রে অবস্থিত, অথচ সেখানে বস্তুটির উপাদান থাকে না। সুতরাং, ক্ষেত্রবিশেষে বস্তুর ভারকেন্দ্র বস্তুর উপাদানের বাইরে থাকতে পারে।

৬.১৬ ভরকেন্দ্র

Centre of mass

আমরা জানি একটি বস্তু অনেকগুলো বস্তুকণার সমষ্টি। বস্তুর কণাগুলোর সমস্ত ভরকে একটি মাত্র বিন্দুতে কেন্দ্রীভূত মনে করলে ওই বিন্দুর মধ্য দিয়েই সমস্ত কণার ওপর তাদের ভরের সমানুপাতিক ক্রিয়ারত সমান্তরাল বলসমূহের লব্ধি ক্রিয়া করে বলে বিবেচিত হয়। ওই বিন্দুকে বস্তুর ভরকেন্দ্র বলে।



চিত্র ৬.২৪

মনে করি A একটি বস্তু। তা অনেকগুলো বস্তুকণার সমষ্টি। ধরি বস্তুকণাগুলোর ভর যথাক্রমে $m_1, m_2, m_3 \ldots\ldots m_n$ ইত্যাদি [চিত্র ৬.২৪]। সমস্ত ভরকে C বিন্দুতে সমবেত ধরা হলে ওই ভরগুলোর ওপর ক্রিয়ারত কণার ভরের সমানুপাতিক সমান্তরাল বলের লব্ধি C বিন্দুর মধ্য দিয়েই ক্রিয়া করবে। এই বিন্দুর নামই ভরকেন্দ্র।

৬.১৭ ভরকেন্দ্র ও ভারকেন্দ্রের পার্থক্য

Difference between centre of mass and centre of gravity

বস্তুর ভরকেন্দ্র	বস্তুর ভারকেন্দ্র
১। বস্তুর ভরকেন্দ্র এমন একটি বিন্দু যে বিন্দুতে বল প্রয়োগ করলে বস্তুটির শুধু রৈখিক গতি উৎপন্ন হয়, কোনো আবর্ত গতি সৃষ্টি হয় না।	১। বস্তুর ভারকেন্দ্র হলো এমন এক বিন্দু যে বিন্দু দিয়ে বস্তুর সমস্ত ওজন উল্লম্বভাবে নিচের দিকে ক্রিয়াশীল হয়।
২। কোনো নির্দিষ্ট আকার ও আয়তনবিশিষ্ট বস্তুকে মহাবিশ্বের যেখানেই নেয়া হোক না কেন তার ভর একই থাকে, ফলে ভরকেন্দ্রটি একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে অবস্থিত থাকে।	২। পৃথিবীর কেন্দ্রে বা মহাশূন্যে যেখানে অভিকর্ষ বল ক্রিয়া করে না সেখানে বস্তুর ওজন থাকে না, ফলে ভারকেন্দ্রের কোনো অস্তিত্ব থাকে না।
৩। বস্তুর বিভিন্ন বিন্দুতে অভিকর্ষজ ত্বরণ সমান হলে বস্তুর ভরকেন্দ্র ও ভারকেন্দ্র একই বিন্দু হয়।	৩। যদি বস্তুর বিভিন্ন বিন্দুতে অভিকর্ষজ ত্বরণ বিভিন্ন হয় তবে বস্তুর ভরকেন্দ্র ও ভারকেন্দ্র আলাদা বিন্দু হয়।

৬.১৮ মুক্তিবেগ

Escape velocity

ওপর থেকে কোনো বস্তুকে ছেড়ে দিলে তা নিচের দিকে পড়ে। আবার ওপরের দিকে একটি ঢিল নিক্ষেপ করলে তাও নিচের দিকে পড়ে। পৃথিবীর অভিকর্ষের টানে এই দুটি বস্তু নিচের দিকে পড়ে। কতদূর পর্যন্ত এই অভিকর্ষীয় বল ক্রিয়া করবে বা কতদূর পর্যন্ত এই অভিকর্ষ বলের সীমা বিস্তৃত ? এই প্রশ্ন আমাদের সকলের। পৃথিবীর ব্যাসার্ধের তুলনায় খুব বেশি দূরত্বে পৃথিবীর আকর্ষণ বল নগণ্য হয়; কিন্তু যত ক্ষুদ্রই হোক না কেন পৃথিবীর মহাকর্ষীয় আকর্ষণ প্রকৃতপক্ষে অসীম দূরত্ব পর্যন্ত বিস্তৃত। কোনো বস্তুকে যদি এমন বেগে ঊর্ধ্বে নিক্ষেপ করা হয় যে তা পৃথিবীর অভিকর্ষীয় ক্ষেত্র অতিক্রম করে যায় তবে বস্তুটি আর কখনই পৃথিবীতে ফিরে আসবে না। তখন বস্তুটি অভিকর্ষের সীমা ছাড়িয়ে মহাশূন্যে ধাবিত হবে। ন্যূনতম যে বেগে নিক্ষেপ করলে কোনো বস্তু অভিকর্ষের সীমা ছাড়িয়ে যায় সেই বেগই মুক্তিবেগ। পৃথিবীর পৃষ্ঠ হতে কোনো বস্তুর মুক্তিবেগ 11.2 kms^{-1} বা 7 mile s^{-1}।

সর্বাপেক্ষা কম যে বেগে কোনো বস্তুকে ওপরের দিকে নিক্ষেপ করলে তা আর পৃথিবীতে ফিরে আসে না সেই বেগকে মুক্তিবেগ বলে।

উৎক্ষিপ্ত বস্তুর ভর এবং উপগ্রহের ভর (পৃথিবী) এর ওপর মুক্তিবেগের কোনো প্রভাব আছে কি ? যেহেতু পৃথিবীর তুলনায় উৎক্ষিপ্ত বস্তুটি খুবই ছোট তাই পৃথিবীর ভরের ওপর নির্ভর করলেও নিক্ষিপ্ত বস্তুর ভরের ওপর তা নির্ভর করে না। স্পষ্টত কোনো উপগ্রহের প্রদক্ষিণ বেগ মুক্তিবেগ অপেক্ষা কম হয়, তা না হলে উপগ্রহটি মহাশূন্যে বিলীন হয়ে যেত।

৬.১৮.১ মুক্তিবেগের মান নির্ণয়

Determination of the magnitude of escape velocity

মনে কর উৎক্ষিপ্ত বস্তুর ভর m, পৃথিবীর ভর M, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R, পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে বস্তুর দূরত্ব r [চিত্র ৬.২৫] অতএব পৃথিবী ও নিক্ষিপ্ত বস্তুর মধ্যকার ক্রিয়াশীল অভিকর্ষ বল,

$$F = \frac{GMm}{r^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.33)$$

অভিকর্ষের ক্রিয়ার বিরুদ্ধে বস্তুটিকে যদি ওপরের দিকে অতি ক্ষুদ্র দূরত্ব dr সরানো হয়, তবে কৃত কাজ,

$$dW = Fdr = \frac{GMm}{r^2} \times dr \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.34)$$

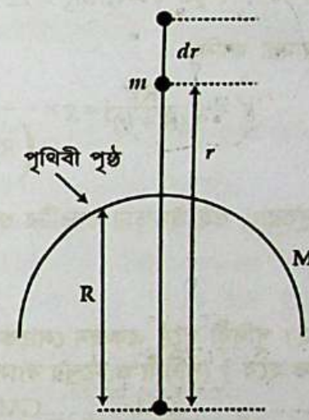
ভূ-পৃষ্ঠ হতে বস্তুটিকে অসীম দূরত্বে সরাতে মোট কৃত কাজ W সমীকরণ (6.34) কে R থেকে ∞ সীমার মধ্যে সমাকলন করে পাওয়া যায়

$$W = \int dW = \int_R^{\infty} \frac{GMm}{r^2} dr$$

$$\therefore \quad W = GMm \int_R^{\infty} r^{-2} dr = GMm \left[-\frac{1}{r}\right]_R^{\infty}$$

$$= GMm \left[-\frac{1}{\infty} + \frac{1}{R}\right] = \frac{GMm}{R}$$

$$\therefore \quad W = \frac{GMm}{R} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.35)$$



চিত্র ৬.২৫

মুক্তিবেগ v_e হলে বস্তুর প্রাথমিক গতিশক্তি $= \frac{1}{2} m v_e^2$। পৃথিবীর মহাকর্ষীয় আকর্ষণের বাইরে চলে যেতে হলে বস্তুর প্রাথমিক গতিশক্তি অন্তত W এর সমান হওয়া দরকার।

$$\therefore \quad \frac{1}{2} m v_e^2 = \frac{GMm}{R}$$

বা, $$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.36)$$

কিন্তু আমরা জানি, $g = \frac{GM}{R^2} \quad \therefore \quad GM = gR^2$

$$\therefore \quad \text{সমীকরণ (6.36) থেকে, } v_e = \sqrt{\frac{2gR^2}{R}} = \sqrt{2gR} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.37)$$

সমীকরণ (6.36) এবং (6.37) হলো মুক্তিবেগের রাশিমালা।

উপরোক্ত সমীকরণে m না থাকায় আমরা বলতে পারি যে, মুক্তিবেগ বস্তুর ভরের ওপর নির্ভর করে না। বস্তু ছোট বা বড় যাই হোক না কেন, মুক্তিবেগ একই হবে।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : পৃথিবী পৃষ্ঠ থেকে কোনো স্থির বস্তুর মুক্তি বেগ এবং পৃথিবীর চারদিকে আবর্তনরত কোনো বস্তুর মুক্তি বেগ কী একই হবে ?

পৃথিবী পৃষ্ঠে কোনো বস্তুর মুক্তিবেগ, $v_e = \sqrt{2gR} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

পৃথিবীর চারদিকে আবর্তনরত কোনো বস্তুর মোট শক্তি,

$$E = \text{বস্তুর স্থিতিশক্তি + বস্তুর গতিশক্তি} = -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$= -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2} m \left(\frac{GM}{R}\right) \qquad \left[\because v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}\right]$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{GMm}{R}$$

ওই বস্তুর ক্ষেত্রে মুক্তিবেগ v_e' হলে, আমরা পাই,

$$\frac{1}{2} m (v_e')^2 = \frac{1}{2} \frac{GMm}{R}$$

বা, $$v_e' = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$\therefore \quad v_e > v_e'$$

গাণিতিক উদাহরণ ৬.৮

১। পৃথিবী পৃষ্ঠে একটি বস্তুর ওজন 72 N। পৃথিবী পৃষ্ঠ থেকে পৃথিবীর ব্যাসার্ধের অর্ধেক উচ্চতায় ওই বস্তুর ওজন কত হবে ?

এখানে, বস্তুর ওজন, $mg = 72\text{ N}$, উচ্চতা, $h = \frac{R}{2}$; ওই উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ g হলে,

আমরা জানি,

$$g' = g\frac{R^2}{(R+h)^2} = g \times \frac{R^2}{\left(R + \frac{R}{2}\right)^2} = \frac{4}{9}g$$

সুতরাং, ওই উচ্চতায় বস্তুটির ওজন $= mg' = m \times \frac{4}{9}g = \frac{4}{9} \times mg$

$$= \frac{4}{9} \times 72 = 32\text{ N}$$

২। পৃথিবী পৃষ্ঠে একজন লোকের ওজন 80 kg। পৃথিবীর ভর অপেক্ষা 81 গুণ বেশি হলে চন্দ্র পৃষ্ঠে লোকটির ওজন কত হবে ? (পৃথিবী ও চন্দ্রের ব্যাসার্ধের অনুপাত 4 : 1) [RUET Admission Test, 2015-16]

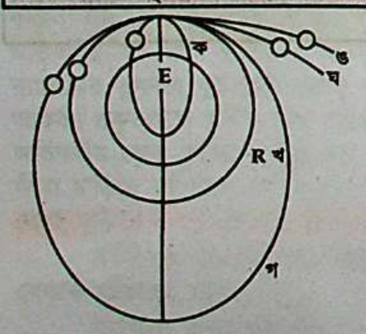
$$g_e = \frac{GMe}{R^2e}, \; g_m = \frac{GMm}{R_m{}^2}$$

$$\therefore \frac{g_m}{g_e} = \frac{Mm}{Me} \times \left(\frac{Re}{Rm}\right)^2$$

$$= \frac{1}{81} \times \left(\frac{4}{1}\right)^2 = \frac{16}{81}$$

জানার বিষয় : কয়েকটি ক্ষেত্রে মুক্তি বেগ— I. পৃথিবীতে 11·2 km/s
II. চাঁদে 2·4 km/s
III. বুধে 4·3 km/s
IV. মঙ্গলে 5·0 km/s
V. শুক্রে 10·3 km/s
VI. বৃহস্পতিতে 59·5 km/s

হিসাব কর : পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $R = 64 \times 10^5$ m ও $g = 9{\cdot}80\text{ ms}^{-2}$ ধরে মুক্তি বেগ নির্ণয় কর।



চিত্র ৬.২৬

এক্ষেত্রে মুক্তিবেগ,

$$v_e = \sqrt{2 \times 9{\cdot}80 \times 64 \times 10^5} = 11{\cdot}20 \times 10^3\text{ ms}^{-1}$$

$= 11{\cdot}20\text{ kms}^{-1} = 7$ মাইল/সে. (প্রায়)

[$\because$ 1 মাইল = 1·6093 km]

= 25000 মাইল/ঘণ্টা (প্রায়)

সুতরাং কোনো বস্তুকে যদি প্রতি ঘণ্টায় 25000 মাইল বেগে বা এর অপেক্ষা অধিক বেগে উৎক্ষেপ করা হয়, তবে তা আর ভূ-পৃষ্ঠে ফিরে আসে না।

নিজে কর : একই উচ্চতায় দুটি কৃত্রিম উপগ্রহ পৃথিবীর চারদিকে আবর্তিত হচ্ছে। একটি উপগ্রহের ভর অপরটির দ্বিগুণ। কোনটি উচ্চতর বেগে ঘুরবে?

পৃথিবীর চারদিকে পৃথিবী পৃষ্ঠ থেকে h উচ্চতায় আবর্তনরত কোনো উপগ্রহের কক্ষীয় বেগ, $v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$, যেখানে R ও M যথাক্রমে পৃথিবীর ব্যাসার্ধ ও ভর। সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে, কক্ষীয় বেগ উপগ্রহের ভরের ওপর নির্ভরশীল নয়। অর্থাৎ দুটি উপগ্রহই সমান বেগে আবর্তিত হবে।

জানার বিষয় : পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে কোনো বস্তুকে v বেগে ওপর দিকে নিক্ষেপ করলে পৃথিবীর আকর্ষণ বলের দ্বারা বস্তুটির বিভিন্ন পরিণতি হতে পারে। যথা—

(১) যদি $v^2 < \frac{v_e^2}{2}$ হয়, অর্থাৎ উৎক্ষেপণ বেগ $7{\cdot}88\ \text{kms}^{-1}$ অপেক্ষা কম হয়, তবে তা উপবৃত্তাকার পথে পৃথিবী প্রদক্ষিণ করবে এবং অবশেষে পৃথিবীতে ফিরে আসবে [চিত্র ৬.২৬-এ 'ক']।

(২) যদি $v^2 = \frac{v_e^2}{2}$ হয় অর্থাৎ উৎক্ষেপণ বেগ $7{\cdot}88\ \text{kms}^{-1}$ হয়, তবে বস্তুটি বৃত্তাকার পথে পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করবে এবং চাঁদের মতো উপগ্রহে পরিণত হবে [চিত্র ৬.২৬-এ 'খ']।

(৩) যদি $v^2 > \frac{v_e^2}{2}$ কিন্তু $< v_E^2$ হয়, অর্থাৎ উৎক্ষেপণ বেগ $7{\cdot}88\ \text{kms}^{-1}$ হতে $11{\cdot}2\ \text{kms}^{-1}$ এর মধ্যে থাকে, তবে পৃথিবীকে একটি ফোকাসে রেখে তা উপবৃত্তাকার পথে পৃথিবী প্রদক্ষিণ করতে থাকবে [চিত্র ৬.২৬-এ 'গ']।

(৪) যদি $v = v_e$ হয়, অর্থাৎ উৎক্ষেপণ বেগ $11{\cdot}2\ \text{kms}^{-1}$ অর্থাৎ মুক্তিবেগের সমান হয়, তবে বস্তুটি একটি অধিবৃত্ত পথে পৃথিবী পৃষ্ঠ ছেড়ে যায় এবং তা পৃথিবীর আকর্ষণ ক্ষেত্র অতিক্রম করে বাইরে চলে যাবে [চিত্র ৬.২৬-এ 'ঘ']।

(৫) যদি $v > v_e$ হয়, অর্থাৎ উৎক্ষেপণ বেগ মুক্তি বেগ অপেক্ষা বেশি হয়, তবে বস্তু পরাবৃত্ত পথে পৃথিবী-পৃষ্ঠ ছেড়ে যায় এবং তা আর পৃথিবীতে ফিরে আসে না [চিত্র ৬.২৬-এ 'ঙ']।

নিজে কর : পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে মুক্তিবেগ চন্দ্র পৃষ্ঠ থেকে মুক্তিবেগ অপেক্ষা বড় না ছোট ? — ব্যাখ্যা কর।

মনে করি v_e ও v_e' যথাক্রমে পৃথিবী ও চন্দ্রে মুক্তিবেগ। আরও মনে করি g ও R পৃথিবী পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ ও পৃথিবীর ব্যাসার্ধ। আবার g' ও R' চন্দ্রের ক্ষেত্রে অনুরূপ রাশি তাহলে,

$v_e = \sqrt{2gR}$ ও $v_e' = \sqrt{2g'R'}$

$$\therefore \quad \frac{v_e}{v_e'} = \sqrt{\frac{gR}{g'R'}}$$

যেহেতু $g > g'$ ও $R > R'$ অতএব $v_e > v_e'$

অর্থাৎ পৃথিবীতে চন্দ্র অপেক্ষা মুক্তিবেগের মান বেশি।

গাণিতিক উদাহরণ ৬.৯

১। মঙ্গল গ্রহের ব্যাস 6000 km এবং এর পৃষ্ঠে অভিকর্ষীয় ত্বরণ $3{\cdot}8\ \text{ms}^{-2}$। মঙ্গল গ্রহের পৃষ্ঠ হতে একটি বস্তুর মুক্তিবেগ নির্ণয় কর। [দি. বো. ২০১০; রা. বো. ২০০৮; ঢা. বো. ২০০৬]

আমরা জানি,

$$\begin{aligned} v_e &= \sqrt{2gR} \\ &= \sqrt{2 \times 3{\cdot}8 \times 3 \times 10^6} \\ &= 4{\cdot}77 \times 10^3\ \text{ms}^{-1} \\ &= 4{\cdot}77\ \text{kms}^{-1} \end{aligned}$$

এখানে,

ব্যাস, $d = 6000\ \text{km} = 6 \times 10^6\ \text{m}$

$\therefore$ ব্যাসার্ধ, $R = \frac{d}{2} = 3 \times 10^6\ \text{m}$

ত্বরণ, $g = 3{\cdot}8\ \text{ms}^{-2}$

মুক্তিবেগ, $v_e = ?$

২। বৃহস্পতির ভর ও ব্যাসার্ধ যথাক্রমে $1{\cdot}9 \times 10^{27}$ kg এবং 7×10^7 m হলে এর মুক্তিবেগ নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০০৪]

আমরা জানি, মুক্তি বেগ

$v_e = \sqrt{2gR}$ ... ... (i)

আবার, $g = \frac{GM}{R^2}$ ... ... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \times GM}{R^2} \times R} = \sqrt{\frac{2\,GM}{R}}$$

$$\therefore \quad v_e = \sqrt{\frac{2 \times 6{\cdot}67 \times 10^{-11} \times 1{\cdot}9 \times 10^{27}}{7 \times 10^7}}$$

$$= 6{\cdot}02 \times 10^4\ \text{ms}^{-1}$$

এখানে,

বৃহস্পতির ভর, $M = 1{\cdot}9 \times 10^{27}$ kg

বৃহস্পতির ব্যাসার্ধ, $R = 7 \times 10^7$ m

মহাকর্ষীয় ধ্রুবক, $G = 6{\cdot}67 \times 10^{-11}\ \text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$

৩। একটি কৃত্রিম উপগ্রহ পৃথিবীর সাথে সমকেন্দ্রিকভাবে পৃথিবীর চতুর্দিকে পরিভ্রমণ করছে। প্রমাণ কর যে, উপগ্রহটির মুক্তিবেগ এর গতিবেগের 1·414 গুণ।

ধরা যাক, উপগ্রহটির ভর $= m$ এবং এটি v_0 বেগে r_0 ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে পৃথিবীর চতুর্দিকে পরিভ্রমণ করছে। এই অবস্থায় উপগ্রহের কেন্দ্রমুখি বল = উপগ্রহের ওপর পৃথিবীর আকর্ষণ বল

অর্থাৎ, $\frac{mv_0^2}{r_0} = \frac{GMm}{r_0^2}$, এখানে M = পৃথিবীর ভর

বা, $v_0^2 = \frac{GM}{r_0}$ ... ... (i)

আবার আমরা জানি, পৃথিবীর কেন্দ্র হতে r_0 দূরে অবস্থিত কোনো বস্তুর মুক্তিবেগ,

$v_e^2 = \frac{2\,GM}{r_0}$ ... ... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$v_e^2 = 2v_0^2$

$\therefore \quad v_e = \sqrt{2}v_0 = 1·414\ v_0$ (প্রমাণিত)

৪। প্রমাণ কর যে,

(ক) অভিকর্ষজ ত্বরণ এবং মহাকর্ষীয় প্রাবল্যের সংখ্যাগত মান সমান।

(খ) একটি ভারী বস্তু হতে অসীম দূরত্বে অবস্থিত কোনো বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব এবং মহাকর্ষীয় প্রাবল্য উভয়ের মান শূন্য।

(ক) মনে করি, M = পৃথিবীর ভর এবং R = পৃথিবীর ব্যাসার্ধ। অতএব পৃথিবী পৃষ্ঠে অবস্থিত কোনো বিন্দুতে অভিকর্ষজ ত্বরণ,

$g = \frac{GM}{R^2}$ ... ... (i)

উক্ত বিন্দুতে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য,

$E = \frac{GM}{R^2}$ ... ... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$g = E$ ... ... (iii) (প্রমাণিত)

(খ) মনে করি ভারী বস্তুটির ভর $= M$

বস্তু হতে r দূরে অবস্থিত কোনো বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব, $V = -\frac{GM}{r}$ ... (i)

যদি বিন্দুটি অসীম দূরত্বে অবস্থিত হয়, তবে $r = \infty$

$\therefore$ সমীকরণ (i) হতে পাই,

$V = -\frac{GM}{\infty} = -0 = 0$ ... ... (ii)

পুনঃ মহাকর্ষীয় প্রাবল্য,

$E = \frac{GM}{r^2} = \frac{GM}{(\infty)^2} = 0$ ... ... (iii)

$\therefore$ সমীকরণ (ii) ও (iii) হতে পাই, $V = E = 0$ (প্রমাণিত)

৫। ভূপৃষ্ঠের কাছাকাছি বৃত্তাকার পথে পরিভ্রমণরত কোনো উপগ্রহকে অতিরিক্ত কত বেগ দিলে সেটি পৃথিবীর আকর্ষণ ছাড়িয়ে চলে যাবে?

পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6·4 \times 10^6$ m এবং $g = 9·8\ ms^{-2}$

পৃথিবীর কাছাকাছি কক্ষপথে প্রদক্ষিণরত কৃত্রিম উপগ্রহের দ্রুতি

$v = \sqrt{gR}$, মুক্তিবেগ $v_e = \sqrt{2\,gR}$

$\therefore$ প্রয়োজনীয় অতিরিক্ত বেগ, $V = v_e - v = \sqrt{2\,gR} - \sqrt{g\,R}$

$= (\sqrt{2} - 1)\sqrt{gR}$

$= 0·41 \times \sqrt{9·8 \times 6·4 \times 10^6}$

$= 3·25 \times 10^3\ ms^{-1} = 3·25\ kms^{-1}$

৬। পৃথিবীর পৃষ্ঠ হতে কত উচ্চতায় কোনো বস্তুর মহাকর্ষীয় স্থিতিশক্তির মান চন্দ্রপৃষ্ঠে স্থিতিশক্তির মানের সমান হবে? ধরে নাও, পৃথিবীর ভর চাঁদের ভরের 81 গুণ এবং পৃথিবীর ব্যাসার্ধ চাঁদের ব্যাসার্ধের 4 গুণ। (পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6.4 \times 10^6$ m)

ধরা যাক, পৃথিবীর ভর $= M$

$\therefore$ চাঁদের ভর $= \frac{M}{81}$

পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6.4 \times 10^6$ m

চাঁদের ব্যাসার্ধ $= \frac{R}{4}$

পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে r উচ্চতায় m ভরের একটি বস্তুর মহাকর্ষীয় স্থিতিশক্তি $= -\frac{GMm}{r}$

আবার, চন্দ্রপৃষ্ঠে ওই বস্তুর মহাকর্ষীয় স্থিতিশক্তি,

$$-\frac{G \cdot \frac{M}{81} \cdot m}{\frac{R}{4}} = -\frac{4\,GMm}{81\,R}$$

প্রশ্নানুসারে, $-\frac{GMm}{r} = -\frac{4\,GMm}{81\,R}$

বা, $81\,R = 4r$

বা, $r = \frac{81}{4} R$

$\therefore$ পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে নির্ণেয় উচ্চতা $= r - R = \frac{81}{4} R - R$

$$= \frac{81\,R - 4\,R}{4} = \frac{77\,R}{4}$$

$$= \frac{77 \times 6.4 \times 10^6}{4} = 123.2 \times 10^6 \text{ m}$$

$$= 123.2 \times 10^3 \text{ km}$$

৬.১৯ মহাকর্ষ সূত্রের ব্যবহার
Uses of gravitational law

নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র ব্যবহার করে আমরা কোনো স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণ নির্ণয় করতে পারি। এছাড়া পৃথিবীর ভর, চন্দ্রের ভর ও সূর্যের ভর, পৃথিবীর গড় ঘনত্ব নির্ণয় করতে পারি। গ্রহ নক্ষত্রসহ কৃত্রিম উপগ্রহের বেগ, আবর্তন কাল ও উচ্চতা নির্ণয় করতে পারি। মহাকাশে ভ্রমণকালে মহাশূন্যচারী ওজনহীনতা, মহাকর্ষক্ষেত্র, প্রাবল্য, বিভবসহ নানাবিধ সমস্যার সমধান করতে পারি। বর্তমান বিশ্বে প্রাকৃতিক সম্পদের অনুসন্ধান, কৃত্রিম উপগ্রহের মাধ্যমে যোগাযোগ ও বস্তু গবেষণা ইত্যাদি বিজ্ঞানের অগ্রগতি মহাকর্ষ সূত্র ব্যবহারেরই ফল। নিম্নে এ সম্বন্ধে আলোচনা করা হলো।

৬.১৯.১ প্রাকৃতিক সম্পদ অনুসন্ধান
Exploration of natural resources

আমরা জানি, পৃথিবীর গড় ঘনত্ব, $\rho = 5.5 \times 10^3$ kg m^{-3}। পৃথিবীর বিভিন্ন গভীরতায় এর মান কমবেশি হতে পারে। সুতরাং 'g' পরিমাপ করে কোথাও ঘনত্ব গড় ঘনত্বের বেশি হলে সেখানে খনিজ পদার্থ থাকার সম্ভাবনা রয়েছে। সুতরাং 'g' এর মান নির্ধারণ করে খনিজ পদার্থ অন্বেষণ করা হয়। প্রাথমিক ফলাফল আশাব্যঞ্জক হলে নিবিড় পর্যবেক্ষণ এবং বিস্তারিত গবেষণার মাধ্যমে খনিজ পদার্থের গঠন ও প্রকৃতি নির্ণয় করা যায়। সুতরাং, মহাকর্ষ সূত্র ব্যবহার করে আমরা খনিজ সম্পদ অন্বেষণ করতে পারি।

৬.১৯.২ কৃত্রিম উপগ্রহের মাধ্যমে যোগাযোগ
Communication through satellite

বর্তমান যুগ বিজ্ঞানের যুগ। বিজ্ঞানের অগ্রযাত্রার সাথে সাথে মানুষের কল্যাণে বিজ্ঞানের বিভিন্ন ক্ষেত্রে এর প্রয়োগেরও অভূতপূর্ব অগ্রগতি সাধিত হয়েছে। গত কয়েক দশকে এর অগ্রগতি বিস্ময়কর প্রভাব ফেলেছে মানুষের বুদ্ধিদীপ্ত কাজ-কর্মে। মানুষ দূর-দূরান্তে মুহূর্তের মধ্যে বিভিন্ন প্রযুক্তি ব্যবহার করে যোগাযোগ স্থাপনে সক্ষম হয়েছে। কৃত্রিম উপগ্রহ হলো এমনই আশ্চর্যের জিনিস যার মাধ্যমে পৃথিবীর বিভিন্ন স্থানে যোগাযোগ স্থাপনসহ মহাকাশের

বিভিন্ন গ্রহ উপগ্রহ সম্পর্কে নানাবিধ তথ্য, বিভিন্ন স্থানের চিত্র ধারণ, আবহাওয়ার পূর্বাভাসসহ বিভিন্ন বিষয় জানতে পারি।

● **স্বাভাবিক উপগ্রহ (Natural satellite) :** যে সব বস্তু বা জ্যোতিষ্ক গ্রহের চারদিকে ঘোরে, তাদেরকে উপগ্রহ বলে। যেসব উপগ্রহ প্রাকৃতিক কারণে সৃষ্ট তাদেরকে স্বাভাবিক উপগ্রহ বলে। যেমন চন্দ্র প্রাকৃতিক কারণে সৃষ্টি হয়েছে। এটি পৃথিবীর চারদিকে ঘুরছে। অতএব চন্দ্র বা চাঁদ পৃথিবীর একটি স্বাভাবিক উপগ্রহ। তেমনি অন্যান্য গ্রহেরও স্বাভাবিক উপগ্রহ রয়েছে। যে ভূ-উপগ্রহের পর্যায়কাল 24 ঘণ্টা তার কক্ষপথকে পার্কিং কক্ষপথ বলে।

● **কৃত্রিম উপগ্রহ (Artificial satellite) :** আমরা জানি সৌরজগৎ নামে একটি জগৎ রয়েছে যার কেন্দ্রে থাকে সূর্য। সূর্য হতে ছিটকে আসা কতকগুলো জ্যোতিষ্ক সূর্যকে প্রদক্ষিণ করছে। এদের নাম **গ্রহ** (planet)। পৃথিবী সূর্যের একটি গ্রহ। পুনঃ, গ্রহ হতে ছিটকে আসা কতকগুলো জ্যোতিষ্ক গ্রহগুলোকে প্রদক্ষিণ করছে। এদের নাম **উপগ্রহ**। চাঁদ পৃথিবীর একটি উপগ্রহ যা প্রায় 30 দিনে পৃথিবীকে একবার প্রদক্ষিণ করে। সৃষ্টির আদিকাল থেকেই মানুষের মনে কৌতূহল জাগছে কী করে চাঁদ পৃথিবীর চারদিকে ঘুরছে। এ প্রশ্নের জবাবে বিজ্ঞানীরা বলেছেন অভিকর্ষের দরুন চাঁদের উপর পৃথিবীর কেন্দ্রমুখি বল এর কারণ। এ কেন্দ্রমুখি বল যদি না থাকত, তাহলে চাঁদ মহাশূন্যে মিলিয়ে যেত। পৃথিবীর চারদিকে চাঁদের প্রদক্ষিণের দরুন সৃষ্ট কেন্দ্রবিমুখি বল পৃথিবী কর্তৃক প্রযুক্ত কেন্দ্রমুখি বলের সমান ও বিপরীত হওয়ায় চাঁদ সোজা না গিয়ে পৃথিবীর চারদিকে বৃত্তাকার পথে ঘুরছে। **এ তত্ত্বের উপর ভিত্তি করে মানুষ মহাশূন্যে পাড়ি দেয়ার জন্যে যে উপগ্রহ তৈরি করেছে, তার নাম কৃত্রিম উপগ্রহ।**

সংজ্ঞা : যে সকল মহাশূন্যযান পৃথিবী থেকে নির্দিষ্ট উচ্চতায় তাদের নিজ নিজ কক্ষপথে থেকে পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করছে তাদের কৃত্রিম উপগ্রহ বলে। তিন স্তরবিশিষ্ট রকেটের সাহায্যে কৃত্রিম উপগ্রহকে নির্দিষ্ট উচ্চতায় তুলে পরে ভূ-পৃষ্ঠের সমান্তরালে নির্দিষ্ট বেগ দেওয়া হয়। এতে উপগ্রহটি পৃথিবীর চারপাশে চাঁদের মতো ঘুরতে থাকে।

● **ভূ-স্থির উপগ্রহ (Geo-stationary satellite) :** যদি একটি কৃত্রিম উপগ্রহকে নিরক্ষীয় তলে অবস্থিত একটি কক্ষপথে এমনভাবে স্থাপন করা হয় যে, পৃথিবী যে অভিমুখে নিজ অক্ষের চারদিকে আবর্তন করে, উপগ্রহটিও সেই অভিমুখে অর্থাৎ পশ্চিম থেকে পূর্বে আবর্তন করে এবং ওই কক্ষপথের উচ্চতা যদি এমন হয় যে, উপগ্রহটির আবর্তনকাল পৃথিবীর নিজ অক্ষের চারদিকে আবর্তনকালের সমান অর্থাৎ 24 ঘণ্টা হয়, তাহলে পৃথিবী থেকে দেখলে ওই উপগ্রহটি নিরক্ষরেখার ওপরে একটি নির্দিষ্ট স্থানে স্থির আছে বলে মনে হয়। এরূপ কৃত্রিম উপগ্রহকে ভূ-স্থির উপগ্রহ বলে এবং এর কক্ষপথকে পার্কিং কক্ষপথ বলে। অর্থাৎ যে ভূ-উপগ্রহের পর্যায়কাল 24 ঘণ্টা তার কক্ষপথকে পার্কিং কক্ষপথ বলে।

সংজ্ঞা : কোনো কৃত্রিম উপগ্রহের আবর্তনকাল নিজ অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণায়মান পৃথিবীর আবর্তনকালের সমান হলে পৃথিবীর সাপেক্ষে এটি স্থির থাকবে এ ধরনের উপগ্রহকে ভূ-স্থির উপগ্রহ বলে।

ব্যবহার :

১। টেলিফোন ও ইন্টারনেটের মাধ্যমে আন্ত মহাদেশীয় যোগাযোগ স্থাপনে ব্যবহৃত হয়।
২। আবহাওয়ার পূর্বাভাস পাওয়া যায়।
৩। পৃথিবীর আকার সম্পর্কিত ভূ-জরিপ কাজে ব্যবহৃত হয়।
৪। সমুদ্রের গভীরতা নির্ণয় করতে ব্যবহৃত হয়।
৫। ভূ-পৃষ্ঠের বিভিন্ন অঞ্চল বেতার ও টেলিভিশনের রিলে স্টেশন হিসেবে ব্যবহৃত হয়।
৬। ঊর্ধ্বাকাশের বিভিন্ন বিকিরণ ও তার প্রভাব সম্পর্কে বিভিন্ন তথ্য অনুসন্ধানে ব্যবহৃত হয়।
৭। প্রতিরক্ষামূলক পাহারা ও বিভিন্ন সামরিক ব্যবস্থায় ব্যবহৃত হয়।
৮। খেলাধুলাসহ বিভিন্ন অনুষ্ঠান ধারণ ও প্রেরণে ব্যবহৃত হয়।
৯। গ্রহ নক্ষত্রের গঠন সম্পর্কে গবেষণার কাজে ব্যবহৃত হয়।
১০। মহাজাগতিক রশ্মিসহ বিভিন্ন রশ্মির উৎসসহ নানাবিধ গবেষণা করতে ব্যবহৃত হয়।

৬·২০ মহাশূন্যচারীর ওজনহীনতা
Weightlessness of an astronaut

কোনো বস্তুর ওপর পৃথিবীর আকর্ষণ বলই বস্তুর ওজন। যদি কোনো বস্তুর ওপর পৃথিবীর আকর্ষণ বল না থাকে তাহলেই বস্তু ওজনহীন হবে। পৃথিবীর কেন্দ্রে বা পৃথিবী থেকে অসীমে বা চাঁদ বা অন্য কোনো গ্রহ এবং পৃথিবীর মাঝে যেখানে কোনো বস্তুর ওপর পৃথিবীর আকর্ষণ থাকে না অর্থাৎ যেখানে $g = 0$ হয় সেখানে বস্তু ওজনহীন হয়। পৃথিবীতে কোনো বস্তুর ওপর যখন তার ওজনের সমান ও বিপরীতমুখি কোনো প্রতিক্রিয়া বল প্রযুক্ত হয় তখনই তা ওজন অনুভব করে।

মহাশূন্যচারীরা মহাশূন্যযানে করে পৃথিবীকে একটা নির্দিষ্ট উচ্চতায় বৃত্তাকার কক্ষপথে প্রদক্ষিণ করেন। ফলে বৃত্তাকার গতির জন্য মহাশূন্য যানের পৃথিবীর কেন্দ্রের দিকে ওই উচ্চতায় g-এর মানের সমান একটি ত্বরণ হয়। এ অবস্থায় মহাশূন্যযানের দেওয়ালের সাপেক্ষে মহাশূন্যচারীর ত্বরণ $(g - g) = 0$ হয় এবং মহাশূন্যচারী মহাশূন্যযানের দেওয়ালের বা মেঝেতে কোনো বল প্রয়োগ করেন না। ফলে তিনি তার ওজনের বিপরীত কোনো প্রতিক্রিয়া বলও অনুভব করেন না। তাই তিনি ওজনহীনতা অনুভব করেন। এই অবস্থায় মহাশূন্যচারী মহাশূন্য থেকে না পড়ে দাঁড়িয়ে থাকবেন।

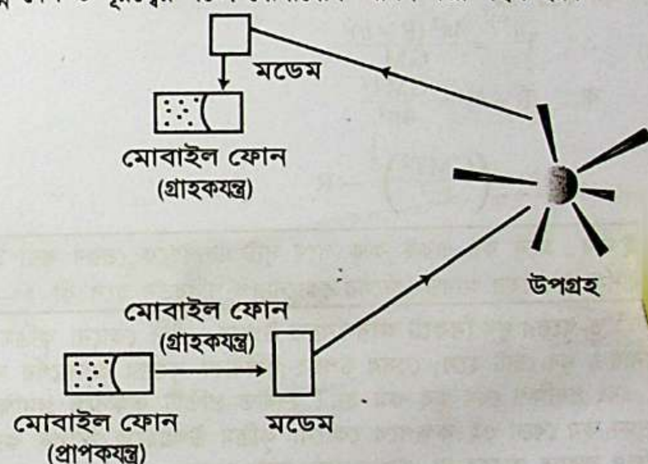
মহাশূন্যচারীর ভর থাকায় এবং ওই স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণ থাকায় ওজন থাকে। কিন্তু যখন মহাশূন্যযানে g ত্বরণে গতিশীল হয় তখন মহাশূন্যচারী ওজনহীনতা অনুভব করেন।

৬·২১ কৃত্রিম উপগ্রহের মাধ্যমে মোবাইল ফোন, টেলিফোন এবং ইন্টারনেটে তথ্য প্রেরণ প্রযুক্তি

Technology of transmitting of informations in mobile phone, telephone and internet through artifical satellite

ভূস্থির উপগ্রহ যোগাযোগ ব্যবস্থায় বহুলভাবে ব্যবহৃত হয়। একে বলা হয় SYNCOM Satellite (Synchronous Communication Satellite)। টেলিভিশন সংকেত, টেলিফোন কথপোকথন, বেতার সংকেত ইত্যাদি এ উপগ্রহ দ্বারা প্রতিফলিত হয়ে পৃথিবীতে ফিরে আসে, ফলে বিভিন্ন দেশ ও দূরত্বের সঙ্গে যোগাযোগ স্থাপন করা সহজ হয়।

মূলনীতি : প্রেরক যন্ত্র যেমন মোবাইল ফোন, ইন্টারনেট, টেলিফোন থেকে বৈদ্যুতিক সঙ্কেতকে প্রথমে প্রেরণ করা হয় মডেম নামক যন্ত্রে। পরে মডেম থেকে বৈদ্যুতিক সঙ্কেত ইলেকট্রো ম্যাগনেটিক তরঙ্গ আকারে প্রেরণ করা হয় উপগ্রহের অ্যান্টেনাতে। উপগ্রহের অ্যান্টেনা থেকে ইলেকট্রো ম্যাগনেটিক তরঙ্গ প্রেরণ করা হয় মডেমে। সেই মডেম থেকে পুনরায় গ্রাহক যন্ত্রে অর্থাৎ য়ার সাথে যোগাযোগ স্থাপন করতে চাই সেই যন্ত্রে (মোবাইল, টেলিফোন, কম্পিউটারে) পৌঁছে। প্রক্রিয়াটি প্রায় তাৎক্ষণিক ঘটে [চিত্র ৬·২৭]। তথ্য আদান-প্রদানে এই প্রযুক্তি ব্যবহৃত হয়।



চিত্র ৬·২৭

পোলার উপগ্রহ : আর এক ধরনের উপগ্রহ রয়েছে। এদেরকে বলা হয় পোলার উপগ্রহ (Polar Satellite)। এই উপগ্রহগুলো খুব কম উচ্চতায় (সাধারণত 500 km থেকে 800 km এর মধ্যে) উৎক্ষেপণ করা হয়। উত্তর দক্ষিণে এই উপগ্রহ আবর্তিত হয়। ভূ-পৃষ্ঠের খনিজ সম্পদ অন্বেষণ, বনজ, কৃষিজ এবং সামুদ্রিক সম্পদ অন্বেষণে এই উপগ্রহ ব্যবহৃত হয়। বিভিন্ন দেশের টেলিভিশন অনুষ্ঠান দেখতে, ই-মেইল, ফ্যাক্স, ওয়েবসাইট ব্রাউজ করতে কৃত্রিম উপগ্রহ গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। কৃত্রিম উপগ্রহের জন্য দেশ বিদেশের সাথে যোগাযোগ রক্ষা করা সম্ভব ও সহজ হয়েছে।

৬·২২ কৃত্রিম উপগ্রহের বেগ, পর্যায়কাল এবং উচ্চতা নির্ণয়

Determination of velocity, time period and height of an artificial satellite

কৃত্রিম উপগ্রহের বেগ : মনে করি, ভূ-পৃষ্ঠ হতে একটি ভূ-স্থির উপগ্রহের উচ্চতা h, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R হলে ওই উপগ্রহের কক্ষপথের ব্যাসার্ধ $r = R + h$। পৃথিবীর মহাকর্ষীয় আকর্ষণ উপগ্রহটির আবর্তনের জন্য প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বল যোগান দেয়। সুতরাং উপগ্রহটির বেগ v হলে, $\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$।

এখানে, M ও m হলো যথাক্রমে পৃথিবী এবং উপগ্রহের ভর।

$$\therefore \quad v^2 = \frac{GM}{r} \qquad \ldots \quad (6.38)$$

$$\text{বা,} \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} \qquad \ldots \quad (6.39)$$

কৃত্রিম উপগ্রহের পর্যায়কাল : উপগ্রহটির পর্যায়কাল T হলে অর্থাৎ ভূ-পৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় থেকে পৃথিবীকে সম্পূর্ণ একবার প্রদক্ষিণ করতে T সময় লাগলে

$$T = \frac{\text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}{\text{রৈখিক বেগ}}$$

$$= \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(R+h)}{v} \quad [\because r = R + h]$$

বা, $v = \dfrac{2\pi(R+h)}{T}$

আবার, $v = \sqrt{\dfrac{GM}{(R+h)}}$ (সমীকরণ 6.39 অনুসারে)

$\therefore \dfrac{2\pi(R+h)}{T} = \sqrt{\dfrac{GM}{(R+h)}}$

বা, $$T = 2\pi(R+h)\sqrt{\frac{R+h}{GM}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.40)$$

কৃত্রিম উপগ্রহের উচ্চতা : মনে করি পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে কৃত্রিম উপগ্রহের উচ্চতা $= h$, সমীকরণ (6.40) এর উভয় পাশে বর্গ করে পাই,

$\therefore T^2 = \dfrac{4\pi^2(R+h)^3}{GM}$

বা, $(R+h)^3 = \dfrac{GMT^2}{4\pi^2}$

$$\therefore h = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} - R \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.41)$$

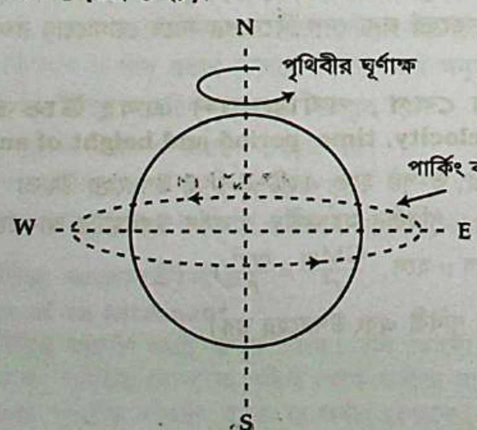
যাচাই কর : মনে কর একই কক্ষ পথে দুটি উপগ্রহকে প্রেরণ করা হলো। একটির ভর অপরটির দ্বিগুণ। তাহলে দ্বিগুণ ভরবিশিষ্ট উপগ্রহের আবর্তনকালের কোনোরূপ পরিবর্তন হবে কী ? —ব্যাখ্যা কর।

ভূ-পৃষ্ঠের খুব নিকটে আবর্তনরত উপগ্রহ : যদি কোনো কৃত্রিম উপগ্রহ ভূ-পৃষ্ঠের খুব নিকটে থাকে অর্থাৎ R এর তুলনায় h খুব ছোট হলে, যেসব উপগ্রহ পৃথিবীকে বৃহত্তর ব্যাসার্ধের কক্ষপথে প্রদক্ষিণ করে, তাদের আবর্তনকাল বেশি হয় এবং প্রদক্ষিণ বেগ খুব কম হয়। স্পষ্টত প্রতিটি কক্ষপথে প্রদক্ষিণ বেগের একটি নির্দিষ্ট মান থাকে। এই বেগ অপেক্ষা কম বেগে ওই কক্ষপথে কোনো কৃত্রিম উপগ্রহকে স্থাপন করলে উপগ্রহটি ওই কক্ষপথে স্থায়ীভাবে পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করতে পারবে না এবং ভূপৃষ্ঠে নেমে আসবে।

৬.২২.১ পার্কিং কক্ষপথের উচ্চতা ও ভূস্থির উপগ্রহের প্রদক্ষিণ বেগ

Height of parking orbit and orbital velocity of a geostationary satellite

মনে করি পৃথিবীর ভর M এবং ব্যাসার্ধ R, পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে ভূ-স্থির উপগ্রহের উচ্চতা h, ভূ-স্থির উপগ্রহটির ভর m, প্রদক্ষিণ বেগ v এবং প্রদক্ষিণকাল T [চিত্র ৬.২৮]।



চিত্র ৬.২৮ : ভূস্থির উপগ্রহের পার্কিং কক্ষপথ।

সুতরাং পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে ভূ-স্থির উপগ্রহটির দূরত্ব, $r = R + h$

এখন, মহাকর্ষীয় আকর্ষণ বল যেহেতু উপগ্রহটির আবর্তনের জন্য প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বল সরবরাহ করে, তাই

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$

বা, $$v^2 = \frac{GM}{r} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.42)$$

আবার, আমরা জানি, অভিকর্ষজ ত্বরণ,

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

$$\therefore \quad GM = gR^2$$

সমীকরণ (6.42)-এ এই মান বসিয়ে পাই,

$$v^2 = \frac{gR^2}{r}$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{\frac{gR^2}{r}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.43)$$

অতএব, প্রদক্ষিণকাল,

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{gR^2}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{gR^2}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.44)$$

বা, $$T^2 = 4\pi^2\frac{r^3}{gR^2}$$

উপগ্রহটির কক্ষপথের ব্যাসার্ধ, r

$$r = \left(\frac{T^2gR^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.45)$$

সুতরাং, ভূ-স্থির উপগ্রহের উচ্চতা,

$$h = r - R$$

$$= \left(\frac{T^2gR^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} - R \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.46)$$

এখন, ভূস্থির উপগ্রহের পর্যায়কাল বা প্রদক্ষিণ কাল,

$$T = 24 \text{ hrs} = 24 \times 60 \times 60 \text{ s} = 86400 \text{ s}$$

$$g = 9{\cdot}81 \text{ ms}^{-2}$$

$$R = 6400 \text{ km} = 6{\cdot}4 \times 10^6 \text{ m}$$

এই মানগুলি সমীকরণ (6.45)-এ বসিয়ে পাই,

$$r = \left\{\frac{(86400)^2 \times 9{\cdot}81 \times (6{\cdot}4 \times 10^6)^2}{4 \times 9{\cdot}87}\right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$= 4{\cdot}235 \times 10^7 \text{ m (প্রায়)}$$

$$= 42350 \text{ km}$$

সমীকরণ (6.46)-এ r এবং R-এর মান বসিয়ে নিরক্ষরেখা থেকে পার্কিং কক্ষপথের উচ্চতা,

$$h = r - R = (42350 - 6400) \text{ km}$$

$$= 35950 \text{ km} \text{ বা, } \simeq 36000 \text{ km}$$

ভূ-স্থির উপগ্রহের প্রদক্ষিণ বেগ,

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2 \times 3{\cdot}14 \times 4235 \times 10^7}{86400}$$

$$\simeq 3081 \text{ ms}^{-1} \simeq 3{\cdot}08 \text{ kms}^{-1}$$

এই প্রদক্ষিণ বেগের মান পৃথিবীর মুক্তিবেগ (11·2 kms⁻¹) বা ভূ-পৃষ্ঠের নিকটে আবর্তনরত কৃত্রিম উপগ্রহের প্রদক্ষিণ বেগ (7·9 kms⁻¹)-এর মানের চেয়ে অনেক কম।

৬.২২.২ ভূ-স্থির উপগ্রহের বৈশিষ্ট্য
Characteristics of geostationary satellite

ভূ-স্থির উপগ্রহের নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্যসমূহ লক্ষ করা যায়—

১। পৃথিবীকে কেন্দ্র করে উপগ্রহটি বৃত্তাকার পথে আবর্তন করে।

২। উপগ্রহটির আবর্তনকাল পৃথিবীর নিজ অক্ষের চারদিকে আবর্তনকালের সমান। অর্থাৎ 24 ঘণ্টা।

৩। উপগ্রহটির কক্ষপথ পৃথিবীর নিরক্ষীয় তলে অবস্থান করে।

৪। উপগ্রহটি পৃথিবীর অনুরূপ পশ্চিম থেকে পূর্ব দিকে আবর্তন করে।

৫। ভূ-স্থির উপগ্রহটির উচ্চতা এবং পরিক্রমণ বেগ কোনোটিই উপগ্রহের ভরের ওপর নির্ভর করে না।

৬। নিরক্ষরেখা থেকে উপগ্রহটির কক্ষপথের উচ্চতা প্রায় 36,000 km।

৬.২২.৩ ভূ-স্থির উপগ্রহের ব্যবহার
Applications of geostationary satellite

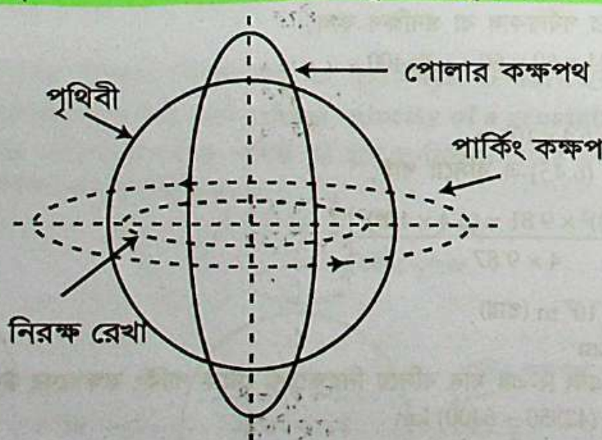
১। ভূ-স্থির উপগ্রহে রিলে (Relay) ট্রান্সমিটার ব্যবহার করে পৃথিবীর এক স্থান হতে বিভিন্ন অনুষ্ঠান, খেলাধুলা, গান-বাজনা ইত্যাদি পৃথিবীর অন্য স্থানে সহজেই দেখানো যায়।

২। আবহাওয়ার পূর্বাভাস প্রদান ও পর্যবেক্ষণ করা যায়।

৩। ভূ-স্থির উপগ্রহগুলি পৃথিবী পৃষ্ঠ থেকে প্রায় 36000 km ওপরে থাকে বিধায় কোনো তড়িচ্চুম্বকীয় সংকেত (electromagnetic signal) উপগ্রহে স্থাপিত রিলে স্টেশন থেকে প্রতিফলিত হয়ে পৃথিবীর এক স্থান থেকে অন্য স্থানে যেতে প্রায় $(36000 \times 2 \text{ km}) = 72000 \text{ km}$ পথ অতিক্রম করতে হয় এবং এ পথ অতিক্রম করতে প্রায় $\frac{1}{4}$ সেকেন্ড সময় লাগে। এর ফলে রেডিও বা টিভি সম্প্রচারে কোনো অসুবিধা না হলেও দূরবর্তী অবস্থানের গ্রাহকদের মধ্যে টেলিফোন কথোপকথনে এই সময় ব্যবধানের জন্য অসুবিধার সৃষ্টি হয়। তাছাড়া ভূ-স্থির উপগ্রহগুলো নিরক্ষীয় তলে পৃথিবীকে আবর্তন করে বলে পৃথিবীর মেরু অঞ্চলে এগুলো ঠিকমতো কাজ করে না।

৬.২৩ মেরু বা পোলার উপগ্রহ
Polar satellite

ভূ-স্থির উপগ্রহগুলো ছাড়াও আরও এক ধরনের কৃত্রিম উপগ্রহ নিরক্ষীয় মধ্যতলের পরিবর্তে মেরু মধ্যতলে ভূ-পৃষ্ঠ থেকে 700–800 km ওপরে পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করে। এই উপগ্রহগুলিকে মেরু বা পোলার উপগ্রহ বলে [চিত্র ৬.২৯]।



চিত্র ৬.২৯

এই উপগ্রহগুলোর আবর্তনকাল প্রায় 110 মিনিট। যেহেতু এই উপগ্রগুলো ভূ-পৃষ্ঠের কাছে অবস্থিত; সুতরাং এগুলোর মাধ্যমে পৃথিবীর এক স্থান হতে অন্য স্থানে কোনো সংকেত পৌঁছাতে $\frac{1}{100}$ সেকেন্ড সময় লাগে। এত অল্প সময়ে সংকেত পাঠানো যায় বলে টেলিফোন কথোপকথনে কোনো অসুবিধা হয় না।

ভূ-স্থির উপগ্রহের ন্যায় এগুলো ভূ-পৃষ্ঠের ওপর আপাতত স্থির অবস্থানে থাকে না।

গাণিতিক উদাহরণ ৬.১০

১। পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে 400 km ঊর্ধ্বে একটি কৃত্রিম উপগ্রহ বৃত্তাকার পথে পৃথিবী প্রদক্ষিণ করছে। ওই উপগ্রহের বেগ ও আবর্তনকাল নির্ণয় কর। ($R = 6400$ km, $g = 9.80\ ms^{-2}$)

এখানে,
$R = 6400\ km = 6.4 \times 10^6\ m$
$h = 400\ km = 4 \times 10^5\ m$
$g = 9.80\ ms^{-2}$

আমরা জানি,
ভূ-পৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় কোনো উপগ্রহের প্রদক্ষিণ বেগ,

$$v = R\sqrt{\frac{g}{R+h}}$$

$$\therefore \quad v = 6.4 \times 10^6 \sqrt{\frac{9.8}{(6.4 + 0.4) \times 10^6}}$$

$$= 7.68 \times 10^3\ ms^{-1} = 7.68\ kms^{-1}$$

আবার, উপগ্রহটির আবর্তনকাল,

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{v} = \frac{2 \times 3.14 \times (6.4 + 0.4) \times 10^6}{7.68 \times 10^3}$$

$$= 5489\ s = 1\ hr.\ 31\ min.\ 29\ s$$

৬·২৪ বস্তু গবেষণা
Material research

আমরা জানি, পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে কোনো বস্তুর মুক্তিবেগ $11.2\ kms^{-1}$। অর্থাৎ পৃথিবী থেকে মুক্তি পেতে হলে বা পৃথিবীর মহাকর্ষীয় বলের আকর্ষণ থেকে মুক্ত হতে হলে কোনো বস্তুকে $11.2\ kms^{-1}$ বা 7 miles/s বেগে যাত্রা করতে হবে।

পৃথিবীর আবহমণ্ডলে বহু ধরনের গ্যাস আছে। তবে হাইড্রোজেন, হিলিয়ামের মতো হাল্কা গ্যাস বেশ দুষ্প্রাপ্য। এর কারণ মুক্তিবেগের ধারণা থেকে ব্যাখ্যা করা যায়। স্বাভাবিক তাপমাত্রা ও চাপে হাইড্রোজেন অণুর গতিবেগের গড় বর্গের বর্গমূল মান (rms) প্রায় $1.6\ kms^{-1}$। কিন্তু পৃথিবী সৃষ্টির শুরুতে ভূপৃষ্ঠের তাপমাত্রা খুব বেশি ছিল এবং তখনকার তাপমাত্রায় হাইড্রোজেন অণুর গতিবেগের গড় বর্গের বর্গমূল মান প্রায় 4 থেকে $5\ kms^{-1}$ ছিল। এদের মধ্যে কিছু কিছু অণুর প্রকৃত গতিবেগ গড় বর্গের বর্গমূল মানের 2 বা 3 গুণ অধিক হওয়া স্বাভাবিক ছিল। অতএব, এটা খুবই সম্ভব যে পৃথিবীর বায়ুমণ্ডল থেকে হাইড্রোজেন এবং হিলিয়ামের মতো হাল্কা গ্যাসের অধিকাংশ অণুর গতিবেগ মুক্তিবেগের সমান ছিল। সুতরাং এ ধরনের গ্যাসের বেশির ভাগ অণু ভূপৃষ্ঠ হতে ধীরে ধীরে বিলীন হয়ে গেছে।

আমরা জানি, মহাজগতের বস্তুসমূহের মুক্তিবেগ (escape velocities of universal materials) এদের ভরের ওপর নির্ভর করে। সূর্যের ভর পৃথিবীর তুলনায় বহুগুণ বেশি; ফলে সূর্যের মুক্তিবেগও বেশি। তাই সূর্যের আবহমণ্ডলে হাইড্রোজেনের মতো হাল্কা গ্যাস রয়েছে। আবার চন্দ্র, বুধ, গ্রহ এবং পৃথিবীর ভরের তুলনায় অনেক কম, তাই এদের মুক্তিবেগও কম। ফলে গ্যাসীয় অণুসমূহ বিলীন হয়ে গেছে।

সুতরাং, ইহা স্পষ্ট যে মহাকর্ষ সূত্র প্রয়োগ করে বিশ্বব্রহ্মাণ্ডের বিভিন্ন নক্ষত্র, গ্রহ, উপগ্রহ মুক্তিবেগসহ অন্যান্য অনেক তথ্য উপাত্ত সংগ্রহ করে ওই সমস্ত মহাজগতের বস্তুসমূহের বিভিন্ন গ্যাসীয়, তরল, কঠিন পদার্থের উপস্থিতি সম্বন্ধে স্পষ্ট ধারণা এবং জ্ঞান লাভ করা সম্ভব।

গাণিতিক উদাহরণ ৬.১১

১। কোনো এক উচ্চতা যেখানে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান $g_h = 8\ ms^{-2}$, সেখানে একটি উপগ্রহের বেগ $8\ kms^{-1}$। পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে কত উচ্চতায় উপগ্রহটি পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করছে নির্ণয় কর। (পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6.4 \times 10^6$ m)।

এখানে,
$g = g_h = 8\ ms^{-2}$
$v = 8\ ms^{-1} = 8 \times 10^3\ ms^{-1}$
$R = 6.4 \times 10^6\ m$

আমরা জানি,

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

আবার, $g_h = \dfrac{GM}{(R+h)^2}$

বা, $GM = g_h (R+h)^2$

$$\therefore \quad v = \sqrt{g_h \frac{(R+h)^2}{(R+h)}}$$

$$= \sqrt{g_h (R+h)} = \sqrt{8 \times (R+h)}$$

বা, $8 \times 10^3 = \sqrt{8 \times (R+h)}$

বা, $(R+h) = \frac{(8 \times 10^3)^2}{8} = 8 \times 10^6$

বা, $h = 8 \times 10^6 - R$

$= 8 \times 10^6 - 6{\cdot}4 \times 10^6$

$= 1{\cdot}6 \times 10^6$ m

$= 1600$ km

২। 80 kg ওজনের একটি কৃত্রিম উপগ্রহ ভূপৃষ্ঠ থেকে কত উচ্চতায় স্থাপন করলে তা প্রতি 24 ঘণ্টায় 2 বার একই স্থান পর্যবেক্ষণ করতে পারবে ? পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6400 km ও তার ভর 6×10^{21} ton।

[BUET Admission Test, 2017-18]

আমরা জানি,

$$h = \left(\frac{GM_E T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} - R$$

$$= \left\{\frac{6{\cdot}673 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24} \times (24 \times 60 \times 60)^2}{4 \times (3{\cdot}14)^2}\right\}^{\frac{1}{3}} - 6{\cdot}4 \times 10^6$$

$= 3{\cdot}59 \times 10^7$ m

এখানে,
$M_E = 6 \times 10^{21}$ ton
$= 6 \times 10^{24}$ kg
$m = 80$ kg
$R = 6400$ km
$= 6{\cdot}4 \times 10^6$ m

৩। পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে 700 km উর্ধ্বে একটি কৃত্রিম উপগ্রহ পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করছে। উপগ্রহটির অনুভূমিক বেগ নির্ণয় কর। [পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6400 km এবং পৃথিবী পৃষ্ঠে $g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$] [য. বো. ২০০৬]

মনে করি পৃথিবীর ভর= M, উপগ্রহের ভর= m, উপগ্রহের অনুভূমিক বেগ $= v$ ও ভূ-পৃষ্ঠ হতে উপগ্রহের উচ্চতা= h

∴ উপগ্রহের ওপর পৃথিবীর আকর্ষণ বল $= \frac{GMm}{(R+h)^2}$

উপগ্রহের ঘূর্ণনের জন্য প্রয়োজনীয় কেন্দ্রমুখি বল $= \frac{mv^2}{(R+h)}$। উপগ্রহের ঘূর্ণনের জন্য এই আকর্ষণ বলই প্রয়োজনীয় কেন্দ্রমুখি বল জোগায়।

$\therefore \quad \frac{GMm}{(R+h)^2} = \frac{mv^2}{R+h}$

বা, $v^2 = \frac{GM}{(R+h)}$ ... ... (i)

পুনরায়, পৃথিবী পৃষ্ঠে, $g = \frac{GM}{R^2}$

এখানে,
$g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$
$R = 6400$ km $= 64 \times 10^5$ m
$h = 700$ km $= 7 \times 10^5$ m

(i) থেকে $v^2 = \frac{GM}{R^2} \times \frac{R^2}{R+h}$ [(i)নং এর লব ও হরকে R^2 দ্বারা গুণ করে]

$\therefore \quad v^2 = \frac{gR^2}{(R+h)}$ ... ... (ii)

∴ সমীকরণ (ii) হতে পাই,

$$v = \sqrt{\frac{gR^2}{(R+h)}}$$

$$= \sqrt{\frac{9{\cdot}8\ ms^{-2} \times (64 \times 10^5 m)^2}{64 \times 10^5 + 7 \times 10^5 m}}$$

$= 7519\ ms^{-1}$

প্রয়োজনীয় গাণিতিক সূত্রাবলি

মহাকর্ষ বল $= G\frac{m_1m_2}{d^2}$ ... ... (1)

অভিকর্ষ বল, $F = \frac{GMm}{d^2}$ ... ... (2)

$g = \frac{GM}{d^2}$ ... ... (3)

ভূপৃষ্ঠে, $g = \frac{GM}{R^2}$ ... ... (4)

$g' = \frac{GM}{(R+h)^2} = g\left(1-\frac{2h}{R}\right)$ ... ... (5)

$g' = g\left(1-\frac{h}{R}\right)$ ... ... (6)

$W = mg$ ... ... (7)

পৃথিবীর ভর, $M = \frac{gR^2}{G} = \frac{4\pi GR\rho}{3}$ ... ... (8)

$\rho = \frac{3M}{4\pi GR}$ ... ... (9)

$E = \frac{GM}{r^2}$ ... ... (10)

$V = -\frac{GM}{r}$ ... ... (11)

উপগ্রহের রৈখিক বেগ, $v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$ ... ... (12)

$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR}$ ... ... (13)

$T = \frac{2\pi}{v}(R+h)$ ... ... (14)

$h = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/2} - R$ ... ... (15)

উচ্চতর দক্ষতাভিত্তিক নমুনার গাণিতিক উদাহরণ

১। ভারতের টাটা কোম্পানির শ্রমিকগণ কয়লা উত্তোলনের জন্য এক খনিতে নামলে সবাই বেশ হালকা অনুভব করেন। এই তথ্য কোম্পানির ইঞ্জিনিয়ারকে জানালে তথ্যটি কতটা সঠিক তা যাচাই-এর জন্য একটি সার্ভে করেন, যেখানে পৃথিবীর ভর 6×10^{24} kg এবং মহাকর্ষ ধ্রুবক-এর মান 6.67×10^{-11} Nm²kg⁻² ব্যবহার করেন।

(ক) খনির ভেতর যে গভীরতায় গিয়ে শ্রমিকরা নিজেদের ওজনের 50% অনুভব করবে তা নির্ণয় কর।

(খ) খনির ভেতর সম্পূর্ণ ওজনহীন অনুভব করা সম্ভব কি-না? বিশ্লেষণ কর।

(ক) মনে করি, গভীরতা $= h$

মহাকর্ষ ধ্রুবক, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N-m² kg⁻²

খনিতে অভিকর্ষজ ত্বরণ $= g'$

ভূ-পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ $= g$

প্রশ্নমতে, $mg' = mg \times 0.5$ বা, $g' = 0.5g$

বা, $g\left(1-\frac{h}{R}\right) = 0.5g$ বা, $\frac{h}{R} = 1 - 0.5$ $\therefore h = 0.5 \times R$

খনির গভীরতা পৃথিবীর ব্যাসার্ধের অর্ধেক হলে নিজেকে 50% ওজনহীনতা অনুভব করবে।

(খ) h গভীরতায় কোনো খনির ভেতর অভিকর্ষজ ত্বরণের মান

$g' = g\left(1-\frac{h}{R}\right)$, $g' = 0$ হলে ওজনহীন হয়,

$\therefore 0 = g\left(1-\frac{h}{R}\right)$ বা, $\frac{h}{R} = 1$ $\therefore h = R$

অর্থাৎ পৃথিবীর ব্যাসার্ধের সমান গভীরতায় সম্পূর্ণ ওজনহীনতা অনুভব করবে।

২। নিচের উদ্দীপকটি লক্ষ কর : M = পৃথিবীর ভর $= 6 \times 10^{24}$ kg

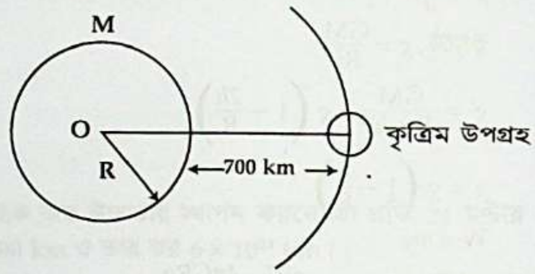
R = পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $= 6.4 \times 10^6$ m

(ক) উপগ্রহটির অনুভূমিক বেগ কত?

(খ) উপগ্রহটিকে পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে 1000 km ওপরে রাখতে হলে এর আবর্তন কালের কীরূপ পরিবর্তন করতে হবে?

(ক) উপগ্রহটির অনুভূমিক বেগ, v

আমরা জানি,



$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

$$= \sqrt{\frac{6.673 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{6.4 \times 10^6 + 7 \times 10^5}}$$

$$= \sqrt{56391549.3}$$

$$= 7509.43 \text{ ms}^{-1}$$

(খ) ধরি উদ্দীপকের অবস্থায় আবর্তন কাল $= T$ এবং 1000 km উচ্চতায় আবর্তন কাল T'

আমরা জানি, $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 (h+R)^3}{GM}}$

বা, $T = \sqrt{\frac{4 \times (3.14)^2 (7 \times 10^5 + 6.4 \times 10^6)^3}{6.673 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}}$

$= \sqrt{35220773} = 5935$ sec

$= 1$ hr 39 min

আবার, $h = 1000$ km $= 1 \times 10^6$ m হলে

$$T' = \sqrt{\frac{4 \times (3.14)^2 \times (1 \times 10^6 + 6.4 \times 10^6)^3}{6.673 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}}$$

$= 6318$ sec

$= 1$ hr 45 min

দেখা যায় যে, $T' > T$। অতএব 1000 km উপরে থাকলে এর আবর্তনকাল উদ্দীপকের আবর্তনকালের চেয়ে বেশি হবে।

৩। 120 kg ভরের একটি কৃত্রিম উপগ্রহকে ভূ-পৃষ্ঠ হতে একটি নির্দিষ্ট উচ্চতায় তুলে তার মধ্যে 3.6×10^9 Joule গতিশক্তি সঞ্চারিত করা হলো। পৃথিবীর ভর ও ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 6×10^{24} kg এবং 6.4×10^6 m। ($G = 6.6 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}, $g = 9.8$ ms^{-2}) [ঢা. বো. ২০১৫]

(ক) উপগ্রহটি ভূ-পৃষ্ঠ হতে কত উচ্চতায় আছে ?

(খ) গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে যাচাই কর যে সঞ্চারিত গতিশক্তি উপগ্রহটিকে বহিঃবিশ্বে পাঠানোর জন্য পর্যাপ্ত নয়।

(ক) মনে করি, উপগ্রহটি ভূ-পৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় আছে এবং উপগ্রহটির বেগ, v

আমরা জানি,

উপগ্রহের বেগ, $v = \sqrt{g_h (R+h)}$ ... ... (i)

এবং, h উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ

$g_h = \frac{GM}{(R+h)^2}$ ... ... (ii)

এখানে,
$m = 120$ kg
$M = 6 \times 10^{24}$ kg
$R = 6.4 \times 10^6$ m
$G = 6.6 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}
$g = 9.8$ ms^{-2}
$E_k = 3.6 \times 10^9$ Joule

গতিশক্তি,

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 = 3.6 \times 10^9$$

বা, $v^2 = \frac{2 \times 3.6 \times 10^9}{m} = \frac{7.2 \times 10^9}{120} = 6 \times 10^7$

সমীকরণ (i) হতে পাই,

$$v^2 = g_h (R + h)$$

বা, $g_h (R + h) = v^2 = 6 \times 10^7$

সমীকরণ (ii) হতে পাই,

$$g_h = \frac{GM}{(R + h)^2}$$

বা, $g_h (R + h)^2 = GM$

বা, $g_h (R + h) \times (R + h) = GM$

বা, $v^2 (R + h) = GM$

বা, $R + h = \frac{GM}{v^2} = \frac{GM}{6 \times 10^7}$

বা, $h = \frac{GM}{6 \times 10^7} - R = \frac{6.6 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{6 \times 10^7} - 6.4 \times 10^6$

$= 6.6 \times 10^6 - 6.4 \times 10^6$

$= 0.2 \times 10^6 = 200$ km

বিকল্প সূত্র :

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}},\ E_k = \frac{1}{2} mv^2$$

$\therefore\ v^2 = \frac{2E_k}{m}$

বা, $v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$

(খ) এখানে,

$$v^2 = 6 \times 10^7$$

$\therefore\ v = \sqrt{60 \times 10^6} = 7.75 \times 10^3$ kms^{-1}

সুতরাং উপগ্রহটি বহিঃবিশ্বে যেতে হলে সর্বনিম্ন গতিশক্তি প্রয়োজন হবে,

$$E = \frac{1}{2} mv_e^2 = \frac{1}{2} \times 120 \times (11.2 \times 10^3)^2 = 7.5 \times 10^9 \text{ Joule}$$

সুতরাং, উপগ্রহটিতে সঞ্চারিত গতিশক্তি 3.6×10^9 Joule যা বহিঃবিশ্বে গমনের গতিশক্তি অপেক্ষা কম, অর্থাৎ পর্যাপ্ত নয়।

৪। পৃথিলা ও মিথিলা দুই বোন মহাজগৎ নিয়ে গল্প করছিল। পৃথিবীর ঘূর্ণন ক্রিয়া নিয়েও তারা আলোচনা করছিল। [কু. বো. ২০১৫]

(ক) সূর্য থেকে পৃথিবীর দূরত্ব যদি বর্তমান দূরত্বের অর্ধেক হয় তাহলে এক বছরে দিনের সংখ্যা কত?

(খ) পৃথিবীর আবর্তন বন্ধ হলে নিরক্ষীয় রেখায় অবস্থিত কোনো বস্তুর ওজনের কীরূপ পরিবর্তন হবে? বিশ্লেষণ করে মতামত দাও।

(ক) দেওয়া আছে, পৃথিবীর আবর্তনকাল, $T_1 = 365$ days

পৃথিবী ও সূর্যের দূরত্ব R হলে, পরিবর্তিত দূরত্ব, $R_2 = \frac{R_1}{2}$

পরিবর্তিত আবর্তনকাল, $T_2 = ?$

কেপলারের সূত্র অনুযায়ী,

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{R_1^3}$$

বা, $T_2 = T_1 \times \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{\frac{3}{2}} = 365 \times \left(\frac{\frac{R_1}{2}}{R_1}\right)^{1.5} = 129$ days

(খ) আমরা জানি, পৃথিবীর কৌণিক বেগ ω এবং কোনো স্থানের অক্ষাংশ λ হলে পৃথিবীর ঘূর্ণন বেগের দরুন অভিকর্ষজ ত্বরণ হ্রাসের পরিমাণ $\omega^2 R\cos^2\lambda$।

আপাত ওজন $mg' = mg - m\omega^2 R\cos^2\lambda$

বা, $m(g') = m(g - \omega^2 R\cos^2\lambda)$

নিরক্ষরেখায় $\lambda = 0°$ $\therefore$ $\omega^2 R\cos^2\lambda = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R\cos^2\lambda = \left(\frac{2\times 3.14}{86400}\right)^2 \times 6.4\times10^6 (\cos 0°)^2 = 0.033$

$\therefore$ ওজন $= m \times .033$

$g' = g - \omega^2 R\cos^2\lambda$ (নিরক্ষীয় অঞ্চলে $\lambda = 0$)

$g' = g - \omega^2 R$ (ঘূর্ণন বন্ধ হয়ে গেলে, $\omega = 0$ হয়)

$\therefore$ $g' = g$

পৃথিবীর ঘূর্ণনরত অবস্থায় নিরক্ষরেখায় অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.78\ ms^{-2}$

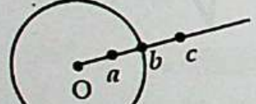
$\therefore$ পৃথিবীর আবর্তন বন্ধ হয়ে গেলে নিরক্ষীয় রেখায় অবস্থিত কোনো বস্তুর ওজন, $mg' = m \times 9.78$

$\therefore$ ওজনের পরিবর্তন $= \frac{m\times 0.033\times 100\%}{mg'}$

$= \frac{0.033}{9.78}\times 100\%$

$= 0.346\%$ বৃদ্ধি পাবে।

৫।



চিত্রে একটি কাল্পনিক গ্রহ দেখানো হয়েছে যার ভর 12×10^{24} kg এবং ব্যাসার্ধ 8×10^6 m। O এর কেন্দ্র। এর পৃষ্ঠের উপর b একটি বিন্দু। $aO = ab = bc$ হয়। $G = 6.67\times10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$। [ব. বো. ২০১৫]

(ক) উল্লেখিত গ্রহটির পৃষ্ঠের মুক্তিবেগ নির্ণয় কর।

(খ) a ও c বিন্দুর মধ্যে কোনটিতে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান বেশি হবে? তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।

(ক) আমরা জানি,

$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

$= \sqrt{\frac{2\times 6.67\times10^{-11}\times 12\times10^{24}}{8\times10^6}}$

$= 14.146\times10^3\ ms^{-1}$

দেওয়া আছে,

গ্রহটির ভর, $M = 12\times10^{24}$ kg

ব্যাসার্ধ, $R = 8\times10^6$ m

মহাকর্ষ ধ্রুবক, $G = 6.67\times10^{-11}\ Nm^2\ kg^{-2}$

মুক্তিবেগ, $v_e = ?$

(খ) যেহেতু $aO = ab = bc$ শর্তমতে,

a, Ob এর মধ্যবিন্দু

$\therefore$ $ab = bc = \frac{R}{2} = \frac{8\times10^6 m}{2} = 4\times10^6$ m

a বিন্দুতে $g' = g\left(1 - \frac{d}{R}\right) = g\left(1 - \frac{\frac{R}{2}}{R}\right) = g\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\times g = 4.9\ ms^{-2}$

আবার, c বিন্দুতে $g'' = g\left(1 - \frac{2h}{R}\right) = g\left(1 - \frac{2\times\frac{R}{2}}{R}\right)$

$= g\left(1 - \frac{R}{R}\right) = g(1-1) = 0$

অর্থাৎ $g' > g''$। সুতরাং a বিন্দুর অভিকর্ষজ ত্বরণের মান c বিন্দুর অভিকর্ষজ ত্বরণ অপেক্ষা বেশি।

৬। একটি সুউচ্চ অফিস বিল্ডিং-এ আরোহীসহ সর্বোচ্চ 400 kg ভরের ক্ষমতাসম্পন্ন একটি লিফ্‌ট দুইতলা হতে সাত তলার মধ্যে ওঠা-নামা করে। বিল্ডিংটির প্রতিটি ফ্লোরের উচ্চতা 3 m। উক্ত অফিসের একজনের ভর 45 kg এবং তিনি একদিন লিফটিতে চড়ে $2\ ms^{-2}$ ত্বরণে উঠা-নামার সময় ওয়েট মেশিনে তার ওজন পরিমাপ করলেন। এক্ষেত্রে সর্বত্র অভিকর্ষজ ত্বরণের মান $9.8\ ms^{-2}$।

(ক) লিফটিকে দুই তলা হতে সাত তলায় $2\ ms^{-1}$ সমবেগে উঠাতে সর্বনিম্ন কত অশ্ব ক্ষমতার একটি মোটরের প্রয়োজন হবে ?

(খ) উক্ত ব্যক্তির ওজন ওয়েট মেশিনের সাহায্যে সেদিন সঠিকভাবে নির্ণয় করা গেল কি-না তা গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ করে মতামত দাও। [ঢা. বো. ২০১৭]

(ক) ধরি, লিফটিকে $2\ ms^{-1}$ সমবেগে ওপরে উঠাতে হলে সর্বনিম্ন P ক্ষমতার মোটর প্রয়োজন।

$\therefore\ P = Fv = 3920 \times 2 = 7840\ W$

দেওয়া আছে,
আরোহীসহ লিফটের ভর, $m = 400\ kg$
লিফটের বেগ, $v = 2\ ms^{-1}$
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8\ ms^{-2}$
আরোহীসহ লিফটের ওজন,
$F = mg = (400 \times 9.8)\ N = 3920\ N$

(খ) উদ্দীপক অনুযায়ী
ব্যক্তির ভর, $m = 45\ kg$
লিফটের ত্বরণ, $a = 2\ ms^{-2}$
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8\ ms^{-2}$

$\therefore$ ব্যক্তির প্রকৃত ওজন, $W = mg = 45 \times 9.8 = 441\ N$

লিফটটি ওঠার সময় ব্যক্তির ওজন, $W_1 = m(g + a)\ N = 45(9.8 + 2)\ N = 531\ N$

লিফটটি নামার সময় ব্যক্তির ওজন, $W_2 = m(g - a)\ N = 45(9.8 - 2)\ N = 351\ N$

অর্থাৎ লিফটটি ওঠার সময় প্রকৃত ওজন থেকে বেশি ওজন অনুভূত হয় এবং নামার সময় প্রকৃত ওজন থেকে কম ওজন অনুভূত হয়।

অতএব, উক্ত ব্যক্তির ওজন ওয়েট মেশিনের সাহায্যে সঠিকভাবে নির্ণয় করা যাবে না।

৭। একটি মহাজাগতিক বস্তুর ব্যাসার্ধ ও ভর যথাক্রমে $3.2 \times 10^6\ m$ এবং $4 \times 10^{24}\ kg$। মহাকর্ষীয় ধ্রুবক $G = 6.675 \times 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$। একটি ধূমকেতুর আঘাতে মহাজাগতিক বস্তুটি আটটি সমান খণ্ডে বিভক্ত হলো।

(ক) মহাজাগতিক বস্তুর পৃষ্ঠে মধ্যাকর্ষণজনিত ত্বরণ নির্ণয় কর।

(খ) প্রতিটি খণ্ডের মুক্তিবেগ মূল বস্তুটির মুক্তিবেগের এক অষ্টমাংশ হবে কি-না যাচাই কর। [দি. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি,

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{6.675 \times 10^{-11} \times 4 \times 10^{24}}{(3.2 \times 10^6)^2} = 26.07\ ms^{-2}$$

এখানে,
মহাজাগতিক বস্তুর ব্যাসার্ধ, $R = 3.2 \times 10^6\ m$
মহাজাগতিক বস্তুর ভর, $M = 4 \times 10^{24}\ kg$
মহাকর্ষীয় ধ্রুবক, $G = 6.675 \times 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$
মহাকর্ষীয় বস্তুর পৃষ্ঠে মাধ্যাকর্ষণজনিত ত্বরণ, $g = ?$

(খ) আমরা জানি,

N সংখ্যক খণ্ডের আয়তন = মূল খণ্ডের আয়তন

বা, $N \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$

বা, $8r^3 = R^3$

বা, $r^3 = \frac{R^3}{8} = \left(\frac{R}{2}\right)^3$

$\therefore\ r = \frac{R}{2}$

দেওয়া আছে,
খণ্ড সংখ্যা, $N = 8$
প্রতিটি খণ্ডের ভর, $m = \frac{M}{8}$
প্রতিটি খণ্ডের ব্যাসার্ধ $= r$
মূল বস্তুর ব্যাসার্ধ $= R$

এখন মূল বস্তুর মুক্তিবেগ, v_e এবং প্রতিটি খণ্ডের মুক্তিবেগ v_e' হলে,

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad \dots \quad \dots \quad (i)$$

$$v_e' = \sqrt{\frac{2Gm}{r}} \quad \dots \quad \dots \quad (ii)$$

$$\therefore \quad \frac{v_e'}{v_e} = \sqrt{\frac{2Gm}{r} \times \frac{R}{2GM}}$$

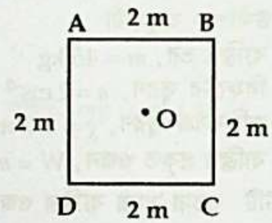
$$= \sqrt{\frac{mR}{rM}} = \sqrt{\frac{\frac{M}{8} \times R}{\frac{R}{2} \times M}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad v_e' = \frac{1}{2} v_e$$

অতএব প্রতিটি খণ্ডের মুক্তিবেগ মূল বস্তুটির মুক্তিবেগের এক অষ্টমাংশ না হয়ে অর্ধেক হবে।

৮। 2 m বাহুবিশিষ্ট ABCD বর্গক্ষেত্রের কেন্দ্র O এবং উক্ত বিন্দুতে 1 kg ভরের বস্তু রাখা আছে। A, B, C, D বিন্দুতে যথাক্রমে 4 kg, 4 kg, 2 kg, 2 kg ভরের চারটি বস্তু রাখা আছে। [$G = 6.673 \times 10^{-11}$ $Nm^2 kg^{-2}$]



(ক) O বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব নির্ণয় কর।

(খ) O বিন্দুতে বস্তুটি স্থির থাকবে কী-না—গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। [কু. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি,

$$V_a = \frac{-G}{r}(m_A + m_B + m_C + m_D)$$

$$= \frac{-6.673 \times 10^{-11}}{\sqrt{2}} \times (4 + 4 + 2 + 2)$$

$$= -5.66 \times 10^{-10}\ Jkg^{-1}$$

$\therefore$ O বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব,

$$V_a = -5.66 \times 10^{-10}\ Jkg^{-1}$$

দেওয়া আছে,

A বিন্দুতে বস্তুর ভর, $m_A = 4$ kg

B বিন্দুতে বস্তুর ভর, $m_B = 4$ kg

C বিন্দুতে বস্তুর ভর, $m_C = 2$ kg

D বিন্দুতে বস্তুর ভর, $m_D = 2$ kg

মহাকর্ষীয় ধ্রুবক, $G = 6.673 \times 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$

O বিন্দু হতে A, B, C এবং D বিন্দুর দূরত্ব,

$r = OA = OB = OC = OD = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ m

O বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব, $V_a = ?$

(খ) AC বিন্দুর ভরের জন্য O বিন্দুতে দুটি বল ও BD রেখায় O বিন্দুতে দুটি বল কাজ করে।

A ও C বিন্দুর ভরের জন্য O বিন্দুতে 1 kg ভরের ওপর ক্রিয়াশীল বল,

$$F_1 = \frac{4G}{(\sqrt{2})^2} - \frac{2G}{(\sqrt{2})^2} = 2G - G = G, \text{ CA বরাবর ক্রিয়াশীল}$$

B ও D বিন্দুর ভরের জন্য O বিন্দুতে 1 kg ভরের উপর ক্রিয়াশীল বল,

$$F_2 = \frac{4G}{(\sqrt{2})^2} - \frac{2G}{(\sqrt{2})^2} = 2G - G = G, \text{ DB বরাবর ক্রিয়াশীল}$$

CA ও DB পরস্পর লম্ব।

$$\therefore \quad \text{লব্ধি} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{G^2 + G^2}$$

$$= \sqrt{2G^2} = G\sqrt{2}$$

$$= 6.673 \times 10^{-11} \times 1.414$$

$$= 9.44 \times 10^{-11}\ Nkg^{-1}$$

প্রাবল্য উপাংশদ্বয় পরস্পর সমান হওয়ায় লব্ধি O বিন্দুতে $\angle AOB$ এর সমদ্বিখণ্ডক অর্থাৎ DA বা CB রেখার সমান্তরালে ক্রিয়া করে।

অর্থাৎ O বিন্দুতে বস্তুটি স্থির থাকবে না।

৯। পৃথিবী নিজ অক্ষের চারদিকে 24 ঘণ্টায় একবার প্রদক্ষিণ করে, একে আহ্নিক গতি বলে। পৃথিবীর এই ঘূর্ণন গতির জন্য অভিকর্ষীয় ত্বরণ সর্বত্র সমান নয়। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6400 km এবং ভূ-পৃষ্ঠে অভিকর্ষীয় ত্বরণ $9.8\ ms^{-2}$।

(ক) পাহাড়ের চূড়ায় অভিকর্ষজ ত্বরণ নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকে A ও B স্থানের মধ্যে কোথায় একটি সরল দোলক ধীরে চলবে ? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে তোমার মতামত দাও। [ব. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি,

ভূ-পৃষ্ঠ থেকে h উচ্চতায় কোনো স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণ

$$g_A = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 \times g$$

$$= \left(\frac{6.4 \times 10^6}{6.4 \times 10^6 + 5 \times 10^3}\right)^2 \times 9.8$$

$$= 9.785\ ms^{-1}$$

দেওয়া আছে,

$R = 6.4 \times 10^6\ m$

$g = 9.8\ ms^{-2}$

পাহাড়ের উচ্চতা, $h_A = 5\ km = 5 \times 10^3\ m$

পাহাড়ের চূড়ায় অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g_A = ?$

(খ) ভূ-পৃষ্ঠ হতে $h_B = 5\ km = 5 \times 1000 = 5 \times 10^3$ গভীরে B বিন্দুতে অভিকর্ষজ ত্বরণ,

$$g_B = \left(1 - \frac{h_B}{R}\right) g = \left(1 - \frac{5 \times 10^3}{6.4 \times 10^6}\right) \times 9.8 = 9.79\ ms^{-2}$$

আমরা (ক) থেকে পাই, $g_A = 9.785\ ms^{-2}$ এবং A ও B স্থানে একটি সরল দোলকের দোলন কাল যথাক্রমে T_A ও T_B হলে সরল দোলকের সূত্র থেকে পাই,

$$\frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\frac{g_B}{g_A}} = \sqrt{\frac{9.79}{9.785}} = 1.000255$$

$$\therefore \quad T_A > T_B$$

যেখানে দোলক ঘড়ির দোলকের দোলনকাল বেশি সেখানে ঘড়ি ধীরে চলে।

সুতরাং B অবস্থানের তুলনায় A অবস্থানে ঘড়ি ধীরে চলবে।

১০। সূর্যের চারদিকে আবর্তনরত মঙ্গলগ্রহের কক্ষপথের ব্যাসার্ধ পৃথিবীর কক্ষপথের ব্যাসার্ধের 1.53 গুণ। পৃথিবীতে 365 দিনে এক বছর।

(ক) কেপলারের উপবৃত্ত সূত্র কী ?

(খ) একটি যাত্রীপূর্ণ নৌকার যাত্রীদের দাঁড়াতে নিষেধ করা হয় কেন ? —ব্যাখ্যা কর।

(গ) মঙ্গলগ্রহে কতদিনে এক বছর হবে ? নির্ণয় কর।

(ঘ) পৃথিবী এবং সূর্যের মধ্যবর্তী দূরত্ব বর্তমান দূরত্বের দ্বিগুণ হলে গাণিতিকভাবে দেখাও যে, পৃথিবীতে বছরের দৈর্ঘ্য 1032 দিন হবে।

(ক) কেপলারের উপবৃত্ত সূত্র : প্রতিটি গ্রহ সূর্যকে উপবৃত্তের ফোকাসে রেখে একটি উপবৃত্তাকার পথে প্রদক্ষিণ করে।

(খ) যাত্রীরা বসা অবস্থায় নৌকায় ভারকেন্দ্র যেখানে অবস্থিত থাকে যাত্রীরা দাঁড়ালে ওই অবস্থান কিছুটা ওপরে ওঠে যায়। ফলে যাত্রীপূর্ণ নৌকা অস্থির সাম্যাবস্থায় পৌঁছায়। এতে নৌকাটি উল্টে যেতে পারে। তাই যাত্রীদের দাঁড়াতে নিষেধ করা হয়।

(গ) আমরা জানি,

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3}$$

$$\text{বা,} \quad T_2^2 = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 \times T_1^2$$

$$\therefore \quad T_2 = \left\{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 \times T_1^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{\left(\frac{1.53}{1}\right)^3 \times (365)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= 691\ d$$

(ঘ) ধরা যাক,

সূর্যের ভর M, পৃথিবীর ভর m; সূর্য ও পৃথিবীর মধ্যবর্তী দূরত্ব r এবং পৃথিবীর কৌণিক বেগ $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

যেহেতু পৃথিবী সূর্যের চারদিকে ঘুরে তাই প্রয়োজনীয় কেন্দ্রমুখি বল = পৃথিবীর ওপর সূর্যের মহাকর্ষীয় বল। সুতরাং,

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r$$

বা, $\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$

ধরা যাক, পৃথিবী ও সূর্যের মধ্যবর্তী দূরত্ব $2r$ হলে পৃথিবীর কৌণিক বেগ ω' এবং আবর্তনকাল T' হয়।

এক্ষেত্রে, $\frac{GMm}{(2r)^2} = m\omega'^2 \times 2r$

বা, $\omega' = \sqrt{\frac{GM}{8r^3}}$

এখন, $\frac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\frac{GM}{8r^3}} \times \sqrt{\frac{r^3}{Gm}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

বা, $\frac{\frac{2\pi}{T'}}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

বা, $\frac{T}{T'} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

বা, $T' = T \times 2\sqrt{2} = 365 \times 2\sqrt{2} = 1032$ দিন।

সার-সংক্ষেপ

গ্যালিলিওর সূত্র :

১ম সূত্র	:	বায়ুশূন্য স্থানে বা বাধাহীন পথে সকল বস্তুই নিশ্চল অবস্থা হতে যাত্রা করে সমান দ্রুততায় নিচে নামে অর্থাৎ সমান সময়ে সমান দূরত্ব অতিক্রম করে।
২য় সূত্র	:	বাধাহীন পথে পড়ন্ত বস্তুর নির্দিষ্ট সময়ে প্রাপ্তবেগ ওই সময়ের সমানুপাতিক।
৩য় সূত্র	:	বাধাহীন পথে পড়ন্ত বস্তুর নির্দিষ্ট সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব ওই সময়ের বর্গের সমানুপাতিক।

কেপলারের সূত্র :

উপবৃত্ত সূত্র	:	প্রতিটি গ্রহ সূর্যকে উপবৃত্তের নতিতে বা ফোকাসে রেখে একটি উপবৃত্তাকার পথে প্রদক্ষিণ করছে।
ক্ষেত্রফল সূত্র	:	গ্রহ এবং সূর্যের সংযোগকারী ব্যাসার্ধ রেখা সমান সময়ে সমান ক্ষেত্রফল অতিক্রম করে।
সময়ের সূত্র	:	প্রতিটি গ্রহের পর্যায়কালের বর্গ সূর্য হতে তার গড় দূরত্বের ঘনফলের সমানুপাতিক।
মহাকর্ষীয় ধ্রুবক	:	একক ভরবিশিষ্ট দুটি বস্তুকণা একক দূরত্বে থেকে যে পরিমাণ বল দ্বারা পরস্পরকে আকর্ষণ করে তার সংখ্যাগত মানকে মহাকর্ষীয় ধ্রুবক বলে।
মহাকর্ষ	:	নভোমণ্ডলে অবস্থিত দুটি বস্তু বা বস্তুকণার মধ্যকার পারস্পরিক আকর্ষণ বলকে মহাকর্ষ বলে।
মহাকর্ষ সূত্র	:	মহাবিশ্বের যে কোনো দুটি বস্তুকণা পরস্পরকে আকর্ষণ করে। এই আকর্ষণ বল বস্তু দুটির ভরের গুণফলের সমানুপাতিক এবং এদের মধ্যকার দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক।
মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র	:	কোনো বস্তুর চারপাশে যে অঞ্চল ব্যাপী এর মহাকর্ষীয় প্রভাব বজায় থাকে, অর্থাৎ অন্য কোনো বস্তু রাখা হলে সেটি আকর্ষণ লাভ করে, তাকে বস্তুর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র বলে।
মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র প্রাবল্য বা তীব্রতা	:	মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের যে কোনো বিন্দুতে একটি একক ভরের বস্তু স্থাপন করলে ওই ভরের ওপর যে বল ক্রিয়া করে তাকে ওই বিন্দুতে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের প্রাবল্য বা তীব্রতা বলে।
মহাকর্ষীয় বিভব	:	অসীম দূর হতে একক ভরের কোনো বস্তুকে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে আনতে যে পরিমাণ কাজ সাধিত হয় তাকে ওই বিন্দুর মহাকর্ষীয় বিভব বলে।
অভিকর্ষজ ত্বরণ	:	বস্তুতে অভিকর্ষ বল কর্তৃক যে ত্বরণ উৎপন্ন হয় তাকে অভিকর্ষজ ত্বরণ বলে।

অভিকর্ষ কেন্দ্র	:	কোনো বস্তুকে যেভাবেই রাখা হোক না কেন তার ওজন যে বিশেষ বিন্দুর মধ্যে দিয়ে বস্তুর ওপর সর্বদা ক্রিয়া করে ওই বিন্দুকে বস্তুর অভিকর্ষ কেন্দ্র বা ভারকেন্দ্র বলে।
স্বাভাবিক উপগ্রহ	:	যেসব উপগ্রহ প্রাকৃতিক কারণে সৃষ্ট তাদেরকে স্বাভাবিক উপগ্রহ বলে।
কৃত্রিম উপগ্রহ	:	মহাশূন্যে পাড়ি দেয়ার জন্য অথবা পৃথিবীর বা গ্রহ-নক্ষত্রের চারদিকে আবর্তনের জন্য মানুষ কর্তৃক তৈরি উপগ্রহকে কৃত্রিম উপগ্রহ বলে।
ভূ-স্থির উপগ্রহ	:	কোনো কৃত্রিম উপগ্রহের আবর্তনকাল নিজ অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণায়মান পৃথিবীর আবর্তনকালের সমান হলে পৃথিবীর সাপেক্ষে এটি স্থির থাকবে; এ ধরনের উপগ্রহকে ভূ-স্থির উপগ্রহ বলে।
মুক্তিবেগ	:	সর্বাপেক্ষা কম যে বেগে কোনো বস্তুকে ওপরের দিকে নিক্ষেপ করলে তা আর পৃথিবীতে ফিরে আসে না, সেই বেগকে মুক্তিবেগ বলে।

বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তরের জন্য প্রয়োজনীয় বিষয়াবলির সার-সংক্ষেপ

১। 1 kg ভরের বস্তুর ওপর অভিকর্ষজ বলের মান 9·8 N। মহাকর্ষ ক্ষেত্র প্রাবল্য সব থেকে বেশি পৃথিবী পৃষ্ঠে $= g$।

২। মহাকর্ষীয় বিভবের একক Jkg^{-1}, প্রাবল্যের একক Nkg^{-1}, মহাকর্ষীয় ধ্রুবকের একক Nm^2kg^{-2}।

৩। কোনো বস্তুর মুক্তিবেগ ওই বস্তুর ভরের ওপর নির্ভরশীল নয়। মহাকর্ষীয় বিভব সর্বদা ঋণাত্মক রাশি।

৪। পৃথিবীর পৃষ্ঠে মুক্তিবেগের মান 11·18 kms^{-1}। ভূপৃষ্ঠে কৃত্রিম উপগ্রহের আবর্তনকাল 24 ঘণ্টা।

৫। খাড়া ওপরের দিকে g এর মান $-$ 9·8 ms^{-2}। অসীমে মহাকর্ষীয় বিভব শূন্য ধরা হয়। এই মানই সর্বোচ্চ মান।

৬। দুটি বস্তুর মধ্যে যে দূরত্ব আছে তা অর্ধেকে নেমে আসলে মহাকর্ষ বল চারগুণ বাড়ে।

৭। মহাকর্ষীয় প্রাবল্য ও মহাকর্ষীয় বিভবের মধ্যে সম্পর্ক হলো $E = -\frac{dV}{dr}$। গোলকের অভ্যন্তরে মহাকর্ষীয় বিভব স্থির থাকে। বস্তুর ভর দ্বিগুণ হলেও মুক্তি বেগের কোনো পরিবর্তন হয় না।

৮। যদি পৃথিবীর ভর অপরিবর্তিত রেখে এর ব্যাসার্ধ 4 গুণ বৃদ্ধি করা হয় তবে পৃথিবীতে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান 16 গুণ হ্রাস পাবে। পৃথিবীর ক্ষেত্রে কোনো বিন্দুর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র প্রাবল্য ওই বিন্দুর অভিকর্ষজ ত্বরণ একই।

৯। পৃথিবী পৃষ্ঠে একটি রকেটের মুক্তিবেগ v_E। রকেটটিকে অন্য একটি গ্রহ থেকে নিক্ষেপ করা হলো যার অভিকর্ষজ ত্বরণ এবং ব্যাসার্ধ পৃথিবীর দ্বিগুণ। গ্রহটির পৃষ্ঠে রকেটের মুক্তিবেগ হবে $2v_e$।

১০। মহাকর্ষীয় ধ্রুবকের মাত্রা $[M^{-1}T^{-2}L^3]$, মহাকর্ষীয় বিভবের মাত্রা $[L^2T^{-2}]$। কেপলারের তৃতীয় সূত্র হলে $T^2 \propto R^3$।

১১। M ভরের কোনো গ্রহের চারদিকে r ব্যাসার্ধের কক্ষে v বেগে আবর্তনশীল m ভরের উপগ্রহের বেগ, $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$। $\frac{T_1}{R_1^3} = \frac{T_2}{R_2^3}$ হলো গ্রহের গতি সংক্রান্ত কেপলারের তৃতীয় সূত্র।

১২। E মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র প্রাবল্যের কোনো বিন্দুতে m ভরের বস্তু রাখলে তার ওপর mE পরিমাণ বল ক্রিয়া করে।

১৩। পৃথিবী ও অন্য কোনো গ্রহের মধ্যবর্তী দূরত্ব দ্বিগুণ হলে মহাকর্ষ বল হবে এক-চতুর্থাংশ।

১৪। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R এবং পৃথিবীর অভিকর্ষজ ত্বরণ g হলে পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ $= \frac{gR^2}{(R+h)^2}$।

১৫। ভূ-স্থির উপগ্রহের পর্যায়কাল 1 দিন বা 24 ঘণ্টা।

১৬। গ্রহগুলোর গতিপথ উপবৃত্তাকার এই সূত্রটি বিজ্ঞানী কেপলারের।

১৭। গ্রাভিটন নামক কণার বিনিময়ের ফলে মহাকর্ষ বল কার্যকর হয়। মহাকর্ষ বল সব থেকে দুর্বল বল।

১৮। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ হ্রাস পেলে g এর মান হ্রাস পাবে। সবল নিউক্লিয় বল সব থেকে শক্তিশালী বল।

১৯। দুটি বস্তুর মধ্যকার দূরত্ব অর্ধেক করলে মহাকর্ষ বলের মান চারগুণ বাড়ে।

২০। g-এর মান মেরুতে সর্বাধিক। পৃথিবীতে কোনো বস্তুর মুক্তিবেগ পৃথিবীর ব্যাসার্ধের ওপর নির্ভর করে।

২১। সূর্য থেকে পৃথিবীর গড় দূরত্ব কমে গেলে বছরের দৈর্ঘ্য কমে যাবে।

২২। একটি পাথরকে খাড়া ওপরের দিকে তুলতে থাকলে এর উপর 2টি বল ক্রিয়া করে।

২৩। একটি কৃত্রিম উপগ্রহের উচ্চতা ও আবর্তনকালের মধ্যে সম্পর্ক হলো, $h = \left(\frac{GMT}{4\pi}\right)^{1/3}\left(\frac{T}{\pi}\right)^{2/3} - R$

২৪। সূর্য হতে গড় দূরত্ব r এবং গ্রহের পর্যায়কাল T হলে $T^2 \propto r^3$ হয়।

২৫। 90° অক্ষাংশে g-এর মান সর্বাপেক্ষা বেশি। ভরকেন্দ্রে বস্তুর মোট ওজন ক্রিয়া করে।

২৬। বলের বিরুদ্ধে কাজের ক্ষেত্রে বল ও সরণের মধ্যবর্তী কোণ 180°। পৃথিবীর 45° অক্ষাংশে অভিকর্ষজ ত্বরণকে আদর্শ মান ধরা হয়।

২৭। স্প্রিং নিক্তিতে একবার পৃথিবীতে ও আরেকবার চন্দ্রে ওজন নিলে চন্দ্রে ওজন কম হবে।

২৮। একটি হাল্কা ও একটি ভারী বস্তুর ক্ষেত্রে ভরবেগ ধ্রুব হলে হাল্কা বস্তুটির গতিশক্তি বেশি হবে।

২৯। মহাকর্ষ সূত্রের ভেক্টর রূপ : $\vec{F}_{12} = \frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}$। পার্কিং কক্ষপথ হলো ভূ-স্থির উপগ্রহের কক্ষপথ।

৩০। পৃথিবীর নিজ অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণনের দরুন g-এর মান পরিবর্তিত হয়। নিরক্ষরেখায় g-এর মান সর্বনিম্ন ও দুটি মেরুতে সর্বোচ্চ হয়। মেরু বিন্দুতে অক্ষাংশ, $\lambda = 90°$ এবং $g' = g$।
নিরক্ষরেখায় $\lambda = 0°$, $\cos\lambda = 1$ এবং $g' = g - \omega^2 R$.

অনুশীলনী

(ক) বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

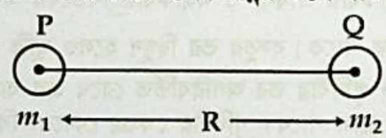
১। বিনা বাধায় পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য—
(i) পড়ন্ত বস্তুর নির্দিষ্ট সময়ে প্রাপ্ত বেগ সময়ের সমানুপাতিক
(ii) সকল পড়ন্ত বস্তুই সমান সময়ে সমান দূরত্ব অতিক্রম করে
(iii) পড়ন্ত বস্তুর নির্দিষ্ট সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব ঐ সময়ের বর্গের সমানুপাতিক
নিচের কোনটি সঠিক ?
ⓚ i ও ii
ⓛ i ও iii
ⓜ ii ও iii
ⓝ i, ii ও iii

২। গ্রহের পর্যায়কাল T এবং সূর্য হতে গ্রহের গড় দূরত্ব r হলে কেপলারের তৃতীয় সূত্রানুসারে—
[কু. বো. ২০১৭, ২০১৬; ঢা. বো. ২০১৬; রা. বো. ২০১৬; সি. বো. ২০১৬; য. বো. ২০১৫]
ⓚ $T \propto r$
ⓛ $T \propto r^2$
ⓜ $T^2 \propto r$
ⓝ $T^2 \propto r^3$

৩। নিম্নের বিবৃতিগুলি লক্ষ কর—
(i) দুটি বস্তুর মধ্যে আকর্ষণ বল তাদের মধ্যকার দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক
(ii) মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুর অতিক্রান্ত দূরত্ব সময়ের বর্গের সমানুপাতিক
(iii) সূর্যের চারদিকে প্রতিটি গ্রহের আবর্তনকালের বর্গ সূর্য থেকে ওই গ্রহের কক্ষপথের অর্ধপরাক্ষের ঘনফলের সমানুপাতিক
নিচের কোনটি সঠিক ?
ⓚ ii
ⓛ i ও ii
ⓜ ii ও iii
ⓝ i, ii ও iii

৪। মহাকর্ষীয় ধ্রুবকের একক হলো— [কু. বো. ২০১৬]
ⓚ $Nm\,kg^{-2}$
ⓛ $Nm^{-2}\,kg^{-2}$
ⓜ $Nm^2\,kg^{-2}$
ⓝ $Nm^{-2}\,kg^2$

নিচের চিত্র ও তথ্য থেকে ৫নং প্রশ্নের উত্তর দাও।



চিত্রে P ও Q বস্তুদ্বয়ের ভর যথাক্রমে m_1 ও m_2 এবং এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব R। এদের মধ্যকার আকর্ষণ বল F হলে—

৫। মধ্যবর্তী দূরত্ব d-এর মান দ্বিগুণ করা হলে আকর্ষণ বলের মান F′ পূর্বের মানের কত গুণ হবে ?
ⓚ এক-তৃতীয়াংশ
ⓛ এক-চতুর্থাংশ
ⓜ অর্ধেক
ⓝ দুই-তৃতীয়াংশ

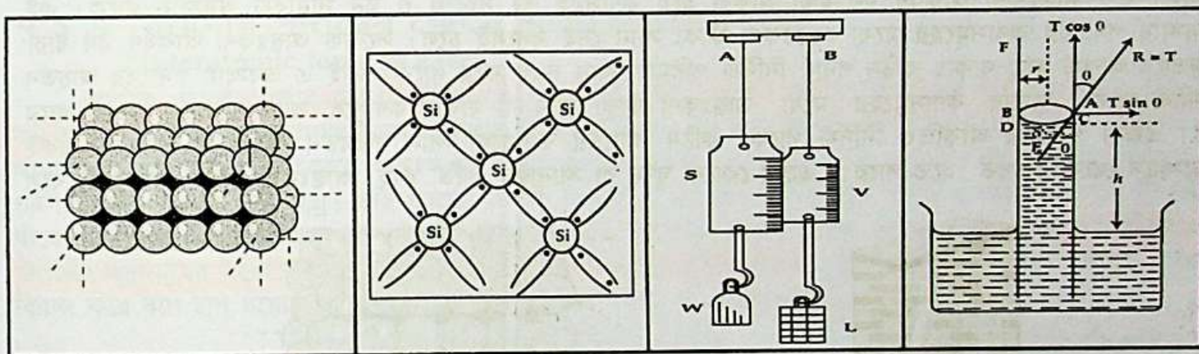
৬। কোনো স্থানের g-এর মান $9.832\ ms^{-2}$ হলে নিচের কোন উক্তিটি সঠিক ?
ⓚ স্থানটি মেরু অঞ্চলে অবস্থিত
ⓛ স্থানটি 45° অক্ষাংশে অবস্থিত
ⓜ স্থানটি বিষুবীয় অঞ্চলে অবস্থিত
ⓝ স্থানটি সমুদ্রপৃষ্ঠে অবস্থিত

৭। পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে h গভীরে g এর মান— [JnU Admission Test, 2011-12]
ⓚ $g_h = g\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$
ⓛ $g_h = g\left(1 - \frac{h}{R}\right)$
ⓜ $g_h = g\left(1 + \frac{2h}{R}\right)$
ⓝ $g_h = g\left(1 + \frac{h}{R}\right)$

৭

পদার্থের গাঠনিক ধর্ম
STRUCTURAL PROPERTIES OF MATTER

প্রধান শব্দ (Key Words) : আয়নিক বন্ধন, সমযোজী বন্ধন, ধাতব বন্ধন, ভ্যান ডার ওয়াল বন্ধন, স্থিতিস্থাপকতা, স্থিতিস্থাপক সীমা, অসহ ভার বা ওজন, অসহ পীড়ন, বিকৃতি, পীড়ন, হুকের সূত্র, স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক, সংনম্যতা, পয়সনের অনুপাত, সান্দ্রতা, সান্দ্রতা গুণাঙ্ক বা সান্দ্রতাঙ্ক, পৃষ্ঠটান, সংশক্তি বল, আসঞ্জন বল, পৃষ্ঠশক্তি, স্পর্শকোণ।



সূচনা
Introduction

কঠিন, তরল ও বায়বীয় এই তিনটি শ্রেণিতে পদার্থ সাধারণত বিভক্ত। পদার্থ ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অণু দিয়ে গঠিত। অণুর মধ্যে ক্রিয়াশীল আন্তঃআণবিক বলের বিভিন্নতার কারণে পদার্থ উল্লেখিত তিনটি ভিন্ন শ্রেণিতে বিভক্ত। কঠিন পদার্থে আন্তঃআণবিক বল অনেক বেশি। কঠিন পদার্থকে বাহ্যিক বল প্রয়োগে বিকৃত করা কষ্টকর। বল প্রয়োগে আন্তঃআণবিক স্থানের পরিবর্তনে বস্তুর আকার, আকৃতির পরিবর্তন ঘটে যা তরল বা বায়বীয় পদার্থে ঘটে না। সকল কঠিন পদার্থের স্থিতিস্থাপকতা নামে একটি সাধারণ ধর্ম রয়েছে। এই অধ্যায়ে আন্তঃআণবিক বল এবং এই বলের সাহায্যে স্থিতিস্থাপকতার ব্যাখ্যা, হুকের সূত্র, স্থিতিস্থাপকতার বিভিন্ন গুণাঙ্ক ব্যাখ্যা, স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক নির্ণয়, স্থিতিস্থাপক স্থিতিশক্তি, প্রবাহীর প্রবাহ, পৃষ্ঠটান, পৃষ্ঠশক্তি ইত্যাদি আলোচনা করা হয়েছে।

এই অধ্যায় পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা—

- পদার্থের আন্তঃআণবিক বলের প্রকৃতি ও এই বলের আলোকে পদার্থের স্থিতিস্থাপক আচরণ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- পদার্থের বিভিন্ন প্রকার বন্ধন ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- হুকের সূত্র, স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক, পয়সনের অনুপাত ব্যাখ্যা করতে পারবে।
  ব্যবহারিক : ইয়ং এর স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক নির্ণয়।
- প্রবাহী পদার্থ ব্যাখ্যাসহ প্রান্তিক বেগ, সান্দ্রতা, সান্দ্রতা গুণাঙ্ক ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- পৃষ্ঠটান, পৃষ্ঠশক্তি, সংসক্তি বল, আসঞ্জন বল, স্পর্শ কোণ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ঘর্ষণ ও সান্দ্রতার মধ্যে সম্পর্ক স্থাপনসহ তরল পদার্থে স্টোক্স-এর সূত্র, প্রান্তিক বেগ ব্যাখ্যা করতে পারবে।

৭.১ পদার্থের আন্তঃআণবিক আকর্ষণ ও বিকর্ষণ বল
Intermolecular attractive and repulsive force of matter

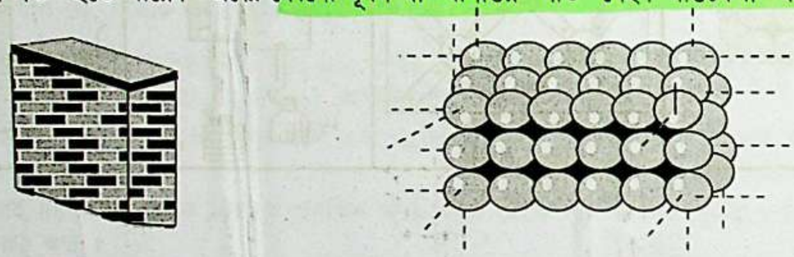
সকল পদার্থই অসংখ্য ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র কণা তথা পরমাণু ও অণুর সমন্বয়ে গঠিত। এসব পরমাণু ও অণুসমূহের অভ্যন্তরে বা তাদের পরস্পরের মধ্যে বিভিন্ন প্রকার আকর্ষণ বল কার্যকর রয়েছে। বিভিন্ন পদার্থের অণুর মধ্যে অথবা একই পদার্থের অণুগুলোর মধ্যে পারস্পরিক আকর্ষণ বলের কারণে পৃষ্ঠটানের উদ্ভব ঘটে। তবে বিভিন্ন পদার্থের মধ্যে আকর্ষণ বলের বৈশিষ্ট্য ও প্রকৃতির ভিন্নতা পরিলক্ষিত হয়।

অণুগুলো নিজেরা কীভাবে যুক্ত হয় যার ফলে কঠিন, তরল বা গ্যাস গঠিত হয় ? প্রকৃতপক্ষে অণুগুলো এক প্রকার বল দ্বারা পরস্পরের সাথে যুক্ত থাকে। একে আন্তঃআণবিক আকর্ষণ বল বলে। অর্থাৎ পদার্থের অণুগুলো পরস্পর যে বল দ্বারা যুক্ত হয়ে বিভিন্ন ভৌত কাঠামো গঠন করে তাকে আন্তঃআণবিক আকর্ষণ বল বলে।

নিম্নের আলোচনায় কঠিন, তরল এবং বায়বীয় পদার্থের ক্ষেত্রে আন্তঃআণবিক আকর্ষণ ও বিকর্ষণ বলের বৈশিষ্ট্য ও আচরণ সম্পর্কে জানতে সক্ষম হব।

৭.১.১ কঠিন পদার্থের ক্ষেত্রে আন্তঃআণবিক বল
Interatomic force in solids

কঠিন পদার্থের নির্দিষ্ট আকার ও আয়তন আছে। শক্তিশালী আকর্ষণ বলের কারণে কণাসমূহ খুব কাছাকাছি অবস্থান করে। কঠিন পদার্থের আন্তঃআণবিক আকর্ষণ সবচেয়ে বেশি থাকে এবং আন্তঃআণবিক দূরত্ব সবচেয়ে কম থাকে। উচ্চ আন্তঃকণা আকর্ষণ বল দ্বারা আকৃষ্ট হয়ে কণাসমূহ দৃঢ় সংবদ্ধ ও ঘন সন্নিবিষ্ট অবস্থায় থাকে। এই অবস্থায় পদার্থের কণাসমূহের মধ্যে আন্তঃকণা ফাঁকা স্থান নেই বললেই চলে। সর্বোচ্চ আন্তঃকণা আকর্ষণ বল দ্বারা দৃঢ়ভাবে আকৃষ্ট হয়ে থাকায় কঠিন পদার্থ নির্দিষ্ট পরিমাণ স্থান দখল করে থাকে। তাই এ অবস্থায় পদার্থের আয়তন নির্দিষ্ট থাকে। আবার কণাসমূহের মধ্যে আন্তঃকণা ফাঁকা স্থান না থাকায় কণাগুলো স্থান পরিবর্তন করতে পারে না। এজন্য পদার্থের আকৃতিও নির্দিষ্ট থাকে। কঠিন পদার্থের কণাগুলো স্থান পরিবর্তন করতে না পারলেও একই অবস্থানে থেকে কম্পিত হতে পারে। এদের কোনো ঘূর্ণন বা স্থানান্তর গতি নেই। আন্তঃকণা ফাঁকা স্থান নেই বলে



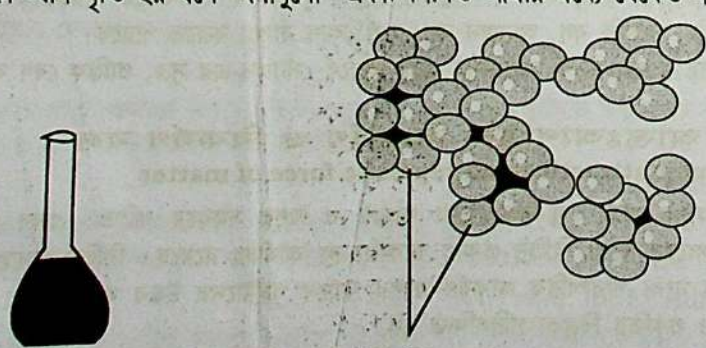
(ক) (খ)

চিত্র ৭.১

চাপ প্রয়োগে কঠিন পদার্থের আয়তন সংকুচিত হয় না। পদার্থের অন্তর্নিহিত এ বলকে আন্তঃকণা আকর্ষণ বল বলে [চিত্র ৭.১ (ক) ও (খ)]। এই বলের মাত্রা সাধারণত ক্ষুদ্রতম কণাগুলোর দূরত্ব এবং বিন্যাসের উপর নির্ভর করে। দূরত্ব বেশি হলে বলের মাত্রা কমে যায় এবং দূরত্ব কম হলে আন্তঃকণা আকর্ষণ বল বেশি হয়। তবে নির্দিষ্ট মাত্রার নিচে দূরত্ব কমে গেলে আন্তঃকণা বিকর্ষণ সৃষ্টি হয়। কঠিন পদার্থের ক্ষুদ্রতম কণাগুলো পরম শূন্য তাপমাত্রার উর্ধ্বে যেকোনো তাপমাত্রায় নড়াচড়া বা চলাচল করে এবং গতিশক্তি লাভ করে। তাপ প্রয়োগে গতিশক্তি বৃদ্ধি পায়। আন্তঃআণবিক আকর্ষণ বলের মান গতিশক্তির চেয়ে বেশি হলে পদার্থ কঠিন অবস্থায় থাকে। এই অবস্থায় ছোট ছোট কণাগুলো একে অপরকে ছেড়ে যেতে পারে না, শুধুমাত্র নিজেদের মধ্যে কম্পনের সৃষ্টি করে।

৭.১.২ তরল পদার্থের ক্ষেত্রে আন্তঃআণবিক বল
Interatomic force in liquids

তরল অবস্থায় পদার্থের গঠনকারী কণসমূহের মধ্যে আন্তঃকণা আকর্ষণ বল তুলনামূলকভাবে কম থাকে। এজন্য কণাসমূহ ঘন সন্নিবিষ্ট থাকে না। তবে পরস্পরের মোটামুটি কাছাকাছি অবস্থানে এগুলো ছোট ছোট গুচ্ছের আকারে একটি নির্দিষ্ট পরিসীমার মধ্যে থাকে। তাই তরল অবস্থায় পদার্থের আয়তন নির্দিষ্ট থাকে। কণাসমূহের মধ্যে সামান্য আন্তঃকণা ফাঁকা স্থান সৃষ্টি হয় বলে কণাগুলো একটি নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে থেকেও নড়াচড়া করতে পারে। এ



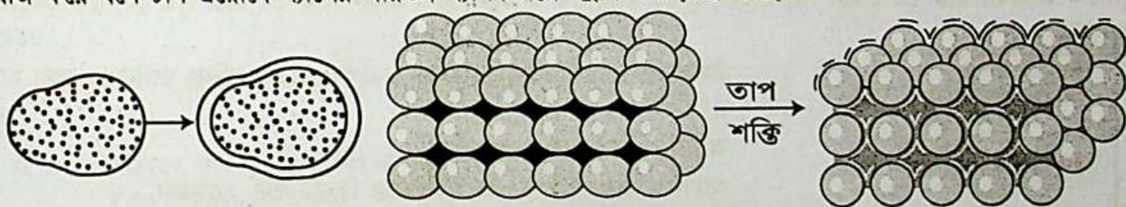
চিত্র ৭.২

কারণে তরল ভৌত অবস্থায় আয়তন নির্দিষ্ট থাকলেও আকৃতি নির্দিষ্ট থাকে না। যে পাত্রে রাখা হয় সে পাত্রের আকৃতি লাভ করে। তরল অবস্থায় পদার্থের কণাসমূহ কম্পিত, আবর্তিত এবং নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে স্থানান্তরিত হতে পারে।

আন্তঃকণা ফাঁকা স্থান খুব সামান্য বলে চাপ প্রয়োগে তরল পদার্থের উল্লেখযোগ্য সংকোচন ঘটে না [চিত্র ৭·২]। অপরপক্ষে তরল পদার্থের ক্ষুদ্রতম কণাগুলো পরম শূন্য তাপমাত্রার উর্ধ্বে নড়াচড়া ও চলাফেরার জন্য গতিশক্তি লাভ করে এবং কঠিন পদার্থের ন্যায় তাপমাত্রা বৃদ্ধিতে অধিক গতিশক্তি প্রাপ্ত হয়। কিন্তু আন্তঃকণা আকর্ষণ বল এবং গতিশক্তির মান কাছাকাছি হলে পদার্থ তরল অবস্থায় থাকে। এই অবস্থায় কণাগুলো একটি নির্দিষ্ট পরিধির মধ্যে চলাচল করতে পারলেও গ্যাসের মতো অসীম দূরত্বে সরে যেতে পারে না। আন্তঃকণার পারস্পরিক দূরত্ব বেশি হলে বলের মাত্রা কমে যায় এবং দূরত্ব কম হলে আন্তঃকণা আকর্ষণ বল বেশি হয়। তবে নির্দিষ্ট মাত্রার নিচে দূরত্ব কমে গেলে আন্তঃকণা বিকর্ষণ বলের সৃষ্টি হয়।

৭·১·৩ বায়বীয় পদার্থের ক্ষেত্রে আন্তঃআণবিক বল
Interatomic force in gases

গ্যাসীয় পদার্থের বেলায় আন্তঃআণবিক দূরত্ব সবচেয়ে বেশি থাকে এবং আন্তঃআণবিক আকর্ষণ বল সবচেয়ে কম থাকে। তাই গ্যাসীয় অবস্থায় অণুসমূহ সবচেয়ে বেশি বিশৃঙ্খল অবস্থায় থাকে। তখন অণুসমূহ অধিকতর কম্পন, আবর্তন ও স্থানান্তর গতিসহকারে আন্তঃআণবিক আকর্ষণকে উপেক্ষা করে মুক্তভাবে চলাচল করে। তখন অণুসমূহ পরস্পর থেকে বিচ্ছিন্ন হয়ে পড়ে। তাই গ্যাসের নির্দিষ্ট আকৃতি ও আকার নেই। যেহেতু অণুসমূহ আর পরস্পরের নিকটে থাকে না, সেহেতু গ্যাসীয় অবস্থায় পদার্থের আয়তন কঠিন বা তরল অবস্থা থেকে অনেক বেশি হয়। এই অবস্থায় পদার্থের অণুসমূহের মধ্যে সর্বাধিক কম্পন, আবর্তন ও স্থানান্তর গতি রয়েছে। সর্বোচ্চ আন্তঃআণবিক ফাঁকা স্থান বিরাজ করে বলে চাপ প্রয়োগে গ্যাসের আয়তন ব্যাপকভাবে হ্রাস পায় [চিত্র ৭·৩]।



চিত্র ৭·৩

অপরপক্ষে যদি গতিশক্তির মান আন্তঃআণবিক আকর্ষণ বল-এর চেয়ে অনেক বেশি হয় তবে পদার্থ গ্যাসীয় অবস্থা লাভ করে। এ অবস্থায় কণাগুলো খুব সহজে এক স্থান থেকে অন্য স্থানে যেতে পারে। গ্যাসের পরমাণুসমূহের মধ্যকার দূরত্ব হ্রাস পেলে এবং পজিটিভ চার্জযুক্ত নিউক্লিয়াসসমূহও পরস্পরকে বিকর্ষণ করলে তখনই বিকর্ষণ বল উদ্ভূত হয়। তখন সিস্টেমের বিভবশক্তি বৃদ্ধি পায়।

নিজে কর : আন্তঃআণবিক দূরত্বের পরিবর্তনে আন্তঃআণবিক বলের কীরূপ পরিবর্তন ঘটে—ব্যাখ্যা কর।

আন্তঃআণবিক বল আন্তঃআণবিক দূরত্বের ওপর নির্ভরশীল। দুটি অণু খুব কাছাকাছি হলে এদের মধ্যে বিকর্ষণ বল কাজ করে। অণুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব একটু বেশি হলে আকর্ষণ বল কাজ করে। আন্তঃআণবিক দূরত্বের একটি নির্দিষ্ট মান আছে যার জন্য আকর্ষণ ও বিকর্ষণ বলের মান সমান হয় অর্থাৎ ওই দূরত্বে অণুদ্বয়ের মধ্যে লব্ধিবল শূন্য হয়।

৭·২ পদার্থের বন্ধন
Bonding of matter

আমাদের চারপাশে আমরা যা কিছু দেখি না কেন সবই মৌলিক বা যৌগিক পদার্থ। সকল পদার্থে থাকে অসংখ্য অণু। আবার অণু গঠিত হয় এক বা একাধিক পরমাণু দিয়ে। এই আকর্ষণ শক্তি যা দ্বারা দুটি একই বা ভিন্ন মৌলের পরমাণু পরস্পর যুক্ত হয়ে অণু গঠন করে তাকে পারমাণবিক বন্ধন বলে। সকল পদার্থের অণু গঠিত হয় পারমাণবিক বন্ধনের মাধ্যমে। যেমন অক্সিজেনের দুটি পরমাণুর রাসায়নিক বন্ধন দিয়ে আবদ্ধ হয়ে অক্সিজেন মৌলের একটি মৌল গঠন করে। এই মৌলগুলি একত্রিত হয়ে পানি গঠিত হয়। কিন্তু প্রশ্ন হলো, কেন দুটি পরমাণুর মধ্যে বন্ধন গঠিত হয় ? কারণ মৌল যখন পারমাণবিক অবস্থায় থাকে তখন তা অস্থিতিশীল অবস্থায় থাকে। ফলে তার জন্য বিপুল স্থিতিশক্তি প্রয়োজন। কিন্তু বন্ধন দ্বারা গঠিত অণুতে পরমাণু স্থিতিশীল অবস্থায় থাকে। আর স্থিতিশীল অবস্থায় স্থিতিশক্তি থাকে খুবই কম। সুতরাং পরমাণুসমূহের মধ্যে তখনই বন্ধন গঠিত হয় যখন পরমাণুসমূহের সংযোগের ফলে সিস্টেমের স্থিতিশক্তি হ্রাস পায়। কোনো কোনো ক্রিস্টালের যোজনী ইলেকট্রনগুলো এক পরমাণু থেকে অন্য পরমাণুতে স্থানান্তরিত হয়ে বন্ধন (bond) গঠন করে। ক্রিস্টালের মধ্যকার ইলেকট্রনিক মিথস্ক্রিয়া বা বন্ধনগুলো নানা ধরনের হয়ে থাকে। পদার্থের গঠনের প্রকৃতি ও মিথস্ক্রিয়া অনুসারে পদার্থের রাসায়নিক বন্ধন প্রধানত পাঁচ প্রকার যথা—

(১) আয়নিক বন্ধন (Electrovalent bond or Ionic bond)

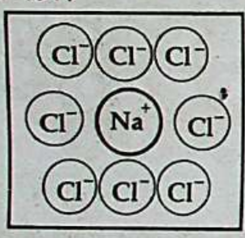
(২) সমযোজী বন্ধন (Covalent bond)

(৩) হাইড্রোজেন বন্ধন (Hydrogen bond)
(৪) ধাতব বন্ধন (Metallic bond)
(৫) ভ্যান ডার ওয়াল বলজনিত বন্ধন (Bonds due to Van der Waals force)

৭.২.১ আয়নিক বন্ধন
Ionic bond

একটি ধাতু এবং একটি অধাতু পরস্পরের সাথে মিলিত হওয়ার সময় সাধারণত ধাতব পরমাণু থেকে এক বা একাধিক ইলেকট্রন অধাতুর পরমাণুকে দান করে। ফলে ধাতব পরমাণুটি ধনাত্মক চার্জবিশিষ্ট আয়ন এবং অধাতব পরমাণুটি ঋণাত্মক চার্জবিশিষ্ট আয়নে পরিণত হয়। এই আয়নদ্বয় বিপরীতধর্মী চার্জবিশিষ্ট হওয়ায় এদের মধ্যে স্থির বৈদ্যুতিক আকর্ষণের সৃষ্টি হয়। এ আকর্ষণেই উভয় আয়ন আবদ্ধ হয়। অপরপক্ষে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক আয়নের সমন্বয়ে একটি আয়নিক ক্রিস্টাল তৈরি হয়। আয়নগুলোর সমাবেশ এমনভাবে ঘটে যেন বিপরীতধর্মী আয়নের মধ্যকার কুলম্বের বিকর্ষণ বল অপেক্ষা আকর্ষণ বল বেশি হয়। আয়নিক বন্ধন সার্বিকভাবে বিপরীতধর্মী আয়নের পারস্পরিক ক্রিয়ার ফসল। একটি আয়ন তার চারদিকে যতগুলো সম্ভব (maximum) বিপরীতধর্মী আয়ন সমাবেশ ঘটাতে চায়। উক্ত আয়নকে ঘিরে থাকা আয়নগুলির সমজাতীয় হওয়ায় তাদের পরস্পরের মধ্যে বিকর্ষণ বল কাজ করে এবং শেষ পর্যন্ত একটি সমঝোতায় পৌঁছে প্রকৃত কেলাস গঠন সম্পন্ন করে। এভাবে ক্রিস্টালে আয়নিক বন্ধন গঠিত হয়।

ধাতব ও অধাতব মৌলের রাসায়নিক বিক্রিয়াকালে ধাতুর পরমাণুর বহিস্তর থেকে অধাতু পরমাণুর বহিস্তরে এক বা একাধিক ইলেকট্রন স্থানান্তরিত হওয়ার মাধ্যমে সৃষ্ট ধনাত্মক আয়ন ও ঋণাত্মক আয়নের মধ্যে স্থির বৈদ্যুতিক আকর্ষণ দ্বারা যে বন্ধন গঠিত হয়, তাকে আয়নিক বন্ধন বলে। আয়নিক বন্ধন দ্বারা সৃষ্ট যৌগকে আয়নিক যৌগ বলে।



চিত্র ৭.৪ : আয়নিক বন্ধন।

উদাহরণ : সোডিয়াম ক্লোরাইড (NaCl) এর আয়নিক বন্ধন দেখানো হলো [চিত্র ৭.৪]।

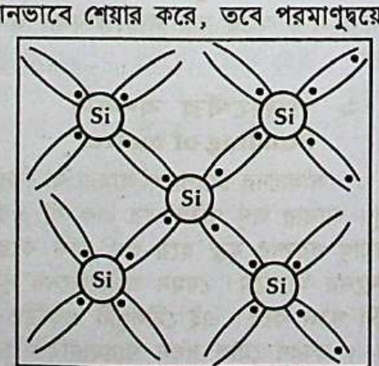
আয়নিক বন্ধন গঠনের শর্ত :

আয়নিক বন্ধন গঠনের জন্য নিম্নোক্ত তিনটি শর্ত প্রয়োজন :
(১) প্রথম মৌলের নিম্ন আয়নীকরণ শক্তি।
(২) দ্বিতীয় মৌলের উচ্চ ইলেকট্রন আসক্তি।
(৩) গঠিত যৌগের উচ্চ ল্যাটিস শক্তি।

৭.২.২ সমযোজী বন্ধন
Covalent bond

পদার্থের দুটি একই বা ভিন্ন মৌলের পরমাণুর মধ্যে রাসায়নিক সহযোগের সময় যদি ইলেকট্রন আদান-প্রদান সম্ভব না হয় তখন দুটি পরমাণু নিজের মধ্যে জোড়ায় জোড়ায় ইলেকট্রন শেয়ার দ্বারা বহিস্তরে স্থিতিশীল ইলেকট্রনীয় কাঠামো গঠন করে। সৃষ্ট এ বন্ধন সমযোজী বন্ধন নামে পরিচিত। সুতরাং অণু গঠনের সময় যদি পরমাণু নিজ নিজ বহিস্তরে নিষ্ক্রিয় গ্যাসের স্থিতিশীল ইলেকট্রন কাঠামো অর্জনের উদ্দেশ্যে সমান সংখ্যক অযুগল ইলেকট্রন সরবরাহ করে এক বা একাধিক ইলেকট্রন জোড় সৃষ্টি করে এবং উভয় পরমাণু তা সমানভাবে শেয়ার করে, তবে পরমাণুদ্বয়ের মধ্যে যে বন্ধন গঠিত হয় তাকে সমযোজী বন্ধন বলে। এই বন্ধন যোজনী বন্ধন (valence bond) নামে পরিচিত। ইলেকট্রন ভাগাভাগির ফলে দুটি পরমাণুর মধ্যবর্তী এলাকায় ইলেকট্রনের ঘনত্ব বেশি হয়। এ ধরনের বন্ধন সুস্পষ্টভাবে দিকবর্তী হয়। সমযোজী বন্ধন বেশি শক্তিশালী হয়ে থাকে।

উদাহরণ : হাইড্রোজেন, নাইট্রোজেন, সিলিকন। Si এর সমযোজী বন্ধন দেখানো হলো [চিত্র ৭.৫]।



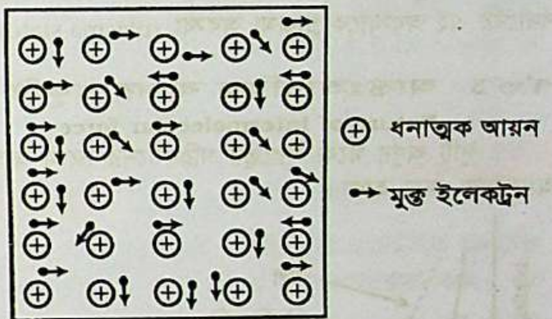
চিত্র ৭.৫ : সমযোজী বন্ধন।

সমযোজী বন্ধন গঠনের শর্ত :
(১) দুটি অধাতব পরমাণুর মধ্যে সমযোজী বন্ধন ঘটে।
(২) উভয় অধাতব পরমাণু সমসংখ্যক ইলেকট্রন যোগান দিয়ে এক বা একাধিক ইলেকট্রন যুগল সৃষ্টি করে তা উভয় পরমাণু সমভাবে শেয়ার করে থাকে।

৭.২.৩ ধাতব বন্ধন
Metallic bond

ধাতব অণুতে সাধারণত এ বন্ধন দেখা যায়। ধাতব অণু এমন গঠনকে প্রাধান্য দেয় যাতে একটি পরমাণুর চারপাশে অধিক সংখ্যক পরমাণু থাকে। ধাতব পদার্থের পরমাণুর শেষ শক্তিস্তরের ইলেকট্রনগুলো নিউক্লিয়াস থেকে দূরে অবস্থান করায় ইলেকট্রন-নিউক্লিয়াস আকর্ষণ বল কম থাকে; ফলে কেলাসের মধ্যে এই ইলেকট্রনগুলো কোনো

নির্দিষ্ট পরমাণুর সঙ্গে সংযুক্ত না থেকে মুক্তভাবে কেলাসের মধ্যে বিচরণ করে। ইলেকট্রন হারিয়ে ধাতব পরমাণুগুলো ধনাত্মক আয়নে পরিণত হয় এবং ত্রিমাত্রিক কেলাসে পরস্পর হতে নির্দিষ্ট দূরত্বে অবস্থান করে। ধনাত্মক আয়নগুলো কেলাসে মুক্ত ইলেকট্রন দ্বারা আচ্ছাদিত থাকে; ফলে আয়নের মধ্যে বিকর্ষণ বল দুর্বল থাকে। পক্ষান্তরে আয়নসমূহ প্রত্যেকে এদের মধ্যে অবস্থিত মুক্ত ইলেকট্রনকে আকর্ষণ করে। এর ফলে দুটি আয়নের মধ্যে এক ধরনের বন্ধন তৈরি হয়। এই বন্ধনকে ধাতব বন্ধন বলে। আয়নিক ও সমযোজী বন্ধনের তুলনায় ধাতব বন্ধন দুর্বল। চিত্র ৭.৬ এ ধাতব বন্ধন দেখানো হলো।



চিত্র ৭.৬ : ধাতব বন্ধন।

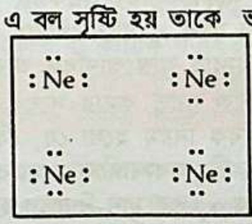
এজন্য ধাতুর গলন তাপমাত্রা কম। উচ্চ তাপ ও বিদ্যুৎ পরিবাহিতা, যান্ত্রিক দৃঢ়তা প্রভৃতি ধাতুর বৈশিষ্ট্য। বিদ্যুৎ-ক্ষেত্রের আওতায় যোজ্য ইলেকট্রনগুলো খুব সহজে চলাচল করতে পারার কারণেই ধাতুর বিদ্যুৎ পরিবাহিতা খুব বেশি। তাপ পরিবহনের জন্য যোজন ইলেকট্রনগুলোর অবাধ গতিই দায়ী। বাইরের শক্তি প্রয়োগ করে ধাতুকে বাঁকানোর সময় আয়নগুলো সহজে খাপ খাইয়ে নিতে পারে। ধাতব বন্ধনের বৈশিষ্ট্য নিম্নরূপ :

(১) বন্ধনের প্রকৃতি সমযোজী ধরনের কিন্তু অসম্পৃক্ত এবং অধিক সংখ্যক পরমাণুর সাথে আবদ্ধ থাকার সুযোগ রয়েছে।

(২) পাউলির (Pauli) বর্জন নীতি অনুসারে যতটি সুযোগ রয়েছে পরমাণুগুলোর মাঝে ইলেকট্রন ঘনত্ব তার চেয়ে কম।

৭.২.৪ ভ্যান ডার ওয়াল বন্ধন
Van der Waals bond

কাছাকাছি অবস্থিত পরমাণুসমূহের মধ্যে একটি সর্বজনীন দুর্বল আকর্ষণ বল ক্রিয়া করে। যে পারস্পরিক ক্রিয়ার ফলে এ বল সৃষ্টি হয় তাকে ভ্যান ডার ওয়াল পারস্পরিক ক্রিয়া বলে এবং এ বলকে **ভ্যান ডার ওয়াল বল** বলে।



চিত্র ৭.৭ : নিয়ন ক্রিস্টাল।

কোনো শক্তিশালী বন্ধনের শর্তগুলো যখন পূরণ না হয় তখন অণু গঠনে এ বল অত্যন্ত কার্যকরী ভূমিকা পালন করে। ভ্যান ডার ওয়াল পারস্পরিক ক্রিয়ার ফলে সৃষ্ট এ বন্ধনকে ভ্যান ডার ওয়াল বন্ধন বলা হয়। সাধারণত এ ধরনের বন্ধনে বন্ধন শক্তি খুব দুর্বল। নিষ্ক্রিয় গ্যাসের অণু ভ্যান ডার ওয়াল বন্ধনের ফল। [চিত্র ৭.৭]।

৭.৩ আন্তঃআণবিক বল ও পদার্থের স্থিতিস্থাপকতা
Intermolecular force and elasticity of matter

স্থিতিস্থাপকতা আলোচনা করার আগে পদার্থের গঠন এবং কেন এই ধর্মের সৃষ্টি হয় তা জানা আবশ্যক। সাধারণত সমযোজী যৌগের অণুসমূহের মধ্যকার আকর্ষণ বল দুর্বল এবং তাপীয় কম্পন অতি সহজেই এ আকর্ষণ বলকে অতিক্রম করতে পারে। সমযোজী অণুসমূহের মধ্যবর্তী দুর্বল আকর্ষণ শক্তিকে আন্তঃআণবিক বল বা শক্তি বলা হয়। অন্য কথায় সমযোজী যৌগসমূহের একটি অণু অন্যান্য অণু কর্তৃক যে দুর্বল বল দ্বারা আকৃষ্ট হয় তাকে **আন্তঃআণবিক আকর্ষণ বল** বলা হয়। পদার্থ গঠনের সময় অণুগুলো পরস্পরের পাশাপাশি থাকে এবং তাদের মধ্যে অতি ক্ষুদ্র পরিমাণ ফাঁকা স্থান থাকে। আন্তঃআণবিক দূরত্বের পরিমাণ প্রায় 10^{-9} m থেকে 10^{-19} m। অণুগুলো এ পরিমাণ দূরত্বে থেকে পরস্পরকে একটি বলে আকর্ষণ করে। এটাই আন্তঃআণবিক বল(Intermolecular force)। এই আন্তঃআণবিক বল যা কঠিন পদার্থের অণুগুলোকে পরস্পরের সঙ্গে আবদ্ধ রাখে তা মূলত তাড়িত (electrical) বল। অণুগুলো যেসব আহিত (charged) মৌলিক কণার সমন্বয়ে সৃষ্ট তাদের মিথস্ক্রিয়ার ফলে এই তাড়িত বলের উদ্ভব হয়। আমরা জানি যে, সকল পদার্থের অণুগুলোর মধ্যে আন্তঃআণবিক বল ক্রিয়া করে। কঠিন পদার্থের অণুগুলোর মধ্যে ক্রিয়াশীল এই বলকে সংসক্তি বল বলে। এটা ঠিক যে, স্বাভাবিক অবস্থায় কেলাসের অণুগুলো নিম্ন বিভবশক্তি অবস্থানে অবস্থান করে। এই অবস্থা এদের সাম্যাবস্থা। এরকম অবস্থানে কোনো অণুর ওপর ক্রিয়াশীল নিট আন্তঃআণবিক বল শূন্য।

বল প্রয়োগ করে কোনো একটি পদার্থকে প্রসারিত করতে চাইলে, আন্তঃআণবিক স্থানের পরিসর বেড়ে যায় এবং নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র অনুসারে কিংবা জড়তার দরুন অণুগুলো তাদের পূর্বাবস্থায় ফিরে আসার চেষ্টা করে। অনুরূপভাবে বল প্রয়োগে কোনো বস্তুকে সংকুচিত করতে চাইলে আন্তঃআণবিক স্থানের পরিসর কমে যায় এবং পদার্থ

সংকুচিত হয়। জড়তা কিংবা নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র অনুসারে অণুগুলো তাদের আদি স্থানে ফিরে যাবার চেষ্টা করে। এর ফলেই পদার্থে স্থিতিস্থাপকতা ধর্মের সৃষ্টি হয়।

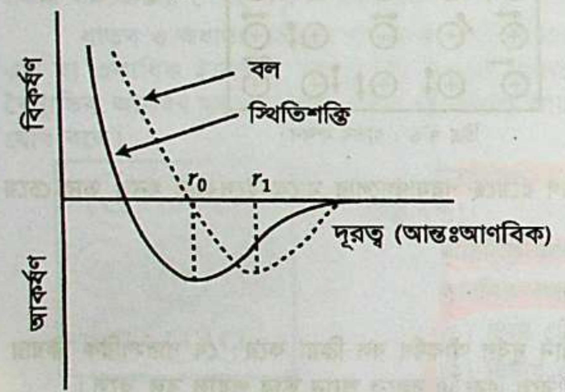
আন্তঃআণবিক স্থানের ওপর ভিত্তি করে পদার্থকে দুই ভাগে ভাগ করা হয়েছে, যথা— (১) কঠিন (solid) এবং (২) প্রবাহী (fluid)। প্রবাহীকে আবার দুই ভাগে ভাগ করা হয়েছে, যথা— অসংকোচনীয় প্রবাহী, যেমন তরল (liquid) এবং সংকোচনীয় প্রবাহী, যেমন গ্যাস (Gas)।

উপরন্তু অত্যধিক তাপমাত্রায় বায়বীয় পদার্থ আয়নিত হয়। এক্ষেত্রে সমান সংখ্যক ধন ও ঋণ আয়ন সৃষ্টি হয়। পদার্থের এই অবস্থাকে প্লাজমা অবস্থা (plasma state) বলা হয়।

৭.৩.১ আন্তঃআণবিক বলের প্রকৃতি

Nature of intermolecular force

দুটি অণুর মধ্যে দূরত্বের পরিবর্তনের সঙ্গে আন্তঃআণবিক বল এবং স্থিতিশক্তির পরিবর্তন কীরূপ হয় তা নিম্নে আলোচনা করা হলো।



চিত্র ৭.৮

ধরা যাক, দুটি অণুর মধ্যে আন্তঃআণবিক বল F এবং আন্তঃআণবিক দূরত্ব r। F এবং r-এর মধ্যে গভীর সম্পর্ক রয়েছে। ৭.৮নং চিত্রে আন্তঃআণবিক বল এবং দূরত্বের ও স্থিতিশক্তি বনাম দূরত্বের লেখচিত্র দেখানো হয়েছে। যখন অণুগুলোর আন্তঃআণবিক দূরত্ব অনেক বেশি হয় (যেমন গ্যাস অণুগুলোর ক্ষেত্রে) তখন এদের মধ্যে খুব সামান্য পরিমাণ আকর্ষণ বল ক্রিয়াশীল থাকে। অণুগুলো যত কাছাকাছি আসে অর্থাৎ এদের মাঝে দূরত্ব কমতে থাকে আকর্ষণ বলের মানও বাড়তে বাড়তে সর্বোচ্চ মানে পৌঁছায়। এর পর দূরত্ব আরও কমলে আকর্ষণ বলের মান কমতে থাকে, অর্থাৎ তখন আন্তঃআণবিক বিকর্ষণ বলও ক্রিয়াশীল হয়। r-এর মান কমে যখন r_0 মানে পৌঁছায় তখন বলের মান শূন্য হয়। এই অবস্থায় আন্তঃআণবিক আকর্ষণ এবং বিকর্ষণ বল সমান হয়। স্থিতিশক্তির লেখচিত্র লক্ষ করলে দেখা যাবে আন্তঃআণবিক দূরত্ব কমার সঙ্গে সঙ্গে স্থিতিশক্তিও কমতে থাকে এবং $r = r_0$ হয় তখন স্থিতিশক্তি সর্বনিম্ন হয়। প্রকৃতির স্বাভাবিক নিয়ম হলো যে, কোনো ব্যবস্থা (system) তখনই সাম্য বা সুস্থির হবে যখন এর স্থিতিশক্তি সর্বনিম্ন হবে। সুতরাং $r = r_0$ অবস্থানকে সাম্যাবস্থান বলে এবং r_0 দূরত্বকে সাম্যাবস্থা বা সুস্থিতি দূরত্ব বলা হয়। বিভিন্ন বস্তুর অণুগুলোর মাঝে r_0-এর মান ভিন্নতর হয়।

৭.৩.২ আন্তঃআণবিক বলের আলোকে স্থিতিস্থাপকতার ব্যাখ্যা

Explanation of elasticity in the light of intermolecular force

কোনো কেলাসিত জড় পদার্থের ওপর বল প্রয়োগ করা হলে সে বল বস্তুর অণুগুলোকে সাম্য দূরত্ব r_0 থেকে খানিকটা সরিয়ে দেয়। কিন্তু অণুগুলো সর্বদাই সাম্য বা স্বাভাবিক দূরত্বে ফিরে যেতে চায়। ফলে সরণের বিপরীত দিকে একটি প্রত্যায়ন বল (restoring force) সৃষ্টি হয়। প্রযুক্ত বল বস্তুটিকে টেনে প্রসারিত করতে চাইলে অণুসমূহের পারস্পরিক দূরত্ব বেড়ে যায় এবং প্রত্যায়ন বল হয় আকর্ষিক (attractive); অপরপক্ষে প্রযুক্ত বল বস্তুটিকে সঙ্কুচিত করতে চাইলে প্রত্যায়ন বল হবে বিকর্ষিক (repulsive)। বস্তুর সাম্যাবস্থানের জন্য প্রযুক্ত বল এবং প্রত্যায়ন বল পরস্পর বিরোধী এবং পরিমাণে সমান হতে হবে। এই প্রত্যায়ন বলকে স্থিতিস্থাপক বল (elastic force) বলা হয়। সমপরিমাণ সরণের জন্য বিভিন্ন বস্তুর স্থিতিস্থাপক বল সমান হয় না। সে কারণে বিভিন্ন বস্তুর স্থিতিস্থাপকতাও ভিন্ন ভিন্ন হয়।

বস্তুকে সঙ্কোচন বা প্রসারণের জন্য প্রযুক্ত বলের মান যদি খুব বেশি না হয় তবে এই বলের জন্য সরণ রৈখিক (linear) হয়। ৭.৮নং চিত্রে r_0 অবস্থানের সামান্য ওপরে বা নিচের কিছু অংশকে আমরা রৈখিক ধরতে পারি। এই অবস্থায় স্থিতিস্থাপক বল সরণের সমানুপাতিক। প্রযুক্ত বল তুলে নিলে বস্তুটি স্থিতিস্থাপক বলের কারণে সাম্যাবস্থানে ফিরে যাবে।

চিত্র ৭.৮ হতে দেখা যায় যে আন্তঃআণবিক দূরত্ব r_1 এর বেশি হলে বলের মান কমতে থাকে অর্থাৎ আকর্ষণ বল লোপ পেতে থাকে। এই অবস্থায় প্রযুক্ত বল তুলে নিলে বস্তুটি আর পূর্বের সাম্যাবস্থানে ফিরে যায় না। বস্তুর মাঝে তখন স্থায়ী বিকৃতি ঘটেছে বলা হয়। অর্থাৎ বস্তুটির স্থিতিস্থাপকতা ধর্ম লোপ পেয়েছে। সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে প্রযুক্ত

বলের একটা সর্বোচ্চ সীমা আছে। সে সীমা পর্যন্ত বল প্রয়োগ করলে বস্তুটি স্থিতিস্থাপক থাকে অর্থাৎ প্রযুক্ত বল সরিয়ে নিলে বস্তুটি পূর্বের অবস্থায় ফিরে যায়; কিন্তু সীমা অতিক্রম করলে বস্তুটি আর স্থিতিস্থাপক থাকে না। এই সীমাকেই বলা হয় **স্থিতিস্থাপক সীমা** (elastic limit)।

৭·৪ স্থিতিস্থাপকতা সম্পর্কিত রাশিমালা
Terms relating elasticity

(ক) স্থিতিস্থাপকতা (Elasticity) : আমরা জানি কোনো একটি বস্তুর ওপর বল প্রয়োগ করলে তার কায়িক পরিবর্তন ঘটে অর্থাৎ বস্তু বিকৃত হয় এবং প্রযুক্ত বল অপসারণ করলে বস্তু পূর্বের অবস্থায় ফিরে আসে। এক খণ্ড রাবার বা স্প্রিংকে দুই পাশ হতে টানলে তার দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পায় এবং টান ছেড়ে দিলে তা পূর্বের অবস্থায় চলে যায়। বল প্রযুক্ত হওয়ার ফলে নিউটনের তৃতীয় গতি সূত্র অনুসারে বস্তুর মধ্যে একটি প্রতিক্রিয়া বলের সৃষ্টি হয়। প্রযুক্ত বল অপসারিত হলে এই প্রতিক্রিয়া বল বিকৃত বস্তুকে তার পূর্বের অবস্থায় ফিরে আসতে সাহায্য করে। আর এই বিকৃতির মান বলের পরিমাণ, বলের প্রয়োগ বিন্দু এবং বস্তুর ধর্মের ওপর নির্ভর করে। বস্তুর এই ধর্মকে স্থিতিস্থাপকতা বলে।

সংজ্ঞা : বস্তুর ওপর প্রযুক্ত বলের ক্রিয়ায় তার আকার বা আয়তন বা উভয়েরই পরিবর্তনের প্রচেষ্টাকে পদার্থের যে ধর্ম বাধা দেয় এবং প্রযুক্ত বল অপসারিত হলে পূর্বের আকার বা আয়তন ফিরে পায় তাকে স্থিতিস্থাপকতা বলে।

(খ) নমনীয় বস্তু (Plastic body) : আমরা জানি, বল প্রয়োগে বস্তুর বিকার (deformation) ঘটে, অর্থাৎ বস্তু বিকৃত হয়।

বিকৃতিকারী বল অপসারণের পর যদি বস্তুর অবস্থার পুনঃ প্রাপ্তি না ঘটে তবে তাকে নমনীয় বস্তু (Plastic body) **বলে এবং বস্তুর এই ধর্মকে নমনীয়তা বলে। এই বস্তুকে অস্থিতিস্থাপক বস্তুও বলা হয়।**

পূর্ণ স্থিতিস্থাপক বস্তু (Perfectly elastic body) : **কোনো বস্তুর ওপর বল প্রয়োগ করার পর ওই বল অপসারণ করা হলে বস্তুটি যদি পুরাপুরি পূর্বের অবস্থা ফিরে পায় তবে তাকে পূর্ণস্থিতিস্থাপক বলে।**

(গ) পূর্ণ দৃঢ় বস্তু (Perfectly rigid body) : **কোনো বস্তুর ওপর যে কোনো পরিমাণ বল প্রয়োগ করে যদি তার বিকৃতি বা কায়িক পরিবর্তন ঘটানো না যায়, তবে ওই বস্তুকে পূর্ণ দৃঢ় বস্তু বলে।** কিন্তু প্রকৃতিতে কোনো বস্তুই পূর্ণ দৃঢ় নয়। কারণ বল প্রযুক্ত হলে তার কিছু না কিছু বিকৃতি ঘটবেই। তবে কোনো কোনো ব্যবহারিক কাজের জন্য কাচ, ইস্পাত প্রভৃতি বস্তুকে সাধারণত পূর্ণ দৃঢ় বস্তু হিসেবে গ্রহণ করা হয়।

(ঘ) স্থিতিস্থাপক সীমা (Elastic limit) : আমরা জানি বল প্রয়োগে প্রত্যেক বস্তুরই অল্পবিস্তর বিকৃতি ঘটে। বল অপসারণ করলে স্থিতিস্থাপকতার দরুন বস্তু পূর্বের অবস্থায় ফিরে আসে, প্রযুক্ত বলের পরিমাণ বেশি হলে বিকৃতিও বেশি হয়। তবে প্রত্যেক বস্তুই বলের একটি নির্দিষ্ট সীমা পর্যন্ত পূর্ণ স্থিতিস্থাপক থাকে। অতএব, **প্রযুক্ত বাহ্যিক বলের যে সর্বোচ্চ বা উর্ধ্বসীমা পর্যন্ত কোনো বস্তু পূর্ণ স্থিতিস্থাপক থাকে তাকে ওই বস্তুর স্থিতিস্থাপক সীমা বলে।** বিভিন্ন বস্তুর স্থিতিস্থাপক সীমা বিভিন্ন। ইস্পাত ও হীরার স্থিতিস্থাপক সীমা খুব বেশি আবার দস্তার স্থিতিস্থাপক সীমা খুব কম।

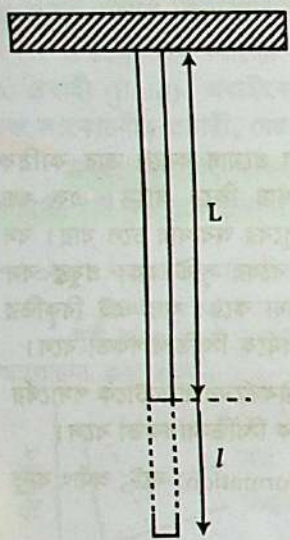
(ঙ) অসহ ভার এবং অসহ পীড়ন (Breaking weight and breaking stress) : স্থিতিস্থাপক সীমা পর্যন্ত কোনো একটি বস্তু পূর্ণ স্থিতিস্থাপক থাকে। প্রযুক্ত বল ওই সীমা অতিক্রম করলে বস্তু পূর্ণ স্থিতিস্থাপক থাকবে না। বল অপসারিত হলে কিছু বিকৃতি থেকে যাবে। যদি প্রযুক্ত বলের মান ক্রমশ বৃদ্ধি করা যায় তবে বস্তুটির এমন এক অবস্থা আসবে যখন তার সহ্য করতে না পেরে ভেঙ্গে বা ছিঁড়ে যাবে। **অতএব ন্যূনতম যে নির্দিষ্ট ভারের ক্রিয়ায় কোনো বস্তু ভেঙ্গে বা ছিঁড়ে যায় তাকে অসহ ভার বা অসহ ওজন বলে।** একে **ভঙ্গক-ভারও** বলা হয়।

আর কোনো একটি বস্তুর একক ক্ষেত্রফলের উপর প্রযুক্ত অসহ ভারকে অসহ পীড়ন বলে।

$$\text{অসহ পীড়ন} = \frac{\text{অসহ ভার}}{\text{ক্ষেত্রফল}}$$

(চ) স্থিতিস্থাপক ক্লান্তি (Elastic fatigue) : পরীক্ষার সাহায্যে দেখা গেছে যে, কোনো বস্তু বা তারের ওপর ক্রমাগত পীড়নের হ্রাস-বৃদ্ধি করলে স্থিতিস্থাপকতা ধর্ম হ্রাস পায়। এর ফলে বল অপসারণের সাথে সাথে বস্তু আগের অবস্থা ফিরে পায় না, কিছুটা দেরি হয়। বস্তুর এই অবস্থাকে **স্থিতিস্থাপক ক্লান্তি** বলে। বিজ্ঞানী কেলভিন একে স্থিতিস্থাপক ক্লান্তি আখ্যা দেন।

(ছ) বিকৃতি (Strain) : আমরা জানি, কোনো একটি বস্তুর ওপর বল প্রয়োগ করলে বস্তুর দৈহিক বা কায়িক পরিবর্তন ঘটে। এই পরিবর্তনকে বিজ্ঞানের ভাষায় বিকৃতি বলে। এই বিকৃতি দৈর্ঘ্যে হতে পারে, আকারে হতে পারে বা আয়তনেও হতে পারে। কোনো একটি বস্তুর একক মাত্রায় যে পরিবর্তন ঘটে তা দ্বারা বিকৃতি পরিমাপ করা যায়।



চিত্র ৭·৯

মনে করি, কোনো একটি বস্তুর আদি মাত্রা $= x$

বল প্রযুক্ত হবার পর মাত্রা $= y$

$\therefore$ মাত্রার পরিবর্তন $= x \sim y$

$\therefore$ একক মাত্রায় পরিবর্তন অর্থাৎ বিকৃতি $= \frac{x \sim y}{x}$

বিকৃতির প্রকারভেদ : বিকৃতি মূলত তিন প্রকার, যথা—

(১) দৈর্ঘ্য বিকৃতি বা অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি (Longitudinal strain),

(২) কৃন্তন বিকৃতি বা আকার বিকৃতি বা মোচড় বিকৃতি (Shearing strain) এবং

(৩) আয়তন বিকৃতি (Volume strain)

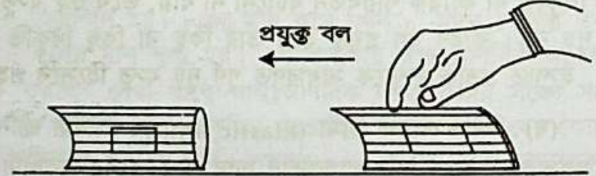
১. দৈর্ঘ্য বিকৃতি : বল প্রয়োগের ফলে যদি বস্তুর দৈর্ঘ্যের পরিবর্তন ঘটে, তবে তাকে দৈর্ঘ্য বিকৃতি বলে। একক দৈর্ঘ্যের দৈর্ঘ্য পরিবর্তন দ্বারা বস্তুর দৈর্ঘ্য বিকৃতি পরিমাপ করা যায়।

মনে করি কোনো একটি বস্তুর আদি দৈর্ঘ্য $= L$; বল প্রয়োগে এর দৈর্ঘ্যের পরিবর্তন $= l$ [চিত্র ৭·৯]

$\therefore$ দৈর্ঘ্য বিকৃতি $= l/L$ ... ... (7.1)

২. কৃন্তন বা মোচড় বিকৃতি (Shearing strain) : যদি প্রযুক্ত বাহ্যিক বলের ক্রিয়ায় বস্তুর আয়তন অপরিবর্তিত থেকে কেবলমাত্র এর আকৃতির পরিবর্তন হয় বা বস্তুটি মোচড় খায় তবে ওই ধরনের বিকৃতিকে কৃন্তন বা মোচড় বিকৃতি বলা হয়। ফলে বস্তুর অভ্যন্তরে যে পীড়ন সৃষ্টি হয় তাকে কৃন্তন পীড়ন (shearing stress) বলে। এ ধরনের বিকৃতিকে ব্যবর্তন বিকৃতিও বলে।

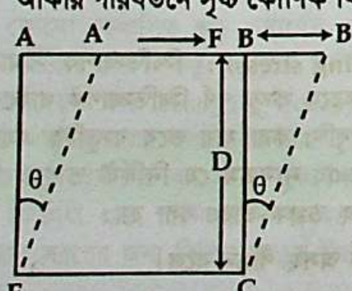
উদাহরণ : একটি মোটা বইকে টেবিলের ওপরে চেপে ধরে উপরের মলাটের স্পর্শক বরাবর হাত দিয়ে অনুভূমিকভাবে ঠেললে দেখা যাবে যে বইটির আকৃতি পরিবর্তিত হয়েছে [চিত্র ৭·১০]। প্রযুক্ত বলের ক্রিয়ায় বইটির প্রত্যেক পাতা ঠিক নিচের পাতার সাপেক্ষে অল্প পরিমাণে সরে যায়।



চিত্র ৭·১০

এটাই কৃন্তন বিকৃতি। চিত্রে বইটির পার্শ্বতলে একটি আয়তক্ষেত্র আঁকলে এই বিকৃতির ফলে তা একটি সামান্তরিকে পরিণত হবে [চিত্রের ভিতরের অংশে দেখানো হয়েছে]।

আকার পরিবর্তনে সৃষ্ট কৌণিক বিকৃতি দ্বারা কৃন্তন বা মোচড় বিকৃতি পরিমাপ করা যায়।



চিত্র ৭·১১

ব্যাখ্যা : মনে করি ABCE একটি বর্গক্ষেত্র [চিত্র ৭·১১]। এর CE বাহু স্থির রেখে AB বাহুর ওপর F পরিমাণ স্পর্শিনী বল প্রয়োগ করায় A বিন্দু A′ এবং B বিন্দু B′-এ স্থানান্তরিত হলো এবং বস্তু A′B′CE আকার ধারণ করল। কিন্তু A′B′CE একটি রম্বস। তা হলে দেখা যায় যে, বল প্রযুক্ত হওয়ায় বস্তুর আকারের পরিবর্তন ঘটেছে। এর নাম কৃন্তন বিকৃতি।

এই কৃন্তন বিকৃতি বস্তুর কৌণিক বিচ্যুতি দ্বারা পরিমাপ করা হয়। মনে করি কৌণিক বিচ্যুতি $= \theta$ এবং θ খুবই ছোট।

$\therefore$ কৃন্তন বিকৃতি $= \theta = \frac{d}{D}$

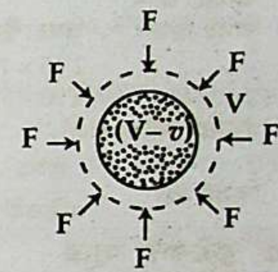
এখানে, $AA' = BB' = d$ এবং $BC = AE = D$ $\left[\because \theta = \tan\theta = \frac{d}{D}\right]$

কাজেই, কৃন্তন বিকৃতি $= \frac{\text{আপেক্ষিক সরণ}}{\text{ব্যবধান দূরত্ব}}$ ... ... (7.2)

৩. আয়তন বিকৃতি : বল প্রয়োগের ফলে যদি বস্তুর আয়তনের পরিবর্তন ঘটে তবে তাকে আয়তন বিকৃতি বলে এবং একক আয়তনের আয়তন পরিবর্তন দ্বারা আয়তন বিকৃতি পরিমাপ করা হয়।

মনে করি কোনো একটি বস্তুর আদি আয়তন = V [চিত্র ৭·১২] এবং বল প্রয়োগের ফলে আয়তনের পরিবর্তন $= v$

$$\therefore \text{ আয়তন বিকৃতি} = \frac{\text{আয়তনের পরিবর্তন}}{\text{আদি আয়তন}} = \frac{v}{V} \quad \ldots \quad \ldots \quad (7.3)$$



চিত্র ৭·১২

বিকৃতির একক এবং মাত্রা সমীকরণ (Unit and dimension of strain) : বিকৃতি একই জাতীয় দুটি রাশির অনুপাত। সুতরাং এর একক এবং মাত্রা সমীকরণ নেই।

(জ) পীড়ন (Stress) : বাহ্যিক বল প্রয়োগের ফলে কোনো বস্তুর বিকৃতি ঘটালে স্থিতিস্থাপকতার জন্য বস্তুর ভেতর থেকে এই বলের বাধাদানকারী একটি বলের উদ্ভব হয়। বস্তুর একক ক্ষেত্রফলের ওপর লম্বভাবে উদ্ভূত এই বিকৃতি প্রতিরোধকারী বলকে পীড়ন বলে।

মনে করি কোনো একটি বস্তুর ক্ষেত্রফল = A এবং প্রযুক্ত বল = F

$$\therefore \text{ পীড়ন} = \frac{\text{বল}}{\text{ক্ষেত্রফল}} = \frac{F}{A} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (7.4)$$

পীড়নের প্রকারভেদ (Kinds of stress) : পীড়ন তিন প্রকার, যথা—

(১) দৈর্ঘ্য পীড়ন (Longitudinal stress);

(২) আকার বা কৃন্তন বা মোচড় পীড়ন (Shearing stress) এবং

(৩) আয়তন পীড়ন (Volume stress)।

১. দৈর্ঘ্য পীড়ন : দৈর্ঘ্য বিকৃতি ঘটাবার জন্য প্রতি একক ক্ষেত্রফলের ওপর দৈর্ঘ্য বরাবর প্রযুক্ত বলকে দৈর্ঘ্য পীড়ন বলে। মনে করি কোনো একটি তারের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল A। যদি তার দৈর্ঘ্য বরাবর F পরিমাণ বল প্রয়োগ করা হয়, তবে দৈর্ঘ্য পীড়ন $= \frac{\text{বল}}{\text{ক্ষেত্রফল}} = \frac{F}{A}$

২. আকার বা কৃন্তন বা মোচড় পীড়ন : আকার বিকৃতি ঘটাবার জন্য যে পীড়ন প্রয়োগ করতে হয় তাকে আকার বা কৃন্তন বা মোচড় পীড়ন বলে। যদি কোনো একটি বস্তুর A ক্ষেত্রফলের ওপর F পরিমাণ স্পর্শক বল প্রয়োগ করে আকার বিকৃতি ঘটানো হয় তবে, কৃন্তন পীড়ন $= \frac{\text{বল}}{\text{ক্ষেত্রফল}} = F/A$

৩. আয়তন পীড়ন : আয়তন বিকৃতি ঘটাবার জন্য যে পীড়ন প্রয়োগ করতে হয় তাকে আয়তন পীড়ন বলে। মনে করি কোনো একটি বস্তুর চারদিক হতে F পরিমাণ বল অভিলম্বভাবে প্রয়োগ করে আয়তন বিকৃতি ঘটানো হয়েছে। যদি তার তলের ক্ষেত্রফল A হয়, তবে আয়তন পীড়ন $= \frac{\text{বল}}{\text{ক্ষেত্রফল}} = F/A$

পীড়নের একক (Unit of stress) : এম. কে. এস. পদ্ধতিতে ও এস. আই. পদ্ধতিতে পীড়নের পরম বা নিরপেক্ষ একক নিউটন/বর্গমিটার সংক্ষেপে Nm^{-2}।

পীড়নের মাত্রা সমীকরণ (Dimension of stress)

$$\text{পীড়ন} = \frac{\text{বল}}{\text{ক্ষেত্রফল}} = \frac{\text{ভর} \times \text{ত্বরণ}}{(\text{দৈর্ঘ্য})^2}$$

$$= \left[\frac{MLT^{-2}}{L^2}\right] = [ML^{-1}T^{-2}]$$

গাণিতিক উদাহরণ ৭.১

১। একটি তারের দৈর্ঘ্য 3m, প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল 2 mm^2 এবং অসহ পীড়ন 2.45×10^8 Nm^{-2}। তারটির অসহ ওজন ও অসহ ভর নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

অসহ ওজন = অসহ পীড়ন × প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল

$= 2.45 \times 10^8 \times 2 \times 10^{-6}$

$= 4.90 \times 10^2$ N

আমরা আরো জানি,

অসহ ভর $= \dfrac{\text{অসহ ওজন}}{\text{অভিকর্ষীয় ত্বরণ}} = \dfrac{4.90 \times 10^2}{9.8} = 50$ kg

এখানে,

দৈর্ঘ্য, $L = 3$ m

প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল, $A = 2 mm^2 = 2 \times 10^{-6} m^2$

অসহ পীড়ন $= 2.45 \times 10^8$ Nm^{-2}

অসহ ওজন = ?

অসহ ভর = ?

৭.৫ হুকের সূত্র
Hooke's Law

বিখ্যাত বিজ্ঞানী রবার্ট হুক পীড়ন ও বিকৃতির মধ্যে একটি নিবিড় সম্পর্ক লক্ষ করেন। এই সম্পর্ককে তিনি 1678 খ্রিস্টাব্দে একটি সূত্রের আকারে প্রকাশ করেন। এর নাম হুকের সূত্র। সূত্রটি নিম্নে বিবৃত হলো :

"স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে বস্তুর ওপর প্রযুক্ত পীড়ন তার বিকৃতির সমানুপাতিক।" গাণিতিকভাবে লেখা যায়, পীড়ন ∝ বিকৃতি।

বা, পীড়ন = ধ্রুবক × বিকৃতি

বা, $\dfrac{\text{পীড়ন}}{\text{বিকৃতি}}$ = **ধ্রুবক** (constant)

এই ধ্রুবককে বস্তুর উপাদানের **স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক** বা **স্থিতিস্থাপক মানাঙ্ক** (Modulus of elasticity) বলে। একে **স্থিতিস্থাপক ধ্রুবকও** (Elastic constant) বলা হয়। স্পষ্টত একক বিকৃতির জন্য উদ্ভূত পীড়নকে স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক বলে। স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্কের মান পদার্থের প্রকৃতির ওপর এবং তাপমাত্রার ওপর নির্ভর করে। তাপমাত্রা বাড়লে এর মান হ্রাস পায়।

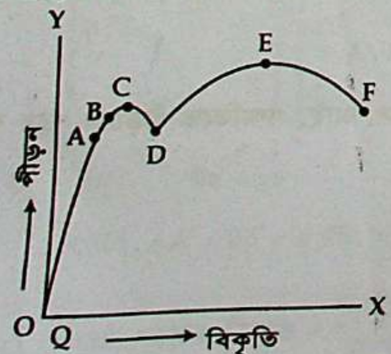
ব্যাখ্যা : কোনো বস্তুর ওপর যখন বল প্রয়োগ করা হয় তখন তার বিকৃতি ঘটে। বল স্থিতিস্থাপক সীমা অতিক্রম না করলে হুকের সূত্রানুসারে কোনো বস্তুর বিকৃতি যত বেশি হবে, পীড়নও তত বেশি হবে। অর্থাৎ বিকৃতি প্রতিরোধকারী বলের মানও তত বেশি হবে। পীড়নের সংজ্ঞা থেকে আমরা জানি একক ক্ষেত্রফলের উপর প্রযুক্ত বলই হলো পীড়ন। তাই, একক ক্ষেত্রফলের ওপর প্রযুক্ত বল যত বেশি হবে বস্তুটিও তত বেশি বিকৃত হবে। অর্থাৎ তার দৈর্ঘ্য, আয়তন বা আকার তত বেশি পরিবর্তিত হবে। **একক ক্ষেত্রফলের উপর যতগুণ বল প্রযুক্ত হবে বিকৃতিও ততগুণ হবে।**

৭.৬ পীড়ন-বিকৃতির সম্পর্ক
Stress-strain relation

কোনো একটি বস্তুর একক ক্ষেত্রফলের উপর ক্রিয়ামূলক বা প্রতিক্রিয়ামূলক বলের মানকে পীড়ন বলে। অর্থাৎ বস্তুর একক ক্ষেত্রফলের ওপর প্রযুক্ত বল দ্বারা পীড়ন পরিমাপ করা হয়। অপরদিকে কোনো একটি বস্তুর একক মাত্রার যে পরিবর্তন ঘটে তা দ্বারা বিকৃতি পরিমাপ করা যায়। এই বিকৃতি দৈর্ঘ্য, আকার, আয়তন যে কোনোটিরই হতে পারে। পীড়ন বিকৃতির মধ্যে সম্পর্ক লেখচিত্র ও গাণিতিক পদ্ধতিতে নির্ণয় করা যায়।

৭.৬.১ লেখচিত্রের সাহায্যে পীড়ন-বিকৃতির সম্পর্ক
Graphical representation for stress-strain relation

চিত্র ৭.১৩-এ একটি নমনীয় (ductile) ধাতব তারের পীড়ন-বিকৃতি লেখচিত্র দেখানো হয়েছে। এই লেখচিত্রটি নিম্নোক্ত কয়েকটি অংশে ভাগ করা যায় :



চিত্র ৭.১৩

(ক) OA সরলরেখা : OA অংশে তারটির ওপর প্রযুক্ত পীড়ন এর বিকৃতির সমানুপাতিক। A বিন্দু পর্যন্ত তারটি পূর্ণ স্থিতিস্থাপক বস্তুর মতো আচরণ করে এবং হুকের সূত্র মেনে চলে। A হলো **আনুপাতিক সীমা** (Proportional limit) নির্দেশক বিন্দু।

(খ) AB রেখাংশ : এই অংশে পীড়ন ও বিকৃতি সমানুপাতিক হয় না অর্থাৎ হুকের সূত্র মেনে চলে না। এই অংশে পীড়ন/বিকৃতি এর মান অপেক্ষাকৃত কম হয়। তবে এই অংশে আসার পর বল অপসারণ করলে তারটি তার আগের অবস্থা ফিরে পায়। B বিন্দুটি **স্থিতিস্থাপক সীমা** (elastic limit) নির্দেশ করে। বেশির ভাগ বস্তুর ক্ষেত্রে A ও B বিন্দু খুব কাছাকাছি অবস্থানে থাকে। যেমন কাচের ক্ষেত্রে A ও B বিন্দু অভিন্ন আবার রবারের ক্ষেত্রে A ও B এর দূরত্ব কিছুটা বেশি।

(গ) BC রেখাংশ : এই অংশে পীড়ন/বিকৃতি এর অনুপাত আরও কমতে থাকে এবং বস্তুটি স্থিতিস্থাপক ধর্ম হারাতে থাকে এবং প্লাস্টিক ধর্ম লাভ করতে থাকে। এই অবস্থায় প্রযুক্ত বল তুলে নিলে বস্তুটি আর আগের অবস্থানে ফিরে যেতে পারে না। অর্থাৎ তারটির বিকৃতি শূন্য না হয়ে একটি স্থায়ী মান হয়। ফলে তারটির স্থায়ী বিকৃতি ঘটে। C বিন্দুটি নতি বিন্দু (yield point)। অনেক সময় একে **উচ্চ নতি বিন্দু** (upper yield point) এবং এর সঙ্গে সংশ্লিষ্ট পীড়নকে **নতি পীড়ন** (yield stress) বলে।

(ঘ) CD রেখাংশ : এই অংশে পীড়ন/বিকৃতি ঋণাত্মক হয়। অর্থাৎ পীড়ন কমলেও বিকৃতি বাড়তে থাকে। D বিন্দুকে **নিম্ন নতি বিন্দু** (lower yield point) বলে। এ অবস্থায় পীড়ন আস্তে আস্তে কমিয়ে শূন্য করলে বিকৃতি শূন্য না হয়ে স্থায়ী OO′ মান হয়। OO′ হলো স্থায়ী বিকৃতি। উল্লেখ্য যে A, B, C ও D বিন্দুগুলো খুবই কাছাকাছি হয়, ফলে চারটি বিন্দুই প্রায় অভিন্ন বিন্দু ধরা যায়।

(ঙ) DE রেখাংশ : এই অংশে পীড়ন/বিকৃতি সবচেয়ে কম হয় এবং তারটির কোনো কোনো অংশ সরু হয়ে যায়। তারটির এই অংশে প্লাস্টিক ধর্ম বর্তমান থাকে।

(চ) EF রেখাংশ : এই অংশে তারের বিভিন্ন স্থানে তারের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল দ্রুত কমতে থাকে এবং তারটি ছিঁড়ে যায়। F বিন্দুতে পীড়নের মানকে অসহ পীড়ন (breaking stress) বলে।

সুতরাং, অসহ পীড়নের সংজ্ঞা লেখা যায়— **প্রতি একক প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফলে ন্যূনতম যে বলের ক্রিয়ায় তারটি ছিঁড়ে যায়, তাকে ওই তারের অসহ পীড়ন বলে।** অসহ পীড়নকে তারের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল দিয়ে গুণ করে অসহ ভার (breaking weight) বা অসহ বল পাওয়া যায়। উল্লেখ্য পীড়ন স্থিতিস্থাপক সীমা অপেক্ষা কম হলেও তা যদি বস্তুর ওপর দীর্ঘক্ষণ যাবত ক্রিয়াশীল থাকে তবে সেক্ষেত্রে বস্তুর বিকৃতি স্থায়ী হবে।

অনুধাবনমূলক কাজ: ইস্পাত রাবারের চেয়ে বেশি স্থিতিস্থাপক কেন ?

আমরা জানি কোনো বস্তুর বিকৃতি ঘটাতে যত বেশি বলের প্রয়োজন হয় তার পীড়নও তত বেশি হয়। আবার পীড়নের মান বেশি হলে তার স্থিতিস্থাপকতাও বেশি হয়। সেই বিচারে দেখা যায় রাবার অপেক্ষা ইস্পাতে বিকৃতিজাত বল তথা পীড়নের মান অনেক বেশি। তাই ইস্পাত রাবার অপেক্ষা বেশি স্থিতিস্থাপক।

বিকল্প : মনে করি একই দৈর্ঘ্য L এবং একই প্রস্থচ্ছেদ ক্ষেত্রফল A বিশিষ্ট একটি ইস্পাত ও একটি রাবারের তারের এক প্রান্ত কোনো দৃঢ় কাঠামোয় আটকিয়ে অপর প্রান্তে একটি টানা বল F প্রয়োগ করা হলো। এতে এদের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি যথাক্রমে L_s ও l_r হয়।

∴ ইয়ং-এর গুণাঙ্ক, $Y_s = \frac{FL}{Al_s}$ ... ... (7.5)

আবার $Y_r = \frac{FL}{Al_r}$ ... ... (7.6)

∴ $\frac{Y_s}{Y_r} = \frac{FL}{Al_s} \times \frac{Al_r}{FL} = \frac{l_r}{l_s}$ ... ... (7.7)

কিন্তু বাস্তবে $l_r > l_s$ অতএব $Y_s > Y_r$। অর্থাৎ ইস্পাতের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক Y_s, রাবারের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক Y_r এর চেয়ে বেশি হবে। স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক বেশি হলে বিকৃতির বিরুদ্ধে প্রতিরোধ ক্ষমতা বেশি হবে। সুতরাং ইস্পাত রাবার অপেক্ষা বেশি স্থিতিস্থাপক।

অনুশীলনটি যাচাই কর : কোনো স্থিতিস্থাপকতার টান প্রয়োগ করে দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি করলে ওতে স্থিতিশক্তি সঞ্চিত হয়। টান অপসারণ করলে পৃষ্ঠের দৈর্ঘ্য ফিরে পায় তখন ওতে এই শক্তির কী পরিবর্তন হয় ?

৭.৭ স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক
Modulus of elasticity

হুকের সূত্র থেকে আমরা পাই স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে পীড়ন ও বিকৃতির অনুপাত একটি ধ্রুব সংখ্যা। এই ধ্রুব সংখ্যাকে স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক বলে।

সংজ্ঞা : স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে কোনো বস্তুর পীড়ন ও বিকৃতির অনুপাত একটি ধ্রুব সংখ্যা। এই ধ্রুব সংখ্যাকে বস্তুর উপাদানের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক বলে।

∴ স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক, $E = \frac{\text{পীড়ন}}{\text{বিকৃতি}}$

পীড়ন ও বিকৃতি স্কেলার রাশি। কাজেই স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্কও স্কেলার রাশি।

মাত্রা : স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্কের মাত্রা ও পীড়নের মাত্রা অভিন্ন অর্থাৎ, $[E] = ML^{-1}T^{-2}$

একক : স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্কের একক Nm^{-2} বা Pa

পীড়ন ও বিকৃতির আলোচনা থেকে আমরা দেখতে পাই যে, পীড়ন ও বিকৃতির বিভিন্নতার জন্য স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক তিন প্রকার হয়। যথা— (১) ইয়ং-এর স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক (২) দৃঢ়তার গুণাঙ্ক (৩) আয়তনের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক।

৭.৭.১ ইয়ং-এর স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক

Young's modulus

স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে বস্তুর অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন ও অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতির অনুপাত একটি ধ্রুব রাশি। এই ধ্রুব রাশিকে বস্তুর উপাদানের ইয়ং-এর গুণাঙ্ক বলে। ইয়ং-এর গুণাঙ্ককে Y দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

ইয়ং-এর গুণাঙ্ক, $Y = \frac{\text{অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন}}{\text{অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি}}$

ব্যাখ্যা : L আদি দৈর্ঘ্যের ও r ব্যাসার্ধের একটি তারকে কোনো দৃঢ় অবলম্বন থেকে এক প্রান্ত ঝুলিয়ে অপর প্রান্তে m ভর অর্থাৎ $F = mg$ বল প্রয়োগ করলে তারটির দৈর্ঘ্য যদি l পরিমাণ বৃদ্ধি পায় তাহলে,

তারটির অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন $= \frac{F}{A}$ এবং অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি $= \frac{l}{L}$

অতএব, ইয়ং-এর গুণাঙ্ক, $Y = \frac{\text{অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন}}{\text{অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি}} = \frac{F/A}{l/L}$

$$\therefore\ Y = \frac{mgL}{\pi r^2 l} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (7.8)$$

(A = তারের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$)

যদি $Y = \frac{FL}{Al}$ সমীকরণে, $A = l$ একক এবং $l = L$ হয়, তবে $Y = F$ হবে।

সুতরাং, একক প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট কোনো তারের দৈর্ঘ্য বরাবর স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে যে বল প্রয়োগ করলে তারটির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি আদি দৈর্ঘ্যের সমান হয় তাকে ইয়ং-এর গুণাঙ্ক বলে।

ইস্পাতের ইয়ং-এর গুণাঙ্ক $= 2 \times 10^{11}\ Nm^{-2}$ বলতে বুঝায় যে, $1\ m^2$ প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট কোনো ইস্পাতের তারের স্থিতিস্থাপক সীমার দৈর্ঘ্য বরাবর 2×10^{11} N বল প্রয়োগ করা হলে তারটির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি আদি দৈর্ঘ্যের সমান হয়।

কাজ : L আদি দৈর্ঘ্যের তারকে F বল প্রয়োগে l পরিমাণ দৈর্ঘ্য সম্প্রসারণে কৃত কাজ,

$W = \frac{1}{2} \times \text{পীড়ন} \times \text{বিকৃতি}$

$\therefore\ W = \frac{1}{2}\frac{YAl^2}{L}$

ইয়ং এর গুণাঙ্ক Y-এর মাত্রা : [স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক] $= \left[\frac{\text{পীড়ন}}{\text{বিকৃতি}}\right]$

$[Y] = [ML^{-1}T^{-2}]$

Y এর একক : নিউটন/বর্গমিটার (Nm^{-2})।

কাজটি অনুসন্ধান কর : ইস্পাতের ইয়ং-এর গুণাঙ্ক আছে; কিন্তু পানির ইয়ং-এর গুণাঙ্ক নাই কেন ?

গাণিতিক উদাহরণ ৭.২

১। $2 \times 10^{-4}\ m^2$ প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ইস্পাতের তারে কত বল প্রয়োগ করলে এর দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ হবে ? [$Y = 2 \times 10^{11}$ Pa] [চ. বো. ২০০৮]

মনে করি, প্রযুক্ত বল = F

আমরা জানি,

$Y = \frac{F}{A} \times \frac{L}{l}$

বা, $F = \frac{YAl}{L}$

$= \frac{2 \times 10^{11}\text{Pa} \times 2 \times 10^{-4}\ m^2 \times L}{L}$

$= 4 \times 10^7\ \text{Pa}\ m^2$

$= 4 \times 10^7 N\ [\because 1\ \text{Pa} = 1\ Nm^{-2}]$

এখানে,

$Y = 2 \times 10^{11}$ Pa

$A = 2 \times 10^{-4}\ m^2$

আদি দৈর্ঘ্য L হলে,

দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি, $l = 2L - L = L$

২। 1 mm² প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট একটি ইস্পাত তারের দৈর্ঘ্য 5% বৃদ্ধি করলে কত বল প্রয়োগ করতে হবে? [ইস্পাতের $Y = 2 \times 10^{11}\ Nm^{-2}$]

আমরা জানি,

$$Y = \frac{F}{A} \times \frac{L}{l}$$

বা, $F = \frac{YAl}{L}$

$$= \frac{2 \times 10^{11} \times 1 \times 10^{-6} \times 0{\cdot}05\ L}{L}$$

$$= 1 \times 10^{4}\ N$$

ধরি,

আদি দৈর্ঘ্য = L

$\therefore$ দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি, $l = \frac{5\ L}{100} = 0{\cdot}05L$

ক্ষেত্রফল, $A = 1\ mm^2 = 1 \times 10^{-6} m^2$

$Y = 2 \times 10^{11}\ Nm^{-2}$

বল, F = ?

৩। একটি তারের উপাদানের ইয়ং-এর গুণাঙ্ক $2 \times 10^{11}\ Nm^{-2}$। তারটির দৈর্ঘ্য 15% বৃদ্ধি করতে প্রযুক্ত পীড়ন নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

$$Y = \frac{\text{দৈর্ঘ্য পীড়ন}}{\text{দৈর্ঘ্য বিকৃতি}} = \frac{F/A}{l/L}$$

$\therefore$ দৈর্ঘ্য পীড়ন, $\frac{F}{A} = Y \times$ দৈর্ঘ্য বিকৃতি

$= Y \times l/L$

$$\therefore \frac{F}{A} = 2 \times 10^{11} \times \frac{15}{100}$$

$$= 3 \times 10^{10}\ Nm^{-2}$$

এখানে,

$Y = 2 \times 10^{11}\ Nm^{-2}$

$\frac{l}{L} = 15\% = \frac{15}{100}$

পীড়ন = F/A = ?

৪। 1 বর্গ সেমি প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট একটি তারে কত বল প্রয়োগ করা হলে এর দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি আদি দৈর্ঘ্যের সমান হবে ? ($Y = 2 \times 10^{11}\ Nm^{-2}$)

আমরা জানি,

$$Y = \frac{FL}{Al}$$

বা, $F = \frac{YAl}{L} = \frac{2 \times 10^{11} \times 10^{-4} \times L}{L}$

$$= 2 \times 10^{7}\ N$$

এখানে,

ইয়ং এর গুণাঙ্ক, $Y = 2 \times 10^{11}\ Nm^{-2}$

ধরি আদি দৈর্ঘ্য, L = L

$\therefore$ দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি $l = L$

প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল, $A = 10^{-4}\ m^2$

বল, F = ?

৫। দুটি সমান দৈর্ঘ্যের তারের ব্যাসার্ধের অনুপাত 1 : 2। এদের ওপর একটি সমান বল প্রয়োগ করা হলো। যদি তার দুটির দৈর্ঘ্যের বৃদ্ধির অনুপাত 3 : 1 হয় তবে তার দুটির উপাদানের ইয়ং-এর গুণাঙ্কের অনুপাত নির্ণয় কর।

[KUET Admission Test, 2004-05]

আমরা জানি,

$$\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{l_2}{l_1} \times \frac{A_2}{A_1} = \frac{l_2}{l_1} \times \frac{\pi r_2^2}{\pi r_1^2}$$

$$= \frac{l_2}{l_1} \times \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{1}\right)^2$$

$$= \frac{4}{3}$$

এখানে,

$r_1 : r_2 = 1 : 2$

$l_1 : l_2 = 3 : 1$

৬। 1 mm² প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট একটি ইস্পাতের তারের দৈর্ঘ্য 5% বৃদ্ধি করতে কত বল প্রয়োগ করতে হবে ? $Y = 2 \times 10^{11}\ Nm^{-2}$ [CUET Admission Test, 2009-10]

আমরা জানি,

$$F = \frac{YAl}{L}$$

$$= \frac{2\times10^{11}\times1\times10^{-6}\times0.05\ L}{L} N$$

$$= 10^4\ N$$

এখানে,

$A = 1\ mm^2 = 1\times10^{-6}\ m^2$

$l = 5\% = \frac{5}{100} L = 0.05\ L$

$Y = 2\times10^{11}\ Nm^{-2}$

৭। সমান দৈর্ঘ্যের দুটি ভিন্ন পদার্থের তারের দৈর্ঘ্য বরাবর সমান বল প্রয়োগ করা হলো। ফলে দ্বিতীয় তারটি প্রথমটির 2.5 গুণ প্রসারিত হলো। তার দুটির ইয়ং এর গুণাঙ্ক যথাক্রমে $1.8\times10^{11}\ N/m^2$ ও $1.6\times10^{11}\ N/m^2$। এদের ব্যাসার্ধের অনুপাত নির্ণয় কর। [RUET Admission Test, 2009-10]

আমরা জানি,

$$Y = \frac{F/A}{l/L} = \frac{FL}{Al}, \quad l_2 = 2.5\, l_1$$

$$F = \frac{YAl}{L}$$

এখানে,

$l_2 = 2.5\, l_1$

$Y_1 = 1.8\times10^{11}\ Nm^{-2}$

$Y_2 = 1.6\times10^{11}\ Nm^{-2}$

প্রশ্নমতে, $F_1 = F_2$

$$\therefore \frac{Y_1A_1l_1}{L} = \frac{Y_2A_2l_2}{L} \text{ বা, } Y_1A_1l_1 = Y_2A_2l_2$$

$$\text{বা, } Y_1\times\pi\left(\frac{d_1}{2}\right)^2\times l_1 = Y_2\times\pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^2\times 2.5 l_1$$

$$\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = \frac{Y_2\times2.5}{Y_1} = \frac{1.6\times2.5}{1.8} \quad \therefore \frac{d_1}{d_2} = 1.5$$

$$\therefore \frac{r_1}{r_2} = 0.75$$

$$\therefore r_1 : r_2 = 0.75 : 1 \text{ Ans.}$$

৭.৭.২ কৃন্তন বা দৃঢ়তা বা কাঠিন্যের গুণাঙ্ক
Rigidity modulus

স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে বস্তুর কৃন্তন পীড়ন ও কৃন্তন বিকৃতির অনুপাত একটি ধ্রুব সংখ্যা। এই ধ্রুব সংখ্যাকে কৃন্তন বা দৃঢ়তা বা কাঠিন্যের গুণাঙ্ক বলে। একে n দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$$\text{কাঠিন্যের গুণাঙ্ক, } n = \frac{\text{কৃন্তন পীড়ন}}{\text{কৃন্তন বিকৃতি}}$$

ব্যাখ্যা : কোনো বস্তুর উপরিতলে স্পর্শী বল F প্রয়োগ করলে যদি কৃন্তন বিকৃতি θ হয় এবং পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল A হয়, তাহলে,

$$n = \frac{F/A}{\theta} \text{ বা, } n = \frac{F}{A\theta} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (7.9)$$

কাঠিন্যের গুণাঙ্কের একক ও মাত্রা ইয়ং-এর গুণাঙ্কের একক ও মাত্রার অনুরূপ।

লোহার কাঠিন্যের গুণাঙ্ক $7.7\times10^{10}\ Nm^{-2}$ বলতে আমরা বুঝি যে, একটি লোহার ঘনকের আকৃতি পরিবর্তন করে এক রেডিয়ান ব্যবর্তন কোণ উৎপন্ন করতে এর উপরিতলের প্রতি বর্গমিটার ক্ষেত্রফলের উপর 7.7×10^{10} N বল প্রয়োগ করতে হবে।

যাচাই কর : স্প্রিং সাধারণত ইস্পাতের তৈরি হয়, তামার হয় না কেন ?

৭.৭.৩ আয়তন গুণাঙ্ক
Bulk modulus

স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে বস্তুর আয়তন পীড়ন ও আয়তন বিকৃতির অনুপাত একটি ধ্রুব সংখ্যা। এই ধ্রুব সংখ্যাকে বস্তুর উপাদানের আয়তন গুণাঙ্ক বলে। একে K দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অতএব, আয়তন গুণাঙ্ক, $K = \dfrac{\text{আয়তন পীড়ন}}{\text{আয়তন বিকৃতি}}$

ব্যাখ্যা : ধরা যাক, V আয়তনের কোনো বস্তুর উপর লম্বভাবে চারদিক থেকে F বল প্রয়োগ করা হলো। ফলে বস্তুর আয়তন v হ্রাস পায়। তাহলে আয়তন বিকৃতি $= v/V$। যদি বস্তুটির পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল A হয় তাহলে আয়তন পীড়ন $= F/A$.

$$\text{আয়তন গুণাঙ্ক, } K = \frac{\text{আয়তন পীড়ন}}{\text{আয়তন বিকৃতি}} = \frac{F/A}{v/V} = \frac{FV}{Av} \quad \cdots \quad \cdots \quad (7.10)$$

আয়তন গুণাঙ্কের একক ও মাত্রা ইয়ং-এর গুণাঙ্কের একক ও মাত্রার অনুরূপ। পানির আয়তন গুণাঙ্ক $= 0.2 \times 10^{10}$ Nm^{-2} বলতে বুঝায় যে, পানির আদি আয়তনের সমান আয়তন হ্রাসের জন্য এর প্রতি বর্গমিটার ক্ষেত্রফলের উপর লম্বভাবে চারদিক থেকে 0.2×10^{10} N বল প্রয়োগ করতে হবে।

৭.৭.৪ সংনম্যতা
Compressibility

কোনো বস্তুর চারদিক থেকে সমান চাপ প্রয়োগ করলে বস্তুটির আয়তন কমে যায়। বস্তুর এ ধর্মকে সংনম্যতা বলে।

পদার্থের অণুসমূহের মধ্যে ফাঁকা থাকে বলেই এরূপ ঘটে। কঠিন ও তরল পদার্থের তুলনায় গ্যাসের সংনম্যতা অনেক বেশি।

সংনম্যতা $= \dfrac{1}{\text{আয়তন বিকৃতি গুণাঙ্ক}}$ বা সংনম্যতা, $C = \dfrac{1}{K}$, এখানে K = আয়তন বিকৃতি গুণাঙ্ক।

এখন $K = -\dfrac{P}{\dfrac{\Delta V}{V}} = -\dfrac{PV}{\Delta V}$

$\therefore \quad C = \dfrac{1}{K} = -\dfrac{\Delta V}{PV}$

গাণিতিক সংজ্ঞা : আয়তন গুণাঙ্কের বিপরীত রাশিকে সংনম্যতা বলে।

[দ্রষ্টব্য : আয়তন গুণাঙ্ককে কখনও কখনও অসংনম্যতা (Incompressibility) বলা হয়। কঠিন পদার্থের Y, K এবং n এই তিন প্রকার গুণাঙ্কের সবগুলোই আছে। তরল ও বায়বীয় পদার্থের শুধু আয়তন গুণাঙ্ক K আছে।]

৭.১ সারণিতে বিভিন্ন পদার্থের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক দেখান হলো।

সারণি ৭.১

পদার্থ	Y (Nm^{-2})	n (Nm^{-2})	K (Nm^{-2})
ইস্পাত	20×10^{10}	8.4×10^{10}	18×10^{10}
তামা	12.6×10^{10}	4×10^{10}	14×10^{10}
লোহা (ঢালাই)	11×10^{10}	4.4×10^{10}	9×10^{10}
অ্যালুমিনিয়াম	7×10^{10}	2.6×10^{10}	7.5×10^{10}
সীসা	1.6×10^{10}	0.56×10^{10}	4.6×10^{10}
পানি	—	—	0.2×10^{10}
পারদ	—	—	2.6×10^{10}

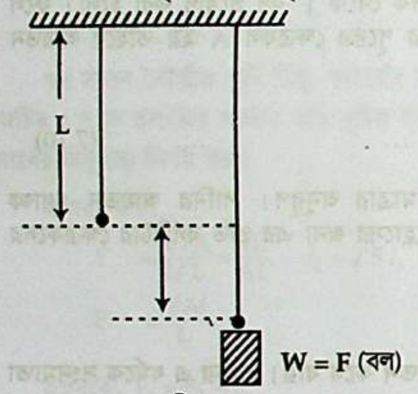
৭.৮ স্থিতিস্থাপক বিভবশক্তি বা স্থিতিশক্তি
Elastic potential energy

যখন কোনো বস্তু তার স্বাভাবিক আকৃতি নিয়ে অবস্থান করে তখন তার আণবিক বলজনিত স্থিতিশক্তি সর্বনিম্ন থাকে। বাইরে থেকে ওই বস্তুতে কোনো বল প্রয়োগ করলে অর্থাৎ বাহ্যিক বলের প্রভাবে বস্তুটিকে বিকৃত করলে বস্তুর মধ্যে অভ্যন্তরীণ প্রতিক্রিয়া বলের উদ্ভব হয় যা প্রযুক্ত বলকে বাধা প্রদান করে এবং বাহ্যিক বলকে এই

অভ্যন্তরীণ প্রতিক্রিয়া বলের বিরুদ্ধে কাজ সম্পাদন করে বস্তুকে বিকৃত করতে হয়। এই কাজ বস্তুর মধ্যে স্থিতিশক্তি রূপে সঞ্চিত থাকে। এই শক্তিকেই বস্তুর স্থিতিস্থাপক বিভব শক্তি বা স্থিতিশক্তি বলে।

(ক) অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতির জন্য কৃত কাজ (Work done for longitudinal strain)

ধরা যাক L দৈর্ঘ্যের একটি তারের প্রস্থচ্ছেদ A এবং তারের উপাদানের ইয়ং-এর গুণাঙ্ক Y। তারটির এক প্রান্ত একটি দৃঢ় অবলম্বনের সাথে আটকিয়ে অন্য প্রান্তে ওজন W ঝুলানো হলো [চিত্র ৭·১৪]। এর ফলে তারটির দৈর্ঘ্য l পরিমাণ বৃদ্ধি পেল। এই দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি l-কে অসংখ্য ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি dl-এর সমষ্টি বিবেচনা করা যেতে পারে। এখন dl দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি করতে কৃত কাজ, $dW = F \cdot dl$



চিত্র ৭·১৪

সুতরাং, l দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি করতে কৃত কাজ,

$$W = \int_0^l F.dl \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (i)$$

আবার আমরা জানি,

$$Y = \frac{F/A}{l/L} \text{ বা, } F = Y.\frac{l}{L}A \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (ii)$$

সমীকরণ (i)-এ F এর মান বসিয়ে পাই,

$$W = \int_0^l Y\frac{l}{L}A\,dl = \frac{YA}{L}\int_0^l l\,dl$$

$$= \frac{YA}{L}\left[\frac{l^2}{2}\right]_0^l = \frac{YA}{L}\frac{l^2}{2}$$

বা, $W = \frac{1}{2}\cdot\frac{YAl^2}{L} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (iii)$

বা, $W = \frac{1}{2}\left(Y.\frac{l}{2}.A\right).l = \frac{1}{2}\times F\times l$, সমীকরণ (ii) ব্যবহার করে

$\therefore$ কৃত কাজ $= \frac{1}{2}\times$ প্রযুক্ত বল $\times$ দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি

এই কাজ বস্তুতে স্থিতিশক্তিরূপে সঞ্চিত থাকে।

অতএব, একক আয়তনে সঞ্চিত স্থিতিশক্তি বা শক্তি ঘনত্ব,

$$= \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\times\frac{F\times l}{AL} \qquad [\because V = AL]$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{F}{A}\times\frac{l}{L}$$

$= \frac{1}{2}\times$ দৈর্ঘ্য পীড়ন $\times$ দৈর্ঘ্য বিকৃতি

অর্থাৎ, একক আয়তনে সঞ্চিত শক্তি $= \frac{1}{2}\times$ দৈর্ঘ্য পীড়ন $\times$ দৈর্ঘ্য বিকৃতি

(খ) আয়তন বিকৃতির জন্য কৃত কাজ (Work done for volume strain)

ধরা যাক, V আয়তনের কোনো বস্তুর ওপর অভিলম্ব চাপ P প্রয়োগ করায় এর আয়তন v পরিমাণ হ্রাস পায়।

$\therefore$ এক্ষেত্রে কৃত কাজ, $W = \int_0^v P dv = \int_0^v \frac{Kv}{V}dv$ $\left[\because \text{ আয়তন বিকৃতি গুণাঙ্ক, } K = \frac{P}{\frac{v}{V}}\right]$

$$= \frac{1}{2}\frac{K}{V}v^2$$

এই কাজ বস্তুতে স্থিতিশক্তিরূপে সঞ্চিত থাকে।

অতএব, একক আয়তনে সঞ্চিত শক্তি বা শক্তি ঘনত্ব,

$$= \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\times\frac{K}{V}\times\frac{v^2}{V} = \frac{1}{2}\frac{Kv}{V}\times\frac{v}{V}$$

$= \frac{1}{2}\times P\times\frac{v}{V} = \frac{1}{2}\times$ আয়তন পীড়ন $\times$ আয়তন বিকৃতি

(গ) কৃন্তন বিকৃতির দরুন কৃত কাজ (Work done for shearing strain)

ধরা যাক, একটি ঘনক আকারের বস্তুর দৈর্ঘ্য = L। বস্তুটির নিম্নতল আবন্ধ রেখে ওপরের তলের ওপর স্পর্শিনীভাবে (tangtentially) F বল প্রয়োগ করায় ওপরের তল নিচের তলের সাপেক্ষে l দূরত্ব সরে গেল। অতএব, বস্তুটিতে উৎপন্ন কৃন্তন বিকৃতি = $\frac{l}{L}$। এখন, বস্তুটির দৃঢ়তা গুণাঙ্ক,

$$n = \frac{F/A}{l/L}$$

এখন ধরা যাক, F বলের জন্য নিচের তলের সাপেক্ষে ওপরের তলের অতিক্ষুদ্র সরণ dl হয়, তাহলে কৃত কাজ,

$$dW = Fdl$$

অতএব, l সরণের জন্য কৃত কাজ হবে,

$$W = \int_0^l Fdl$$

বা, $$W = \int_0^l nLldl \qquad \left[\because n = \frac{F}{L^2} \times \frac{L}{l} = \frac{F}{Ll}\right]$$

$$\therefore \quad W = nL\int_0^l ldl = \frac{nLl^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(nLl)l = \frac{1}{2}F \times l$$

$\therefore$ শক্তি ঘনত্ব, $$\frac{W}{V} = \frac{1}{2} \times \frac{F \times l}{L^3} = \frac{1}{2} \times \frac{F}{L^2} \times \frac{l}{L}$$

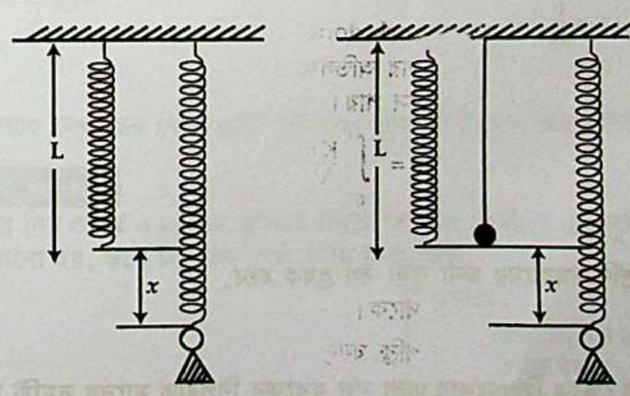
$$= \frac{1}{2} \times \text{পীড়ন} \times \text{বিকৃতি}$$

অনুসন্ধানমূলক কাজ : একটি টানা তার হঠাৎ ছিঁড়ে গেলে তারটি কেন উত্তপ্ত হয়?—ব্যাখ্যা কর।

কোনো টানা তারের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধিতে যে কাজ করা হয় তা তারের মধ্যে স্থিতিশক্তিরূপে সঞ্চিত থাকে। এখন কোনো কারণে তারটি ছিঁড়ে গেলে তারের সঞ্চিত ওই স্থিতিশক্তি তাপশক্তিতে রূপান্তরিত হয়, ফলে তারটি উত্তপ্ত হয়।

বল ধ্রুবক
Force constant

একটি স্প্রিং তার বা একটি রডের এক প্রান্ত দৃঢ় অবলম্বনের সঙ্গে আটকিয়ে রেখে অপর প্রান্তে বল F প্রয়োগ করায় স্প্রিং বা রডের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি হলো x [চিত্র ৭.১৫]।



চিত্র ৭.১৫

এখন, হুকের সূত্র থেকে পাই,

$$F \propto x \text{ বা, } F = Kx \qquad \ldots \qquad (7.11)$$

এখানে, K একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক। একে **বল ধ্রুবক** বলা হয়।
সমীকরণ (7.11)-এ যদি $x = 1$ হয়, তবে
আমরা পাই, $K = F$
বল ধ্রুবকের নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেওয়া যায়।
কোনো স্প্রিং-এ একক দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির জন্য প্রযুক্ত বলকে স্প্রিংটির বল ধ্রুবক বলে।

K-এর একক ও মাত্রা : যেহেতু $K = \frac{F}{x}$,

অতএব, K এর S. I. একক হলো নিউটন/মিটার (Nm^{-1})

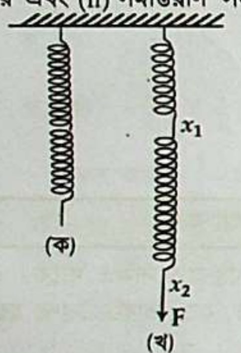
K এর মাত্রা হবে, $K = \frac{[F]}{[x]} = \frac{MLT^{-2}}{L} = [MT^{-2}]$

অনুধাবনমূলক কাজ : স্প্রিং তৈরির জন্য ইস্পাত ব্যবহার করা হয় কেন ?

স্প্রিং এর বল ধ্রুবক ওই স্প্রিং এর অনমনীয়তা (stifness) প্রকাশ করে। K-এর মান যত বেশি হয় স্প্রিং এর অনমনীয়তাও তত বেশি হয়। ইস্পাতের অনমনীয়তা অনেক বেশি, তাই স্প্রিং তৈরিতে ইস্পাত ব্যবহার করা হয়।

স্প্রিং-এর সমবায়
Combination of springs

কোনো স্প্রিং-এর বল ধ্রুবকের মান এর গঠন (structure) এবং উপাদানের প্রকৃতি (nature of material)-এর ওপর নির্ভর করে। কতকগুলি স্প্রিং-কে একত্রিত করে স্প্রিং সমবায় গঠন করা যায়। এই সমবায় দুই ধরনের, যথা—(i) শ্রেণি সমবায় এবং (ii) সমান্তরাল সমবায়।



চিত্র ৭.১৬

(i) স্প্রিং-এর শ্রেণি সমবায় (Series combination of springs) : ধরা যাক, দুটি স্প্রিং যাদের বল ধ্রুবক যথাক্রমে K_1 ও K_2 শ্রেণি সমবায়ে যুক্ত করা হয়েছে [চিত্র ৭.১৬]। এদের প্রান্তে F বল প্রয়োগ করায় এদের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি ঘটে যথাক্রমে x_1 ও x_2।

তাহলে প্রথম স্প্রিং-এর ক্ষেত্রে, $F = K_1x_1$ বা, $x_1 = \frac{F}{K_1}$

এবং দ্বিতীয় স্প্রিং এর ক্ষেত্রে, $F = K_2x_2$ বা, $x_2 = \frac{F}{K_2}$

$\therefore$ মোট দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি, $x = x_1 + x_2$

$$= \frac{F}{K_1} + \frac{F}{K_2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (7.12)$$

এখন, স্প্রিং দুটির পরিবর্তে যদি একটি স্প্রিং ব্যবহার করা হয় যাতে একই প্রযুক্ত বলের জন্য একই পরিমাণ দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি ঘটে, তবে ওই স্প্রিং-এর বল ধ্রুবককে সমবায়ের **তুল্য বল ধ্রুবক** (equivalent force constant) বলে।

এখন তুল্য বল ধ্রুবক K হলে আমরা পাই,

$$F = Kx, \quad \text{বা,} \quad x = \frac{F}{K}$$

$$\therefore \quad \frac{F}{K} = \frac{F}{K_1} + \frac{F}{K_2}$$

$$\text{বা,} \quad \frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

$$\text{বা,} \quad K = \frac{K_1K_2}{K_1 + K_2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (7.13)$$

n-সংখ্যক স্প্রিং-এর শ্রেণি সমবায়ের জন্য তুল্য বল ধ্রুবক হবে,

$$\frac{1}{K} = \Sigma_i \frac{1}{K_i}$$

অর্থাৎ, শ্রেণি সমবায়ের ক্ষেত্রে স্প্রিংগুলোর তুল্য বল ধ্রুবকের বিপরীত মানের সমষ্টি তুল্য বল ধ্রুবকের বিপরীত মানের সমান।

সুতরাং, স্প্রিংগুলোকে শ্রেণি সমবায়ে যুক্ত করলে তুল্য বল ধ্রুবকের মান সমবায়ের ক্ষুদ্রতম বল ধ্রুবকের মানের চেয়ে কম হয়।

(ii) স্প্রিং-এর সমান্তরাল সমবায় (Parallel combination of springs) :

ধরা যাক, দুটি স্প্রিং-কে সমান্তরাল সমবায়ে যুক্ত করা হয়েছে [চিত্র ৭.১৭]।

এক্ষেত্রে স্প্রিং দুটির নিচের প্রান্তে F বল প্রয়োগ করলে তা F_1 ও F_2 মানে বিভক্ত হয়ে স্প্রিং দুটির ওপর ক্রিয়া করবে। স্প্রিং দুটির বল ধ্রুবক যথাক্রমে K_1 ও K_2 এবং দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি x হলে,

$F_1 = K_1x$ এবং $F_2 = K_2x$ [∵ সমান্তরাল সমবায়ের ক্ষেত্রে দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি একই হয়]

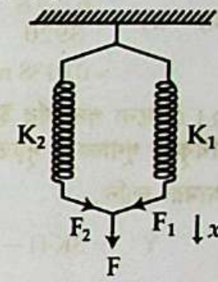
$$\therefore \quad F = F_1 + F_2 = K_1x + K_2x \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (7.14)$$

এখন, স্প্রিং দুটির পরিবর্তে একটি স্প্রিং নিলে যার বল ধ্রুবক K এবং দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি একই অর্থাৎ x হলে, লেখা যায়,

$$F = Kx \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (7.15)$$

$$F_1 + F_2 = K_1x + K_2x$$

$$\therefore \quad K = K_1 + K_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (7.16)$$



চিত্র ৭.১৭ : স্প্রিং-এর সমান্তরাল সমবায়।

n সংখ্যক স্প্রিং এর সমান্তরাল সমবায়ের জন্য পাই,

$$K = \sum_i K_1 = K_1 + K_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + K_n$$

অর্থাৎ, সমান্তরাল সমবায়ের ক্ষেত্রে স্প্রিংগুলির বল ধ্রুবকের সমষ্টি সমবায়ের তুল্য বল ধ্রুবকের সমান।

স্প্রিং-এর শক্তি
Energy of a spring

মনে করি, একটি স্প্রিং-এর ওপর F বল প্রযুক্ত হওয়ায় এর প্রসারণ ঘটল dx পরিমাণ। সুতরাং এই প্রসারণের জন্য কৃত কাজ, $dW = Fdx$

আমরা জানি, স্প্রিং এর ক্ষেত্রে, $F = Kx$

অতএব, $dW = Kxdx \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (7.17)$

এখন, স্প্রিংটিকে x পরিমাণ প্রসারিত করতে মোট কৃত কাজ,

$$W = \int dW = \int_0^x Kxdx = K\int_0^x xdx = \frac{Kx^2}{2}$$

এই কাজ স্প্রিংটিতে স্থিতি বা বিভব শক্তিরূপে সঞ্চিত থাকবে। সুতরাং স্প্রিংটিতে সঞ্চিত স্থিতিশক্তি বা বিভব শক্তি,

$$E = \frac{1}{2}x^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (7.18)$$

কাজ : একটি গুলতির গুটি বা পাথর যত হাল্কা হয়, সেটি তত জোরে নিক্ষিপ্ত হয়—ব্যাখ্যা কর।

একটি m ভরের পাথর বা গুটিকে v বেগে নিক্ষেপ করা হলো। এক্ষেত্রে পাথরটির গতিশক্তি, $E = \frac{1}{2}mv^2$। এই গতিশক্তি পাথরটি অর্জন করবে স্প্রিং বা গুলতির সঞ্চিত শক্তি থেকে।

অতএব, $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Kx^2$

বা, $v = \sqrt{\frac{K}{m}}x \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (7.19)$

সমীকরণ (7.19) থেকে দেখা যায় যে পাথরটি যত হাল্কা হবে, সেটি তত জোরে নিক্ষিপ্ত হবে।

গাণিতিক উদাহরণ ৭.৩

১। একটি স্প্রিং-এর নিম্ন প্রান্তে 4 kg ভর ঝুলিয়ে দিলে স্প্রিংটির দৈর্ঘ্য 1 cm বৃদ্ধি পায়। যদি স্প্রিং-এর নিম্ন প্রান্তে আরও 2 kg ভর ঝুলানো হয়, তবে স্প্রিংটির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

$F = Kx$

এখন, প্রথম ক্ষেত্রে,

$F_1 = Kx_1$

বা, $4 \times 9.8 = K \times 0.01$

$\therefore \quad K = \frac{4 \times 9.8}{0.01} = 3920\ Nm^{-1}$

এখানে,
ভর, $m_1 = 4\ kg$
প্রযুক্ত বল, $F_1 = m_1g = 4 \times 9.8\ N$
দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি, $x_1 = 1\ cm = 0.01\ m$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে,

$F_2 = Kx_2$

বা, $6 \times 9.8 = 3920 \times x_2$

বা, $x_2 = \dfrac{6 \times 9.8}{3920}$

$= 0.0138$ m

এখানে,

প্রযুক্ত বল, $F_2 = m_2 g = (4+2) \times 9.8$ N

$= 6 \times 9.8$ N

দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি, $x_2 = ?$

২। কোনো পদার্থের ইয়ং-এর গুণাঙ্ক = 16×10^{10} Nm^{-2} এবং পয়সনের অনুপাত 0.28 হলে ওই পদার্থের আয়তন বিকৃতি গুণাঙ্ক ও দৃঢ়তা গুণাঙ্ক কত ?

আমরা জানি,

$Y = 3K(1 - 2\sigma)$

$\therefore K = \dfrac{16 \times 10^{10}}{3(1 - 2 \times 0.28)}$

$= 12.12 \times 10^{10}$ Nm^{-2}

এখানে,

$Y = 16 \times 10^{10}$ Nm^{-2}

$\sigma = 0.28$

আবার, $Y = 2n(1 + \sigma)$

বা, $n = \dfrac{Y}{2(1 + \sigma)}$

$= \dfrac{16 \times 10^{10}}{2 \times (1 + 0.28)}$

$= 6.25 \times 10^{10}$ Nm^{-2}

উত্তর : আয়তন বিকৃতি গুণাঙ্ক 12.12×10^{10} Nm^{-2} ও দৃঢ়তা গুণাঙ্ক 6.25×10^{10} Nm^{-2}

৩। একটি বহুতল দালান যে উপকরণ দিয়ে তৈরি তার স্থিতিস্থাপক সীমা 5×10^5 Nm^{-2} এবং ঘনত্ব 0.65×10^3 kgm^{-3}। প্রতি তলার উচ্চতা 3.2 m হলে, ওই দালানের (i) সর্বোচ্চ উচ্চতা কত হতে পারে এবং (ii) দালানটি কত তলা পর্যন্ত করা সম্ভব ? ($g = 10$ ms^{-2})

(i) ধরা যাক, দালানটির উচ্চতা $= h$

এখন, ভূমির ক্ষেত্রফল 1 m^2 হলে 1 m^2 ক্ষেত্রফল ও h উচ্চতাবিশিষ্ট দালানের অংশের ওজন

$=$ ক্ষেত্রফল × উচ্চতা × ঘনত্ব × g

$= 1 \times h \times 0.65 \times 10^3 \times 10$

$= 6.5 \times 10^3 h$ N

এখানে,

স্থিতিস্থাপক সীমা $= 5 \times 10^5$ Nm^{-2}

ঘনত্ব, $\rho = 0.65 \times 10^3$ kgm^{-3}

প্রতি তলার উচ্চতা $= 3.2$ m

$\therefore$ ভূমির ওপর পীড়ন $= \dfrac{\text{ওজন}}{\text{ক্ষেত্রফল}} = \dfrac{6.5 \times 10^3 h}{1}$ Nm^{-2}

এখন, প্রশ্নানুসারে দালানটি অক্ষত অবস্থায় থাকতে হলে ভূমির ওপর পীড়ন স্থিতিস্থাপক সীমার সমান হতে হবে। অর্থাৎ

$6 \times 10^3 \times h = 5 \times 10^5$

$\therefore h = \dfrac{5 \times 10^5}{6 \times 10^3} = 83.3$ m (প্রায়)

(ii) প্রতি তলা 3.2 m হলে, মোট তলার সংখ্যা

$n = \dfrac{83.3}{3.2} = 26.04 \simeq 26$

উত্তর : ওই দালানের সর্বোচ্চ উচ্চতা 83.3 m এবং দালানটি 26 তলা পর্যন্ত করা যেতে পারে।

৪। একজন বালকের গুলতি 5 mm ব্যাস ও 36 cm দৈর্ঘ্য রাবারের ফিতা দিয়ে তৈরি। বালকটি ফিতাকে 18 cm টেনে একটি পাথরের গুলিকে ছুড়ল। গুলিটির ভর 0·02 kg। গুলিটি গুলতি থেকে 15 ms⁻¹ বেগে ছুটে গেলে, রবারের ইয়ং-এর গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

গুলিটির গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 0·02 \times (15)^2$

$= 2·25$ J

গুলতির ফিতা কর্তৃক কৃত কাজ,

W = গড় বল × বিস্তৃতি

$= \frac{1}{2} \times F \times 0·18$ J

ফিতা কর্তৃক কৃত কাজই গুলিটির গতিশক্তিতে পরিণত হয়।

অতএব,

$$\frac{1}{2} \times F \times 0·18 = 2·25$$

বা, $F = \frac{2·25 \times 2}{0·18} = 25$ N

এখানে,

গুলতির ব্যাস $= 5\,mm = 5 \times 10^{-3}$ m

গুলতির ব্যাসার্ধ, $r = \frac{5}{2} \times 10^{-3}$ m $= 2·5 \times 10^{-3}$ m

গুলতির দৈর্ঘ্য = 36 cm = 0·36 m

ফিতার বিস্তৃতি, $x = 18$ cm $= 0·18$ m

গুলির ভর, $m = 0·02$ kg

গুলির বেগ, $v = 15\,ms^{-1}$

এখন, পীড়ন $= \frac{F}{A} = \frac{25}{\pi r^2} = \frac{25}{3·14 \times \left(\frac{5}{2} \times 10^{-3}\right)^2}$

$= \frac{25}{3·14\,(2·5 \times 10^{-3})^2}$

এবং বিকৃতি $= \frac{0·18}{0·36} = \frac{1}{2}$

অতএব, রবারের ইয়ং এর গুণাঙ্ক,

$$Y = \frac{\text{পীড়ন}}{\text{বিকৃতি}} = \frac{\frac{25}{3·14\,(2·5 \times 10^{-3})^2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{25 \times 2}{3·14 \times (2·5 \times 10^{-3})^2} = \frac{50}{3·14 \times (2·5)^2 \times 10^{-6}}$$

$= 2·55 \times 10^7\,Nm^{-2}$

৫। 4·0 mm² প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট এবং 2·5 m দৈর্ঘ্যের একটি ইস্পাতের তারকে টেনে 2·5 mm দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি করা হলো। টান করা অবস্থায় তারটিতে সঞ্চিত স্থিতিশক্তি নির্ণয় কর। (ইস্পাতের ইয়ং-এর গুণাঙ্ক $Y = 2·0 \times 10^{11}\,Nm^{-2}$)

আমরা জানি, তারটিতে সঞ্চিত স্থিতিশক্তি,

E_p = তারটির দৈর্ঘ্য প্রসারণের দরুন কৃত কাজ

বা, $E_p = \frac{1}{2} \times F \times l \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (i)

এখানে F হলো প্রযুক্ত বল এবং l হলো দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি

এখানে,

$A = 4·0\,mm^2 = 4 \times 10^{-6}\,m^2$

$L = 2·5$ m

$l = 2·5\,mm = 2·5 \times 10^{-3}$ m

$Y = 2·0 \times 10^{11}\,Nm^{-2}$

আবার, $Y = \frac{F/A}{l/L}$

বা, $\frac{F}{A} = \frac{Y \times l}{L}$

বা, $F = Y \times \frac{l}{L} \times A$

F এর মান সমীকরণ (i)-এ বসিয়ে পাই,

$$E_p = \frac{1}{2} \times \left(Y \times \frac{l}{L} \times A\right) \times l$$

$$\therefore \quad E_p = \frac{1}{2} \times \left(2·0 \times 10^{11} \times \frac{2·5 \times 10^{-3}}{2·5} \times 4·0 \times 10^{-6}\right) \times 2·5 \times 10^{-3}$$

$= 1·0 \times 10^{11} \times 1 \times 10^{-3} \times 4·0 \times 10^{-6} \times 2·5 \times 10^{-3} = 1·0$ J

৬। একটি তারের উপাদানের দৃঢ়তা গুণাঙ্ক $2.1 \times 10^{11}\ Nm^{-2}$ এবং পয়সনের অনুপাত 0.38 হলে তারের ইয়ং-এর গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

$$Y = 2n(1+\sigma)$$

$$\therefore Y = 2 \times 2.1 \times 10^{11}(1+0.38)$$

$$= 2 \times 2.1 \times 1.38 \times 10^{11}$$

$$= 1.596 \times 10^{11}\ Nm^{-2}$$

এখানে,
$n = 2.1 \times 10^{11}\ Nm^{-2}$
$\sigma = 0.38$
$Y = ?$

৭। দুটি ভিন্ন উপাদানে তৈরি সমান দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট তারের একটির ব্যাস 1 mm এবং অপরটির ব্যাস 2 mm। উভয় তারকে সমান বলে টানলে প্রথমটির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি অপরটির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির দ্বিগুণ হয়। এদের ইয়ং-এর গুণাঙ্কের তুলনা কর।

প্রথম ও দ্বিতীয় তারের প্রস্থচ্ছেদ যথাক্রমে a_1 ও a_2 এবং প্রযুক্ত বলের জন্য এদের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি যথাক্রমে l_1 ও l_2 হলে প্রশ্নানুসারে,

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{1}{2} \text{ এবং } \frac{a_2}{a_1} = \frac{\pi\left(\frac{2}{2}\right)^2}{\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{1}$$

এখানে,
তার দুটির দৈর্ঘ্য = L
প্রথম তারের ব্যাস, $d_1 = 1$ mm
দ্বিতীয় তারের ব্যাস, $d_2 = 2$ mm
প্রথম তারের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি = l_1
দ্বিতীয় তারের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি = l_2

এখন, প্রথম তারের ইয়ং-এর গুণাঙ্ক, $Y_1 = \frac{F/a_1}{l_1/L} = \frac{FL}{a_1 l_1}$

এবং দ্বিতীয় তারের ইয়ং-এর গুণাঙ্ক, $Y_2 = \frac{F/a_2}{l_2/L} = \frac{FL}{a_2 l_2}$

$$\therefore \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{FL/a_1 l_1}{FL/a_2 l_2} = \frac{a_2 l_2}{a_1 l_1} = \frac{4}{1} \times 2 = 2:1$$

৮। 0.1 m বাহুবিশিষ্ট অ্যালুমিনিয়ামের তৈরি একটি ঘনকের কোনো তলে 89.67×10^5 N আকার পীড়ন সৃষ্টিকারী স্পর্শিনী বল প্রয়োগ করলে বিপরীত স্থির তলের সাপেক্ষে তলটির 3.05×10^{-3} m সরণ ঘটে। আকার পীড়ন, আকার বিকৃতি ও দৃঢ়তার স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

প্রশ্নানুসারে, আকার পীড়ন $= \frac{F}{A} = \frac{89.67 \times 10^5 N}{0.1 m \times 0.1 m} = 89.67 \times 10^7 Nm^{-2}$

আকার বিকৃতি $= \frac{\text{সরণ}}{\text{বস্তুর দৈর্ঘ্য}} = \frac{x}{y} = \frac{3.05 \times 10^{-3} m}{0.1 m} = 3.05 \times 10^{-2}\ \left(\because \frac{x}{y} = \frac{d}{D}\right)$

এবং দৃঢ়তার স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক, $\eta = \frac{\text{আকার পীড়ন}}{\text{আকার বিকৃতি}} = \frac{89.67 \times 10^7 Nm^{-2}}{3.05 \times 10^{-2}}$

$$= 2.94 \times 10^{10} Nm^{-2}$$

৯। স্থির তাপমাত্রায় 20 বায়ুমণ্ডলীয় চাপের পরিবর্তনে একটি বস্তুর আয়তনের পরিবর্তন 0.01% হলো। এর আয়তনের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক নির্ণয় কর। [1 বায়ুমণ্ডলীয় চাপ $= 1.013 \times 10^5\ Nm^{-2}$]।

ধরি নির্ণেয় গুণাঙ্ক = K

আমরা পাই, $K = \frac{\text{আয়তন পীড়ন}}{\text{আয়তন বিকৃতি}} = \frac{F}{A} \times \frac{V}{v}$ ... ... (i)

সমীকরণ (i)-এ মানগুলো বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$K = \frac{20 \times 1.013 \times 10^5 Nm^{-2}}{\frac{1}{10000}}$$

$$= 2.026 \times 10^{10} Nm^{-2}$$

এখানে,
আয়তন পীড়ন,
$\frac{F}{A} = 20$ বায়ুমণ্ডলীয় চাপ
$= 20 \times 1.013 \times 10^5\ Nm^{-2}$
আয়তন বিকৃতি,
$\frac{v}{V} = 0.01\% = \frac{0.01}{100} = \frac{1}{10000}$

৭.৯ পয়সনের অনুপাত
Poisson's ratio

পূর্বে আলোচিত তিনটি স্থিতিস্থাপক ধ্রুবক ছাড়া আরও একটি বিশেষ ধরনের স্থিতিস্থাপক ধ্রুবক আছে। এটি আবিষ্কার করেন বিজ্ঞানী পয়সন। তাঁর নামানুসারে এই ধ্রুবকের নাম দেওয়া হয়েছে **পয়সন-এর অনুপাত।**

কোনো একটি তারের এক প্রান্ত দৃঢ় অবলম্বনের সাথে আটকিয়ে অন্য প্রান্তে বল প্রয়োগ করে টানলে দৈর্ঘ্য বিকৃতির সঙ্গে সঙ্গে পার্শ্ব বিকৃতি ঘটে অর্থাৎ তারের ব্যাস বা ব্যাসার্ধ কমে যায়। পয়সন-এর পরীক্ষা এবং প্রাপ্ত ফলাফল অনুসারে স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে বস্তুর পার্শ্ব বিকৃতি ও দৈর্ঘ্য বিকৃতির অনুপাত একটি ধ্রুব রাশি।

অর্থাৎ, $\frac{\text{পার্শ্ব বিকৃতি}}{\text{দৈর্ঘ্য বিকৃতি}}$ = **ধ্রুবক।** এই ধ্রুবককে 'σ' দ্বারা সূচিত করা হয়। এর নাম **পয়সন-এর অনুপাত।**

$$\therefore \sigma = \frac{\text{পার্শ্ব বিকৃতি}}{\text{দৈর্ঘ্য বিকৃতি}}$$

ব্যাখ্যা : মনে করি, একটি তারের আদি দৈর্ঘ্য 'L' এবং ব্যাসার্ধ 'r' [চিত্র ৭.১৮]। তারটির এক প্রান্ত দৃঢ় অবলম্বনের সাথে আটকিয়ে নিম্ন প্রান্তে বল প্রয়োগ করে টানলে দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পাবে এবং পার্শ্ব হ্রাস পাবে। মনে করি দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পেয়ে L' হলো এবং ব্যাসার্ধ হ্রাস পেয়ে r' হলো।

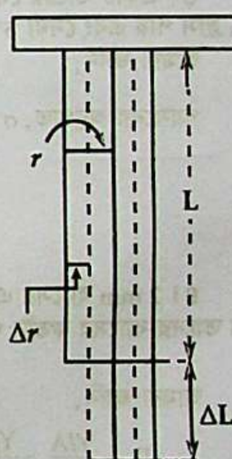
অতএব, দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি $= L' - L = \Delta L$

এবং ব্যাসার্ধ হ্রাস $= r - r' = \Delta r$

সুতরাং, পার্শ্ব বিকৃতি $= \frac{\Delta r}{r}$ এবং দৈর্ঘ্য বিকৃতি $= \frac{\Delta L}{L}$

$$\therefore \text{পয়সন-এর অনুপাত, } \sigma = \frac{\text{পার্শ্ব বিকৃতি}}{\text{দৈর্ঘ্য বিকৃতি}} \quad \ldots \quad \ldots \quad (7.20)$$

$$= \frac{\Delta r/r}{\Delta L/L} = \frac{L}{r}\frac{\Delta r}{\Delta L}$$



চিত্র ৭.১৮

ΔL ধনাত্মক হলে Δr ঋণাত্মক হয়। আবার ΔL ঋণাত্মক হলে Δr ধনাত্মক হয়।

$$\therefore \sigma = -\frac{L}{r}\frac{\Delta r}{\Delta L} \quad \ldots \quad \ldots \quad (7.21)$$

পয়সন-এর অনুপাত কেবলমাত্র কঠিন পদার্থেরই বৈশিষ্ট্য।

σ-এর মান : কোনো পদার্থের পয়সন-এর অনুপাত -1 হতে $\frac{1}{2}$ এর মধ্যবর্তী, অর্থাৎ $-1 < \sigma < \frac{1}{2}$।

মাত্রা ও একক : পয়সনের অনুপাত দুটি বিকৃতির অনুপাত, তাই এর কোনো মাত্রা ও একক নেই।

তাৎপর্য : তামার পয়সনের অনুপাত 0.33 বলতে বুঝায় যে স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে দৈর্ঘ্য বরাবর বল প্রয়োগ করলে পার্শ্ব বিকৃতি ও দৈর্ঘ্য বিকৃতির অনুপাত 0.33 হয়।

σ এর মান -1 অপেক্ষা বেশি এবং $\frac{1}{2}$ অপেক্ষা কম হয়। অর্থাৎ σ এর মান -1 হতে $\frac{1}{2}$ এর মধ্যে অবস্থিত ($-1 < \sigma < \frac{1}{2}$)। কিন্তু বাস্তবে σ এর ঋণাত্মক মান সম্ভব নয়। তাই σ এর বাস্তব মানের সীমা $0 < \sigma < \frac{1}{2}$। প্রকৃতপক্ষে দেখা যায় σ-এর মান 0.2 থেকে 0.4 এর মধ্যে থাকে।

পয়সনের অনুপাত স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক নয়; এটি একটি স্থিতিস্থাপক ধ্রুবক। এই অনুপাত কেবল বস্তুর উপাদানের ওপর নির্ভর করে। পয়সনের অনুপাত শুধুমাত্র কঠিন পদার্থের বৈশিষ্ট্য, তরল বা গ্যাসের জন্য এই অনুপাত নেই।

গাণিতিক উদাহরণ ৭.৪

১। 150 cm দৈর্ঘ্যের একটি ধাতব তারের এক প্রান্ত আটকে রেখে অপর প্রান্তে ভার ঝুলালে 2 mm দৈর্ঘ্য প্রসারণ হয়। তারের ব্যাস 1 mm এবং তারের উপাদানের পয়সনের অনুপাত 0·24 হলে প্রসারিত অবস্থায় তারটির ব্যাসের পরিবর্তন নির্ণয় কর।

আমরা জানি, $\sigma = \dfrac{\Delta d / d}{\Delta l / L}$

$\therefore$ তারের ব্যাসের পরিবর্তন, $\Delta = \dfrac{\sigma \times \Delta l \times d}{l} = \dfrac{0{\cdot}24 \times 0{\cdot}2 \times 0{\cdot}1}{150}$

$= 3{\cdot}2 \times 10^{-5}$ cm

এখানে,
তারের দৈর্ঘ্য, $l = 150$ cm
দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি, $\Delta l = 2$ mm $= 0{\cdot}2$ cm
তারের ব্যাস, $d = 1$ mm $= 0{\cdot}1$ cm
$\Delta d = ?$

২। 1m দীর্ঘ কোনো তারের ব্যাস 5 mm। তারের দৈর্ঘ্য বরাবর একটি বল প্রয়োগ করায় এর ব্যাস 0·01 mm হ্রাস পায় এবং দৈর্ঘ্য 2 cm বৃদ্ধি পায়। পয়সনের অনুপাত নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

পয়সনের অনুপাত, $\sigma = \dfrac{\text{ব্যাস বিকৃতি}}{\text{দৈর্ঘ্য বিকৃতি}} = \dfrac{\frac{d}{D}}{\frac{l}{L}} = \dfrac{d \times L}{D \times l}$

$\therefore \sigma = \dfrac{0{\cdot}001 \times 100}{0{\cdot}5 \times 2} = 0{\cdot}1$

এখানে,
$L = 1$ m $= 100$ cm
$l = 2$ cm
$D = 5$ mm $= 0{\cdot}5$ cm
$d = 0{\cdot}01$ mm $= 0{\cdot}001$ cm
$\sigma = ?$

৩। একটি তারের দৈর্ঘ্য 2 m এবং ব্যাস 5 mm। তারের দৈর্ঘ্য বরাবর একটি বল প্রয়োগ করায় এর ব্যাস 0·01 mm হ্রাস পায় এবং দৈর্ঘ্য 5% বৃদ্ধি পায়। পয়সনের অনুপাত কত হবে ?

আমরা জানি,

পয়সনের অনুপাত, $\sigma = \dfrac{dL}{Dl} = \dfrac{1 \times 10^{-5} \times 2}{5 \times 10^{-3} \times 0{\cdot}1}$

$= \dfrac{2 \times 10^{-5}}{0{\cdot}5 \times 10^{-3}}$

$= 4 \times 10^{-2} = {\cdot}04$

এখানে,
আদি দৈর্ঘ্য, $L = 2$ cm
ব্যাস, $D = 5$ mm $= 5 \times 10^{-3}$ m
হ্রাসকৃত ব্যাস, $d = 0{\cdot}01$ mm $= 1 \times 10^{-5}$ m
দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি, $l = L \times 5\% = \dfrac{2 \times 5}{100} = 0{\cdot}1$ m
পয়সনের অনুপাত, $\sigma = ?$

৪। 2 mm ব্যাসের একটি ইস্পাতের তারের দৈর্ঘ্য 15% বৃদ্ধি করতে কত KN বল প্রয়োগ করতে হবে ? এর ফলে তাদের ব্যাসের কতটা পরিবর্তন হবে ? [ইস্পাতের ইয়ং এর গুণাঙ্ক 2×10^{11} N/m² এবং পয়সনের অনুপাত 0·25]

[BUET Admission Test, 2017-18]

আমরা জানি,

$F = \dfrac{YlA}{L} = \dfrac{Yl \times \pi r^2}{L}$

$= \dfrac{2 \times 10^{11} \times 0{\cdot}15\,L \times 3{\cdot}14 \times 10^{-6}}{L}$

$= 2 \times 10^{11} \times 0{\cdot}15 \times 3{\cdot}14 \times 10^{-6}$

$= 9{\cdot}42 \times 10^{4}$ N $= 94{\cdot}2$ KN

$\sigma = \dfrac{dL}{Dl}$

বা, $d = \dfrac{\sigma D l}{L} = \dfrac{0{\cdot}25 \times 2 \times 0{\cdot}15\,L}{L} = 0{\cdot}075$ mm

এখানে,
$l = 15\% L = \dfrac{15}{100} L = 0{\cdot}15\,L$
$r = \dfrac{D}{2} = \dfrac{2 \times 10^{-3}}{2}$ m $= 1 \times 10^{-3}$ m
$Y = 2 \times 10^{10}$ Nm⁻²
$\sigma = 0{\cdot}25$
$d = ?$

৭·৯·১ স্থিতিস্থাপক ধ্রুবকগুলোর মধ্যে সম্পর্ক
Relation among the elastic constants

ইয়ং-এর গুণাঙ্ক Y, দৃঢ়তা গুণাঙ্ক n, আয়তন গুণাঙ্ক K এবং পয়সন-এর অনুপাত σ-এর মধ্যে নিম্নোক্ত সম্পর্ক রয়েছে :

(ক) Y, K ও σ-এর মধ্যে সম্পর্ক : $Y = 3K(1 - 2\sigma)$

(খ) Y, n ও σ-এর মধ্যে সম্পর্ক : $Y = 2n(1 + \sigma)$

(গ) K, n ও σ-এর মধ্যে সম্পর্ক : $\sigma = \dfrac{3K - 2n}{6K + 2n}$

(ঘ) Y, K ও n-এর মধ্যে সম্পর্ক : $\frac{9}{Y} = \frac{1}{K} + \frac{3}{n}$

ওপরের সম্পর্কগুলো পর্যালোচনা করলে দেখা যায় যে, কোনো দুটি ধ্রুবক রাশির মান জানা থাকলে অপর দুটি রাশির মান নির্ণয় করা যায়।

গাণিতিক উদাহরণ ৭.৫

১। একটি পদার্থের পয়সনের অনুপাত σ। যদি ওই পদার্থের তৈরি কোনো তারের দৈর্ঘ্য বিকৃতি e হয়, তাবে দেখাও যে ওই পদার্থের আয়তন বিকৃতি $e(1-2\sigma)$।

তারটির দৈর্ঘ্য l এবং ব্যাসার্ধ r হলে, আয়তন

$$V = \pi r^2 l \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

সমীকরণ (i) কে অবকলন করে পাই,

$$dV = \pi r^2 dl + \pi l.2rdr$$

বা, $$dV = \pi r^2 l\left(\frac{dl}{l} + 2\cdot\frac{dr}{r}\right) = V\left(\frac{dl}{l} + 2\frac{dr}{r}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{dV}{V} = \frac{dl}{l}\left(1 + 2\frac{\frac{dr}{r}}{\frac{dl}{l}}\right)$$

$$= e(1-2\sigma) \qquad \left[\because e = \frac{dl}{l},\ \sigma = \frac{\frac{dr}{r}}{\frac{dl}{l}}\right]$$

অতএব ওই পদার্থের আয়তন বিকৃতি = $e(1-2\sigma)$ (প্রমাণিত)

২। L দৈর্ঘ্যের একটি স্প্রিং-এর বল ধ্রুবক K। এটিকে এমনভাবে ভাগ করা হলো যেন $L_1 = L_2 n$। (n একটি পূর্ণ সংখ্যা) অংশ দুটির বল ধ্রুবক K_1 ও K_2 নির্ণয় কর।

আমরা জানি, $K \propto \frac{1}{l}$

$$\therefore \quad \frac{K_1}{K_2} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{1}{n} \qquad \left[\because \frac{l_1}{l_2} = n\right]$$

এখন, $K_1 l_1 = Kl = K(l_1 + l_2) = K\left(l_1 + \frac{l_1}{n}\right) = Kl_1\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$$\therefore \quad K_1 = \frac{K}{n}(n+1)$$

অনুরূপভাবে, $K_2 l_2 = Kl_2(n+1)$

$$\therefore \quad K_2 = K(n+1)$$

৭.১০ ব্যবহারিক
Experimental

পরীক্ষণের নাম : পিরিয়ড : ২	ইয়ং-এর স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক নির্ণয় Determination of Young's Modulus

মূলতত্ত্ব (Theory) : ইয়ং গুণাঙ্ক বলতে স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে দৈর্ঘ্য পীড়ন এবং দৈর্ঘ্য বিকৃতির অনুপাতকে বুঝায়। একে Y দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

L দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট এবং A প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি তারের নিম্ন প্রান্তে m ভরবিশিষ্ট একটি বোঝা চাপিয়ে তাকে টেনে l পরিমাণ বর্ধিত করলে,

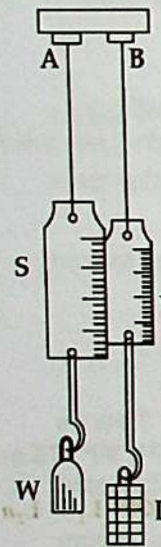
দৈর্ঘ্য পীড়ন = $\frac{F}{A} = \frac{mg}{A}$ এবং দৈর্ঘ্য বিকৃতি = $\frac{l}{L}$; এখানে g = অভিকর্ষজ ত্বরণ

$\therefore$ ইয়ং গুণাঙ্কের সূত্রানুসারে, $Y = \frac{\text{দৈর্ঘ্য পীড়ন}}{\text{দৈর্ঘ্য বিকৃতি}} = \frac{F/A}{l/L}$ বা, $Y = \frac{mg/A}{l/L} = \frac{mgL}{Al}$

যদি প্রযুক্ত বল এবং প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল C. G. S. পদ্ধতিতে প্রকাশ করা হয় তবে, $Y = \frac{mgL}{Al}$ ডাইন/বর্গ সেমি। আবার, তারটির ব্যাসার্ধ r হলে $A = \pi r^2$ $\therefore Y = \frac{mgL}{\pi r^2 l}$ নিউটন/মিটার² (Nm^{-2}) ... ... (i)

যন্ত্রপাতি (Apparatus) : (১) ভার্নিয়ার যন্ত্র, (২) মিটার স্কেল, (৩) স্ক্রু গজ এবং (৪) প্রয়োজনীয় বাটখারা।

কার্যপদ্ধতি বা কাজের ধারা (Working procedure) :



চিত্র ৭.১৯

(১) প্রথমত যন্ত্রের ভার্নিয়ার স্থিরাঙ্ক নির্ণয় করা হয়। এর পর পরীক্ষণীয় তারের ওজন আঁকশি বা অঙ্কুশে (hook) একটি ভার চাপিয়ে একে টান টান করা হয়। প্রয়োজন-বোধে সাহায্যকারী তারেও এ ব্যবস্থা নেয়া হয়। এই ভারকে প্রাথমিক ভার বা মৃত ভার (Dead load) বলে অভিহিত করা হয়। পরিশেষে ভার্নিয়ার স্কেলের সাহায্যে মূল স্কেলে একটি পাঠ নেয়া হয়।

(২) স্ক্রু-গজের সাহায্যে পরীক্ষণীয় তারের বিভিন্ন স্থানের ব্যাস বের করে গড় মান নির্ণয় করা হয়। গড় মানকে 2 দ্বারা ভাগ করে ব্যাসার্ধ r নির্ণয় করা হয় এবং প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল $A = \pi r^2$ বের করা হয়।

(৩) পরীক্ষণীয় তারের অসহ পীড়নকে (Breaking stress) তার প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল দ্বারা গুণ করে অসহ ভার (Breaking weight) নির্ণয় করা হয়।

(৪) মিটার স্কেলের সাহায্যে পরীক্ষণীয় তারের ঝুলন্ত বিন্দু হতে ভার্নিয়ারের 0 দাগ পর্যন্ত দূরত্ব পরিমাপ করা হয়। এটাই তারের আদি দৈর্ঘ্য L।

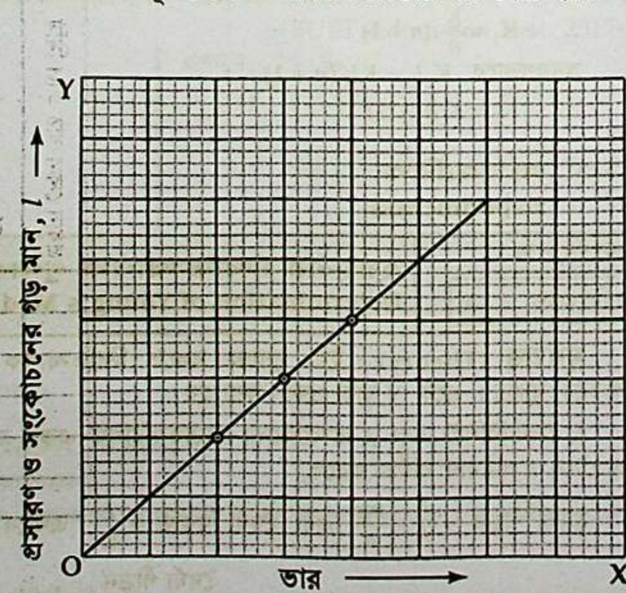
(৫) এবার অর্ধ কিংবা এক কিলোগ্রাম করে ভার চাপিয়ে তারের দৈর্ঘ্য মূল স্কেল ও ভার্নিয়ার স্কেল হতে নেয়া হয়।

(৬) এভাবে ভার ক্রমাগত নির্দিষ্ট হারে বাড়িয়ে (লক্ষ রাখতে হবে ভার যেন অসহ ভারের অর্ধেকের বেশি না হয়) মূল স্কেল এবং ভার্নিয়ার স্কেলের পাঠ হতে তারের প্রসারণ নির্ণয় করা হয়। প্রতিবারেই প্রথম মান বিয়োগ করে প্রদত্ত ভারের জন্য তারের প্রসারণ বের করা হয়।

(৭) এভাবে ভার বাড়িয়ে এবং পরে একই হারে ভার কমিয়ে মূল স্কেল ও ভার্নিয়ার স্কেলের পাঠ নেয়া হয়।

(৮) পরে একই ভারের জন্য তারের প্রসারণ ও সংকোচনের গড় মান l বের করা হয়। l এর গড় মানগুলো সূত্র (i)-এ বসিয়ে পরীক্ষণীয় তারের গুণাঙ্ক বের করা হয়।

(৯) কখনও কখনও প্রযুক্ত ভারকে X-অক্ষে এবং তাদের সংশ্লিষ্ট সংকোচন ও প্রসারণের গড় মান Y-অক্ষে স্থাপন করে একটি লেখ অঙ্কন করা হয়। লেখটি একটি সরলরেখা হবে। এ সরলরেখাই হুকের সূত্রের সত্যতা প্রমাণ করে। উক্ত সরল-রেখার যে কোন একটি বিন্দু হতে X এবং Y-অক্ষের উপর লম্ব অঙ্কন করা হয়। লম্বগুলোর পাদবিন্দু হতে ভার এবং প্রসারণের মান জেনে $Y = \frac{mgL}{\pi r^2 l}$ সমীকরণ হতে ইয়ং গুণাঙ্ক Y-এর মান নির্ণয় করা হয়।



চিত্র ৭.২০

পর্যবেক্ষণ ও সন্নিবেশন (Observation and Manipulation) :

স্ক্রু-গজের লঘিষ্ঠ ধ্রুবক = ... মিমি = ... সেমি

ভার্নিয়ার স্থিরাঙ্ক = ... মিমি = ... সেমি

ছক নম্বর 1 (তারের ব্যাসার্ধের জন্য)

পর্যবেক্ষণ সংখ্যা		প্রধান স্কেল পাঠ = M মিমি	চক্রাকার স্কেল পাঠ = C	লঘিষ্ঠ ধ্রুবক = K মিমি	খণ্ড অংশ F = C × K মিমি	মোট = M + F মিমি	গড় ব্যাস = d মিমি	যান্ত্রিক ত্রুটি $\pm x$ মিমি	সংশোধিত ব্যাস = $d-(\pm x)$ মিমি	ব্যাসার্ধ $r = \frac{d}{2}$ মিমি
1	প্রথম পাঠ									
	লম্বিক পাঠ									
2	প্রথম পাঠ									
	লম্বিক পাঠ									
3	প্রথম পাঠ									
	লম্বিক পাঠ									

$\therefore$ ব্যাসার্ধ, $r = \frac{d}{2}$ মিমি = ... সেমি

$\therefore$ $A = \pi r^2$ বর্গ সেমি

ছক নম্বর 2 (প্রসারণের এবং সঙ্কোচনের জন্য)

পর্যবেক্ষণ সংখ্যা	কিলোগ্রামে ভার	ভার বাড়ানোর সময় পাঠ						ভার কমানোর সময় পাঠ							
		প্রধান স্কেল পাঠ = M মিমি	ভার্নিয়ার স্কেল পাঠ = V	ভার্নিয়ার স্থিরাঙ্ক K মিমি	খণ্ড অংশ, F = V × K মিমি	মোট = M + F মিমি	প্রসারণ মিমি	প্রধান স্কেল পাঠ = M মিমি	ভার্নিয়ার স্কেল পাঠ = V	ভার্নিয়ার স্থিরাঙ্ক K মিমি	খণ্ড অংশ, F = V × K মিমি	মোট = M + F মিমি	সঙ্কোচন মিমি	প্রসারণ ও সঙ্কোচনের গড় মিমি	প্রসারণ ও সঙ্কোচনের গড় মান সেমি
1															
2															
3															
4															
5															
6															

তারের আদি দৈর্ঘ্য, L = ... সেমি

লেখচিত্র হতে m = ... কিলোগ্রাম

প্রসারণ, l = ... সেমি।

হিসাব বা গণনা (Calculation) :

$Y = \frac{mgL}{\pi r^2 l}$ = ... ডাইন/বর্গ সেমি = ... Nm^{-2}

∴ নির্ণেয় ইয়ং গুণাঙ্ক, $Y = ... Nm^{-2}$

ফলাফল (Result) : প্রদত্ত তারের নির্ণেয় ইয়ং গুণাঙ্ক, $Y = \frac{mgL}{\pi r^2 l}$

$= ... ... Nm^{-2}$

সতর্কতা (Precautions) : এই পরীক্ষায় নিম্নলিখিত সতর্কতা অবলম্বন করা প্রয়োজন।

(১) তার দুটিকে একটি দৃঢ় অবলম্বন হতে ঝুলান উচিত।
(২) তার দুটি একই পরীক্ষাধীন পদার্থের হওয়া উচিত।
(৩) ব্যাস নিরূপণের সময় পরীক্ষণীয় তারের পরস্পর লম্বিক পাঠ নেয়া প্রয়োজন।
(৪) পরীক্ষণীয় তার স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে থাকা উচিত।
(৫) অসহ পীড়ন ও অসহ ভার সর্বাগ্রে বের করা উচিত।
(৬) দ্রুত ভার কমানো ঠিক নয়, প্রতি বার কিছু সময় অপেক্ষা করতে হবে।

আলোচনা (Discussions) :

(১) পরীক্ষাধীন তার আগাগোড়া সমান প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট না হলে ফলাফল ত্রুটিপূর্ণ হবে।
(২) তার দুটি একই পদার্থের না হলে ফলাফল সঠিক হবে না।
(৩) দৈর্ঘ্য প্রসারণ ও সঙ্কোচন সতর্কতার সাথে পরিমাপ করা না হলে ফলাফল নির্ভুল হবে না।

৭·১১ প্রবাহীর প্রবাহ
Flow of fluids

আমরা জানি পদার্থ দুই প্রকার। একটি কঠিন (solid) অপরটি প্রবাহী (fluid)। প্রবাহী আবার দুই প্রকার; যথা—তরল (liquid) এবং গ্যাস (gas)। যেকোনো প্রবাহী এক স্থান হতে অন্য স্থানে গমন করে। মেঝের উপর পানি ফেলে দেখবে তা এক স্থানে স্থির থাকে না। মেঝের ওপর দিয়ে গড়িয়ে এক স্থান থেকে অন্য স্থানে যায়। আবার গ্যাস ভর্তি বেলুনের মুখ খুলে দিলে তা সাথে সাথে চারদিকে ছড়িয়ে পড়ে। গ্যাস ছড়িয়ে পড়ল কি-না আমরা বুঝতে পারি না। তবে H_2S বা কটু গন্ধযুক্ত কোনো গ্যাস বেলুন থেকে ছেড়ে দিলে দেখব মুহূর্তের মধ্যে তা চারদিকে ছড়িয়ে পড়ে এবং আশপাশের স্থান দুর্গন্ধময় হয়ে পড়ে। এ থেকে আমরা সহজে বুঝতে পারি গ্যাস এক স্থান থেকে অন্য স্থানে ধাবিত হয়েছে। **প্রবাহীর এক স্থান থেকে অন্য স্থানে গমন করাকে প্রবাহীর প্রবাহ বলে।**

প্রবাহ যদি অসংনম্য (incompressible) হয় এবং এর মধ্যে কোনো অভ্যন্তরীণ বাধা বা সান্দ্রতা (viscosity) না থাকে তবে তাকে আদর্শ প্রবাহী বলে। কার্যত সকল তরলই অসংনম্য, কাজেই তরল পদার্থ প্রবাহীর মতো ক্রিয়া করে। গ্যাস একটি উচ্চ সংনম্য প্রবাহী। কারণ গ্যাসকে সহজে বন্ধ পাত্রে প্রবেশ করানো যায়। প্রবাহীর প্রবাহ অবিচল বা স্থিতিশীল বা অস্থিতিশীল হতে পারে। যেকোনো বিন্দুতে প্রবাহীর বেগ যদি সময়ের সাথে অপরিবর্তিত থাকে তবে প্রবাহীর এই গতিকে স্থিতিশীল বা অবিচল (steady) গতি বলে। যেমন ধীরে প্রবাহিত স্রোত। অপরপক্ষে প্রবাহীর বেগ সময়ের সাথে যদি অপেক্ষক হয় অর্থাৎ সময় থেকে সময়ে ও বিন্দু থেকে বিন্দুতে পরিবর্তিত হয় তাকে অস্থিতিশীল প্রবাহ বলে। যেমন সমুদ্রে সৃষ্ট পানির প্রবাহ। প্রবাহী সান্দ্র ও অসান্দ্র দুইই হতে পারে। প্রবাহীর সান্দ্রতা ধর্ম কঠিন বস্তুর গতিতে ঘর্ষণ ধর্মের মতো।

৭·১১·১ প্রবাহীর প্রকারভেদ
Kinds of fluids

প্রবাহীর প্রবাহ বিভিন্ন প্রকার হতে পারে—

(ক) সম প্রবাহ (Uniform motion) : যদি সর্বক্ষণ প্রবাহীর বেগ ধ্রুব থাকে, তবে তাকে সম প্রবাহ বলে।

(খ) অসম প্রবাহ (Non-uniform motion) : যদি সর্বক্ষণ প্রবাহীর বেগ একই না থাকে, তবে তাকে অসম প্রবাহ বলে।

(গ) স্থির প্রবাহ (Steady motion) : যদি সর্বত্র প্রবাহীর বেগ সমান থাকে, তবে তাকে স্থির প্রবাহ বলে।

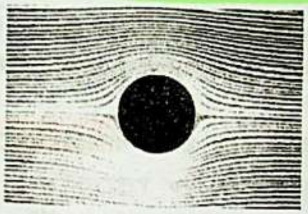
(ঘ) অস্থির প্রবাহ (Unsteady motion) : যদি সর্বত্র প্রবাহীর বেগ সমান না থাকে, তবে তাকে অস্থির প্রবাহ বলে।

(ঙ) সমরেখ বা স্রোতরেখ বা শান্ত প্রবাহ (Streamline motion) : তরলের প্রবাহকালে প্রবাহ পথের প্রত্যেক বিন্দুতে প্রবাহের বেগের মান ও দিক যদি সর্বদা অপরিবর্তিত থাকে তবে সেই প্রবাহকে সমরেখ বা স্রোতরেখ বা শান্ত প্রবাহ বলে।

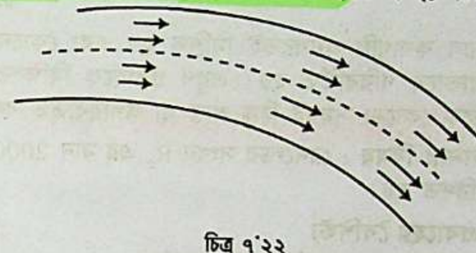
(চ) বিক্ষিপ্ত বা অশান্ত প্রবাহ (Turbulent motion) : যদি প্রবাহ পথের যে কোনো বিন্দুতে বেগের মান ও দিক নির্দিষ্ট না থাকে, এলোমেলোভাবে পরিবর্তিত হয় তবে ওই ধরনের প্রবাহকে বিক্ষিপ্ত বা অশান্ত প্রবাহ বলে।

৭·১১·২ ধারারেখ প্রবাহ বা স্রোতরেখ প্রবাহ
Streamline motion

আমরা জানি, অবিচল প্রবাহে কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে বেগ সময়ের সাথে অপরিবর্তিত থাকে। প্রবাহী বস্তু যদি এমনভাবে প্রবাহিত হয় যে, গতিপথের যেকোনো বিন্দুতে সবসময় এর বেগ, চাপ ও ঘনত্ব অপরিবর্তিত থাকে তবে ওই প্রবাহকে ধারারেখ বা স্থির প্রবাহ বলে। প্রবাহী বস্তুর স্থির প্রবাহের সময় এর প্রত্যেকটি কণার গতিপথ সামগ্রিক তরলের গতিপথের অভিমুখের সাথে মিশে যায়, অর্থাৎ কণাগুলির গতিপথ পরস্পরের সমান্তরাল হয়। ৭·২১ চিত্রে একটি



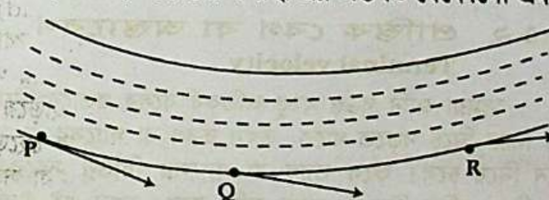
চিত্র ৭·২১



চিত্র ৭·২২

গ্যাস সিলিন্ডারের মধ্যে গ্যাসের ধারারেখ প্রবাহ দেখানো হলো এবং ৭·২২ চিত্রে একটি পাইপ-এর মধ্য দিয়ে পানির ধারারেখ প্রবাহ দেখানো হলো।

অন্যভাবে বলা যায়, যে প্রবাহীর প্রতি বেগের বিভিন্ন বিন্দুতে প্রবাহীর কণিকাগুলোর গতিবেগ সময়ের সাথে অপরিবর্তিত থাকে তাকে ধারারেখ প্রবাহ বলে। ধারারেখ প্রবাহে প্রবাহিত কোনো প্রবাহী এর অন্তর্গত যেকোনো একটি ক্ষুদ্র কণা যে পথ অনুসরণ করে চলে এবং যার যেকোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক প্রবাহীর বেগের দিক নির্দেশ করে তাই ধারারেখ প্রবাহ। সুষম প্রস্থচ্ছেদের একটি নল বিবেচনা কর। মনে কর এই নলের মধ্য দিয়ে সুষম বেগে পানি প্রবাহিত হচ্ছে। এক্ষেত্রে পানির স্রোত নলের অক্ষের সমান্তরাল হয়। এখন যদি বিভিন্ন বিন্দুতে কোনো একটি কণার বেগের মান বা দ্রুতি নির্ণয় কর তাহলে দেখবে প্রত্যেক বিন্দুতে এই মান সমান হবে অথবা অন্যভাবে



চিত্র ৭·২৩

আমরা ভাবতে পারি সকল কণা P, Q, R বিন্দুকে একই দ্রুতিতে অতিক্রম করে [চিত্র ৭·২৩]। তীর চিহ্ন দ্বারা ওই বিন্দুতে বেগের দিক দেখানো হয়েছে। আমাদের শরীরে ধমনীতে রক্ত সঞ্চালন প্রবাহও একটি ধারারেখ প্রবাহ।

কোনো ধারারেখ প্রবাহে কোনো একটি ক্ষুদ্রতল নিয়ে তলের পরিসীমা বরাবর ধারারেখগুলো টানলে একে অপরকে ছেদ করে না। ফলে স্রোতরেখার সকল স্থানে স্রোতরেখার বিন্যাস সময়ের সাথে স্থির থাকে। এই রকম প্রবাহ নলের বিন্যাস সময়ের সাথে স্থির থাকে। এই রকম প্রবাহ নলের সীমান্তরেখা ধারারেখ দিয়ে তৈরি এবং সর্বদা প্রবাহ কণিকার বেগের সমান্তরাল হয় [চিত্র ৭·২৩]। সুতরাং, কোনো প্রবাহই প্রবাহ নলের সীমান্ত অতিক্রম করতে পারে না। ফলে এই প্রবাহ প্রবাহ নলের মধ্যে এক প্রান্ত দিয়ে প্রবেশ করে অপর প্রান্ত দিয়ে তা বের হয়ে যাবে। **সর্বাধিক যে বেগ পর্যন্ত কোনো তরলের প্রবাহ ধারারেখ প্রবাহ বজায় রাখে সেই বেগকে সংকট বেগ (critical velocity) বলে।**

ধারারেখ প্রবাহের বৈশিষ্ট্য
Characteristics of streamline motion

(i) ধারারেখ প্রবাহে কণার গতিপথ সরল বা বক্ররেখা হতে পারে। বক্ররেখার কোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক প্রবাহী বস্তুর দিক নির্দেশ করে।

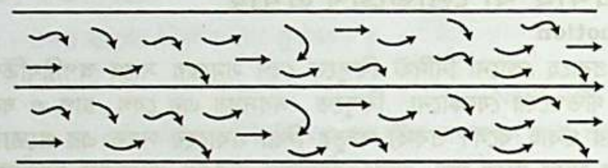
(ii) কণাগুলির গতিরেখা পরস্পর ছেদ করতে পারে না।

(iii) বেগ বেশি হলে গতিরেখাগুলি ঘন হয়ে যায়।

৭·১১·৩ বিক্ষিপ্ত প্রবাহ
Turbulent motion

নদীতে চলার সময় মাঝে মাঝে ঘূর্ণিচক্র দেখা যায়। আবার সমুদ্রের জলোচ্ছ্বাসও কেউ কেউ দেখে থাকতে পার। দেখা যায় যে, পানির কণাগুলো বিক্ষিপ্তভাবে উপরে-নিচে বা ডানে-বামে ছুটাছুটি করে। এক্ষেত্রে প্রবাহীর স্তর পরস্পরের

সমান্তরাল হয় না। অর্থাৎ যদি প্রবাহীর স্তর পরস্পরের সমান্তরালে না চলে, বরং গতিতে আবর্ত ও ঘূর্ণির সৃষ্টি হয়, তবে তাকে বিক্ষিপ্ত প্রবাহ বা বিশৃঙ্খল প্রবাহ বলে। বিক্ষিপ্ত প্রবাহে চলমান প্রবাহীর কণাগুলি তার পূর্ববর্তী কণার বেগ ও গতিপথ অনুসরণ করে না [চিত্র ৭·২৪]।



চিত্র ৭·২৪

তরল কণাগুলি অনবরতই মিশ্রিত হয় এবং কোনোও এক স্থানে তরলের বেগ এর মান ও অভিমুখ দুইই দ্রুত এলোমেলোভাবে পরিবর্তিত হয়। এরূপ প্রবাহকে বিক্ষিপ্ত প্রবাহ বলে। বিক্ষিপ্ত প্রবাহ মূলত দ্রুত পরিবর্তনশীল এবং সেজন্য একে কোনো সময়ই ঠিক শান্ত বা অপরিবর্তিত বলা চলে না।

জানার বিষয় : রেনল্ডের সংখ্যা R_e এর মান 2000-3000 এর মধ্যে হলে তরল প্রবাহ ধারারেখ থেকে বিক্ষিপ্ত প্রবাহে পরিণত হয়।

বিক্ষিপ্ত প্রবাহের বৈশিষ্ট্য
Characteristics of turbulent motion

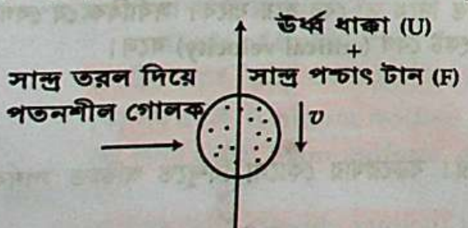
(i) প্রবাহীর স্তরগুলি পরস্পর সমান্তরাল হয় না।
(ii) বিক্ষিপ্ত প্রবাহে চলমান প্রবাহীর কণাগুলির বেগ বিভিন্ন।
(iii) বেগ বেশি হলে গতিরেখাগুলি ঘূর্ণিপাকের মতো হয়।
(iv) বিক্ষিপ্ত প্রবাহ সর্বদা অশান্ত হয়।

৭·১২ প্রান্তিক বেগ বা অন্ত্যবেগ
Terminal velocity

আমরা জানি পড়ন্ত বস্তু অভিকর্ষ বলের প্রভাবে নিচের দিকে পড়ে। সুতরাং যখন কোনো বস্তু তরল বা গ্যাসের মধ্য দিয়ে নিচে পড়তে থাকে, তখন তরল বা গ্যাসের যে স্তরগুলো বস্তুর সংস্পর্শে আসে, তাদেরকেও তা নিজের সাথে টেনে নিয়ে চলে। ফলে তরল বা গ্যাসের বিভিন্ন স্তরের মধ্যে আপেক্ষিক বেগ সৃষ্টি হয়। মাধ্যমের সান্দ্রতা ওই আপেক্ষিক গতির বিরুদ্ধে বাধার সৃষ্টি করে। যখন এই ঊর্ধ্বমুখি সান্দ্রতা জনিত বল বস্তুর গতি সৃষ্টিকারী বলের সমান হয়, তখন বস্তুর ওপর মোট কার্যকর বলের পরিমাণ শূন্য হয় এবং বস্তুটি স্থির বেগে মাধ্যমের ভেতর দিয়ে পড়তে থাকে। পতনশীল বস্তুর এই স্থির বেগকে প্রান্তিক বেগ বা অন্ত্যবেগ বলে।

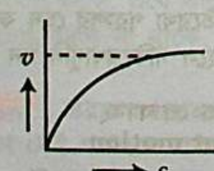
সংজ্ঞা : কোনো সান্দ্র প্রবাহী দিয়ে যদি কোনো গোলক অভিকর্ষের প্রভাবে পতিত হয় তাহলে শুরুতে অভিকর্ষজ ত্বরণের জন্য এর বেগ বৃদ্ধি পেতে থাকে কিন্তু যুগপৎভাবে এর ওপর বাধাদানকারী বল F বৃদ্ধি পায় ফলে বস্তুটির নিট ত্বরণ কমতে থাকে। এক পর্যায়ে বস্তুর নিট ত্বরণ শূন্য হয়। বস্তুটি তখন ধ্রুব বেগ নিয়ে পতিত হতে থাকে। তখন এই বেগকে প্রান্তিক বেগ বা অন্ত্যবেগ বলে।

স্টোক্স-এর সূত্র থেকে দেখা যায় যে, কোনো বস্তুর ওপর বাধাদানকারী বল এর বেগের সমানুপাতিক। যদি $v = 0$ হয় তাহলে $F = 0$ হবে। আবার v বাড়লে F এর মানও বাড়বে। এ থেকে বলা যায় যে, সান্দ্র প্রবাহীর মধ্যে কোনো ধাতব গোলককে পতিত হতে দিলে তার ওপর নিম্নমুখি বল তথা ওজন W, ঊর্ধ্বমুখি বল U + F এর চেয়ে বড় হয়। এখানে U = ঊর্ধ্বমুখি বল তথা প্লবতা, F = ঊর্ধ্বমুখি বাধাদানকারী তথা সান্দ্র পশ্চাৎ টান, ফলে গোলকটি নিম্নমুখি ত্বরণ লাভ করে [চিত্র ৭·২৫]। তখন গোলকটি নিচের দিকে চলতে থাকে। এর ওপর কোনো নিট বল কাজ করে না ফলে বেগ একটি ধ্রুব সর্বোচ্চ মান লাভ করে, ইহাই প্রান্তিক বেগ v।



চিত্র ৭·২৫

চিত্র ৭·২৫(ক)-এ তরলের মধ্য দিয়ে পতনশীল বস্তুর বেগ বনাম দূরত্বের লেখচিত্রে দেখানো হয়েছে।



চিত্র ৭·২৫(ক)

প্রান্তিক বেগের নির্ভরশীলতা :

(ক) প্রান্তিক বেগ কোনো নির্দিষ্ট স্থানে তরলের সান্দ্রতাঙ্কের ব্যস্তানুপাতিক। অর্থাৎ $v \propto \frac{1}{\eta}$

(খ) প্রান্তিক বেগ বস্তু ও তরলের ঘনত্বের সমানুপাতিক। অর্থাৎ $v \propto \rho$.

(গ) প্রান্তিক বেগ পড়ন্ত গোলকের ব্যাসার্ধের বর্গের সমানুপাতিক। অর্থাৎ $v \propto r^2$.

নিচের উদাহরণটি অনুধাবন করার চেষ্টা কর।

উপরের আলোচনা থেকে নিশ্চয় বুঝতে সক্ষম হবে যে, পতনশীল কোনো বস্তুর বেগ অভিকর্ষজ ত্বরণের জন্য বৃদ্ধি পেয়ে উচ্চ বেগ প্রাপ্ত হওয়ার কথা কিন্তু বাস্তবে তা হয় না কেন ?

অনুধাবনমূলক কাজ : পতনশীল বৃষ্টির ফোঁটা পতনের সময় এর বেগও বৃদ্ধি পাওয়ার কথা, কিন্তু প্রকৃতপক্ষে তা হয় না কেন ?

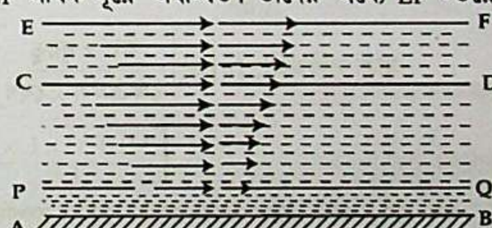
বৃষ্টির ফোঁটা বায়ুমণ্ডলের ভেতর দিয়ে পতনের সময় অভিকর্ষের কারণে এর বেগ বৃদ্ধি পেতে থাকে এবং সান্দ্রতার কারণে এর ওপর বায়ুমণ্ডলের বাধাদানকারী বলও বৃদ্ধি পায়। একসময় ফোঁটাটির নিট ত্বরণ শূন্য হয়। ফোঁটাটি তখন ধ্রুব বেগে পড়তে থাকে। এই বেগই অন্ত্যবেগ। সুতরাং অন্ত্যবেগ প্রাপ্তির কারণে অবাধে পতনশীল বৃষ্টির ফোঁটা উচ্চ বেগ প্রাপ্ত হয় না।

৭.১৩ সান্দ্রতা ও সান্দ্রতা গুণাঙ্ক বা সান্দ্রতা সহগ
Viscosity and co-efficient of viscosity

৭.১৩.১ সান্দ্রতা
Viscosity

সান্দ্রতা পদার্থের একটি বিশেষ ধর্ম। কেবল তরল ও বায়বীয় পদার্থেরই এই ধর্ম আছে। অতএব এটি তরল ও বায়বীয় পদার্থের সাধারণ ধর্ম। তবে এটি কী রকমের ধর্ম তাই আলোচ্য বিষয়।

কোনো একটি স্থির অনুভূমিক তলের ওপর দিয়ে কোনো একটি প্রবাহী ধারারেখ প্রবাহে চলতে থাকলে প্রবাহীর যে স্তর স্থির তল হতে অধিক দূরে অবস্থিত এর বেগ বেশি, যে স্তর স্থির তলের সাথে সংলগ্ন এর বেগ শূন্য। মনে করি AB একটি স্থির তল। এর ওপর দিয়ে একটি প্রবাহী ধারারেখ প্রবাহে চলছে। PQ, CD এবং EF হলো প্রবাহীর তিনটি স্তর [চিত্র ৭.২৬]। PQ স্থির তল সংলগ্ন, CD একটু দূরে এবং EF অধিক দূরে অবস্থিত। তাদের মধ্যে EF স্তরের বেগ বেশি, CD স্তরের বেগ এটি অপেক্ষা কম এবং PQ স্তরের বেগ শূন্য। এর কারণ ওপরের স্তর নিচের স্তরগুলোকে তাদের সাথে সমবেগে টেনে নিয়ে যাবার চেষ্টা করে। অর্থাৎ গতিশীল প্রবাহীর পাশাপাশি দুটি স্তরের মধ্যে এক ধরনের অভ্যন্তরীণ বল সৃষ্টি হয়। এই বল পাশাপাশি দুটি স্তরের মধ্যে বেশি বেগসম্পন্ন স্তরের বেগ কমিয়ে এবং কম বেগসম্পন্ন স্তরের বেগ বাড়িয়ে স্তর দুটির মধ্যে আপেক্ষিক বেগ কমাতে চেষ্টা করে। স্তর দুটির



চিত্র ৭.২৬

পৃষ্ঠদেশের সমান্তরালে ক্রিয়াশীল এই বলকে **সান্দ্রতা বল** (viscous force) বলা হয় এবং প্রবাহীর এই ধর্মকে **সান্দ্রতা** (viscosity) বলে।

সংজ্ঞা : যে ধর্মের দরুন প্রবাহী তার অভ্যন্তরস্থ বিভিন্ন স্তরের আপেক্ষিক বেগ বাধাগ্রস্ত হয় বা বেগ রোধ করার চেষ্টা করে তাকে ওই প্রবাহীর সান্দ্রতা বলে।

অথবা, যে ধর্মের ফলে তরল তার বিভিন্ন স্তরের আপেক্ষিক গতির বিরোধিতা করে তাকে তরলের সান্দ্রতা বলে।

বিভিন্ন প্রবাহীর সান্দ্রতা বিভিন্ন। যেমন দুধ, তেল এবং আলকাতরার সান্দ্রতা এক নয়। এদের মধ্যে আলকাতরার সান্দ্রতা সর্বাপেক্ষা বেশি, তারপর তেল এবং সর্বাপেক্ষা কম দুধের। অর্থাৎ আলকাতরা > তেল > দুধ > পানির সান্দ্রতা।

তরলকে যদি অনুভূমিক বা কাত করে রাখা নলের মধ্য দিয়ে গতিশীল করার চেষ্টা করা হয় তাহলেও প্রবাহের বিপরীত দিকে সান্দ্র বলের উদ্ভব হবে। সান্দ্রতাকে কখনও কখনও প্রবাহীর আঠাত্ব (adhesion of fluid) বলা হয়।

আমরা জানি একটি বস্তু যখন অন্য একটি বস্তুর ওপর দিয়ে গতিশীল হয় বা গতিশীল হতে চেষ্টা করে তখন বস্তু দুটির মিলন তলে বস্তুর গতির বিপরীত দিকে একটি বাধাদানকারী বল ক্রিয়া করে। এই বলের নাম ঘর্ষণ বা ঘর্ষণ বল। তেমনি কোনো একটি প্রবাহী তার বিভিন্ন স্তরের আপেক্ষিক গতির বিরোধিতা করে যে বল প্রয়োগ করে তাকে ওই প্রবাহীর সান্দ্রতা বলে।

বিজ্ঞানী নিউটনের অভিমত অনুসারে ধারারেখ প্রবাহের ক্ষেত্রে,

(i) সান্দ্রতা বল ক্ষেত্রফলের সমানুপাতিক। অর্থাৎ $F \propto A$

(ii) সান্দ্রতা বল বেগ অবক্রমের সমানুপাতিক। অর্থাৎ $F \propto \frac{dv}{dy}$

$\therefore$ আমরা পাই, $F \propto A \times \frac{dv}{dy}$

বা, $F =$ ধ্রুবক $\times A \frac{dv}{dy}$ বা, $F = \eta A \frac{dv}{dy}$ ... ... (7.22)

এখানে η (eta) একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক। একে সান্দ্রতা গুণাঙ্ক বলে।

যদি $A = 1$ (একক) এবং বেগ অবক্রম, $\frac{dv}{dy} = 1$ হয় তবে

সমীকরণ (7.13) হতে পাই, $F = \eta$

সমীকরণ (7.13) কে সান্দ্র তরলের ধারারেখ প্রবাহ সংক্রান্ত নিউটনের সূত্র বলা হয়। যে সকল তরল এই সূত্র মেনে চলে তাদেরকে নিউটনীয় তরল এবং যে সকল তরল মানে না সেগুলোকে অনিউটনীয় তরল বলে।

৭.১৩.২ সান্দ্রতা গুণাঙ্ক বা সান্দ্রতা সহগ
Co-efficient of viscosity

সংজ্ঞা : একক বেগ অবক্রমে কোনো একটি প্রবাহীর একক ক্ষেত্রফলের ওপর যে পরিমাণ সান্দ্রতা বল ক্রিয়া করে, তাকে ওই প্রবাহীর সান্দ্রতা গুণাঙ্ক বা সান্দ্রতা সহগ বলে। এই বল প্রবাহীর স্তরের স্পর্শক বরাবর ক্রিয়া করে।

অথবা, তরলে গতিবেগের একক নতিমাত্রা বজায় রাখতে প্রতি একক ক্ষেত্রফলে যে স্পর্শিনী বল প্রয়োজন তাকে ওই তরলের সান্দ্রতা গুণাঙ্ক বা সান্দ্রতাঙ্ক বা সান্দ্রতা সহগ বলে।

সান্দ্রতা গুণাঙ্কের মাত্রা সমীকরণ ও একক
Dimension and unit of co-efficient of viscosity

আমরা জানি, $\eta = \frac{F}{A}\frac{dy}{dv}$

$\therefore$ মাত্রা সমীকরণ, $[\eta] = \left[\frac{\text{বল} \times \text{দূরত্ব}}{\text{ক্ষেত্রফল} \times \text{বেগ}}\right] = \left[\frac{MLT^{-2} \times L}{L^2 \times L/T}\right]$

$$= \left[\frac{MLT^{-2} \times L \times T}{L^3}\right] = [ML^{-1}T^{-1}]$$

এম. কে. এস. এবং এস. আই. (S.I.) পদ্ধতিতে সান্দ্রতা গুণাঙ্কের একক নিউটন-সে./মিটার^2 (Nsm^{-2}) বা প্যাসকাল/সে. ($Pa\,s^{-1}$)।

অনেক ক্ষেত্রে সান্দ্রতার একক হিসেবে পয়েজ (Poise) ব্যবহার করা হয়। 10 poise = 1 নিউটন-সে./ মিটার^2।

সান্দ্রতা গুণাঙ্ক $1\,Nsm^{-2}$ বলতে বুঝা যায় যে, $1\,m^2$ ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট দুটি প্রবাহী স্তর পরস্পর হতে 1 m দূরে অবস্থিত হলে তাদের মধ্যে $1\,ms^{-1}$ আপেক্ষিক বেগ বজায় রাখতে 1 N বল প্রযুক্ত হয়।

সান্দ্রতাঙ্ককে অনেক সময় গতীয় সান্দ্রতাঙ্ক (dynamic viscosity) বলা হয়।

জানার বিষয় :

I. কক্ষ তাপমাত্রায় গ্লিসারিনের সান্দ্রতা সহগ পানির চেয়ে 10^3 গুণ বেশি।

II. 80°C তাপমাত্রায় পানির সান্দ্রতা গুণাঙ্ক 0°C তাপমাত্রায় পানির সান্দ্রতা গুণাঙ্কের এক-তৃতীয়াংশ।

৭.১৩.৩ সান্দ্রতার ওপর তাপমাত্রার প্রভাব
Effect of temperature on viscosity

(১) তরল পদার্থ (Liquid)

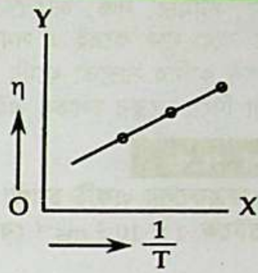
সান্দ্রতার ওপর তাপমাত্রার প্রভাব রয়েছে। তরল পদার্থের ক্ষেত্রে পরীক্ষালব্ধ ফলাফলে দেখা যায় যে তাপমাত্রা বাড়ালে সান্দ্রতা হ্রাস পায়। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় 80°C তাপমাত্রায় পানির সান্দ্রতা গুণাঙ্ক 0°C তাপমাত্রার পানির সান্দ্রতার গুণাঙ্কের এক-তৃতীয়াংশ মাত্র।

আণবিক তত্ত্বের সাহায্যে ব্যাখ্যা : আমরা জানি যে তরলে বিভিন্ন বেগে প্রবহমান পাশাপাশি দুটি স্তরের মধ্যে এক ধরনের বিপরীতমুখি বা পশ্চাদ্বর্তী (dragging) স্পর্শিনী বল (tangential force) ক্রিয়া করে। এ বলকে সান্দ্র বল বলা

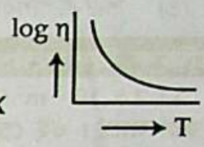
হয়। দুটি স্তরের অণুর মধ্যে আন্তঃআণবিক বলের কারণে এই সান্দ্র বলের সৃষ্টি হয়। সান্দ্র বল আন্তঃ-আণবিক দূরত্বের উপর নির্ভরশীল। তরলের তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে আন্তঃআণবিক দূরত্ব বাড়ে, ফলে আন্তঃআণবিক বলের মান কমে। এর ফলে সান্দ্র বল কমে। তরলের সান্দ্রতা ও তাপমাত্রার মধ্যে সম্পর্ক খুবই জটিল। তাপমাত্রা ও সান্দ্রতার গুণাঙ্কের মধ্যে মোটামুটি প্রযোজ্য সম্পর্ক হলো,

$$\log \eta = A + \frac{B}{T} \quad \ldots \quad \ldots \quad (7.23)$$

এখানে A ও B ধ্রুবক এবং T কেলভিন তাপমাত্রা। এখন $\log \eta$ বনাম $\frac{1}{T}$-এর লেখচিত্র অঙ্কন করলে একটি সরলরেখা হবে [চিত্র ৭.২৭]। আবার $\log \eta$ বনাম T লেখচিত্র পাশের ৭.২৮ চিত্রে দেখানো হলো।



চিত্র ৭.২৭



চিত্র ৭.২৮

(২) গ্যাস (Gas)

তাপমাত্রা বৃদ্ধিতে তরলের সান্দ্রতার উপর যে প্রভাব পরিলক্ষিত হয়, গ্যাসের ক্ষেত্রে তার বিপরীত প্রভাব দেখা যায়। গ্যাসের তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে সান্দ্রতা বৃদ্ধি পায়। পরীক্ষার সাহায্যে দেখা গেছে যে, গ্যাসের সান্দ্রতা গুণাঙ্ক তার পরম তাপমাত্রার বর্গমূলের সমানুপাতিক। অর্থাৎ $\eta \propto \sqrt{T}$

গতিতত্ত্বের সাহায্যে ব্যাখ্যা : গ্যাসের গতিতত্ত্ব (Kinetic theory of gases) থেকে এর ব্যাখ্যা দেওয়া যায়। আমরা জানি যে, গ্যাসের অণুগুলো সবদিকেই এলোমেলোভাবে চলাচল করতে পারে এবং এদের মধ্যে সংঘর্ষ ঘটে। গ্যাস অণুগুলোর মধ্যে দূরত্ব তরলের তুলনায় অনেক বেশি হওয়ায় আন্তঃআণবিক বল নেই বললেই চলে। তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে অণুসমূহের গড় বেগ বৃদ্ধি পায়, ফলে সংঘর্ষও বাড়ে। সংঘর্ষ বাড়ার কারণে বিভিন্ন স্তরের প্রবাহে বাধার পরিমাণ বৃদ্ধি পায়। অর্থাৎ সান্দ্রতা বৃদ্ধি পায়। গড়বেগ ও তাপমাত্রার মধ্যে সম্পর্ক নিম্নরূপ :

$$c \propto \sqrt{T} \quad \ldots \quad \ldots \quad (7.24)$$

গ্যাসের গতিতত্ত্ব অনুসারে গ্যাসের সান্দ্রতা গ্যাস অণুগুলোর গড় বেগের সমানুপাতিক। অর্থাৎ

$$\eta \propto c \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (7.25)$$

সমীকরণ (7.24) ও সমীকরণ (7.25) থেকে আমরা পাই,

$$\eta \propto c \propto \sqrt{T} \quad \therefore \ \eta \propto \sqrt{T}$$

$$\text{বা, } \eta = K\sqrt{T} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (7.26)$$

এখানে T, কেলভিন তাপমাত্রা এবং K, ধ্রুবক।

অনুধাবনমূলক কাজ : তাপমাত্রা বৃদ্ধির সাথে গ্যাসের সান্দ্রতা বাড়ে কিন্তু তরলের সান্দ্রতা কমে—ব্যাখ্যা কর।

তরলের সান্দ্রতা উৎপন্ন হয় আন্তঃআণবিক বলের কারণে। কিন্তু গ্যাসের সান্দ্রতা উৎপন্ন হয় অণুগুলোর মধ্যকার সংঘর্ষের কারণে। তাপমাত্রা বাড়ালে তরলের আন্তঃআণবিক বল হ্রাস পায়, পক্ষান্তরে গ্যাস অণুসমূহের মধ্যকার সংঘর্ষ বৃদ্ধি পায়। তাই তাপমাত্রা বাড়ালে গ্যাসের সান্দ্রতা বাড়ে কিন্তু তরলের সান্দ্রতা কমে।

৭.১৩.৪ সান্দ্রতার ওপর চাপের প্রভাব
Effect of pressure on viscosity

তরলের সান্দ্রতার ওপর চাপের প্রভাব দেখা যায়। চাপ বৃদ্ধি পেলে সান্দ্রতা বাড়ে।

ব্যাখ্যা : চাপ বৃদ্ধি পেলে আন্তঃআণবিক দূরত্ব কমে ফলে আন্তঃআণবিক বল বৃদ্ধি পায়। এর ফলে তরলের পাশাপাশি দুটি স্তরের আপেক্ষিক বেগ কমে যায়। অর্থাৎ সান্দ্রতা বেড়ে যায়।

কিন্তু গ্যাসের সান্দ্রতার ওপর চাপের কোনো প্রভাব নেই। বিজ্ঞানী ম্যাক্সওয়েল ইহা প্রমাণ করেন।

নিজে কর : মাছের দেহের ধারারেখীয় গঠন (streamlined shape) এর কারণ ব্যাখ্যা কর।

পানির মধ্যে মাছকে সান্দ্রতাজনিত বাধা অতিক্রম করে চলাচল করতে হয়। মাছের দেহের দুই প্রান্ত খানিকটা সরু এবং মধ্যভাগ বেশ মোটা ও চ্যাপ্টা হয়। এ ধরনের গঠনকে ধারারেখীয় গঠন বলে। এজন্য পানির মধ্য দিয়ে চলাচলের জন্য মাছ তুলনামূলকভাবে অনেক কম সান্দ্রতাজনিত বাধার সম্মুখীন হয় এবং মাছের শরীরের পাশ দিয়ে প্রবাহিত পানির প্রবাহ ধারারেখ হয়। ফলে মাছ তার গতিপথ খুব সহজেই নিয়ন্ত্রণ করতে পারে। একই কারণে এরোপ্লেন, জেট প্লেন, বুলেট ট্রেন, রেসিং মোটর গাড়ি ইত্যাদির আকৃতিও ধারারেখীয় গঠনের করা হয়।

সান্দ্রতার প্রয়োজনীয়তা
Necessity of viscosity

(১) গতিশীল নৌকা, স্টীমার, লঞ্চ, জাহাজের উপর পানির এবং গতিশীল মোটর গাড়ি ও বিমানের ওপর বায়ুর সান্দ্রতাজনিত বাধা লক্ষ করেই এ সমস্ত যন্ত্রের নকশা তৈরি হয়।

(২) ফাউনটেন পেন কালির সান্দ্রতা ধর্মের ওপর ভিত্তি করেই প্রস্তুত করা হয়।

(৩) শিরা-উপশিরা দিয়ে রক্তের চলাচল এই ধর্মের উপর হয়ে থাকে।

গাণিতিক উদাহরণ ৭.৬

১। 1×10^{-3} m² ক্ষেত্রফলের একটি চ্যাপ্টা প্লেট অপর একটি বড় প্লেট হতে 0·1 cm পুরু গ্লিসারিন স্তর দ্বারা পৃথক করা আছে। ওই প্লেটকে 1×10^{-2} ms⁻¹ বেগে চালনা করতে $1·5 \times 10^{-5}$ N বলের প্রয়োজন হলে গ্লিসারিনের সান্দ্রতাঙ্ক নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

$$F = \eta A \frac{dv}{dy}$$

বা, $$\eta = \frac{Fdy}{Adv}$$

$$\therefore \quad \eta = \frac{1·5 \times 10^{-5} \times 1 \times 10^{-3}}{1 \times 10^{-3} \times 1 \times 10^{-2}} = 1·5 \times 10^{-3}\ \text{Ns m}^{-2}$$

এখানে,

$A = 1 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$

$F = 1·5 \times 10^{-5}\ \text{N}$

$dv = 1 \times 10^{-2}\ \text{ms}^{-1}$

$dy = 0·1\ \text{cm} = 1 \times 10^{-3}\ \text{m}$

২। 0·01 বর্গমিটার ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি পাত 2 মি.মি. পুরু গ্লিসারিনের একটি স্তরের ওপর রাখা রয়েছে। পাতটিকে 0·05 ms⁻¹ বেগে চালনা করতে 0·4 নিউটন অনুভূমিক বলের প্রয়োজন হলে সান্দ্রতা গুণাঙ্কের মান নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০১১; কু. বো. ২০০৭]

আমরা জানি,

$$F = \eta A \frac{dv}{dy}$$

বা, $$\eta = \frac{F}{A}\frac{dy}{dv}$$

$$\therefore \quad \eta = \frac{0·4}{0·01} \times \frac{2 \times 10^{-3}}{0·05} = 1·6\ \text{N s m}^{-2}$$

এখানে,

$A = 0·01\ \text{m}^2$

$dv = 0·05\ \text{ms}^{-1}$

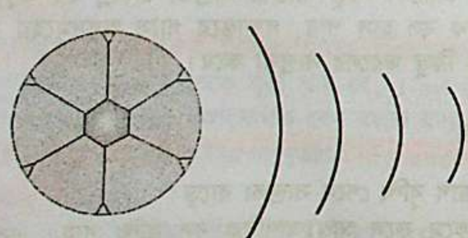
$dy = 2\ \text{mm} = 2 \times 10^{-3}\ \text{m}$

$F = 0·4\ \text{N}$

$\eta = ?$

৭·১৪ ঘর্ষণ ও সান্দ্রতা
Collision and viscosity

নিচের ছবি দুটি লক্ষ কর দেখবে যে, উভয় ক্ষেত্রে এদের গতি বাধাগ্রস্ত হচ্ছে [চিত্র ৭·২৯(ক) ও ৭·২৯(খ)]।



(ক)

(খ)

চিত্র ৭·২৯

একটি বলকে মেঝের ওপর দিয়ে গড়িয়ে দিলে বলটি খানিকটা এগিয়ে গিয়ে থেমে যায়। এর কারণ বস্তুর কোনো তলই পুরাপুরি মসৃণ নয়। তা খানিকটা উঁচু-নিচু। যখন একটি বস্তু অপর একটি বস্তুর সংস্পর্শে থেকে চলবার চেষ্টা করে তখন একটির উঁচু অংশ অপরটির নিচু অংশে ঢুকে যায় এবং তাদের মিলনতলে গতিরোধকমূলক একটি বল উৎপন্ন হয়। অনুরূপভাবে একটি লোহার বলকে পানির মধ্যে পতিত হতে দিলে তাও পানির বিভিন্ন স্তরে আপেক্ষিক গতির জন্য বাধাগ্রস্ত হয়। এখানেও ঘর্ষণের ন্যায় সান্দ্র বল লোহার বলের গতি মন্থর করে দেয়। আবার একজন ডুবুরি যখন সিলিন্ডার পিঠে নিয়ে পানির তলদেশে যেতে থাকে তখন পানির ভিন্ন ভিন্ন স্তরে ডুবুরির গতি বাধাগ্রস্ত হয়। একটি

বদ্ধ পাত্রে তরলের ক্ষেত্রে কিন্তু গতি বাধাগ্রস্ত হয় না। ডুবুরির গতি বাধাপ্রাপ্তির কারণ হলো তরলের সান্দ্রতা প্রবাহীর বিভিন্ন স্তরের আপেক্ষিক গতিকে বাধাগ্রস্ত করার জন্য ডুবুরির গতি বাধাপ্রাপ্ত হয়। এই দুটি ঘটনার প্রথমটি হলো ঘর্ষণ এবং দ্বিতীয়টি হলো সান্দ্রতা। এই দুটি বিষয়ের সংজ্ঞা আমরা পূর্বেই জেনেছি। তবে ঘর্ষণ ও সান্দ্রতা রাশি দুটি উভয়েই স্পর্শিনী বল। ঘর্ষণ হলো দুটি সংলগ্ন তলের মধ্যে সম্পর্কীয় বল। অনুরূপভাবে সান্দ্রতা দুটি তরল তলের আপেক্ষিক গতি বজায় রাখার জন্য প্রয়োজনীয় স্বকীয় বল। এভাবে দুটি তরল স্তরের মাঝে তলের স্পর্শক করে একটি বলের উদ্ভব হয় যা এ দুটি স্তরের মধ্যকার আপেক্ষিক গতি নষ্ট করার চেষ্টা করে। প্রবাহীর যে ধর্মের জন্য এর অভ্যন্তরীণ বিভিন্ন স্তরের আপেক্ষিক গতিতে বাধার সৃষ্টি হয় তাকে সান্দ্রতা বলে। সান্দ্রতা সকল প্রবাহীর সাধারণ ধর্ম। এখন আমরা দেখব ঘর্ষণের সাথে সান্দ্রতার পার্থক্য কোথায় ?

ওপরের আলোচনা থেকে ঘর্ষণের এবং সান্দ্রতার মধ্যে যেমন সাদৃশ্য পাওয়া যায় তেমনি এদের মধ্যে পার্থক্যও দেখতে পাওয়া যায়। পার্থক্যগুলি লক্ষ কর—

(i) ঘর্ষণ কেবলমাত্র সংস্পর্শ তলগুলির প্রকৃতির ওপর নির্ভর করে, কিন্তু সান্দ্রতা সংস্পর্শ তলগুলির প্রকৃতি ছাড়াও তলগুলির আপেক্ষিক গতির ওপর নির্ভর করে।

(ii) গতীয় ঘর্ষণ গুণাঙ্ক সংস্পর্শ তলগুলির আপেক্ষিক বেগের নিরপেক্ষ। কিন্তু সান্দ্রতাঙ্ক আপেক্ষিক বেগের ওপর নির্ভর করে।

(iii) অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া বলের কোনো পরিবর্তনের জন্য ঘর্ষণের কোনো পরিবর্তন হয় না। সাধারণত চাপ প্রয়োগে তরলের সান্দ্রতা বৃদ্ধি পায়।

সান্দ্রতাকে কখনও কখনও প্রবাহীর আঠাত্ব (adhesion) বলা হয়। আবার কেউ কেউ সান্দ্রতাকে প্রবাহীর অন্তরীণ ঘর্ষণ বলে। কারণ সান্দ্রতা বলের স্বরূপ অনেকটা ঘর্ষণের ন্যায়। ঘর্ষণ দুটি কঠিন বস্তুর আপেক্ষিক গতিকে বাধা দেয় আর সান্দ্রতা প্রবাহীর বিভিন্ন স্তরের আপেক্ষিক গতিকে বাধা দেয়। স্থির প্রবাহীর ক্ষেত্রে এটি ক্রিয়া করে না। ঘর্ষণ স্পর্শ-তলের ক্ষেত্রফলের ওপর নির্ভর করে না, তবে সান্দ্রতা প্রবাহীর তলদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের ওপর নির্ভর করে। অধিকন্তু সান্দ্রতা প্রবাহীর স্তরের বেগ এবং স্থির তল হতে তার দূরত্বের ওপর নির্ভর করে।

৭·১৪·১ সংকট বেগ ও রেনল্ডের সূত্র
Critical velocity and Reynold's formula

সংকট বেগ : তরল প্রবাহের বেগ একটি নির্দিষ্ট সীমা অতিক্রম করলে শান্ত প্রবাহ অশান্ত প্রবাহে পরিণত হয়। বেগের এই নির্দিষ্ট সীমাস্থ মানকে সংকট বেগ বলে। একে v_c দ্বারা সূচিত করা হয়।

তরলের বেগ সংকট বেগের চেয়ে বেশি হলে প্রবাহ আর ধারারেখ প্রবাহ থাকে না, অশান্ত প্রবাহে পরিণত হয়।

রেনল্ডের সূত্র : পরীক্ষালব্ধ ফলাফল থেকে বিজ্ঞানী রেনল্ড প্রমাণ করেন যে, কোনো সংকট বেগ নিম্নলিখিত বিষয়গুলোর ওপর নির্ভরশীল—

(i) সংকট বেগ তরলের সান্দ্রতাঙ্কের সমানুপাতিক, অর্থাৎ $v_c \propto \eta$

(ii) সংকট বেগ তরলের ঘনত্বের ব্যস্তানুপাতিক, অর্থাৎ $v_c \propto \frac{1}{\rho}$

(iii) সংকট বেগ নলের ব্যাসার্ধের ব্যস্তানুপাতিক, অর্থাৎ $v_c \propto \frac{1}{r}$

সুতরাং, $v_c \propto \frac{\eta}{\rho r}$

বা, $v_c = K\frac{\eta}{\rho r}$ ... ... (7.27)

K একটি ধ্রুবক। একে রেনল্ডের সংখ্যা বলে। খুব সরু একটি নলের ক্ষেত্রে এর মান 1000 ধরা হয়। K এর মান 1000 অতিক্রম না করলে প্রবাহ শান্তরেখ থাকে, অন্যথায় প্রবাহ অশান্ত প্রবাহে পরিণত হয়।

সমীকরণ (7.27) থেকে দেখা যায়—

(i) আদর্শ তরলের ক্ষেত্রে অর্থাৎ সান্দ্রতাঙ্ক $\eta = 0$ হলে সংকট বেগ শূন্য হয়। এক্ষেত্রে প্রবাহ সবসময়েই অশান্ত থাকে।

(ii) r বড় হলে অর্থাৎ মোটা নলের ক্ষেত্রে সংকট বেগ কম হয়।

(iii) তরলের ঘনত্ব বেশি হলে সংকট বেগ কম হয়।

৭.১৪.২ মাত্রা বিশ্লেষণের সাহায্যে রেনল্ড সূত্র প্রতিপাদন
Derivation of Reynold's law by dimensional analysis

ধরা যাক, সংকট বেগ নলের ব্যাসার্ধ, তরলের সান্দ্রতাঙ্ক এবং ঘনত্বের ওপর নির্ভর করে। অর্থাৎ

$v_c \propto \eta^a r^b \rho^c = K\eta^a r^b \rho^c$. এখানে, a, b, c ধ্রুবক।

মাত্রা বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$[LT^{-1}] = [ML^{-1}T^{-1}]^a \times [L]^b \times [ML^{-3}]^c$$
$$= [M^{a+c} L^{b-a-3c} T^{-a}]$$

উভয় দিকে M, L ও T এর ঘাতগুলো সমান ধরে পাই,

$a + c = 0$, $b - a - 3c = 1$, $-a = -1$, বা, $a = 1$

$\therefore$ $c = -a = -1$, $b = 1 + a + 3c = 1 + 1 - 3 = -1$

$$\therefore \quad v_c = K\eta r^{-1}\rho^{-1} = \frac{K\eta}{\rho r}$$

গাণিতিক উদাহরণ ৭.৭

১। 0·30 mm ব্যাসের নল দিয়ে 40 cms^{-1} বেগে পানি প্রবাহিত হচ্ছে। পানির সান্দ্রতাঙ্ক $\eta = 10^{-3}$ poise হলে প্রবাহের রেনল্ড সংখ্যা কত ? প্রবাহের প্রকৃতি শান্ত না অশান্ত ?

আমরা জানি,

$$v = \frac{K\eta}{\rho r}$$

বা, $K = \dfrac{v\rho r}{\eta}$

$\therefore$ $K = \dfrac{40 \times 1 \times 0{\cdot}015}{10^{-3}} = 600$

সুতরাং, রেনল্ড সংখ্যা = 600

এখন, যেহেতু $K < 1000$, অতএব তরলের প্রবাহ শান্ত।

এখানে,
$r = \dfrac{0{\cdot}30}{2} = 0{\cdot}15$ mm = 0·015 cm
$\eta = 10^{-3}$ poise
$v = 40\ cms^{-1}$
$\rho = 1\ gm\,cm^{-3}$

২। একটি প্রবাহী নলের ভেতর দিয়ে পানির প্রবাহের বেগ কী রকম হলে প্রবাহটি ধারারেখ বা শান্ত প্রবাহ হবে? দেওয়া আছে, নলের ব্যাস = 2·0 cm, পানির সান্দ্রতাঙ্ক $\eta = 0{\cdot}001\ kgm^{-1}s^{-1}$। রেনল্ডের সংখ্যা, K = 1000, পানির ঘনত্ব $\rho = 10^3\ kgm^{-3}$।

আমরা জানি, নলের ব্যাসার্ধ r হলে পানির প্রবাহের সংকট বেগ হয়,

$$v_c = \frac{K\eta}{\rho r}$$

বা, $v_c = \dfrac{1000 \times 0{\cdot}001}{10^3 \times 1 \times 10^{-2}}$
$= 0{\cdot}1\ ms^{-1}$

এখানে,
ব্যাসার্ধ, $r = \dfrac{d}{2} = \dfrac{2 \times 10^{-2}}{2}$ m $= 1 \times 10^{-2}$ m
K = 1000
$\rho = 10^3\ kgm^{-3}$
$\eta = 0{\cdot}001\ kgm^{-1}s^{-1}$

সুতরাং, প্রবাহটি ধারারেখ বা শান্ত প্রবাহ হতে হলে পানির বেগ 0·1 ms^{-1} বেগের তুলনায় কম হতে হবে।

৩। পানির গভীরতা মাপার জন্য একটি জলাশয়ের পানির পৃষ্ঠ থেকে 0·005 m ব্যাসার্ধের এবং $2{\cdot}5 \times 10^3\ kg/m^3$ ঘনত্বের একটি বল ছেড়ে দেওয়া হলো। 10 sec পর বলটি জলাশয়ের তলায় পড়ল। যদি 9 s-এ বলটি প্রান্তিক বেগ অর্জন করে থাকে, তাহলে জলাশয়ের গভীরতা নির্ণয় কর। [$\eta = 1{\cdot}6 \times 10^{-3}\ Nsm^{-2}$, $\rho_f = 1000\ kgm^{-3}$]

[BUET Admission Test, 2017-18]

আমরা জানি,

$$v = \frac{2}{9} \times \frac{r^2(\rho_s - \rho_f)g}{\eta}$$
$$= \frac{2}{9} \times \frac{(0{\cdot}005)^2 \times (2{\cdot}5 \times 10^3 - 1 \times 10^3) \times 9{\cdot}8}{(1{\cdot}6 \times 10^{-3})}$$
$$= 51{\cdot}04\ ms^{-1}$$

এখানে,
$r = 0{\cdot}005$ m
$\rho_s = 2{\cdot}5 \times 10^3$
$\eta = 1{\cdot}6 \times 10^{-3}\ Nsm^{-2}$
$\rho_f = 1000\ kg\,m^{-3} = 1 \times 10^3\ kgm^{-3}$

0 sec থেকে 9 sec এ অতিক্রান্ত গভীরতা,

$$s_1 = \left(\frac{u+v}{2}\right)t = \left(\frac{0+51.04}{2}\right)\times 9$$

$$= 229.68 \text{ m}$$

1 sec এ অতিক্রান্ত গভীরতা, $s_2 = vt = 51.04 \times 1 = 51.04$ m

$\therefore$ মোট গভীরতা $= 229.68 + 51.04 = 280.72$ m

৭·১৫ স্টোক্‌স-এর সূত্র
Stokes's law

বিজ্ঞানী স্টোক্‌স প্রমাণ করেন যে, r ব্যাসার্ধের ক্ষুদ্রাকার গোলক η সান্দ্রতা গুণাঙ্কের কোনো তরল বা গ্যাসের মধ্য দিয়ে v প্রান্তিক বেগে পড়তে থাকলে বস্তুর ওপর সান্দ্রতাজনিত উর্ধ্বমুখি বল ক্রিয়া করে। ধরি এই বল F। এই বল

$F \propto$ সান্দ্রতা গুণাঙ্ক, η

$F \propto$ বস্তুর ব্যাসার্ধ, r

এবং $F \propto$ প্রান্তিক বেগ, v

$\therefore$ $F \propto \eta r v$

বা, $F = K\eta r v$ ... ... (7.28)

এখানে K একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক। তরল গতিবিজ্ঞানের সাহায্যে স্টোক্‌স প্রমাণ করেন যে $K = 6\pi$

$\therefore$ সমীকরণ (7.28) হতে পাই

$F = 6\pi\eta r v$ ... ... (7.29)

এই সমীকরণটি তরলে পতনশীল স্টোক্‌স-এর সূত্র নামে খ্যাত। মাত্রিক পদ্ধতিতে এই সমীকরণ প্রতিপাদন করা যায়।

মাত্রিক পদ্ধতিতে স্টোক্‌স-এর সূত্র প্রতিপাদন : ধরি r ব্যাসার্ধের একটি ক্ষুদ্র গোলাকার বস্তু η সান্দ্রতা গুণাঙ্ক-বিশিষ্ট একটি সান্দ্র মাধ্যমের মধ্যে ছেড়ে দেয়ায় বস্তুটি কোনো এক মুহূর্তে v প্রান্তিক বেগ লাভ করলে সান্দ্রতার জন্য পশ্চাদ্‌মুখী বল বা ঘর্ষণ বল F হবে, অর্থাৎ

$F = K\eta^x r^y v^z$ ... ... (7.30)

এখানে K = একটি মাত্রিক ধ্রুব। x, y ও z-এর মান বের করতে হবে।

সমীকরণ (7.30)-এ F, η, r ও v-এর মাত্রিক মান বসিয়ে পাওয়া যায়

$[MLT^{-2}] = K[ML^{-1}T^{-1}]^x . [L]^y . [LT^{-1}]^z$

বা, $[M^1][L^1][T^{-2}] = K[M]^x \; [L]^{y+z-x} \; [T]^{-(x+z)}$

উভয় পক্ষের [M], [L] ও [T]-এর ঘাত সমান হবে হেতু তুলনা করে লেখা যায়,

$x = 1, y + z - x = 1$ ও $x + z = 2$

সমীকরণ তিনটি সমাধান করে পাওয়া যায়, $x = 1, y = 1$ ও $z = 1$

সমীকরণ (7.30)-এ x, y ও z-এর মান বসিয়ে লেখা যায়, $F = K\eta r v$

স্টোকস গাণিতিকভাবে প্রমাণ করেন যে, $K = 6\pi$

$\therefore$ $F = 6\pi\eta r v$ ... ... (7.31)

এটিই হলো মাত্রিক পদ্ধতিতে পতনশীল বস্তুর ক্ষেত্রে স্টোক্‌স-এর সূত্রের প্রতিপাদন।

৭·১৫·১ স্টোক্‌স-এর প্রান্তিক বেগের সমীকরণ
Equation of Stokes's terminal velocity

মনে করি, গোলকটির উপাদানের ঘনত্ব ρ এবং মাধ্যমের ঘনত্ব σ। তাহলে গোলকের ওপর অভিকর্ষ বল,

F = বস্তুর ওজন = ভর $\times$ অভিকর্ষজ ত্বরণ = আয়তন $\times$ ঘনত্ব $\times$ অভিকর্ষজ ত্বরণ

$= V \times \rho \times g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$ (এখানে V = গোলকের আয়তন)

আর্কিমিডিস-এর সূত্রানুসারে গোলক কর্তৃক হারানো ওজন = মাধ্যম কর্তৃক প্রযুক্ত উর্ধ্বমুখি বল $= \frac{4}{3}\pi r^3 \sigma g$

$\therefore$ গোলকের উপর কার্যকরী নিম্নমুখি বল অর্থাৎ কার্যকরী ওজন,

$F = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - \frac{4}{3}\pi r^3 \sigma g = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \sigma)g$ ... ... (7.32)

যখন সান্দ্রতাজনিত উর্ধ্বমুখি বল এবং গোলকের কার্যকরী ওজন সমান হবে তখনই বস্তু প্রান্তিক বেগে পড়তে থাকবে।

∴ আমরা পাই, $6\pi\eta r v = \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho - \sigma)g$, F = সান্দ্র বল $= 6\pi\eta r v$ (স্টোক্স-এর সূত্র)

বা, $v = \frac{\frac{2r^2(\rho-\sigma)\times g}{9}}{\eta}$ ... ... (7.33)

একেই স্টোক্সের প্রান্তিক বেগের সমীকরণ বলা হয়।

সমীকরণ (7.33) থেকে প্রান্তিক বেগ সম্বন্ধে জানা যায়—

(i) প্রান্তিক বেগ বস্তুর ব্যাসার্ধের বর্গের সমানুপাতিক।
(ii) প্রান্তিক বেগ বস্তুর ঘনত্ব এবং মাধ্যমের ঘনত্বের পার্থক্যের সমানুপাতিক।
(iii) প্রান্তিক বেগ মাধ্যমের সান্দ্রতাঙ্কের ব্যস্তানুপাতিক।

গাণিতিক উদাহরণ ৭.৮

১। 200 mm ব্যাসার্ধের একটি গোলক কোনো তরলের ভেতর দিয়ে $2.1 \times 10^{-2}\ ms^{-1}$ প্রান্ত বেগ নিয়ে পড়ছে। তরলের সান্দ্রতাঙ্ক $0.003\ Nsm^{-2}$ হলে সান্দ্র বল নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০০৭; সি. বো. ২০০২]

মনে করি সান্দ্রতা বল = F

আমরা জানি, $F = 6\pi\eta r v$

$= 6 \times 3.14 \times 0.003 \times 0.2 \times 2.1 \times 10^{-2}$

$= 2.374 \times 10^{-4}\ N$

এখানে,
$r = 200\ mm = 0.2\ m$
$v = 2.1 \times 10^{-2}\ ms^{-1}$
$\eta = 0.003\ N sm^{-2}$
$F = ?$

২। $2 \times 10^{-4}\ m$ ব্যাসার্ধের একটি লোহার বল তার্পিন তেলের ভেতর দিয়ে $4 \times 10^{-2}\ ms^{-1}$ প্রান্ত বেগ নিয়ে পড়ছে। যদি লোহা ও তার্পিন তেলের ঘনত্ব যথাক্রমে 7.8×10^3 এবং $0.87 \times 10^3\ kgm^{-3}$ হয় তবে তার্পিন তেলের সান্দ্রতাঙ্ক বের কর।

মনে করি তার্পিন তেলের সান্দ্রতাঙ্ক = η

আমরা জানি, $\eta = \frac{2r^2(\rho - \sigma)g}{9v}$

$= \frac{2 \times (2 \times 10^{-4})^2\ (7.8 \times 10^3 - 0.87 \times 10^3) \times 9.8}{9 \times 4 \times 10^{-2}}$

$= \frac{2 \times 4 \times 10^{-8} \times 6.93 \times 10^3 \times 9.8}{9 \times 4 \times 10^{-2}}$

$= \frac{8 \times 6.93 \times 9.8 \times 10^{-3}}{36}$

$= 1.51 \times 10^{-2}\ kgm^{-1}s^{-1} = 1.51 \times 10^{-2}\ Nsm^{-2}$

এখানে,
ব্যাসার্ধ $r = 2 \times 10^{-4}\ m$
প্রান্ত বেগ, $v = 4 \times 10^{-2}\ ms^{-1}$
লোহার ঘনত্ব, $\rho = 7.8 \times 10^3\ kgm^{-3}$
তার্পিন তেলের ঘনত্ব,
$\sigma = 0.87 \times 10^3\ kgm^{-3}$
$g = 9.8\ ms^{-2}$

৩। দুটি গোলক প্রান্তিক বেগে তার্পিন তেলের তলায় গিয়ে পড়ল। বড় গোলকটি 3 সেকেন্ডে 21 cm পথ অতিক্রম করে। ধাতব পদার্থের ঘনত্ব $4 \times 10^3\ kg\ m^{-3}$, তেলের ঘনত্ব $8.9 \times 10^2\ kg\ m^{-3}$ এবং বড় গোলকের ব্যাস 6 cm। [তার্পিন তেলের সান্দ্রতাঙ্ক $1.5 \times 10^{-2}\ Pas^{-1}$]।

প্রান্তিক বেগের সময় বড় গোলকটির প্রযুক্ত সান্দ্র বল নির্ণয় কর। ছোট গোলকের ব্যাস 4 cm হলে, কোন গোলকটি আগে নিচে পতিত হবে ? [ব. বো. ২০১৬]

আমরা জানি,

সান্দ্র বল, $F_1 = 6\pi r_1 \eta v_1$

∴ $F_1 = 6 \times 3.14 \times 3 \times 10^{-2} \times 1.5 \times 10^{-2} \times 7 \times 10^{-2}$

$= 5.93 \times 10^{-4}\ N$

এখানে,
বড় গোলকের ব্যাসার্ধ,
$r_1 = \frac{6}{2} \times 10^{-2}\ m = 3 \times 10^{-2}\ m$
প্রান্তিক বেগ, $v = \frac{21}{3} = 7\ cm\ s^{-1}$
$= 7 \times 10^{-2}\ ms^{-1}$
তেলের সান্দ্রতাঙ্ক, $\eta = 1.5 \times 10^{-2}\ Pas^{-1}$
সান্দ্র বল, $F_1 = ?$

যে গোলকের প্রান্তিক বেগ বেশি সেটি আগে নিচে পতিত হবে। ছোট গোলকের প্রান্তিক বেগ v_2, ব্যাসার্ধ r_2 হলে,

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

$$\therefore \quad v_2 = \frac{r_2^2 \times v_1}{r_1^2} = \frac{(2 \times 10^{-2})^2 \times 7 \times 10^{-2}}{(3 \times 10^{-2})^2} = 0.031 \text{ ms}^{-1}$$

যেহেতু বড় গোলকের প্রান্তিক বেগ ছোট গোলকের প্রান্তিক বেগের চেয়ে বেশি তাই বড় গোলকটি আগে নিচে পড়বে।

৭.১৬ পৃষ্ঠটান ও পৃষ্ঠশক্তি
Surface tension and surface energy

৭.১৬.১ পৃষ্ঠটান
Surface tension

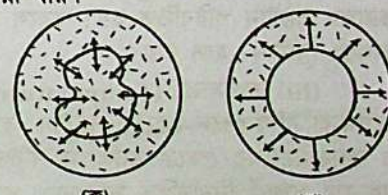
তরল মাত্রেরই একটি ধর্ম আছে—তরল পৃষ্ঠ সর্বদাই সঙ্কুচিত হয়ে সর্বনিম্ন ক্ষেত্রফলে আসতে চায়। তরলের মধ্যে যে বলের প্রভাবে এই বিশেষ ধর্ম প্রকাশ পায় সেই বলকেই পৃষ্ঠটান বলে।

আমরা সকলেই লক্ষ করে থাকি যে মশা, মাকড়সা ইত্যাদি কীটপতঙ্গ পানির উপরে হেঁটে চলতে পারে। একটু পর্যবেক্ষণ করলেই দেখা যাবে যে, যেখানে এদের পা পড়ে তরলের সেই স্থানটুকু একটু নিচু বা অবনমিত (depressed) হয়—কিছুটা যেন রবারের পর্দাকে চাপ দিলে যেরূপ হয় সেরূপ। এ ছাড়া কোনো সিরিঞ্জের সুচের মাথা দিয়ে খুব আস্তে আস্তে তরল ওষুধ বা পানি নির্গত করলে দেখা যায় যে তরল বা পানি নিরবচ্ছিন্নভাবে বের না হয়ে ফোঁটায় ফোঁটায় বের হচ্ছে এবং ফোঁটাগুলো সম্পূর্ণ গোলাকার। আমরা জানি একই আয়তনের সর্বনিম্ন ক্ষেত্রফল হলো গোলাকার আকৃতির। তরলের মুক্ত পৃষ্ঠে নিশ্চয়ই কোনো বল ক্রিয়াশীল রয়েছে যা ফোঁটাগুলো গোলাকার রাখছে। কাজেই তরলের মুক্ত পৃষ্ঠে স্থিতিস্থাপক পর্দার টানের ন্যায় একটা টান ক্রিয়া করে। উক্ত টান তরল পৃষ্ঠের স্পর্শক অভিমুখী। তরল পৃষ্ঠ যেখানে এসে শেষ হয় সেখানেই পৃষ্ঠের সীমারেখায় পৃষ্ঠটান ক্রিয়া করে।

নিচে বর্ণিত একটি পরীক্ষার সাহায্যে সহজেই পৃষ্ঠটান ক্রিয়া প্রদর্শন করা যায়।

ধাতব তারের একটি গোল আংটা সাবান পানিতে ডুবিয়ে তুলে আনলে আংটার ভেতরে সাবান পানির একটি পাতলা সর (thin film) আটকে থাকে। এবার একটি সুতা দিয়ে ছোট ফাঁস (loop) তৈরি করে সাবান পানিতে ভিজিয়ে আংটার সরের উপর বসালে দেখা যাবে ফাঁসটি এলোমেলোভাবে অবস্থান করছে [চিত্র ৭.৩০(ক)]।

এবার একটি সুচ বা আলপিন দিয়ে ফাঁসের ভেতরের অংশ ছিদ্র করে দিলে দেখা যাবে ফাঁসটি এলোমেলো অবস্থা ত্যাগ করে বৃত্তাকার হয়েছে [চিত্র ৭.৩০(খ)]।

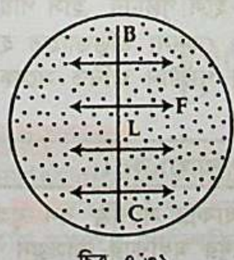


(ক) (খ)

চিত্র ৭.৩০

ওপরের ঘটনা দুটো ব্যাখ্যায় বলা যায়, যখন ফাঁসের ভেতরে সর ছিল তখন ফাঁসের প্রতিটি বিন্দুতে পৃষ্ঠের স্পর্শক বরাবর সমান ও বিপরীতমুখি বল ক্রিয়া করে। ফলে প্রতিটি বিন্দুতে বলদ্বয় পরস্পরকে প্রশমিত করে। তাই ফাঁসটি এলোমেলো থাকে। পরবর্তীতে ফাঁসটি ছিদ্র করায় ফাঁসের ভেতরের দিকের বল না থাকায়, প্রতিটি বিন্দুতে শুধু সরের বাইরের দিকে বল ক্রিয়া করে, ফলে বাইরের দিকে টান অনুভূত হয় এবং বাইরের দিকের সর সংকুচিত হয়ে টান টান হয়ে যায়। ওপরের পরীক্ষা থেকে স্পষ্ট যে তরল পদার্থের মুক্ত পৃষ্ঠে এক ধরনের টান ক্রিয়াশীল। এই টানই পৃষ্ঠটান। অতএব পৃষ্ঠটানের নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেওয়া যায়।

সংজ্ঞা : কোনো তরলের পৃষ্ঠে একটি সরলরেখা কল্পনা করলে উক্ত রেখার প্রতি একক দৈর্ঘ্যে ওই রেখার উভয় পার্শ্বে রেখার সাথে লম্বভাবে এবং পৃষ্ঠের স্পর্শক রূপে যে স্পর্শিনী বল (tangential force) ক্রিয়া করে তাকেই পৃষ্ঠটান বলে।



চিত্র ৭.৩১

ব্যাখ্যা : মনে করি কোনো একটি তরল তলের মুক্ত পৃষ্ঠের ওপর অঙ্কিত একটি রেখার (BC) দৈর্ঘ্য L [চিত্র ৭.৩১]। ওই সরলরেখার উভয় পার্শ্বের তরলপৃষ্ঠ সংকুচিত হতে চাইবে এবং পরস্পর হতে দূরে সরে যাওয়ার প্রবণতা পরিলক্ষিত হবে। কাজেই BC রেখার উপর প্রতি একক দৈর্ঘ্যে একটা টান পড়বে। মনে করি ওই রেখার অভিলম্বভাবে ও পৃষ্ঠের স্পর্শকরূপে রেখার উভয় পার্শ্বে বিদ্যমান বল F।

$$\therefore \quad \text{পৃষ্ঠটান} = \frac{\text{বল}}{\text{দৈর্ঘ্য}}$$

$$\text{বা, } \mathbf{T} = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{L}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (7.34)$$

পৃষ্ঠটানের একক (Unit of surface tension)

পৃষ্ঠটান একটি প্রাকৃতিক রাশি। অতএব এর একক আছে।

এম. কে. এস. ও এস. আই. বা আন্তর্জাতিক পদ্ধতিতে পৃষ্ঠটানের নিরপেক্ষ একক নিউটন/মিটার (Nm^{-1})।

পৃষ্ঠটানের মাত্রা সমীকরণ (Dimension of surface tension)

$$\text{পৃষ্ঠটান} = \frac{\text{বল}}{\text{দৈর্ঘ্য}}$$

∴ এর মাত্রা সমীকরণ,

$$[\text{পৃষ্ঠটান}] = \frac{[\text{বল}]}{[\text{দৈর্ঘ্য}]} = \frac{[MLT^{-2}]}{[L]} = [MT^{-2}]$$

পৃষ্ঠ শক্তির একক ও মাত্রা সমীকরণ পৃষ্ঠটানের অনুরূপ।

পৃষ্ঠটানের বৈশিষ্ট্য
Characteristics of surface tension

তরলের পৃষ্ঠটানের নিম্নলিখিত দুটি উল্লেখযোগ্য বৈশিষ্ট্য রয়েছে, যথা—

(ক) পৃষ্ঠটান তরল তলকে সংকুচিত করার চেষ্টা করে।

(খ) তরল তলের ক্ষেত্রফল বাড়াবার চেষ্টা করলে পৃষ্ঠটান তা প্রতিরোধ করার চেষ্টা করে।

৭·১৬·২ তরলের পৃষ্ঠটানের উপর প্রভাবকারী বিষয়
Factors affecting surface tension of liquid

তরলের পৃষ্ঠটান মোটামুটিভাবে নিম্নলিখিত বিষয়গুলো দ্বারা প্রভাবিত হয়।

(i) **দূষিতকরণ (Contamination)** : তরল যদি চর্বি, তেল প্রভৃতি দ্বারা দূষিত হয়, তবে তরলের পৃষ্ঠটান হ্রাস পায়।

(ii) **দ্রবীভূত বস্তুর উপস্থিতি (Presence of dissolved substances)** : তরলে কোনো বস্তু দ্রবীভূত থাকলে তরলের পৃষ্ঠটান পরিবর্তিত হয়। তরলে অজৈব পদার্থ দ্রবীভূত থাকলে পৃষ্ঠটান বৃদ্ধি পায়, কিন্তু জৈব পদার্থ দ্রবীভূত থাকলে পৃষ্ঠটান হ্রাস পায়।

(iii) **তাপমাত্রা (Temperature)** : তরলের পৃষ্ঠটান প্রভূতভাবে তাপমাত্রার ওপর নির্ভরশীল। সাধারণভাবে তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে তরলের পৃষ্ঠটান হ্রাস পায় এবং তাপমাত্রা হ্রাস পেলে তরলের পৃষ্ঠটান বৃদ্ধি পায়। শুধু গলিত তামা ও ক্যাডমিয়ামের ক্ষেত্রে ব্যতিক্রম পরিলক্ষিত হয়। তাপমাত্রা পরিবর্তনের পাল্লা কম হলে পৃষ্ঠটান এবং তাপমাত্রার মধ্যকার সম্পর্ক নিম্নলিখিত সমীকরণে ব্যক্ত করা যায়।

$$T_t = T_0(1 - \alpha t) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (7.35)$$

এখানে T_t = t°C তাপমাত্রায় তরলের পৃষ্ঠটান, T_0 = 0°C তাপমাত্রায় তরলের পৃষ্ঠটান এবং α = তরলের পৃষ্ঠটানের তাপমাত্রা গুণাঙ্ক। তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে তরলের পৃষ্ঠটান কমতে থাকে এবং একটি বিশেষ তাপমাত্রায় তরলের পৃষ্ঠটান লোপ পায়।

উল্লেখ্য, যে তাপমাত্রায় কোনো একটি তরলের পৃষ্ঠটান শূন্য হয়, তাকে সঙ্কট তাপমাত্রা (Critical temperature) বলে।

(iv) **তরলের ওপরে অবস্থিত মাধ্যম (Medium above the liquid)** : তরলের ওপরে অবস্থিত মাধ্যমের প্রকৃতির ওপর তরলের পৃষ্ঠটান নির্ভর করে। পানির সাথে জলীয় বাষ্পের সংস্পর্শ থাকলে পানির পৃষ্ঠটান প্রায় 70×10^{-3} Nm^{-1} হয়, আর পানির সাথে বায়ুর সংস্পর্শ থাকলে, পানির পৃষ্ঠটান প্রায় $72 \times 10^{-3} Nm^{-1}$ হয়।

(v) **তরলের মুক্ত তলের সাথে অন্য কোনো বস্তুর উপস্থিতি (Presence of other bodies in contact with the free surface of the liquid)** : তরলের মুক্ত তলের সাথে অন্য কোনো বস্তুর সংযুক্তি হলে পৃষ্ঠটান হ্রাস পায়।

(vi) **তড়িতাহিতকরণ (Electrification)** : তরল তড়িতাহিত হলে পৃষ্ঠটান হ্রাস পায়। কেননা তড়িতাহিত হবার ফলে তরল পৃষ্ঠে বহির্মুখী চাপ ক্রিয়া করে। এর ফলে তরল পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি পায় যা পৃষ্ঠটান জনিত সঙ্কোচন প্রবণতার বিপরীতে ক্রিয়া করে। কাজেই পৃষ্ঠটান হ্রাস পায়।

অনুধাবনমূলক কাজ : বৃষ্টির ফোঁটা কচুপাতাকে ভিজায় না অথচ আমপাতাকে ভিজায় কেন ? ব্যাখ্যা কর।

পানির অণু ও কচুপাতার অণুর মধ্যকার আসঞ্জন বল অপেক্ষা পানির অণুসমূহের মধ্যকার সংশক্তি বল বৃহত্তর মানের তাই বৃষ্টির ফোঁটা কচুপাতাকে ভেজায় না। অন্যদিকে পানির অণু ও আম পাতার অণুর মধ্যকার আসঞ্জন বল অপেক্ষা পানি ও অণুসমূহের মধ্যকার সংশক্তি বল ক্ষুদ্রতর মানের। তাই বৃষ্টির ফোঁটা আমপাতাকে ভেজায়।

৭·১৬·৩ পৃষ্ঠটান সংক্রান্ত কয়েকটি প্রয়োজনীয় সংজ্ঞা
Some necessary definitions relating surface tension

পৃষ্ঠটানের তত্ত্ব ব্যাখ্যা করার পূর্বে কয়েকটি রাশি জানা দরকার। রাশিগুলো হলো—

(ক) **সংসক্তি বা সংযুক্তি বল** (Cohesive force),

(খ) **আসঞ্জন বল** (Adhesive force) এবং

(গ) **আণবিক পাল্লা** (Molecular range)

সংসক্তি বা সংযুক্তি বল : আমরা জানি কোনো একটি পদার্থ কতকগুলো অণুর সমষ্টি। **একই পদার্থের বিভিন্ন অণুর মধ্যে পারস্পরিক আকর্ষণ বলকে সংসক্তি বা সংযুক্তি বল বলে।** যেমন লোহার বিভিন্ন অণুর মধ্যে যে পারস্পরিক আকর্ষণ বল আছে, তার নাম সংসক্তি বল। এই বল দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক সূত্র মেনে চলে।

আসঞ্জন বল : একটি পদার্থকে অন্য একটি পদার্থের সংস্পর্শে রেখে দিলে পদার্থ দুটির অণুগুলোর মধ্যে একটি পারস্পরিক আকর্ষণ বল ক্রিয়া করে। **বিভিন্ন পদার্থের অণুগুলোর মধ্যে এই পারস্পরিক আকর্ষণ বলকে আসঞ্জন বল বলে।** একটি পাত্রে পানি রাখলে পাত্রের অণু ও পানির অণুর মধ্যে যে আকর্ষণ বল ক্রিয়া করে তাই আসঞ্জন বল।

আণবিক পাল্লা : আমরা জানি সংসক্তি বল অণু দুটির মধ্যবর্তী দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক। দূরত্ব বৃদ্ধি পেতে থাকলে বল দ্রুত হ্রাস পেতে থাকে। **দুটি অণুর মধ্যে ক্রিয়ারত সংসক্তি বল সর্বাধিক যতটুকু দূরত্ব পর্যন্ত অনুভূত হয়, তাকে আন্তঃআণবিক পাল্লা বলে।** এই দূরত্বের মান প্রায় 10^{-9} m। কোনো একটি অণুকে কেন্দ্র করে আণবিক পাল্লার সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি গোলক কল্পনা করলে তাকে ওই অণুর **প্রভাব গোলক** (sphere of attraction) বলে। ওই অণুটি কেবল প্রভাব গোলকের ভিতরের অণুগুলোর দ্বারা প্রভাবিত হবে। প্রভাব গোলকের বাইরের কোনো অণু এই অণুটির উপর কোনো সংসক্তি বল প্রয়োগ করে না ধরে নেয়া হয়।

জানার বিষয় :
I. দুটি অণুর মধ্যে সংসক্তি বল 10^{-9} m দূরত্বের মধ্যে অনুভূত হয়।
II. চাপ বৃদ্ধি করলে আন্তঃআণবিক বল বৃদ্ধি পায়।
III. সংসক্তি বল দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক।

৭·১৬·৪ পৃষ্ঠশক্তি
Surface energy

আমরা জানি কোনো একটি তরল তলে একটি টান বা বল সর্বদা ক্রিয়া করে এবং এই বল তরল তলের ক্ষেত্রফল হ্রাস করতে চেষ্টা করে। সুতরাং এ অবস্থায় তরল তলের ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি করতে হলে ওই বলের বিরুদ্ধে কিছু কাজ করতে হবে। এ কাজ স্থিতিশক্তি হিসেবে তরল তলে সঞ্চিত থাকবে। তরল পৃষ্ঠের এই স্থিতিশক্তিকে আপাতভাবে পৃষ্ঠশক্তি বা তল শক্তি বলে। তবে সঠিকভাবে বলা যায়— **কোনো একটি তরল তলের ক্ষেত্রফল এক একক বৃদ্ধি করতে যে পরিমাণ কাজ সাধিত হয়, তাকে ওই তলের পৃষ্ঠশক্তি বলে। একে সাধারণত E দ্বারা প্রকাশ করা হয়।**

কোনো মুক্ত তলের ক্ষেত্রফল ΔA পরিমাণ বৃদ্ধি করতে যদি W পরিমাণ কাজ সম্পন্ন হয়, তাহলে পৃষ্ঠশক্তি,

$$E = \frac{W}{\Delta A} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (7.36)$$

পৃষ্ঠটান ও পৃষ্ঠশক্তির সংখ্যা মান একই। অর্থাৎ পৃষ্ঠটান ও পৃষ্ঠশক্তির মাত্রা একই। গাণিতিকভাবে **E = T**

পৃষ্ঠশক্তির একক ও মাত্রা সমীকরণ
Unit and dimension of surface energy

পৃষ্ঠশক্তির এম. কে. এস. বা এস. আই. একক হলো জুল/মিটার² (Jm^{-2})। কিন্তু Jm^{-2} হচ্ছে Nmm^{-2} বা Nm^{-1}। কাজেই কোনো তরলের পৃষ্ঠশক্তির একক এবং পৃষ্ঠটানের একক অভিন্ন।

$$[\text{পৃষ্ঠশক্তি}] = \left[\frac{\text{কাজ}}{\text{ক্ষেত্রফল}}\right] = \left[\frac{\text{বল} \times \text{সরণ}}{\text{ক্ষেত্রফল}}\right]$$

$$= \left[\frac{MLT^{-2} \times L}{L^2}\right] = [MT^{-2}]$$

পৃষ্ঠশক্তির বৈশিষ্ট্য
Characteristics of surface energy

১। তরলের মুক্তপৃষ্ঠের একক ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি করতে যে কাজ করা হয় তার দ্বারা পৃষ্ঠশক্তির পরিমাপ করা হয়। এই কাজ মুক্তপৃষ্ঠে স্থিতিশক্তিরূপে সঞ্চিত থাকে।

২। পরম শূন্য তাপমাত্রায় পৃষ্ঠশক্তি পৃষ্ঠটানের সমান।

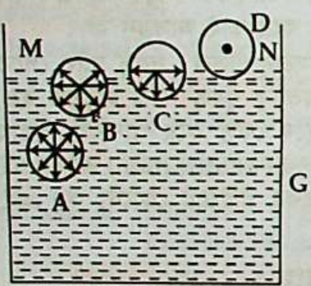
৩। পরম শূন্য তাপমাত্রা ছাড়া অন্য তাপমাত্রায় তরলের মোট পৃষ্ঠশক্তি সর্বদা পৃষ্ঠটান অপেক্ষা বেশি।

৭.১৬.৫ ল্যাপ্লাসের পৃষ্ঠটানের আণবিক তত্ত্বের সাহায্যে পৃষ্ঠটানের ব্যাখ্যা
Explanation of surface tension by Laplace's molecular theory of surface tension

তরলের পৃষ্ঠটানকে ব্যাখ্যা করার জন্য বিভিন্ন সময়ে বিভিন্ন বিজ্ঞানী বিভিন্ন তত্ত্ব প্রদান করেন। সর্বাপেক্ষা নির্ভরযোগ্য তত্ত্ব প্রদান করেন বিজ্ঞানী ল্যাপ্লাস। ল্যাপ্লাস-এর নামানুসারে এই তত্ত্বকে ল্যাপ্লাসের আণবিক তত্ত্ব বলে। ল্যাপ্লাস আণবিক তত্ত্বের সাহায্যে পৃষ্ঠটানের ব্যাখ্যা করেন বলে তত্ত্বের এরূপ নামকরণ হয়েছে।

মনে করি, A, B, C এবং D তরলের চারটি অণু [চিত্র ৭.৩২]। এদের মধ্যে A তরলের গভীর অভ্যন্তরে, B তরল তলের একটু নিচে, C ঠিক তরল তলে এবং D তরলের বাইরে অবস্থিত। তাদের চারদিকে প্রভাব গোলক অঙ্কন করি।

এখন প্রভাব গোলক কী জানা দরকার। দুটি অণুর মধ্যে সর্বোচ্চ যে দূরত্ব পর্যন্ত সংশক্তি বল অনুভূত হয় তাকে আণবিক পাল্লা বলে। আণবিক পাল্লার মান প্রায় 10^{-10} m। আণবিক পাল্লায় সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে কোনো একটি অণুকে কেন্দ্র করে একটি গোলক অঙ্কন করলে ওই গোলককে প্রভাব গোলক বলে।



চিত্র ৭.৩২

'A' অণুটির প্রভাব গোলক তরলের অভ্যন্তরে সম্পূর্ণভাবে নিমজ্জিত থাকায় তা অন্যান্য অণু দ্বারা চারদিকে সমভাবে আকৃষ্ট হবে এবং তার ওপর লব্ধি সংসক্তি বলের মান শূন্য হবে। ফলে তা যে অবস্থায় আছে সেই অবস্থায় থাকবে।

'B' অণুর প্রভাব গোলকের কিছু অংশ তরলের বাইরে থাকায় ওই গোলকের নিচের অংশের অণুর সংখ্যা ওপরের অংশের অণুর সংখ্যা অপেক্ষা অধিক হওয়ায় 'B' অণুর উপর একটি নিম্নমুখি লব্ধি সংসক্তি বল ক্রিয়া করবে।

পুনঃ 'C' অণু ঠিক তরল পৃষ্ঠের উপরে থাকায় এর প্রভাব গোলকের অর্ধেক ভাগ তরলের ভিতরে এবং অর্ধেক ভাগ তরলের বাইরে থাকবে। অতএব এটি কেবল গোলকের নিচের অংশের অণু দ্বারা আকৃষ্ট হবে এবং এটি সম্পূর্ণভাবে একটি নিম্নমুখি সর্বাধিক লব্ধি সংসক্তি বল অনুভব করবে।

তরল তলে অবস্থিত সকল অণুর ক্ষেত্রে এই ঘটনা পরিলক্ষিত হবে। তরল তলের ঠিক ওপরের D অণুর প্রভাব গোলক সম্পূর্ণ রূপে তরলের ওপরে থাকায় তার ওপর তরলের টান "শূন্য"। ফলে অণুটি গ্যাস অণুর ন্যায় মুক্তভাবে বিচরণ করবে। অতএব MN তরল তল একটি নিম্নমুখি বল বা টান অনুভব করে এবং সঙ্কুচিত হতে প্রয়াস পায়। অর্থাৎ MN তলের ক্ষেত্রফল কমাতে চায়, যার ফলে স্থিতিশক্তি কমে। সকল বস্তুই সুস্থির বা সাম্যাবস্থায় থাকার জন্য সর্বনিম্ন স্থিতিশক্তিতে আসতে চায়। যেমন একটি রাবারের টান দেয়া পর্দা নিজ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল হ্রাস করতে চায়। এই সঙ্কোচনের প্রবণতা হতেই তরলের পৃষ্ঠটানের উৎপত্তি হয়। এই টান তরল তলের স্পর্শক বরাবর ক্রিয়া করে। **ইহাই ল্যাপ্লাস কর্তৃক তরলের পৃষ্ঠটানের সরল আণবিক ব্যাখ্যা।**

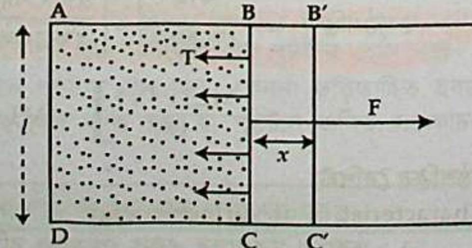
হিসাব : একটি গোলীয় পানির ফোঁটার ব্যাসার্ধ 1 mm। পানির পৃষ্ঠটান 73×10^{-3} Nm^{-1} হলে ফোঁটাটির ভিতরের ও বাইরের চাপের পার্থক্য নির্ণয় কর।

৭.১৬.৬ পৃষ্ঠটান ও পৃষ্ঠশক্তির সম্পর্ক
Relation between surface tension and surface energy

এখন তরলের পৃষ্ঠটান এবং পৃষ্ঠশক্তির মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করতে মনে করি ABCD একটি হাল্কা আয়তাকার ফ্রেম যার AB, AD এবং DC বাহু স্থির [চিত্র ৭.৩৩]। কেবল BC বাহু AB এবং DC বরাবর বাধাহীনভাবে চলাচল করতে পারে। তরলের একটি পর্দা এই ফ্রেমের ওপর স্থাপন করি। পৃষ্ঠটানের দরুন এই পর্দা BC বাহু ছাড়া অন্য সকল বাহু আটকানো থাকায় তারা স্থির থাকবে, কিন্তু BC বাহুটি ভিতরের দিকে যেতে চাইবে। যদি তরলের পৃষ্ঠটান T হয় এবং BC বাহুর দৈর্ঘ্য l হয়, তবে পৃষ্ঠটানের দরুন BC বাহুর ওপর ভিতরমুখী বল

$$F = 2l \times T \quad \ldots \quad \ldots \quad (7.37)$$

যেহেতু পর্দার দুটি তল আছে, একটি ওপরের দিকে এবং অপরটি নিচের দিকে, সেহেতু BC বাহুর দৈর্ঘ্য = $2l$। BC-কে স্থির রাখতে হলে তার ওপর পৃষ্ঠটানের বিপরীতমুখি সম পরিমাণের একটি বল প্রয়োগ করতে হবে।



চিত্র ৭.৩৩

এবার BC বাহুকে ধীরে ধীরে x দূরত্ব বাইরের দিকে সরিয়ে B′C′ অবস্থানে আনতে ওই বলের বিরুদ্ধে কিছু কাজ করতে হবে। এর ফলে ABCD পর্দাটির মোট ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি $= 2l \times x$, যেহেতু পর্দার দুটি তল আছে। এই পদ্ধতিতে কৃত কাজের পরিমাণ—

$$W = \text{বল} \times \text{সরণ} = F \times x = 2lTx$$

∴ একক ক্ষেত্রফল বৃদ্ধিতে কাজের পরিমাণ

$$= \frac{\text{কাজ}}{\text{ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি}} = \frac{W}{2lx} = \frac{2lTx}{2lx} = T$$

কিন্তু একক ক্ষেত্রফল বৃদ্ধিতে কাজের পরিমাণ = একক ক্ষেত্রফলে সঞ্চিত স্থিতিশক্তি। পুনঃ একক ক্ষেত্রফলে সঞ্চিত স্থিতিশক্তি=পৃষ্ঠশক্তি। অতএব আমরা এই সিদ্ধান্ত করতে পারি যে, কোনো তরলের পৃষ্ঠশক্তি সংখ্যাগতভাবে তরলের পৃষ্ঠটানের সমান।

যদি পৃষ্ঠশক্তিকে E এবং পৃষ্ঠটানকে T দ্বারা প্রকাশ করা হয়, তবে

$$\boxed{E = T} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (7.38)$$

সম্প্রসারিত কাজ : (ক) N সংখ্যক ছোট ফোঁটাকে একত্রিত করে একটি বড় ফোঁটায় এবং (খ) বড় ফোঁটাকে ভেঙে N সংখ্যক ছোট ফোঁটায় পরিণত করতে কাজের মান নির্ণয় কর।

(ক) N সংখ্যক ছোট ফোঁটাকে একত্রিত করে একটি বড় ফোঁটায় পরিণত করতে হলে ক্ষেত্রফল হ্রাস পায়। এক্ষেত্রে শক্তি নির্গত হয়। এই শক্তির পরিমাণ সম্পাদিত কাজের সমান।

প্রয়োজনীয় নির্গত শক্তি = সম্পাদিত কাজ, $W = \Delta AT = (N4\pi r^2 - 4\pi R^2) \times T$

$$= 4\pi (Nr^2 - R^2) \times T$$

(খ) বড় তরল ফোঁটাকে ভেঙে N সংখ্যক ছোট ফোঁটায় পরিণত করলে ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি পায়। সেক্ষেত্রে শক্তি সরবরাহ করতে হয়। এই শক্তির পরিমাণ হলো সম্পাদিত কাজের পরিমাণ।

প্রয়োজনীয় শক্তি = সম্পাদিত কাজ, $W = \Delta A \times T = (4\pi R^2 - N4\pi r^2) \times T$

$$= 4\pi (R^2 - Nr^2) \times T$$

এখানে,
R = বড় ফোঁটার ব্যাসার্ধ
r = ছোট ফোঁটার ব্যাসার্ধ

ক্রিয়াকর্ম : একটি তারের রিং তৈরি করে সাবান গোলা পানিতে ডুবিয়ে তুলে আনলে কী দেখতে পাবে ? আংটার ভিতর সাবানের একটি সর দেখতে পাবে। এখন একটি সুতায় গীট দিয়ে ফাঁস তৈরি করে ঐ সরের ওপর রাখ। কী দেখবে ? ফাঁসটি সরের ওপর কীভাবে অবস্থান করবে ?

ফাঁসটি সরের ওপর স্থাপন করলে ফাঁসের প্রত্যেক বিন্দুতে সরের পৃষ্ঠের স্পর্শক বরাবর অন্তর্মুখী ও বহির্মুখী সমান বল ক্রিয়া করে। এই বলদ্বয় পরস্পরকে প্রশমিত করে বলে ফাঁসটি সরের ওপর বৃত্তের আকারে অবস্থান করে।

গাণিতিক উদাহরণ ৭.৯

১। পানির উপরিতল হতে 0·05 m লম্বা একটি অনুভূমিক তারকে টেনে তুলতে তারের ওজনসহ সর্বাধিক $7{\cdot}28 \times 10^{-3}$ N বলের প্রয়োজন হয়। পানির পৃষ্ঠটান নির্ণয় কর।

মনে করি পৃষ্ঠ টান = T

আমরা পাই, $T = \frac{F}{L}$ ... ... (i)

∴ সমীকরণ (i) হতে মানগুলোর সাপেক্ষে পাই,

$$T = \frac{7{\cdot}28 \times 10^{-3}\,\text{N}}{2 \times 0{\cdot}05\,\text{m}}$$

$$= 7{\cdot}28 \times 10^{-2}\,\text{N m}^{-1}$$

এখানে, $F = 7{\cdot}28 \times 10^{-3}$ N

$L = 2 \times 0{\cdot}05$ m

যেহেতু তারের উভয় দিকে পানি আছে। তাই এক্ষেত্রে দৈর্ঘ্য 2L হয়।

২। একটি সুচের ওজন নগণ্য ধরে 28°C তাপমাত্রার পানির উপরিতল থেকে 0·05 m লম্বা একটি সূচকে অনুভূমিকভাবে সর্বাধিক $7{\cdot}30\times10^{-3}$ N বলে টেনে ওঠানো যায়। পানির পৃষ্ঠটান নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

$$T = \frac{F}{2l} = \frac{7{\cdot}30\times10^{-3}}{2\times0{\cdot}05} = 0{\cdot}073\ \text{Nm}^{-1}$$

এখানে,
বল, $F = 7{\cdot}30\times10^{-3}$ N
দৈর্ঘ্য, $l = 0{\cdot}05$ m

[যেহেতু সুচটির দুই পাশেই পানি আছে তাই পৃষ্ঠটানের জন্য দুই পাশেই বল প্রযুক্ত হয়, ফলে দৈর্ঘ্য $2l$ ধরা হয়েছে।]

৩। 10^{-4} m ব্যাসের 1000টি পানির ফোঁটাকে একসাথে করে একটি বড় ফোঁটায় পরিণত করা হলো। সেই বড় ফোঁটাকে আবার 216টি ছোট ফোঁটায় পরিণত করা হলো। পানির ঘনত্ব 1000 kg m^{-3}। ১ম ক্ষেত্রে বড় ফোঁটায় এবং ২য় ক্ষেত্রে ছোট ফোঁটায় পরিণত করতে একই শক্তি লাগবে কি না ?

আমরা জানি,

ছোট ফোঁটাকে বড় ফোঁটায় পরিণত করতে কাজ বা শক্তি,

$$W = 4\pi(Nr^2 - R^2)\times T$$
$$= 4\times3{\cdot}14[1000\times(10^{-4})^2 - (10\times10^{-4})^2]\times72\times10^{-3}$$
$$= 8{\cdot}14\times10^{-6}\ \text{J}$$

আবার, বড় ফোঁটাকে ছোট ফোঁটায় পরিণত করতে শক্তি,

$$W = 4\pi(R^2 - Nr^2)\times T$$
$$= 4\pi[(10\times10^{-4})^2 - 216\times(10^{-4})^2]\times72\times10^{-3}$$
$$= 1{\cdot}241\times10^{-5}\ \text{J}$$

$W \neq W'$; কাজেই একই শক্তি লাগবে না।

এখানে,
$\frac{4}{3}\pi R^3 = 1000\times\frac{4}{3}\pi r^3$
$R = 1000\,r^3$
$= (1000)^{1/3}\,r = 10\times10^{-4}$ m
$T = 72\times10^{-3}$

৪। প্রতিটি 1 mm ব্যাসার্ধের আটটি বৃষ্টির ফোঁটা 5 cm/s প্রান্তিক বেগে পতনশীল। যদি আটটি ফোঁটা একত্রিত হয়ে একটি বড় ফোঁটায় পরিণত হয়, তাহলে নির্গত শক্তির পরিমাণ নির্ণয় কর। পানির পৃষ্ঠটান = $7{\cdot}4\times10^{-2}$ Nm^{-1}

[BUET Admission Test, 2016-17]

আমরা জানি, নির্গত শক্তি

$$W = \Delta A\times T \text{ এবং } \Delta A = n4\pi r^2 - 4\pi R^2$$
$$W = 4\pi(Nr^2 - R^2)\times T$$
$$= 4\pi(Nr^2 - N^{2/3}r^2)\times T$$
$$= 4\pi r^2(N - N^{2/3})\times T$$
$$= 4\times\pi(1\times10^{-3})^2\times(8-8^{2/3})\times7{\cdot}4\times10^{-2}\ \text{J}$$
$$= 3{\cdot}72\times10^{-6}\ \text{J}$$

এখানে,
$r = 1\ \text{mm} = 1\times10^{-3}$ m
$v_c = 5$ cm/s
$T = 7{\cdot}4\times10^{-2}$ Nm^{-1}

৫। 10^6 সংখ্যক 0·1 mm ব্যাসার্ধের পানির ফোঁটা মিলে একটি বড় ফোঁটায় পরিণত করতে কত শক্তি নির্গত হয়? $T = 72\times10^{-3}$ Nm^{-1}

[BUET Admission Test, 2015-16]

আমরা জানি,

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = n\frac{4}{3}\pi r^3$$
$$R = r\sqrt[3]{n} = 0{\cdot}1\times\sqrt[3]{10^6} = 10\ \text{mm} = 1\times10^{-2}\ \text{m}$$

এখানে,
$n = 10^6$
$r = 0{\cdot}1\ \text{mm} = 1\times10^{-4}$ m
$T = 72\times10^{-3}$ Nm^{-1}

$$\therefore \Delta A = n4\pi r^2 - 4\pi R^2$$
$$= 4\pi(nr^2 - R^2) = 4\times3{\cdot}14[10^6\times(1\times10^{-4})^2 - (1\times10^{-2})^2]$$
$$= 4\times3{\cdot}14\times0{\cdot}0099\ \text{m}^2 = 0{\cdot}124\ \text{m}^2$$

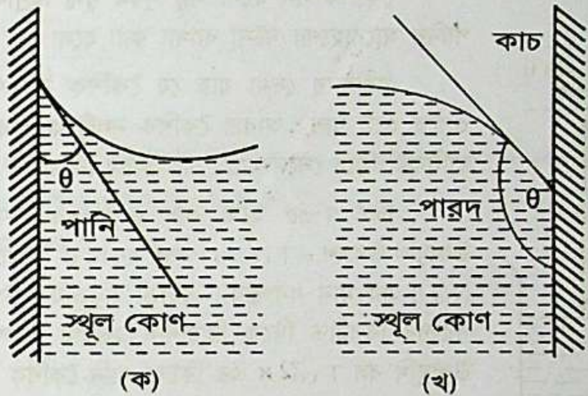
আবার,

$$W = \Delta AT = 0{\cdot}124\times72\times10^{-3} = 8{\cdot}936\times10^{-3}\ \text{J}$$

৭·১৭ স্পর্শ কোণ
Angle of contact

তরল পদার্থ যখন কোনো কঠিন পদার্থের সংস্পর্শে আসে, তখন তাদের মধ্যে একটি কোণ উৎপন্ন হয়। একেই আপাতভাবে স্পর্শ কোণ বলে। প্রকৃতভাবে স্পর্শ কোণ কি তা-ই এখন ব্যাখ্যা করব।

কোনো একটি কঠিন বস্তু খাড়াভাবে পানিতে বা অন্য কোনো তরলে আংশিকভাবে ডুবালে তাদের সংযোগ স্থানে তরল তল কিছুটা বেঁকে যায়। তরলের বিভিন্ন অণুর মধ্যে সংসক্তি বল ছাড়াও কঠিন ও তরলের অণুর আসঞ্জন



চিত্র ৭·৩৪

বল আছে। এক্ষেত্রে একই পদার্থের বিভিন্ন অণুগুলোর মধ্যে পারস্পরিক আকর্ষণ বলই সংশক্তি বল। এই বল দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক সূত্র মেনে চলে। অন্যদিকে বিভিন্ন পদার্থের অণুগুলোর মধ্যে পারস্পরিক আকর্ষণ বলই আসঞ্জন বল। সংসক্তি বল তরল তলকে অনুভূমিকভাবে রাখার চেষ্টা করে। পক্ষান্তরে আসঞ্জন বল তরল তলকে উপরে উঠাতে চেষ্টা করে। এই দুটি বলের সম্মিলিত ক্রিয়ায় তরল তল কঠিন পদার্থের গা বেয়ে উপরে ওঠে কিংবা নিচে নেমে আসে এবং কঠিন পদার্থের দেয়ালের সাথে একটি কোণ উৎপন্ন করে। ৭·৩৪ চিত্রে স্পর্শ কোণ θ দেখানো হয়েছে।

কঠিন ও তরলের স্পর্শ বিন্দু হতে বক্র তরল তলে অঙ্কিত স্পর্শক কঠিন বস্তুর সাথে তরলের মধ্যে যে কোণ উৎপন্ন করে, তাকে উক্ত কঠিন ও তরলের মধ্যকার স্পর্শ কোণ বলে। চিত্রে θ হলো স্পর্শ কোণ।

স্পর্শ কোণ দুই প্রকার, যথা—

১। সূক্ষ্ম স্পর্শ কোণ (Acute angle of contact) এবং

২। স্থূল স্পর্শ কোণ (Obtuse angle of contact)।

স্পর্শ কোণ 90° অপেক্ষা কম হলে সূক্ষ্ম স্পর্শ কোণ হবে। যে সব তরলের ঘনত্ব কঠিনের ঘনত্ব অপেক্ষা কম সে সব তরল সাধারণত কঠিনকে ভিজায়। এসব ক্ষেত্রে স্পর্শ কোণ সূক্ষ্ম কোণ হবে [চিত্র ৭·৩২ (ক)]। যেমন পানির ঘনত্ব কাচের ঘনত্ব অপেক্ষা কম। পানি কাচকে ভিজায়। এক্ষেত্রে স্পর্শ কোণ সূক্ষ্ম কোণ হবে। সাধারণ পানি এবং কাচের ভিতরকার স্পর্শ কোণ প্রায় 8°। বিশুদ্ধ পানি ও পরিষ্কার কাচের ভিতরকার স্পর্শ কোণ প্রায় শূন্য এবং রূপা ও পানির ভিতরকার স্পর্শ কোণ প্রায় 90°।

আর স্পর্শ কোণ 90° অপেক্ষা বড় হলে স্থূল স্পর্শ কোণ হয়। যে সব তরলের ঘনত্ব কঠিনের ঘনত্ব অপেক্ষা বেশি, সেসব তরল সাধারণত কঠিনকে ভিজায় না। এক্ষেত্রে স্পর্শ কোণ স্থূলকোণ হবে [চিত্র ৭·৩২ (খ)]। যেমন পারদের ঘনত্ব কাচের ঘনত্ব অপেক্ষা বেশি। পারদ কাচকে ভিজায় না। এক্ষেত্রে স্পর্শ কোণ স্থূল কোণ হবে। পারদ এবং কাচের ভিতরকার স্পর্শ কোণ প্রায় 140°।

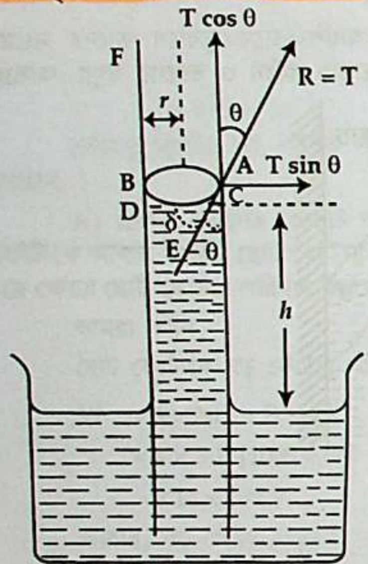
৭·১৭·১ স্পর্শ কোণ যে যে বিষয়ের ওপর নির্ভর করে
Factors on which angle of contact depends

নিম্নলিখিত বিষয়গুলোর ওপর স্পর্শ কোণ নির্ভর করে—

(ক) কঠিন ও তরলের প্রকৃতি।

(খ) তরলের উপরিস্থিত মাধ্যম। যেমন পারদের উপর বায়ু থাকলে কাচ ও পারদের স্পর্শ কোণ যা হবে, পারদের ওপর পানি থাকলে কাচ ও পারদের স্পর্শ কোণ ভিন্নতর হবে।

(গ) কঠিন ও তরলের বিশুদ্ধতা। যদি তরল বিশুদ্ধ না হয় এবং কঠিন পরিষ্কার না হয় তবে স্পর্শ কোণ পরিবর্তিত হয়। বিশুদ্ধ পানি ও পরিষ্কার কাচের ভিতরকার স্পর্শ কোণ প্রায় শূন্য। কিন্তু কাচ সামান্য তৈলাক্ত হলে স্পর্শ কোণ বৃদ্ধি পায়; এমন কি 90°-এর বেশিও হতে দেখা যায়।



চিত্র ৭.৩৫

স্পর্শ কোণের উপর নির্ভর করে কৈশিক নলে পানির আরোহণের ঘটনা :

কৈশিক নল হলো সরু সুষম যুগ্ম ছিদ্রবিশিষ্ট নল। নিম্নে কৈশিক নলে পানির আরোহণের ঘটনা ব্যাখ্যা করা হলো :

পরীক্ষায় দেখা যায় যে কৈশিক নল পানিতে ডুবালে পানি খানিকটা ওপরে ওঠে যায়। আবার কৈশিক নলটিকে পারদে ডুবালে নলের ভেতরে পারদ খানিকটা নিচে নেমে যায়। এর কারণ নিম্নরূপ :

চিত্র ৭.৩৫ হতে কাচ ও পানির ক্ষেত্রে প্রতিক্রিয়া বল T-এর খাড়া ঊর্ধ্বমুখি উপাংশ = $T\cos\theta$। স্পর্শ কোণ θ সূক্ষ্মকোণ ($0 < \theta < 90°$) হওয়ায় $T\cos\theta$-এর মান ধনাত্মক। এছাড়া অনুভূমিক উপাংশ $T\sin\theta$ নলের দুই প্রান্তে পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়াশীল হওয়ায় পরস্পরের ক্রিয়া নাকচ করে দেয়। ঊর্ধ্বমুখি বল $T\cos\theta$ এর ক্রিয়ায় পানি কৈশিক নলের ভেতর দিয়ে ওপরে ওঠে।

কৈশিক নল পদ্ধতিতে পানির পৃষ্ঠটান নির্ণয়ের মূল তত্ত্ব হলো

$$T = \frac{r\rho g\left(h + \frac{r}{3}\right)}{2\cos\theta} \quad \ldots \quad \ldots \quad (7.39)$$

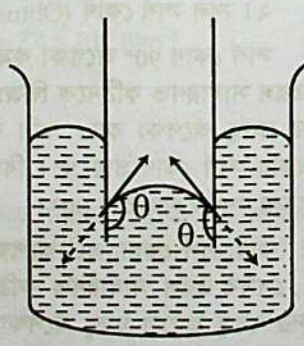
এখানে, r = নলের ব্যাসার্ধ, ρ = পানির ঘনত্ব, h = নলের মধ্যে পানি স্তরের উচ্চতা, θ = স্পর্শ কোণ।
কৈশিক নলের ব্যাসার্ধ ক্ষুদ্র বলে $r << h$ হয়,

$$T = \frac{hr\rho g}{2\cos\theta} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (7.40)$$

কাচ ও পানির ক্ষেত্রে $\theta = 0°$ ধরা হয়। ফলে $T = \frac{hr\rho g}{2}$ ... ... [7.41]

চিত্র ৭.৩৬-এ কৈশিক নল পারদে ডুবানো দেখানো হয়েছে। এক্ষেত্রে স্পর্শকোণ স্থূলকোণ ($90° < \theta < 180°$)। পৃষ্ঠটান ও প্রতিক্রিয়া বলের অভিমুখ থেকে দেখা যায়, যে প্রতিক্রিয়া বলের খাড়া ঊর্ধ্বমুখি কোনো উপাংশ নেই। খাড়া নিম্নমুখি উপাংশ রয়েছে। এই নিম্নমুখি বলের ক্রিয়ায় কাচনলে পারদ নিচের দিকে খানিকটা নেমে যায়। পারদ নিচে নামার কারণ নিম্নোক্তভাবেও ব্যাখ্যা করা যায়।

যেহেতু θ স্থূলকোণ, সুতরাং $\cos\theta$ ঋণাত্মক। এখন পৃষ্ঠটানের সমীকরণ (7.39) হতে দেখা যায় যে, $\cos\theta$ ঋণাত্মক হলে সমীকরণের ডানপক্ষ ঋণাত্মক হয়; কিন্তু বামপক্ষের পৃষ্ঠ টান T ধনাত্মক। তাই $\cos\theta$ ঋণাত্মক হলে h ঋণাত্মক হয়। এর অর্থ হলো পারদ কাচনলের মধ্যে নিচে নেমে যায়।



চিত্র ৭.৩৬

নিজে কর : দুটি বাটির একটিতে পানি এবং অপরটিতে পারদ নাও। এবার হাতে একটি কৈশিক নল নিয়ে প্রথমে পারদে প্রবেশ করাও পরে পানিতে প্রবেশ করাও। কৈশিক নলে পানি ওপরে ওঠে কিন্তু পারদ নিচে নামে কেন ?

কৈশিক নল সাধারণত কাচ জাতীয় পদার্থ দ্বারা তৈরি হয়। কাচ ও পানির মধ্যকার আসঞ্জন বল পানির অণুসমূহের মধ্যকার সংশক্তি বল অপেক্ষা বৃহত্তর। অপরপক্ষে, কাচ ও পারদের আসঞ্জন বল পারদের অণুসমূহের মধ্যকার সংশক্তি বল অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। তাই কৈশিক নলে পানির আরোহণ ঘটে কিন্তু পারদের অবরোহণ ঘটে।

গাণিতিক উদাহরণ ৭.১০

১। একটি কৈশিক নলের ব্যাস 0·2 mm। একে 72×10^{-3} Nm^{-1} পৃষ্ঠটান এবং 10^3 kgm^{-3} ঘনত্বের পানিতে ডুবালে নলের কত উচ্চতায় পানি উঠবে?

আমরা জানি,

পৃষ্ঠটান, $T = \frac{hr\rho g}{2}$

বা, $h = \frac{2T}{r\rho g} = \frac{2 \times 72 \times 10^{-3}}{10^{-4} \times 10^3 \times 9.8}$

$= 0.1469$ m

এখানে

$r = \frac{0.2}{2} = 0.1$ mm $= 10^{-4}$ m

$T = 72 \times 10^{-3}$ Nm^{-1}

$\rho = 10^3$ kgm^{-3}

$g = 9.8$ ms^{-2}

২। 0·2 mm ব্যাসার্ধের একটি কৈশিক নলকে প্রথম ও দ্বিতীয় তরলে ডুবালে 4° ও 140° স্পর্শ কোণ তৈরি করে। প্রথম ও দ্বিতীয় তরলের পৃষ্ঠটান যথাক্রমে 72×10^{-3} Nm^{-1} এবং 465×10^{-3} Nm^{-1}। কৈশিক নলে যে পরিমাণ প্রথম তরল ওপরে ওঠে তা নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০১৬]

আমরা জানি,

প্রথম তরলের পৃষ্ঠটান, $T_1 = \frac{rh_1\rho_1 g}{2\cos\theta_1}$

ঘনত্ব, $\rho_1 = \frac{m_1}{V_1}$

$\therefore$ $T_1 = \frac{rh_1 m_1 g}{2V_1 \cos\theta_1}$

$= \frac{rh_1 m_1 g}{2\pi r^2 h_1 \cos\theta_1}$ $[\because V_1 = \pi r^2 h]$

বা, $m_1 = \frac{2\pi r T_1 \cos\theta_1}{g}$

$= \frac{2 \times 3.14 \times 0.2 \times 10^{-3} \times 72 \times 10^{-3} \cos 4°}{9.8}$

$\therefore$ $m_1 = 9.2 \times 10^{-6}$ kg

এখানে

$r = 0.2$ mm $= 0.2 \times 10^{-3}$ m

$T_1 = 72 \times 10^{-3}$ Nm^{-1}

$T_2 = 465 \times 10^{-3}$ Nm^{-1}

$\theta_1 = 4°$, $\theta_2 = 140°$

$g = 9.8$ ms^{-2}

নলে প্রথম তরলের ভর, $m_1 = ?$

৭·১৮ পৃষ্ঠটানের ব্যবহার
Uses of surface tension

দৈনন্দিন জীবনের কতগুলো বাস্তব ঘটনা যা পৃষ্ঠটান দ্বারা প্রভাবিত হয়। তরলের পৃষ্ঠটানের সাহায্যে এই সকল ঘটনা ব্যাখ্যা করা যায়।

১. পানির তলে পোকামাকড়ের চলাচল :

আমরা পানির উপরিতলে পোকামাকড় চলাফেরা করতে দেখি। এই পোকামাকড় পানির মধ্যে ডুবে না কেন ? এর কারণ কিন্তু পৃষ্ঠটান। আমরা জানি পৃষ্ঠটান নানা কারণে প্রভাবিত হয়—এর মধ্যে অন্যতম একটি কারণ হলো পৃষ্ঠটানজনিত পানির উর্ধ্বমুখি বল। পোকামাকড় যখন পানির ওপর দিয়ে চলাচল করে তখন এর ওজন (W) নিচের দিকে ক্রিয়াশীল হয়, অপরদিকে পোকামাকড়ের উপর পৃষ্ঠটানজনিত উর্ধ্বমুখী বল (F) ওপরের দিকে ক্রিয়াশীল হয়। পৃষ্ঠটানের দরুন পানির উপরিতল নিচের দিকে বেঁকে যায়। এই উর্ধ্বমুখি বল (F) এবং ওজন (W) এর মান সমান হওয়ার কারণেই পোকামাকড় পানির উপরে ভেসে থেকে চলাচল করতে পারে।

খ. সাবানের ফেনা : ফাঁপা একটি কাঁচনলের একপ্রান্ত সাবান পানিতে ডুবিয়ে ফুঁ দিলে সাবানের গোলাকার বুদ্‌বুদ্ সৃষ্টি হয়। অথবা কাপড় কাচার সময় কাপড়ে সাবান পানি লেগে থাকলে সেখানেও সাবানের বুদ্‌বুদ্ সৃষ্টি হতে দেখা যায়। এক্ষেত্রে সাবান পানির পাতলা ও গোলাকার পর্দা দ্বারা আবদ্ধ কিছু পরিমাণ বায়ু থেকে সাবানের বুদবুদ ওঠে। এই সাবান বুদবুদের দুটি পৃষ্ঠ থাকে, একটি ভেতরের পৃষ্ঠ, অপরটি বাইরের পৃষ্ঠ। ভেতরের চাপ বাইরের চাপ অপেক্ষা বেশি বলে বুদ্‌বুদ্ প্রসারিত হতে চায়। কিন্তু পর্দার পৃষ্ঠটান একে সঙ্কুচিত করতে চায়। বুদ্‌বুদের সাম্যাবস্থায় এই দুটি বিপরীতমুখি বলের মান সমান হয়। পৃষ্ঠটান অপেক্ষা ভেতরের চাপ বেশি হলে তা ফেটে যাবে।

গ. **গাছে পানির পরিবহন** : গাছে পানির পরিবহন ব্যাখ্যা করার আগে আমরা কৈশিক নল ও কৈশিকতা কী তা বোঝার চেষ্টা করব। কৈশিক নল হলো সুষম, সূক্ষ্ম ছিদ্রবিশিষ্ট সরু নল। আর কৈশিকতা বলতে এই নলের মধ্যে তরলের উর্ধ্বারোহণ বা অবনমনকে বোঝায়। গাছের মূল থেকে শুরু করে কাণ্ড ও শাখা প্রশাখাতে অসংখ্য ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র ছিদ্র থাকে। এই সকল ছিদ্র কৈশিক নল হিসেবে ক্রিয়া করে। ফলে মাটি থেকে পানি বা জলীয় অংশ এই সরু ছিদ্র পথে কৈশিকতার কারণে মূল থেকে কাণ্ড ও গাছের অন্যান্য অংশে পানির পরিবহন হয় বা পানি ছড়িয়ে পড়ে।

ঘ. **তরলের পৃষ্ঠে সুচের অবস্থান** : পানির উপরিতলে একটি পাতলা কাগজ রেখে তার ওপর গ্রিজ মাখানো একটি সুচ স্থাপন করলে দেখা যাবে যে, কাগজ পানিতে ডুবে গেছে, কিন্তু সুচ পানিতে ভাসছে, তবে পানির উপরিতল নিচের দিকে কিছু বেঁকে গেছে। তরলে পৃষ্ঠটান (T) এর দরুন সুচের ওপর মোট উর্ধ্বমুখি বল (F) সুচের ওজন (W)-এর সমান হয় অর্থাৎ $F = W$ হয় এই কারণে সুচকে পানিতে ভাসতে দেখা যায়।

ছাতার কাপড় বা তাবুর কাপড়ের মধ্য দিয়ে পানি প্রবেশ করতে না পারা : ছাতার কাপড় বা তাবুর কাপড়ের যে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র ছিদ্র থাকে তার মধ্য দিয়ে বায়ু সহজে চলাচল করতে পারলেও বৃষ্টির পানি সহজে প্রবেশ করতে পারে না। এর কারণ হলো বৃষ্টির পানি পৃষ্ঠটানের জন্য ছোট ছোট গোলাকার বিন্দুর আকার ধারণ করে এবং কাপড়ের ওপর দিয়ে গড়িয়ে পড়ে যায়।

হাতে কলমে কর : একটি সরু কাচনল নাও। এরপর কাচনলটিকে একটি বার্নারের ওপর ধর। নলের প্রান্ত গলে যাবে এবং প্রান্ত গলে গিয়ে গোলাকার আকার ধারণ করে কেন ?

সরু কাচ নলের প্রান্তে তাপ দিলে প্রান্তটি গোলাকার হয়ে যায়। কাচ নলের প্রান্তকে যখন উত্তপ্ত করা হয় ওই প্রান্তের কাচ তখন গলে যায়। গলে যাওয়া কাচ তরলের মতো আচরণ করে এবং পৃষ্ঠটানের কারণে ন্যূনতম পৃষ্ঠ ক্ষেত্রফল অর্জন করতে চায়। ফলে নলের প্রান্ত গোলাকার হয়ে যায়।

প্রয়োজনীয় গাণিতিক সূত্রাবলি

দৈর্ঘ্য বিকৃতি $= \frac{l}{L}$ ... ... (1)

কৃন্তন বিকৃতি $= \theta = \frac{d}{D}$ ... ... (2)

আয়তন বিকৃতি $= \frac{v}{V}$ ... ... (3)

পীড়ন $= \frac{F}{A}$ ... ... (4)

$$Y = \frac{F/A}{l/L} = \frac{FL}{Al} = \frac{mgL}{\pi r^2 l} \quad \ldots \quad (5)$$

$$K = \frac{F/A}{v/V} = \frac{FV}{Av} = \frac{P}{\cancel{v}/V} \quad \ldots \quad (6)$$

$$\eta = \frac{F/A}{\theta} = \frac{F}{A\theta} \quad \ldots \quad (7)$$

$$\sigma = -\frac{\Delta d/D}{\Delta l/L} \text{ বা, } \sigma = -\frac{L\Delta r}{r\Delta L} \quad \ldots \quad (8)$$

$T = \frac{F}{l}$, সুচ বা তারের ক্ষেত্রে $T = \frac{F}{2l}$ ... ... (9)

$$E = T \quad \ldots \quad (10)$$

$$F = \eta A \frac{dv}{dx} \quad \ldots \quad (11)$$

$$\eta = \left(\frac{F}{A}\right) / \left(\frac{dv}{dx}\right) \quad \ldots \quad (12)$$

$$v = \frac{2}{9} \times \frac{r^2(\rho - \sigma)g}{\eta} \quad \ldots \quad (13)$$

$W = \frac{1}{2}$ পীড়ন × বিকৃতি $= \frac{1}{2} \times \frac{YAl^2}{L}$ ... ... (14)

উচ্চতর দক্ষতাভিত্তিক নমুনার গাণিতিক উদাহরণ

১। নন্দন পার্কের একটি দোলনায় ঝুলতে লোহার তার ব্যবহার করা হয়েছে। কয়েকজন ছেলে-মেয়ে দোলনায় যখন দোল খাচ্ছিল তখন এক বাচ্চার অভিভাবক লক্ষ করেন যে, ঝুলন তার 1 মিটার থেকে বৃদ্ধি পেয়ে 1·01 মিটার হচ্ছে এবং তারটির ব্যাস পরিমাপ করে দেখে ব্যাস হ্রাস পেয়েছে।

(ক) পয়সনের অনুপাত 0·2 হলে দোলনার তারের ব্যাস কতখানি হ্রাস পায় ?

(খ) স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে তারের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পেয়ে দেড়গুণ হলে ব্যাসটি কীরূপ পরিবর্তন হবে—বিশ্লেষণ কর।

(ক) আমরা জানি, $\sigma = \frac{\Delta r\, L_0}{r\, \Delta L} = \frac{\frac{\Delta d}{2} L_0}{\frac{D}{2} \times \Delta L}$

বা, $\frac{\Delta d}{D} = \frac{\sigma \times \Delta L}{L_0} = \frac{0·2 \times 0·01}{1} = 0·002$

$\therefore \quad \Delta d = 0·002 \times D$

তারের ব্যাসটি আদি ব্যাসের 0·2% হ্রাস পাবে।

এখানে,

$L_0 = 1\,m$

$\Delta l = 1·01 - 1 = 0·01\ m$

$\sigma = 0·2$

$\frac{\Delta r}{r} = ?$

(খ) স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে তারের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পেয়ে 1·5 হলে ব্যাসার্ধ হ্রাস পাবে।

যদি তারের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পেয়ে 1·5 গুণ হয় তাহলে

$\Delta L = 1·5\, L_0 - L_0 \quad \therefore \quad \Delta L = 0·5\, L_0$

স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে পয়সনের অনুপাত

$\sigma = \frac{\Delta r\, L_0}{r\, \Delta L}$

বা, $\frac{\Delta d}{D} = \frac{\sigma \Delta L}{L_0} = \sigma \times \frac{0·5 L_0}{L_0}$

$\therefore \quad \frac{\Delta d}{D} = \sigma \times 0·5 = \sigma \times \frac{1}{2}$

$\therefore$ তারের ব্যাস $\frac{\sigma}{2}$ অনুপাতে হ্রাস পাবে।

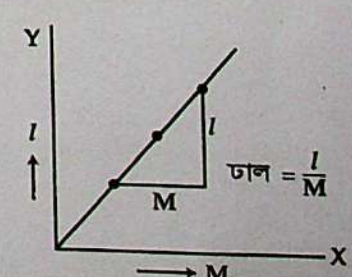
২। সোমা পদার্থবিজ্ঞান ব্যবহারিক ক্লাসে ভার্নিয়ার পদ্ধতিতে একটি 1 m তারের ইয়ং-এর গুণাঙ্ক নির্ণয় করছিল। সে দেখল 1 বর্গ মিমি প্রস্থচ্ছেদের একটি ইস্পাতের তারে স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে 2×10^5 N বল প্রয়োগে তারের দৈর্ঘ্য আদি দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ হলো। পরীক্ষা শেষে তার শিক্ষক গ্রাফ কাগজে পরীক্ষণটি উপস্থাপন করতে বলেন।

সোমা কীভাবে গ্রাফ কাগজটি কাজে লাগিয়ে ইয়ং এর গুণাঙ্ক নির্ণয় করেছিল ? ব্যাখ্যা কর।

সোমা গ্রাফটি ইয়ং-এর গুণাঙ্ক নির্ণয় পরীক্ষা কাজে ব্যবহার করতে পারে। তারটিতে M ভরের ভার দেবার ফলে দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি (l) পেয়েছে।

কাজেই ইয়ং-এর গুণাঙ্ক, $Y = \frac{MgL}{\pi r^2 l}$ ... ... (i)

সমীকরণ $\frac{M}{l}$ এর মান নির্ণয়ের জন্য গ্রাফ কাগজে x অক্ষে M এবং Y অক্ষে l নিয়ে লেখচিত্র অংকন করলে লেখচিত্রটি মূল বিন্দুগামী একটি সরলরেখা হবে। এই সরলরেখার ঢাল থেকে $\frac{M}{l}$ নির্ণয় করা যায়। এভাবে সে গ্রাফ কাগজটি কাজে লাগিয়েছিল।



এবার (i)নং সমীকরণে গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত $\frac{M}{l}$, $\pi r^2 = A = 1 \times 10^{-6}\ m^2$, $L = 1$ m এবং $g = 9·8\ m/s^2$ বসিয়ে Y নির্ণয় করেছিল।

৩। দুইটি তারের দৈর্ঘ্য সমান কিন্তু ব্যাস যথাক্রমে 2 mm ও 5 mm। তার দুইটিকে সমান বলে টানলে প্রথমটির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি দ্বিতীয়টির তিনগুণ হয়। প্রথম তারের পয়সনের অনুপাত 0.5। [ঢা. বো. ২০১৫]

(ক) যখন প্রথম তারের 10% দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি ঘটে তখন তারের ব্যাসার্ধ কতটুকু হ্রাস পায় ?

(খ) উদ্দীপকের তার দুইটির মধ্যে কোনটি বেশি স্থিতিস্থাপক? গাণিতিক বিশ্লেষণের সাহায্যে তোমার মতামত ব্যক্ত কর।

(ক) আমরা জানি, পয়সনের অনুপাত,

$$\sigma = \frac{\text{পার্শ্ব বিকৃতি}}{\text{দৈর্ঘ্য বিকৃতি}} = \frac{d/D}{l/L} = \frac{dL}{Dl}$$

বা, $d = \frac{\sigma D l}{L}$

প্রথম তারের ক্ষেত্রে,

$$d_1 = \frac{\sigma_1 D_1 l_1}{L}$$

$$= \frac{0.5 \times 2 \times 10^{-3} \times 0.1\ L}{L}$$

$$= 1 \times 10^{-4}\ m$$

$\therefore$ ব্যাসার্ধ হ্রাস $= \frac{d_1}{2} = 0.5 \times 10^{-4}\ m$

এখানে,

$L_1 = L_2 = L$

$D_1 = 2\ mm = 2 \times 10^{-3}\ m$

$D_2 = 5\ mm = 5 \times 10^{-3}\ m$

$l_1 = 3\, l_2$

$l_1 = 10\%\ L = 0.1L$

$d_1 = ?$

$\sigma_1 = 0.5$

(খ) আবার, ইয়ং-এর গুণাঙ্ক, $Y = \frac{F/A}{l/L}$

$\therefore$ ১ম তারের ক্ষেত্রে, $Y_1 = \frac{F_1/A_1}{l_1/L_1} = \frac{F_1 \times L_1}{A_1 l_1} = \frac{FL}{A_1 l_1}$

এবং ২য় তারের জন্য, $Y_2 = \frac{F_2/A_2}{l_2/L_2} = \frac{F_2 \times L_2}{A_2 l_2} = \frac{FL}{A_2 l_2}$

$\therefore$ $\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{FL/A_1 l_1}{FL/A_2 l_2} = \frac{A_2 l_2}{A_1 l_1} = \frac{\pi r_2^2 \times l_2}{\pi r_1^2 \times 3 l_2}$

বা, $\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{(2.5 \times 10^{-3})^2}{(1 \times 10^{-3})^2 \times 3} = 2.08$

অর্থাৎ, $Y_1 > Y_2$

সুতরাং প্রথম তার দ্বিতীয় তার অপেক্ষা অধিক স্থিতিস্থাপক।

এখানে,

$L_1 = L_2 = L$

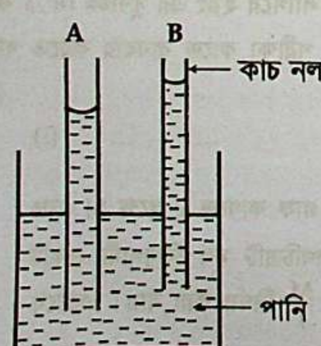
$F_1 = F_2 = F$

$l_1 = 3 l_2$

$r_1 = \frac{2 \times 10^{-3}}{2} m = 1 \times 10^{-3} m$

$r_2 = \frac{5 \times 10^{-3}}{2} m = 2.5 \times 10^{-3} m$

৪।



চিত্রে প্রদর্শিত A নলের ব্যাস 0.8 মিমি এবং B নলের ব্যাস 0.4 মিমি। পানির স্পর্শ কোণ 2°; পৃষ্ঠটান $72 \times 10^{-3}\ Nm^{-1}$।

(ক) B নলের পানির উচ্চতা বের কর।

(খ) নল দুটিতে পানির উচ্চতার তারতম্যের কারণ বিশ্লেষণ কর।

(ক) আমরা জানি,

$$T = \frac{r\rho gh}{2\cos\theta}$$

বা, $$h = \frac{2T\cos\theta}{r\rho g}$$

$$= \frac{2 \times 72 \times 10^{-3} \times \cos 2°}{0.2 \times 10^{-3} \times 1000 \times 9.8}$$

$$= 0.0734 \text{ m} = 7.34 \text{ cm}$$

এখানে,
B কৈশিক নলের ব্যাসার্ধ,
$r = \frac{0.4 \text{ mm}}{2} = 0.2 \times 10^{-3}$ m
স্পর্শ কোণ, $\theta = 2°$
পৃষ্ঠটান, $T = 72 \times 10^{-3}$ Nm^{-1}
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8$ ms^{-2}
পানির ঘনত্ব, $\rho = 1000$ kg m^{-3}
B নলের উচ্চতা, $h = ?$

(খ) A ও B নলের ব্যাসার্ধ r_A এবং r_B এবং পানির উচ্চতা h_A ও h_B হলে

$$h_A = \frac{2T\cos\theta}{r_A\rho g} \text{ এবং}$$

$$h_B = \frac{2T\cos\theta}{r_B\rho g}$$

$\therefore \frac{h_A}{h_B} = \frac{r_B}{r_A}$, যেহেতু $r_B < r_A$ সেহেতু $h_A > h_B$

সুতরাং বলা যায়, নলের ব্যাসার্ধের ভিন্নতার কারণে তরলের উচ্চতা ভিন্নতর হয়। যে নলের ব্যাসার্ধ যত কম সেই নলে তত বেশি উচ্চতায় তরল উঠবে।

৫। A ও B দুটি তারের বিভিন্ন রাশির মান নিচের ছকে প্রদান করা হলো :

তার	দৈর্ঘ্য L (m)	ব্যাসার্ধ r (mm)	বল F(N)	দৈর্ঘ্য প্রসারণ d (mm)	ব্যাসের হ্রাস d (mm)
A	0.80	0.5	5	7	0.005
B	0.75	0.6	6	8	0.01

(ক) A তারের পয়সনের অনুপাত হিসাব কর।

(খ) A ও B তারটির মধ্যে কোনটি বেশি স্থিতিস্থাপক—গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

(ক) আমরা জানি,

$$\sigma = -\frac{\Delta d/D}{\Delta l/L}$$

$$= -\frac{\Delta d L}{D \Delta L}$$

$$= \frac{-0.005 \times 10^{-3} \text{ m} \times 0.80 \text{ m}}{10^{-3} \text{ m} \times 7 \times 10^{-3} \text{ m}}$$

$$= -0.57$$

দেওয়া আছে,
আদি দৈর্ঘ্য, L $= 0.80$ m
আদি ব্যাস, D $= 2 \times 0.5$ mm $= 1$ mm $= 10^{-3}$ m
দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি, $\Delta l = 7$ mm $= 7 \times 10^{-3}$ m
ব্যাস হ্রাস, $\Delta d = 0.005$ mm $= 0.005 \times 10^{-3}$ m
পয়সনের অনুপাত, $\sigma = ?$

(খ) A তারের উপাদানের ইয়ং এর গুণাঙ্ক,

$$Y_A = \frac{FL}{Al} = \frac{FL}{\pi r^2 l} = \frac{5 \times 0.80}{3.14 \times (0.5 \times 10^{-3})^2 \times 7 \times 10^{-3}}$$

$$= 7.28 \times 10^8 \text{ Nm}^{-2}$$

B তারের ইয়ং এর গুণাঙ্ক,

$$Y_B = \frac{FL}{\pi r^2 l} = \frac{6 \times 0.75}{3.14 \times (0.6 \times 10^{-3})^2 \times 8 \times 10^{-3}}$$

$$= 4.97 \times 10^8 \text{ Nm}^{-2}$$

যেহেতু $Y_A > Y_B$, কাজেই A ও B তারের মধ্যে A তারটি বেশি স্থিতিস্থাপক।

৬। জুয়েল 1 m লম্বা এবং 1 mm ব্যাসের একটি তারকে একটি হুকে বেঁধে অপর প্রান্তে বল প্রয়োগ করে 0·025 cm পরিমাণ দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি করল।

(ক) পয়সনের অনুপাত 0·1 হলে তারটির ব্যাস কতটুকু হ্রাস পাবে?

(খ) ইয়ং-এর গুণাঙ্ক 2×10^{11} Nm^{-2} হলে তারের দৈর্ঘ্য প্রসারণে জুয়েলকে কী পরিমাণ কাজ করতে হয়েছিল?

(ক) আমরা জানি,

পয়সনের অনুপাত, $\sigma = -\frac{\Delta d/D}{\Delta l/L} = -\frac{\Delta d L}{DL}$

$\Delta d = \frac{\sigma D \Delta l}{L} = \frac{0.1 \times 10^{-3} \times 0.025 \times 10^{-3}}{1}$

$= -2.5 \times 10^{-8}$ m

$= -2.5 \times 10^{-5}$ mm

$\therefore$ তারটির ব্যাস 2.5×10^{-5} mm হ্রাস পাবে।

এখানে,

আদি দৈর্ঘ্য, L = 1 mm

দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি, l = 0·025 cm

$= 0.025 \times 10^{-3}$ m

আদি ব্যাস, $D = 1 \text{ mm} = 10^{-3}$ m

পয়সনের অনুপাত, $\sigma = 0.1$

ব্যাস হ্রাস, $\Delta d = ?$

(খ) ইয়ং এর গুণাঙ্ক, $Y = 2 \times 10^{11}$ Nm^{-2}

আদি প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল, $A = \pi r^2 = \pi \times \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{3.14 \times (10^{-3})^2}{4} = 7.85 \times 10^{-7}$ m^2

আদি দৈর্ঘ্য, L = 1 mm

দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি, $l = 0.025 \times 10^{-2}$ m

$\therefore$ তার সম্প্রসারণে কৃত কাজ, $W = \frac{1}{2} \times \frac{YAl^2}{L}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{2 \times 10^{11} \times 7.85 \times 10^{-7} (0.025 \times 10^{-2})^2}{1}$

= 0·0049 J

৭। একই আকারের দশটি পানির ফোঁটা একত্রিত হয়ে একটি বড় ফোঁটায় পরিণত হলো। প্রতিটি ফোঁটার ব্যাস 5×10^{-7} m। পানির পৃষ্ঠটান 72×10^{-3} Nm^{-1}।

(ক) উদ্দীপকের বড় ফোঁটার ব্যাস নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের ঘটনায় পানির তাপমাত্রার কোনো পরিবর্তন হবে কি-না—গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

[দি. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি,

বড় ফোঁটার আয়তন = N সংখ্যক ছোট ফোঁটার আয়তন

বা, $\frac{1}{6}\pi D^3 = N \times \frac{1}{6} \times \pi d^3$

বা, $D^3 = Nd^3 = 10\, d^3$

বা, $D^3 = 10\,(5 \times 10^{-7})^3$

$\therefore$ $D = 10.77 \times 10^{-7}$ m

এখানে,

ফোঁটার সংখ্যা, N = 10

ছোট ফোঁটার ব্যাস, $d = 5 \times 10^{-7}$ m

বড় ফোঁটার ব্যাস, D = ?

(খ) দেওয়া আছে, ছোট ফোঁটার ব্যাসার্ধ,

$r = \frac{5 \times 10^{-7}}{2}$ m $= 2.5 \times 10^{-7}$ m

ছোট ফোঁটার সংখ্যা, N = 10

পানির পৃষ্ঠটান, $T = 72 \times 10^{-3}$ Nm^{-1}

বড় ফোটার ব্যাসার্ধ, $R = \frac{10.77 \times 10^{-7}}{2} = 5.385 \times 10^{-7}$ m

ছোট ফোঁটাগুলি একত্রিত হয়ে বড় ফোঁটা গঠনে কৃত কাজ তথা উৎপন্ন তাপ H হলে,

$H = 4\pi (Nr^2 - R^2) \times T$

$= 4 \times 3.1416\, [10(2.5 \times 10^{-7})^2 - 5.385 \times 10^{-7})^2] \times 72 \times 10^{-3}$

$= 3.03 \times 10^{-13}$ J

এখন পানির ভর, $m = \rho V = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3$

$$= 1000 \times \frac{4}{3} \times 3.1416 \times (5.385 \times 10^{-7})^3$$

$$= 6.544 \times 10^{-16} \text{ kg}$$

আবার তাপমাত্রার পরিবর্তন $\Delta\theta$ হলে,

$$H = ms\Delta\theta$$

or, $\Delta\theta = \frac{H}{ms} = \frac{3.03 \times 10^{-13}}{6.544 \times 10^{-16} \times 4200}$

$$= 0.11 K = 0.11°C$$

উদ্দীপকের ঘটনায় পানির তাপমাত্রা 0.11K বা 0.11°C বৃদ্ধি পাবে।

৮। ইতি তার পদার্থবিজ্ঞান ল্যাবে 100 cm লম্বা ও 4 mm² প্রস্থচ্ছেদের একটি তারের নিচ প্রান্তে ভার ঝুলিয়ে এর দৈর্ঘ্য পরিবর্তন ও পার্শ্ব পরিবর্তনের পাঠ নিল এবং তার বান্ধবী বিথীকে বলল যে তার পরীক্ষায় দৈর্ঘ্য পরিবর্তন ও পার্শ্ব পরিবর্তন যথাক্রমে 5% ও 6% পাওয়া গেছে। এটা শুনে বিথী বলল, হতে পারে না। তোমার উপাত্ত সংগ্রহে ভুল হয়েছে। (তারের ইয়ং এর গুণাঙ্ক $Y = 2 \times 10^{11}$ Nm⁻²)

(ক) উদ্দীপকে বর্ণিত তারটির দৈর্ঘ্য 10 mm বৃদ্ধি করতে কত ভার চাপাতে হবে ?

(খ) বিথীর উক্তির যথার্থতা গাণিতিকভাবে যাচাই কর। [রা. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি,

$$F = \frac{YAl}{L}$$

বা, $mg = \frac{YAl}{L}$

বা, $m = \frac{YAl}{Lg}$

$\therefore m = \frac{2 \times 10^{11} \times 4 \times 10^{-6} \times 10 \times 10^{-3}}{1 \times 9.8}$

$$= 816.32 \text{ kg}$$

এখানে,
তারের দৈর্ঘ্য, $L = 100 \text{ cm} = 1 \text{ m}$
প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল,
$A = 4 \text{ mm}^2 = 4 \times 10^{-6} \text{ m}^2$
দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি, $l = 10 \text{ mm} = 10 \times 10^{-3} \text{ m}$
প্রযুক্ত ভর, $m = ?$

(খ) তারটির দৈর্ঘ্য ও ব্যাসার্ধ যথাক্রমে L ও r হলে,

দৈর্ঘ্য পরিবর্তন, $\Delta L = L \times 5\% = 0.05 L$

পার্শ্ব পরিবর্তন, $\Delta r = r \times 6\% = 0.06 r$

পয়সনের অনুপাত,

$$\sigma = \frac{\Delta r}{\Delta L} \times \frac{L}{r} = \frac{0.06 r \times L}{0.05 L \times r} = 1.2$$

দৈর্ঘ্য ও পার্শ্ব পরিবর্তন যথাক্রমে 5% ও 6%; তাই পয়সনের অনুপাত ± 1.2

কোনো বস্তুর পয়সনের অনুপাতের মান -1 হতে 0.5 এর মধ্যে হয়। অর্থাৎ $-1 < \sigma < 0.5$। অতএব বিথীর উক্তিটি যথার্থ।

৯। 2 mm ও 4 mm ব্যাসের ও অভিন্ন দৈর্ঘ্যের দুটি তার একটি দৃঢ় অবলম্বন হতে ঝুলানো হলো। তার দুটিতে অভিন্ন ওজন প্রয়োগ করলে দ্বিতীয় তারটির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি প্রথমটির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির এক-তৃতীয়াংশ হলো। দ্বিতীয় তারটির পয়সনের অনুপাত 0.4।

(ক) দ্বিতীয় তারটির দৈর্ঘ্য 5% বৃদ্ধি করা হলে ব্যাসার্ধ কতটুকু হ্রাস পাবে নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের তার দুটির মধ্যে কোনটি বেশি স্থিতিস্থাপক তা গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি,

$$\sigma = -\frac{L}{r} \times \frac{\Delta r}{\Delta L}$$

বা, $\Delta r = -\sigma r \frac{\Delta L}{L}$

বা, $\Delta r = -0.4 \times 2 \times 0.05$

$\therefore \Delta r = -0.04 \text{ mm}$

এখানে,
দ্বিতীয় তারের ব্যাসার্ধ,
$r = \frac{4}{2} \text{mm} = 2 \text{mm}$
দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি, $\frac{\Delta L}{L} = 5\% = \frac{5}{100} = 0.05$
পয়সনের অনুপাত, $\sigma = 0.4$
ব্যাসের পরিবর্তন, $\Delta r = ?$

অর্থাৎ ব্যাসের হ্রাস = 0·04 mm

(খ) আমরা জানি,

$$Y_1 = \frac{FL}{A_1 l_1} \text{ এবং } Y_2 = \frac{FL}{A_2 l_2}$$

$$\therefore \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{FL}{A_1 l_1} \times \frac{A_2 l_2}{FL} = \frac{\pi r_2^2 \frac{l}{3}}{\pi r_1^2 l}$$

$$= \frac{r_2^2}{3r_1^2} = \frac{(2)^2}{3 \times (1)^2} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore Y_1 = \frac{4}{3} Y_2 \quad \therefore Y_1 > Y_2$$

এখানে,

১ম তারের ব্যাসার্ধ, $r_1 = \frac{2\text{ mm}}{2} = 1\text{ mm}$

দ্বিতীয় তারের ব্যাসার্ধ, $r_2 = \frac{4\text{ mm}}{2} = 2\text{ mm}$

ধরি প্রথম তারের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি, $l_1 = l$

$\therefore$ দ্বিতীয় তারের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি, $l_2 = \frac{l}{3}$

উভয় তারের আদি দৈর্ঘ্য = L

উভয় তারের প্রযুক্ত বল = F

১ম তারের ইয়ং এর গুণাঙ্ক = Y_1

২য় তারের ইয়ং এর গুণাঙ্ক = Y_2

যেহেতু প্রথম তারের ইয়ং-এর গুণাঙ্ক দ্বিতীয় তারের ইয়ং-এর গুণাঙ্ক অপেক্ষা বেশি, তাই প্রথম তারের স্থিতিস্থাপকতা বেশি হবে।

১০। 10^{-6} m² প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল এবং 1·2 m দৈর্ঘ্যের একটি ইস্পাতের তারে 2×10^4 N বল প্রয়োগ করায় তারের দৈর্ঘ্য 6% বৃদ্ধি পেল।

(ক) ইস্পাতের তারের ইয়ং-এর গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

(খ) তারটির ওপর থেকে বল অপসারণ করা হলে সম্পাদিত কাজ নির্ণয় করা যাবে কি-না? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে মতামত দাও।

(ক) আমরা জানি,

$$Y = \frac{FL}{Al}$$

$$\text{বা, } Y = \frac{2 \times 10^4 \times 1{\cdot}2}{10^{-6} \times 0{\cdot}072} \text{ Nm}^{-2}$$

$$= 33{\cdot}3 \times 10^{10} = 3{\cdot}33 \times 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$$

(খ) আমরা জানি,

$$\text{কাজ, } W = \frac{1}{2}\frac{YAl^2}{L}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{3{\cdot}33 \times 10^{11} \times 10^{-6} \times (0{\cdot}072)^2}{1{\cdot}2}$$

$$= 7{\cdot}2 \times 10^2 \text{ J}$$

এখানে,

তারটির আদি দৈর্ঘ্য, L = 1·2 m

তারের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল, $A = 10^{-6}$ m²

তারে প্রযুক্ত বল, $F = 2 \times 10^4$ N

তারের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি, $l = L \times 6\% = \frac{1{\cdot}2 \times 6}{100} = \frac{7{\cdot}2}{100} = 0{\cdot}072$ m

ইয়ং-এর গুণাঙ্ক, Y = ?

কাজ, W = ?

সুতরাং, প্রদত্ত তথ্য অনুসারে কাজ নির্ণয় করা সম্ভব।

১১। রতন 0·1 kg ভরের একটি বস্তুকে 0·50 m দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট তারে বেঁধে বৃত্তাকার পথে ঘুরাচ্ছে এবং ধারণা করল ঘূর্ণন সংখ্যা 600 rpm। তারের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল 10^{-6} m² এবং অসহ পীড়ন $4{\cdot}8 \times 10^7$ Nm^{-2}। তারের উপাদানের ইয়ং-এর গুণাঙ্ক 2×10^{11} Nm^{-2}।

(ক) উদ্দীপকে উল্লেখিত তারটিকে বস্তুসমেত ঝুলিয়ে দেওয়া হলে তারের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি নির্ণয় কর।

(খ) রতনের ঘূর্ণন সংখ্যার ধারণার সত্যতা গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

(ক) আমরা জানি,

$$Y = \frac{FL}{Al}$$

$$\text{বা, } l = \frac{FL}{YA} = \frac{mgL}{YA}$$

$$\therefore l = \frac{0{\cdot}1 \times 9{\cdot}8 \times 0{\cdot}50}{2 \times 10^{11} \times 10^{-6}}$$

$$= 2{\cdot}45 \times 10^{-6} \text{ m}$$

এখানে,

তারটির দৈর্ঘ্য, L = 0·50 m

বস্তুর ভর, m = 0·1 kg

তারের উপাদানের ইয়ং-এর গুণাঙ্ক, $Y = 2 \times 10^{11}$ Nm^{-2}

তারের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল, $A = 10^{-6}$ m²

অভিকর্ষজ ত্বরণ, g = 9·8 ms^{-2}

সুতরাং, তারের দৈর্ঘ্য $2{\cdot}45 \times 10^{-6}$ m বৃদ্ধি পাবে।

(খ) এখানে তারের অসহ পীড়ন $= 4.8 \times 10^7\ Nm^{-2}$

এবং তারের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল $= 10^{-6}\ m^2$

∴ তারের অসহ বল = অসহ পীড়ন × প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল

$= 4.8 \times 10^7 \times 10^{-6} = 48\ N$

অর্থাৎ তারটিতে 48 N বা এর বেশি বল প্রয়োগ করলে তারটি ছিঁড়ে যাবে।

এখন, তারের সাথে ভর বেঁধে বৃত্তাকার পথে ঘুরানোর সময় তারের ওপর প্রযুক্ত বল,

$$F = m\omega^2 r$$
$$= 0.1 \times (20\pi\ rads^{-1})^2 \times 0.50$$
$$= 197.4\ N$$

এখানে,

ভর, $m = 0.1\ kg$

ব্যাসার্ধ, $r = 0.50\ m$

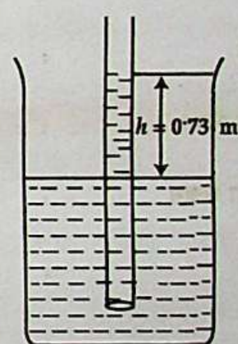
কৌণিক বেগ, $\omega = 600\ rpm$

$$= \frac{600 \times 2\pi}{60}\ rad\ s^{-1}$$
$$= 20\pi\ rads^{-1}$$

সুতরাং, তারের ওপর ক্রিয়াশীল বল তারের অসহ বলের চেয়ে অনেক বেশি, তাই 600 rpm এ ঘুরানোর আগেই তারটি ছিঁড়ে যাবে। অর্থাৎ তারটিকে 600 rpm এ ঘুরানো সম্ভব নয়।

সুতরাং, রতনের ধারণা সঠিক নয়।

১২। চিত্রে পানিপূর্ণ বীকারে ডুবানো কৈশিক নলের ব্যাস 0.04 mm।



(ক) উদ্দীপকের আলোকে পানির তলটান নির্ণয় কর।

(খ) কৈশিক নলের ব্যাসার্ধের কী পরিবর্তনে পানির উচ্চতা 0.80 m হবে নির্ণয়পূর্বক কারণ বিশ্লেষণ কর। [চ. বো. ২০১৬]

(ক) আমরা জানি,

$$\text{তলটান, } T = \frac{rh\rho g}{2}$$
$$= \frac{0.02 \times 10^{-3} \times 0.73 \times 1000 \times 9.8}{2}$$
$$= 0.0715\ Nm^{-1}$$
$$= 71.5 \times 10^{-3}\ Nm^{-1}$$

এখানে,

নলের ব্যাসার্ধ, $r = \frac{d}{2} = \frac{0.04}{2} = 0.02\ mm$

$= 0.02 \times 10^{-3}\ m$

তরল স্তম্ভের উচ্চতা, $h = 0.73\ m$

পানির ঘনত্ব, $\rho = 1000\ kgm^{-3}$

অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8\ ms^{-2}$

পানির তলটান, T = ?

(খ) মনে করি নলের ব্যাসার্ধ r_2 হলে পানির উচ্চতা 0.80 হবে।

$$\text{এখন, } r_2 = \frac{2T}{h_2\rho g} = \frac{2 \times 71.5 \times 10^{-3}}{0.8 \times 1000 \times 9.8}$$
$$= 1.824 \times 10^{-5}\ m \simeq 0.018\ mm$$

∴ কৈশিক নলের ব্যাসার্ধের পরিবর্তন $\Delta r = 0.02\ mm - 0.018\ mm$

$= 0.002\ mm$

অর্থাৎ, কৈশিক নলের ব্যাসার্ধ 0.002 mm কমাতে হবে।

সার-সংক্ষেপ

আয়নিক বন্ধন : ধাতব ও অধাতব যৌলের রাসায়নিক বিক্রিয়াকালে ধাতুর পরমাণুর বহিস্তর থেকে অধাতু পরমাণুর বহিস্তরে এক বা একাধিক ইলেকট্রন স্থানান্তরিত হওয়ার মাধ্যমে সৃষ্ট ধনাত্মক ও ঋণাত্মক আয়নের মধ্যে স্থির বৈদ্যুতিক আকর্ষণ দ্বারা যে বন্ধন গঠিত হয়, তাকে আয়নিক বন্ধন বলে।

সমযোজী বন্ধন : দুটি পরমাণুর মধ্যকার ইলেকট্রন শেয়ারের দ্বারা যে বন্ধন গঠিত হয়, তাকে সমযোজী বন্ধন বলে।

ধাতব বন্ধন : ধাতুর অণুতে যে বন্ধন দেখা যায়, তাই ধাতব বন্ধন। ধাতব অণু এমন গঠনকে প্রাধান্য দেয় যাতে একটি পরমাণুর চারপাশে অধিক সংখ্যক পরমাণু থাকে।

ভ্যান ডার ওয়াল বন্ধন : কাছাকাছি অবস্থিত পরমাণুসমূহের মধ্যে পারস্পরিক ক্রিয়ার ফলে একটি দুর্বল আকর্ষণ বল সৃষ্টি হয়। এই ক্রিয়াকে ভ্যান ডার ওয়াল ক্রিয়া বলে। ভ্যান ডার ওয়াল ক্রিয়ার ফলে যে বন্ধন সৃষ্টি হয় তাকে ভ্যান ডার ওয়াল বন্ধন বলে।

স্থিতিস্থাপকতা : বস্তুর ওপর প্রযুক্ত বলের ক্রিয়ায় তার আকার বা আয়তন বা উভয়েরই পরিবর্তনের প্রচেষ্টাকে পদার্থের যে ধর্ম বাধা দেয় এবং প্রযুক্ত বল অপসারিত হলে পূর্বের আকার বা আয়তন ফিরে পায় তাকে স্থিতিস্থাপকতা বলে।

নমনীয় বস্তু : বিকৃতিকারী বল অপসারণের পর যদি বস্তুর অবস্থার পুনঃপ্রাপ্তি না ঘটে তবে তাকে নমনীয় বস্তু বলে।

পূর্ণ স্থিতিস্থাপক বস্তু : কোনো বস্তুর ওপর বল প্রয়োগ করার পর ওই বল অপসারণ করা হলে বস্তুটি যদি পুরাপুরি পূর্বের অবস্থা ফিরে পায় তবে তাকে পূর্ণ স্থিতিস্থাপক বস্তু বলে।

পূর্ণ দৃঢ় বস্তু : কোনো বস্তুর ওপর যে কোনো পরিমাণ বল প্রয়োগ করে যদি তার বিকৃতি বা কায়িক পরিবর্তন ঘটানো না যায়, তবে ওই বস্তুকে পূর্ণ দৃঢ় বস্তু বলে।

স্থিতিস্থাপক সীমা : প্রযুক্ত বাহ্যিক বলের যে সর্বোচ্চ বা ঊর্ধ্বসীমা পর্যন্ত কোনো বস্তু পূর্ণ স্থিতিস্থাপক থাকে তাকে ওই বস্তুর স্থিতিস্থাপক সীমা বলে।

অসহ ভার বা ওজন : ন্যূনতম যে নির্দিষ্ট ভরের ক্রিয়ায় কোনো বস্তু ভেঙ্গে বা ছিঁড়ে যায় তাকে অসহ ভার বা ওজন বলে।

অসহ পীড়ন : কোনো একটি বস্তু একক ক্ষেত্রফলের উপর প্রযুক্ত অসহ ভারকে অসহ পীড়ন বলে।

বিকৃতি : বল প্রয়োগে কোনো একটি বস্তুর একক মাত্রায় যে পরিবর্তন ঘটে তাকে বিকৃতি বলে।

পীড়ন : কোনো একটি বস্তুর একক ক্ষেত্রফলের ওপর লম্বভাবে ক্রিয়ারত (ক্রিয়ামূলক বা প্রতিক্রিয়ামূলক) বিকৃতি সৃষ্টিকারী বলের মানকে পীড়ন বলে।

হুকের সূত্র : স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে বস্তুর ওপর প্রযুক্ত পীড়ন তার বিকৃতির সমানুপাতিক।

স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক : স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে কোনো বস্তুর পীড়ন ও বিকৃতির অনুপাত একটি ধ্রুব সংখ্যা। এই ধ্রুব সংখ্যাকে বস্তুর উপাদানের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক বলে।

ইয়ং-এর গুণাঙ্ক : স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে বস্তুর অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন ও অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতির অনুপাত একটি ধ্রুব রাশি। এ ধ্রুব রাশিকে বস্তুর উপাদানের ইয়ং-এর গুণাঙ্ক বলে।

কৃন্তন বা দৃঢ়তা বা কাঠিন্যের গুণাঙ্ক : স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে বস্তুর কৃন্তন পীড়ন ও কৃন্তন বিকৃতির অনুপাত একটি ধ্রুব রাশি। এই ধ্রুব রাশিকে দৃঢ়তার বা কাঠিন্যের বা মোচড় গুণাঙ্ক বলে।

আয়তন গুণাঙ্ক : স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে বস্তুর আয়তন পীড়ন ও আয়তন বিকৃতির অনুপাত একটি ধ্রুব রাশি। এ ধ্রুব রাশিকে বস্তুর উপাদানের আয়তন গুণাঙ্ক বলে।

সংনম্যতা : কোনো বস্তুর চারদিক থেকে সমান চাপ প্রয়োগ করলে বস্তুটির আয়তন কমে যায়। বস্তুর এ ধর্মকে সংনম্যতা বলে।

পয়সনের অনুপাত : স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে বস্তুর পার্শ্ব বিকৃতি ও দৈর্ঘ্য বিকৃতির অনুপাত একটি ধ্রুব রাশি। একে পয়সনের অনুপাত বলে।

সান্দ্রতা : যে ধর্মের ফলে তরল তার বিভিন্ন স্তরের আপেক্ষিক গতির বিরোধিতা করে তাকে তরলের সান্দ্রতা বলে।

সান্দ্রতা গুণাঙ্ক বা সান্দ্রতাঙ্ক	:	তরলে গতিবেগের একক নতিমাত্রা বজায় রাখতে প্রতি একক ক্ষেত্রফলে যে স্পর্শিনী বল প্রয়োজন তাকে ওই তরলের সান্দ্রতা গুণাঙ্ক বা সান্দ্রতাঙ্ক বলে।
পৃষ্ঠটান	:	কোনো একটি তরলের তলের ক্ষেত্রফল এক একক বৃদ্ধি করতে যে পরিমাণ কাজ সম্পন্ন করতে হয় তাকে ওই তরলের পৃষ্ঠটান বলে।
সংশক্তি বল	:	একই পদার্থের বিভিন্ন অণুর মধ্যে পারস্পরিক আকর্ষণ বলকে সংশক্তি বা সংযুক্তি বল বলে।
আসঞ্জন বল	:	বিভিন্ন পদার্থের অণুগুলোর মধ্যে পারস্পরিক আকর্ষণ বলকে আসঞ্জন বল বলে।
পৃষ্ঠ শক্তি	:	কোনো একটি তরল তলের ক্ষেত্রফল এক একক বৃদ্ধি করতে যে পরিমাণ কাজ সাধিত হয় তাকে ওই তলের পৃষ্ঠ শক্তি বলে।
স্পর্শ কোণ	:	কঠিন ও তরলের স্পর্শ বিন্দু হতে তরল তলে অঙ্কিত স্পর্শক কঠিন বস্তুর সাথে তরলের মধ্যে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে ওই কঠিন ও তরলের মধ্যকার স্পর্শ কোণ বলে।
সমপ্রবাহ	:	যদি সর্বক্ষণ প্রবাহীর বেগ ধ্রুব থাকে, তবে তাকে সমপ্রবাহ বলে।
অসম প্রবাহ	:	যদি সর্বক্ষণ প্রবাহীর বেগ সমান না থাকে, তবে তাকে অসম প্রবাহ বলে।
স্থির প্রবাহ	:	যদি সর্বত্র প্রবাহীর বেগ সমান থাকে, তবে তাকে স্থির প্রবাহ বলে।
অস্থির প্রবাহ	:	যদি সর্বত্র প্রবাহীর বেগ সমান না থাকে, তবে তাকে অস্থির প্রবাহ বলে।
সমরেখ প্রবাহ	:	যদি প্রবাহীর বিভিন্ন স্তর পরস্পরের সমান্তরালে চলে তবে তাকে সমরেখ প্রবাহ বলে।
বিক্ষিপ্ত প্রবাহ	:	যদি প্রবাহীর স্তর পরস্পরের সমান্তরালে না চলে, বরং গতিতে আবর্ত বা ঘূর্ণন সৃষ্টি করে তবে তাকে বিক্ষিপ্ত প্রবাহ বলে।
প্রান্তিক বেগ	:	কোনো তরলের মধ্য দিয়ে গতিশীল কোনো বস্তুর স্থির বেগকে প্রান্তিক বেগ বলে।

বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তরের জন্য প্রয়োজনীয় বিষয়াবলির সার-সংক্ষেপ

১। স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে আকার পীড়ন ও আকার বিকৃতির অনুপাত হচ্ছে দৃঢ়তার গুণাঙ্ক।

২। তামা, ইস্পাত, রাবার ও সোনার মধ্যে ইস্পাতের ইয়ং-এর গুণাঙ্ক বেশি।

৩। আন্তঃআণবিক আকর্ষণ ও বিকর্ষণ বল সমান হয় যখন $r = r_0$ হয়। আন্তঃআণবিক দূরত্ব কমে গেলে স্থিতিশক্তিও কমে যায়। $r = r_0$ হলে স্থিতিশক্তি সর্বনিম্ন হয়।

৪। কোনো তারের ইয়ং এর গুণাঙ্ক তারের উপাদানের ওপর নির্ভরশীল। ইয়ং এর গুণাঙ্কের বিপরীত রাশি সংনম্যতা। পীড়নের মাত্রা $[ML^{-1}T^{-1}]$। পীড়ন ও বিকৃতি লেখচিত্রের ঢাল বা নতি ইয়ং-এর গুণাঙ্ক নির্দেশ করে।

৫। পৃষ্ঠটানের কারণে পানির ফোঁটা গোলাকৃতি হয়। পৃষ্ঠশক্তির একক Nm^{-1}।

৬। কোনো তারের দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ করা হলে তার বিকৃতি হয় 1। হুকের সূত্র হলো স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে পীড়ন $\propto$ বিকৃতি।

৭। দুইটি ভিন্ন পদার্থের অণুর মধ্যে আকর্ষণ বলকে আসঞ্জন বল বলে। একই পদার্থের অণুগুলোর মধ্যকার আকর্ষণ বল হলো সংশক্তি বল। 1 m দৈর্ঘ্য ও 1 mm^2 প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ইস্পাতের তারের দৈর্ঘ্য 10% বৃদ্ধি করলে বল হয় 2×10^4 N।

৮। সমযোজী বন্ধনের অপর নাম ইলেকট্রন জোড় বন্ধন।

৯। পয়সনের অনুপাতের সীমা $-1 < \delta < 0.5$ বা -1 হতে $\frac{1}{2}$ এর মধ্যবর্তী।

১০। পারদ ও কাঁচের স্পর্শকোণ 90° অপেক্ষা বেশি বা স্থূল তাই পারদ কাঁচকে ভেজায় না। তাছাড়া তরলে কাঁচনল ডুবালে তরলের অবরোহণ হয়। এক্ষেত্রে সংশক্তি বল > আসঞ্জন বল।

১১। পানি ও কাঁচের মধ্যকার স্পর্শ কোণ 9° অপেক্ষা কম বা সূক্ষ্ম, তাই পানি কাঁচকে ভেজায়। তাছাড়া তরলে কাঁচ নল ডুবালে তরলের আরোহণ হয়। স্পর্শ কোণ 90° এর বেশি হলে তরলের পৃষ্ঠ হবে উত্তল।

১২। NaCl এর মধ্যকার বন্ধন হলো আয়নিক বন্ধন।

১৩। কোনো বস্তুর তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে স্থিতিস্থাপকতা হ্রাস পায়। গ্যাসের আন্তঃআণবিক স্থান বেশি।

১৪। প্রভাব গোলকের ব্যাসার্ধ হলো আন্তঃআণবিক পাল্লা 10^{-9} m এর সমান।

১৫। পৃষ্ঠটানের একক Nm^{-1} এবং মাত্রা হলো $[MT^{-2}]$, সান্দ্রতা গুণাঙ্কের একক Nsm^{-1}, আবার 10 poise = 1 Nsm^{-1} এবং মাত্রা হলো $[ML^{-1}T^{-1}]$

১৬। বায়বীয় পদার্থের সংনম্যতা সবচেয়ে বেশি। সান্দ্রতা সংক্রান্ত স্টোকসের সমীকরণ হলো $F = 6\pi r\eta v$

১৭। অক্সিজেন অণুর বন্ধনের ক্ষেত্রে ভ্যান ডার ওয়ালস বল বিদ্যমান।

১৮। পানিতে সাবান, তেল, চর্বি, ডিটারজেন্ট মিশ্রিত হলে পৃষ্ঠটান কমে।

১৯। তরলের পৃষ্ঠটান ও পৃষ্ঠশক্তির সংখ্যাগত মান সমান। গ্যাসের সান্দ্রতা গুণাঙ্ক তাপমাত্রার সমানুপাতিক।

২০। তেল, দুধ, মধু, পানি এর মধ্যে মধুর সান্দ্রতা বেশি।

২১। রূপা ও বিশুদ্ধ পানির মধ্যকার স্পর্শ কোণ 90°। সান্দ্রতা গুণাঙ্কের একক Nsm^{-2}

২২। T পৃষ্ঠটানবিশিষ্ট ও R ব্যাসার্ধের একটি গোলাকার তরল ফোঁটাকে 4টি সমান আকারের ফোঁটায় বিভক্ত করলে কৃত কাজের পরিমাণ হবে $4\pi r^2T$। পৃষ্ঠ শক্তির একক Jm^{-2} বা Nm^{-1}

২৩। গ্লিসারিন, পানি, কেরোসিন এবং আলকাতরা-এর মধ্যে আলকাতরার সান্দ্রতা বেশি।

২৪। তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে আন্তঃআণবিক আকর্ষণ বল হ্রাস পায়।

২৫। বস্তুর আসঞ্জন ধর্মের কারণে কাঁচের গায়ে পানি লাগে না।

২৬। পীড়ন বিকৃতি লেখচিত্রের ক্ষেত্রফল একক আয়তন শক্তি নির্দেশ করে।

২৭। একক বিকৃতির পীড়ন যদি দৃঢ়তার গুণাঙ্ক হয় তবে পীড়নের বিকৃতি হবে সংনম্যতা।

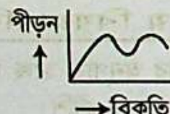
২৮। সান্দ্র তরলের মধ্যে গতিশীল কোনো বস্তু অন্ত্যবেগ প্রাপ্ত হলে এর ত্বরণ হবে শূন্য।

২৯। দুটি কাচপাত্রের মাঝে পানি থাকলে এদের আলাদা করা যায় না পৃষ্ঠটানের জন্য।

৩০। তরলের পৃষ্ঠটানের জন্য অভিকর্ষ বল দায়ী নয়। সংশক্তি, আসঞ্জন, আন্তঃআণবিক বল দায়ী।

৩১। কৈশিক নলে তরলের মুক্ত তল অবতল হয় যখন স্পর্শকোণ প্রায় 0°।

৩২। পীড়ন বনাম বিকৃতি লেখচিত্রের ক্ষেত্রফল হলো একক আয়তনের বিভবশক্তি। 

৩৩। পীড়ন বিকৃতির লেখচিত্র হলো 

। এই লেখচিত্রের ঢাল ইয়ং-এর গুণাঙ্ক নির্দেশ করে।

৩৪। ইয়ং এর গুণাঙ্কের মাত্রা হলো $[ML^{-1}T^{-2}]$

অনুশীলনী

(ক) বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। কোনো পদার্থের অণুগুলির মধ্যে নিট বল শূন্য হয় যখন— [ঢা. বো. ২০১৫; চ. বো. ২০১৫]
ⓚ $r = r_0$
ⓚ $r < r_0$
ⓖ $r > r_0$
ⓖ $r \gg r_0$

২। আন্তঃআণবিক বল সবচেয়ে বেশি—
ⓚ তরলের অণুর মধ্যে
ⓚ গ্যাসের অণুর মধ্যে
ⓖ কঠিন পদার্থের অণুর মধ্যে
ⓖ কঠিন, তরল ও গ্যাসের মধ্যে একই মানের হয়

৩। বিভিন্ন পদার্থের অণুগুলোর মধ্যে পারস্পরিক আকর্ষণ বলকে কী বল বলে ?
ⓚ আসঞ্জন বল
ⓚ সংসক্তি বল
ⓖ পৃষ্ঠ টান
ⓖ পৃষ্ঠ শক্তি

৪। একই পদার্থের বিভিন্ন অণুর মধ্যে পারস্পরিক আকর্ষণ বলকে কী বলে ? [JnU-A : Admission Test, 2016-17; JU Admission Test, 2011-12]
ⓚ আসঞ্জন বল
ⓚ পৃষ্ঠশক্তি
ⓖ সংসক্তি বল
ⓖ পৃষ্ঠটান

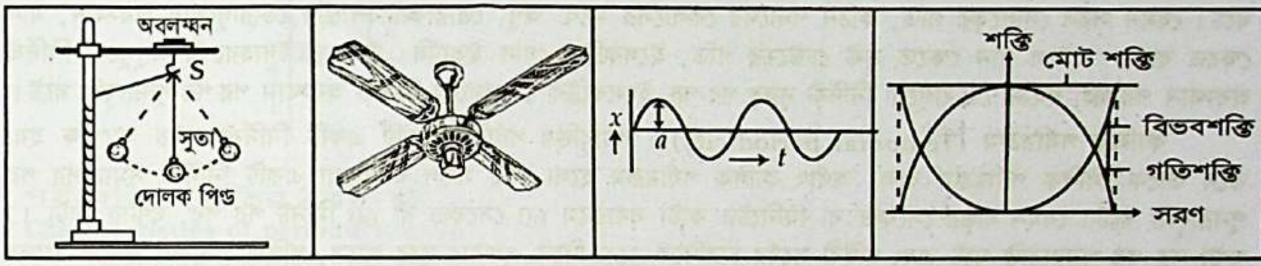
৫। নিষ্ক্রিয় গ্যাসের অণুর মধ্যকার বন্ধন—
ⓚ আয়নিক বন্ধন
ⓚ সমযোজী বন্ধন
ⓖ ভ্যান ডার ওয়ালস বন্ধন
ⓖ ধাতব বন্ধন

৬। সিলিকন অণুর মধ্যে কী ধরনের বন্ধন রয়েছে?
ⓚ আয়নিক বন্ধন
ⓚ সমযোজী বন্ধন
ⓖ ধাতব বন্ধন
ⓖ ভ্যান ডার ওয়ালস বন্ধন

৮

পর্যাবৃত্তিক গতি
PERIODIC MOTION

প্রধান শব্দ (Key Words) : স্থানিক পর্যায়ক্রম, কালিক পর্যায়ক্রম, পর্যাবৃত্ত গতি, স্পন্দন গতি, সরল ছন্দিত স্পন্দন, সরল দোলক, পূর্ণ দোলন, দোলন বা পর্যায় কাল, কম্পাঙ্ক, বিস্তার, দশা, সেকেন্ড দোলক, কৌণিক কম্পাঙ্ক।



ভূমিকা
Introduction

পূর্বের অধ্যায়গুলোতে বস্তুর চলন গতি, প্রাসের গতি, বৃত্তাকার গতি আলোচনা করা হয়েছে। এখন আমরা নতুন এক ধরনের অতি পরিচিত গতি আলোচনা করব যা পর্যাবৃত্ত গতি নামে পরিচিত। স্প্রিং এর গতি, সুরশলাকার স্পন্দন, গ্রহ-উপগ্রহের গতি ইত্যাদি পর্যাবৃত্ত গতি। পর্যাবৃত্ত গতিরই বিশেষ রূপ হলো দোলন, কম্পন বা স্পন্দন। দোলন, কম্পন বা স্পন্দন সমার্থকবোধক শব্দ। পদার্থবিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় সরল দোল গতি (Simple Harmonic Motion সংক্ষেপে S.H.M.) নামক এক বিশেষ ধরনের দোল গতির গুরুত্বপূর্ণ ব্যবহার রয়েছে। এ অধ্যায়ে আমরা পর্যাবৃত্ত গতি তথা সরল ছন্দিত গতির বিভিন্ন রূপ আলোচনা করব।

এ অধ্যায় পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা—

- পর্যাবৃত্ত গতি ও সরল ছন্দিত গতি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সরল ছন্দিত গতির রাশিসমূহ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- দৈনন্দিন জীবনে সরল দোলন গতির ব্যবহার করতে পারবে।
- সরল দোলন গতিসম্পন্ন বস্তুর অন্তরক সমীকরণ প্রতিপাদন ও এর গাণিতিক বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- লেখচিত্রের সাহায্যে সরল দোলন গতিসম্পন্ন বস্তুর মোট শক্তির সংরক্ষণশীলতা ব্যাখ্যা করতে পারবে।

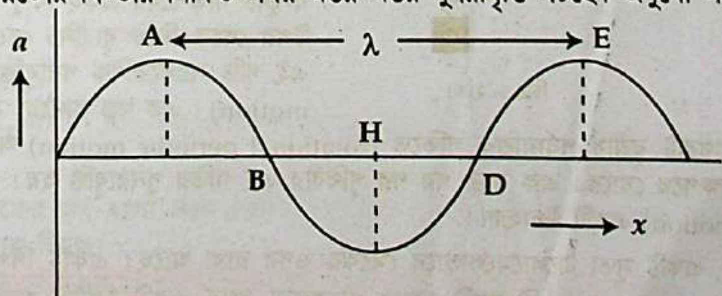
  ব্যবহারিক :

  (ক) স্প্রিং ধ্রুবক নির্ণয়ের পরীক্ষা।

  (খ) স্প্রিং-এর সাহায্যে ভরের তুলনা।

৮·১ পর্যাবৃত্ত
Periodicity

যদি কোনো একটি বস্তু নির্দিষ্ট সময় পর পর একই স্থানে ফিরে আসে অথবা একই স্থান দিয়ে নির্দিষ্ট সময় অন্তর অতিক্রম করে তবে তাকে পর্যাবৃত্ত বলে। যেমন পৃথিবী সূর্যের চারদিকে 365 দিনে একবার ঘুরে আসে, একটি সরল দোলক এক প্রান্ত থেকে শুরু করে অপর প্রান্তে গিয়ে পুনরায় ওই আদি প্রান্তে ফিরে আসে অথবা একটি স্পন্দক (oscillator) তরঙ্গ উৎপন্ন করে [চিত্র ৮·১] এবং লক্ষ করলে দেখা যাবে যে X-অক্ষের যেকোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে (যেমন A অথবা B বিন্দুতে), তরঙ্গের বিস্তার নির্দিষ্ট সময় অন্তর অন্তর পুনরাবৃত্তি ঘটছে। এগুলো সবই পর্যাবৃত্তির উদাহরণ।



চিত্র ৮·১

পৃথিবী সূর্যের চারদিকে 365 দিনে একবার ঘুরে আসে। এ সময়কে পর্যায়কাল বলে। সুতরাং সূর্যের চারদিকে পৃথিবীর ঘূর্ণনের পর্যায়কাল 365 দিন। অনুরূপভাবে, সরল দোলক এক বিন্দু থেকে যাত্রা শুরু করে পুনরায় ওই একই

বিন্দুতে ফিরে আসতে যে সময় লাগে সেটি ওই দোলকের পর্যায়কাল। ৮·১ চিত্রে একটি কণার A বিন্দু হতে E পর্যন্ত অতিক্রম করতে যে সময় লাগে, তাই সময়কাল বা পর্যায়কাল T।

পর্যায়কাল সময় সাপেক্ষে হতে পারে, আবার স্থান সাপেক্ষে হতে পারে।

স্থানিক পর্যায়ক্রম (Spatial periodicity) : যখন কোনো কিছুর পুনরাবৃত্তি স্থানের সাপেক্ষে হয়, তখন তাকে স্থানিক পর্যায়ক্রম বলে। অর্থাৎ স্থানিক পর্যায়কাল হলো সেই সকল ঘটনা যা একটি নির্দিষ্ট দূরত্ব পর পর পুনরাবৃত্তি ঘটে। যেমন সরল দোলকের গতি, কঠিন পদার্থের কেলাসের মধ্যে অণু, ডোরাকাটা শার্টের ডোরাগুলোর অবস্থান, ধান ক্ষেতে বাতাস বইলে ধান ক্ষেতে সৃষ্ট ঢেউয়ের গতি, ইলেকট্রিক পোল ইত্যাদি। উপরের উদাহরণের অণুগুলো নির্দিষ্ট অবস্থান পর পর, শার্টের ডোরাগুলো নির্দিষ্ট দূরত্ব পর পর, ইলেকট্রিক পোলগুলো নির্দিষ্ট অবস্থান পর পর পুনরাবৃত্তি ঘটে।

কালিক পর্যায়ক্রম (Temporal periodicity) : পর্যাবৃত্তির পর্যায়কাল যদি একটি নির্দিষ্ট সময় সাপেক্ষ হয়, তবে তাকে কালিক পর্যায়ক্রম বলে। অর্থাৎ কালিক পর্যায়ক্রম হলো সেই সকল ঘটনা যা একটি নির্দিষ্ট সময় পর পর পুনরাবৃত্তি ঘটে। যেমন ঘড়ির সেকেন্ড বা মিনিটের কাটা যথাক্রমে 60 সেকেন্ড বা 60 মিনিট পর পর, ঘণ্টার কাটা 12 ঘণ্টা পর পর পুনরাবৃত্তি ঘটে এবং পৃথিবী সূর্যের চারদিকে 365 দিনে একবার ঘুরে আসে, পৃথিবী প্রদক্ষিণ করতে চাঁদের 30 দিন সময় লাগে ইত্যাদি।

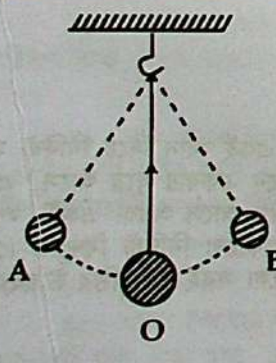
ধরা যাক, m ভরের একটি কৃত্রিম উপগ্রহ h উচ্চতায় পৃথিবীর চারদিকে v বেগে বৃত্তাকার কক্ষপথে আবর্তন করছে। উপগ্রহের পর্যায়কাল T, পৃথিবীর ভর M এবং পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R হলে পর্যায়কালের সমীকরণ পাওয়া যায়,

$$T = 2\pi \frac{\sqrt{(R+h)^3}}{GM}.$$

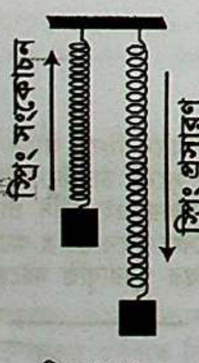
৮·২ পর্যাবৃত্তিক গতি
Periodic motion

ঘড়ির পেন্ডুলাম বামে-ডানে দুলতে দেখি বা স্প্রিং-এর সংকোচন-প্রসারণজনিত গতিও আমরা লক্ষ করে থাকি [চিত্র ৮·২(ক)]। আমরা দেখতে পাই যে, **নির্দিষ্ট সময় পর পর বস্তু দুটির গতির পুনরাবৃত্তি ঘটে। এ ধরনের গতিই হলো পর্যাবৃত্ত গতি।** তাহলে আমরা বলতে পারি, কোনো বস্তুর গতি যদি এমন হয় যে, একটি নির্দিষ্ট সময় পর পর বস্তুটির গতির পুনরাবৃত্তি ঘটে তবে ওই গতিকে পর্যাবৃত্তিক গতি বলে।

কোনো গতিশীল বস্তু কণার গতি যদি এমন হয় যে, এটি তার গতিপথে কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুকে নির্দিষ্ট সময় পর পর একই দিক থেকে অতিক্রম করে, তাহলে সেই গতিকে পর্যাবৃত্তিক গতি বলে।



চিত্র ৮·২(ক)



চিত্র ৮·২(খ)

পর্যাবৃত্তিক গতিতে চলমান গতিপথ নির্দিষ্ট এবং নির্দিষ্ট সময় পর পর বস্তুটি গতিপথের একই বিন্দুকে একই দিক থেকে অতিক্রম করে। এই গতিপথের কোনো নির্দিষ্ট জ্যামিতিক রূপ, যেমন সরলরেখা, বৃত্ত, উপবৃত্ত ইত্যাদি থাকতে পারে, আবার নাও থাকতে পারে। স্প্রিং থেকে ঝুলন্ত কোনো বস্তুকে [চিত্র ৮·২(খ)] নিচের দিকে সামান্য টেনে ছেড়ে দিলে সেটি পর্যায়ক্রমে ওপর-নিচ করতে থাকে। লক্ষ করলে দেখা যায় যে, বস্তুটি গতিপথের একই বিন্দু দিয়ে নির্দিষ্ট সময় পর পর উপর থেকে নিচে বা নিচ থেকে উপরে যাচ্ছে। বস্তুটির এই গতি সরলরৈখিক পর্যাবৃত্তিক গতি (linear periodic motion)। এক খণ্ড পাথরে সুতা বেঁধে স্থির কৌণিক বেগে ঘুরাতে থাকলে পাথরটি বৃত্তীয় পর্যাবৃত্তিক গতিতে (rotational periodic motion) আবর্তন করে। পৃথিবী সূর্যের চারদিকে উপবৃত্তাকার কক্ষপথে ঘোরে। এক বছর পর পর পৃথিবীর এই গতির পুনরাবৃত্তি হয়। এটি উপবৃত্তীয় পর্যায় গতির (elliptical periodic motion) একটি উদাহরণ।

আবার ধরা যাক, একটি সুতা এলোমেলোভাবে মেঝের ওপর রাখা আছে। একটি পিঁপড়া ওই সুতার ওপর দিয়ে সমদ্রুতিতে হাঁটতে থাকল। দেখা গেল যে পিঁপড়াটি সুতার যেকোনো স্থান একটি নির্দিষ্ট সময় পর পর পেরিয়ে যাচ্ছে। এখানে দড়িটির কোনো নির্দিষ্ট জ্যামিতিক রূপ নেই। তবুও পিঁপড়ার গতি পর্যাবৃত্তিক গতি হবে।

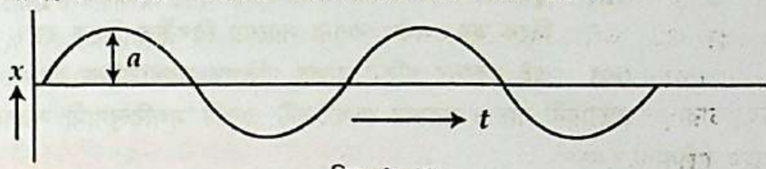
সুরযন্ত্রের তার বা বায়ুমণ্ডলের গতি, ঘড়ির কাঁটার গতি, বাষ্প বা পেট্রোল ইঞ্জিনের সিলিন্ডারের মধ্যে পিস্টনের গতি, কঠিন বস্তুতে পরমাণুর স্পন্দন ইত্যাদি হলো পর্যাবৃত্তিক গতি।

পর্যাবৃত্তিক গতিসম্পন্ন কণার স্পন্দন একটি sine তরঙ্গ সদৃশ যার একটি বিস্তার, একটি কৌণিক কম্পাঙ্ক এবং একটি সময়ের রাশি থাকে। X-অক্ষ অভিমুখে একটি পর্যাবৃত্ত কণার সমীকরণ হলো

$x = a \sin \omega t$ ... ... (8.1)

এখানে a = বিস্তার, ω = কৌণিক কম্পাঙ্ক, t = সময়

নিচের [চিত্র ৮.২(গ)] লেখচিত্রের সাহায্যে সমীকরণটিকে দেখানো যায় :



চিত্র ৮.২ (গ)

পর্যাবৃত্তিক গতির বৈশিষ্ট্য
Characteristics of periodic motion

পর্যাবৃত্তিক গতিসম্পন্ন কোনো কণা যে নির্দিষ্ট সময় পর পর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুকে নির্দিষ্ট দিক দিয়ে অতিক্রম করে সেই সময়কে পর্যায়কাল বলে। পর্যাবৃত্তিক গতির গতিপথ বৃত্তাকার, উপবৃত্তাকার, সরলরৈখিক ও আরো জটিল হতে পারে।

পর্যাবৃত্তিক গতিসম্পন্ন কণা যদি পর্যায়কালের অর্ধেক সময় কোনো নির্দিষ্ট দিকে এবং বাকি অর্ধেক সময় একই পথে তার বিপরীত দিকে চলে তবে তার গতিকে স্পন্দন গতি বলে।

উদাহরণ : সরল দোলকের গতি, গীটারের তারের গতি, শব্দ সঞ্চালনের সময় বায়ুর কণার স্পন্দন ইত্যাদি।

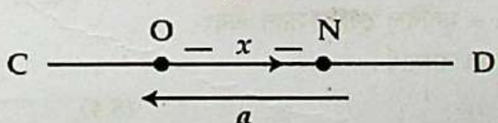
৮.৩ সরল ছন্দিত গতি বা সরল দোলন গতি বা সরল দোল গতি
Simple harmonic motion

ছন্দিত গতি একটি বিশেষ ধরনের দোলনগতি। মনে করি, C এবং D বিন্দুর মধ্যে সরলরেখা বরাবর দোলনরত একটি কণা N এর গতিপথ নির্দেশিত হবে [চিত্র ৮.৩]। O বিন্দু কণাটির সাম্যাবস্থান এবং যেকোনো মুহূর্তে সাম্যাবস্থান থেকে এর সরণ x। কণার গতি ছন্দিত গতি হলে ওই মুহূর্তে কণাটির ত্বরণ a-এর মান x-এর সমানুপাতিক এবং অভিমুখ O বিন্দুর দিকে হয় অর্থাৎ a সরণ x এর বিপরীতমুখি হয়। সেজন্য আমরা লেখতে পারি,

$a \propto -x$ বা, $a = -kx$

এখানে k = ধ্রুবক $= \omega^2$; ω হলো কণাটির কৌণিক বেগ।

$\therefore \quad a = -\omega^2 x$ ... ... (8.2)



চিত্র ৮.৩

আবার ত্বরণ কীভাবে সময়ের সাথে পরিবর্তিত হয় তা আমরা জানি। নিউটনের ২য় সূত্র অনুযায়ী বল কোনো বস্তুতে ক্রিয়াশীল হলে ত্বরণ সৃষ্টি হয়।

অর্থাৎ $F = ma$

$\therefore \quad F = -m\omega^2 x$ (8.2 সমীকরণ অনুযায়ী)

বা, $F = -(m\omega^2)\, x$

বা, $F = -Kx$, এখানে K = স্প্রিং ধ্রুবক বা বল ধ্রুবক $= \dfrac{F}{x}$

$\therefore \quad F \propto -x$ ... ... (8.3)

এখানে –ve চিহ্নের অর্থ হলো সরণ বেশি হলে ত্বরণ ও বল বেশি হবে। কিন্তু দিক সর্বদা সরণের বিপরীত দিকে অর্থাৎ সাম্যাবস্থানের দিকে।

অর্থাৎ সরল ছন্দিত গতি বল বা প্রত্যায়নী বল সরণের সমানুপাতিক ও বিপরীতমুখি।

উপরোক্ত আলোচনা থেকে আমরা সহজেই ছন্দিত গতির বলের বৈশিষ্ট্য বর্ণনা করতে পারি।

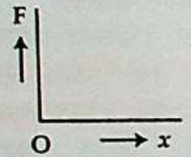
কাজ : একটি স্প্রিং ধ্রুবক 2.5 N/m বলতে কী বুঝ ?

এ দ্বারা বুঝায় সাম্যাবস্থান থেকে একটি স্প্রিং-কে 1 m প্রসারিত করতে 2.5 N বলের প্রয়োজন।

৮·৩·১ সরল ছন্দিত গতির ক্ষেত্রে বলের বৈশিষ্ট্য
Characteristics of force of simple harmonic motion

(i) এটি একটি বিশেষ ধরনের ছন্দিত বা দোলনগতিসম্পন্ন কণার ওপর সৃষ্ট বল।

(ii) এই গতির ক্ষেত্রে কণার ত্বরণ এবং এর ওপর ক্রিয়াশীল বল-এর মান কণার সরণের সমানুপাতিক।



চিত্র ৮·৪

(iii) ত্বরণের এবং কণার ওপর ক্রিয়াশীল বলের অভিমুখ সব সময় সাম্যাবস্থানের দিকে হয়, অর্থাৎ কণার সরণের বিপরীত দিকে হয়।

(iv) এই ধরনের গতির বলের গতিপথ সরলরৈখিক হয়।

প্রত্যায়নী বল ও সরণের লেখচিত্রটি একটি মূলবিন্দুগামী সরলরেখা যার নতি বা ঢাল (slope) $= m\omega^2$

কোনো দোলনরত কণার ত্বরণ সাম্যাবস্থান থেকে এর দূরত্বের সমানুপাতিক ও সব সময় সাম্যাবস্থানের অভিমুখী হলে ওই কণার গতিকে সরল ছন্দিত গতি বলে।

স্পষ্টত সব পর্যাবৃত্তিক গতির এই বৈশিষ্ট্যগুলি থাকে না। তাই সরল ছন্দিত গতি মাত্রই পর্যাবৃত্তিক গতি হলেও সব পর্যাবৃত্তিক গতি সরল ছন্দিত গতি বা সরল দোলগতি নয়।

৮·৪ সরল ছন্দিত গতি সম্পর্কিত কয়েকটি রাশি
Some terms related to simple harmonic motion

নির্দেশক বৃত্তের ধারণাকে কাজে লাগিয়ে সরল ছন্দিত গতি সংক্রান্ত বিভিন্ন রাশির বর্ণনা পাওয়া যায়। নির্দেশক বৃত্তের সাহায্যে সরল ছন্দিত গতি সংক্রান্ত সরণ, বেগ ও ত্বরণের রাশিমালা এবং পর্যায়কাল, কম্পাঙ্ক, কৌণিক কম্পাঙ্ক ও দশা নিম্নে প্রতিপাদন করা হলো—

১. সরণ (Displacement) : মনে করি একটি বস্তুকণা O বিন্দুকে কেন্দ্র করে A ব্যাসার্ধের ABCD বৃত্তপথে তীর চিহ্নিত দিকে ω কৌণিক বেগে ঘুরছে এবং t সময়ে A বিন্দু হতে P বিন্দুতে আসছে [চিত্র ৮·৫]। P বিন্দু হতে বৃত্তের ব্যাস DB-এর উপর PN লম্ব টানি। এখানে লম্ব পাদ বিন্দুর সরণ, $x = ON$

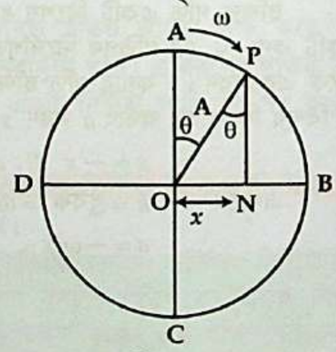
চিত্র হতে $\angle AOP = \angle OPN = \theta$, এখানে θ = কৌণিক সরণ।

আমরা পাই, $\frac{ON}{OP} = \sin\theta$

বা, $ON = OP \times \sin\theta$

$\therefore$ $x = A\sin\theta$, এখানে x = মূলবিন্দু থেকে সরণ এবং

$OP = A$ = নির্দেশক বৃত্তের ব্যাসার্ধ।



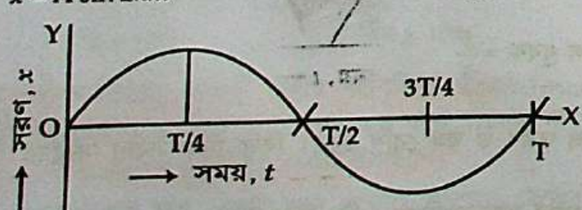
চিত্র ৮·৫

বা, $x = A\sin\omega t$ ... ... (8.4)

এখানে $\theta = \omega t$, আদি দশা (δ) বিবেচনা করলে $x = A\sin(\omega t + \delta)$ হয়।

ইহা সরল ছন্দিত স্পন্দনরত কণার সাধারণ সমীকরণ নির্দেশ করে। এই সমীকরণে A, কম্পনরত কণার বিস্তার নির্দেশ করে।

পাদবিন্দুর দোলনকাল T হলে, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$; এখানে পাদবিন্দুর কম্পাঙ্ক, $n = \frac{1}{T}$। (8.4) সমীকরণ থেকে পাই, $x = A\sin 2\pi nt$ ... ... (8.5)



চিত্র ৮·৫ (ক)

সমীকরণ (8.4) এবং (8.5) হলো সরল ছন্দিত স্পন্দনসম্পন্ন একটি কণার সরণের রাশিমালা। সরণ-সময় লেখচিত্র একটি সাইন সদৃশ লেখ হবে। ৮·৫(ক) চিত্রে ছন্দিত গতি-সম্পন্ন কণার সরণের সমীকরণ লেখচিত্রের মাধ্যমে দেখান হলো।

২. বেগ (Velocity) : আমরা জানি সময় সাপেক্ষে সরণের পরিবর্তনের হারকে বেগ বলে। একে সাধারণত v দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$\therefore$ বেগ, $v = \frac{d}{dt}(x) = \frac{d}{dt}(A\sin\omega t) = A\omega\cos\omega t$ এখানে, $x = A\sin\omega t$

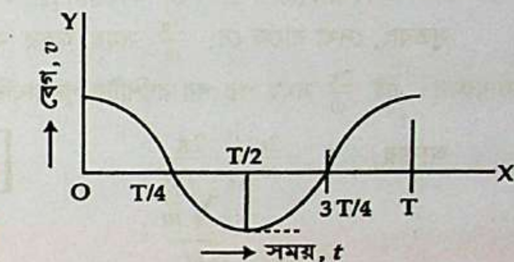
$\therefore \quad \sin \omega t = \frac{x}{A}$ এবং $\cos \omega t = \sqrt{1 - \sin^2 \omega t}$

$\therefore \quad$ বেগ, $v = A\omega\sqrt{1-\sin^2\omega t} = A\omega\sqrt{1 - x^2/A^2}$

বা, $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ ... ... (8.6)

সমীকরণ (8.6) বেগ ও সরণের মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করে।

(ক) যখন $x = A$, তখন $v = 0$ এবং (খ) যখন $x = 0$, তখন $v = A\omega$ এই অবস্থায় বেগ সর্বাধিক (v_{max}) হয়। অর্থাৎ $v_{max} = \omega A$ হয়।



চিত্র ৮·৫ (খ)

৮·৫ চিত্র অনুযায়ী N বিন্দুর গতিপথের মধ্য অবস্থানে তার বেগ সর্বাধিক এবং সরণ বৃদ্ধির সাথে সাথে বেগ কমতে থাকে এবং চরম অবস্থানে B বা D বিন্দুতে এর বেগ শূন্য হবে অর্থাৎ বিস্তারের প্রান্তে বেগ শূন্য হবে। সরল ছন্দিত গতি সম্বন্ধে কণার বেগ-সময় লেখচিত্র একটি cosine সদৃশ লেখচিত্র [চিত্র ৮·৫(খ)]।

৩. ত্বরণ (Acceleration) : আমরা জানি সময় সাপেক্ষে বেগের পরিবর্তনের হারকে ত্বরণ বলে। একে a দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

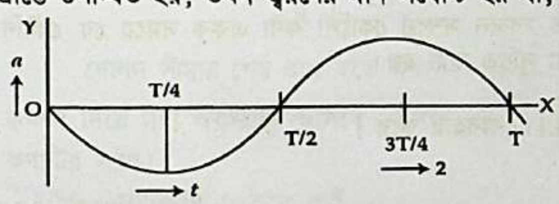
ত্বরণ, $a = \frac{d}{dt}(v) = \frac{d}{dt}(A\omega \cos \omega t) = -A\omega^2 \sin \omega t$

বা, $a = -\omega^2 x$ ... ... (8.7) [$\because x = A \sin \omega t$]

সমীকরণ (8.7) ত্বরণ ও সরণের মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করে।

ঋণ চিহ্ন বুঝায় যে, ত্বরণ ও সরণ পরস্পর বিপরীতমুখি।

(ক) যখন $x = 0$, তখন ত্বরণ সর্বনিম্ন হয় বা $a = 0$ এবং (খ) যখন $x = A$, অর্থাৎ কণাটি যখন বিস্তারের প্রান্তে উপস্থিত হয়, তখন ত্বরণের মান সর্বোচ্চ হয় বা, $a_{max} = \omega^2 A$ হয়।

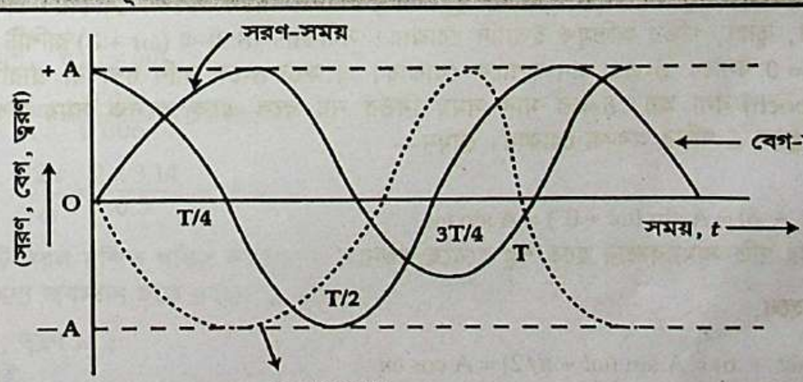


চিত্র ৮·৫ (গ)

৮·৫(গ) চিত্রে N বিন্দুর গতিপথের চরম অবস্থানে ত্বরণ সর্বাধিক এবং মধ্য অবস্থানে ত্বরণ শূন্য হবে।

ত্বরণ-সময় লেখচিত্র একটি ঋণাত্মক sine সদৃশ লেখ। ইহা সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন কণার ত্বরণের সমীকরণ নির্দেশ করে।

যাচাই কর : সরণের সমীকরণ, $x = A \sin \omega t$, বেগ, $v = A\omega \cos \omega t$ এবং ত্বরণ $a = -A\omega^2 \sin \omega t$ কে একটি লেখচিত্ররূপে প্রকাশ করলে কীরূপ দেখাবে ? পর্যায়কাল ও দশা বিবেচনা করে ব্যাখ্যা কর।



চিত্র ৮·৬

৪. পর্যায়কাল (Time period) : সরল ছন্দিত স্পন্দনসম্পন্ন কোনো কণার একটি পূর্ণ স্পন্দন সম্পন্ন করতে যে সময় ব্যয় হয় তাকে তার পর্যায়কাল বলে। একে T দ্বারা প্রকাশ করা হয়। কম্পাঙ্ক n হলে $T = \frac{1}{n}$ হয়।

সরল ছন্দিত স্পন্দন গতির ব্যবকলনীয় সমীকরণের সমাধান হচ্ছে,

$$x = A \sin(\omega t + \delta) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.8)$$

সমীকরণ (8.8)-এ সময় t-এর মান $\frac{2\pi}{\omega}$ বৃদ্ধি করা হলে আমরা পাই,

$$x = A \sin\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \delta\right]$$

$$= A \sin(\omega t + 2\pi + \delta) = A \sin[2\pi + (\omega t + \delta)] = A \sin(\omega t + \delta) \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.9)$$

সুতরাং, দেখা যাচ্ছে যে, $\frac{2\pi}{\omega}$ সময় অন্তর কণার সরণ একই হচ্ছে। কাজেই, $\frac{2\pi}{\omega}$ হচ্ছে সরল ছন্দিত স্পন্দনের পর্যায়কাল। এই $\frac{2\pi}{\omega}$ সময় পর পর রাশিটির পুনরাবৃত্তি ঘটবে।

আবার, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}}$ $\quad \left[\because \frac{K}{m} = \omega^2\right]$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.10)$$

সমীকরণ (8.10) হলো সরল ছন্দিত স্পন্দনের পর্যায়কালের সমীকরণ। **এটি ভর, পর্যায়কাল ও বল ধ্রুবকের মধ্যে সম্পর্কজনিত সমীকরণও বটে।** অর্থাৎ সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার পর্যায়কাল বল ধ্রুবকের বর্গমূলের ব্যস্তানুপাতিক। পর্যায়কালের একক sec, এর মাত্রা T।

৫. কম্পাঙ্ক (Frequency) : কোনো কম্পমান বস্তু বা স্পন্দক একক সময়ে যতগুলো পূর্ণ দোলন দেয় তাকে কম্পাঙ্ক বলে। একে n দ্বারা সূচিত করা হয়।

$$\therefore n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.11)$$

[সমীকরণ (8.10) ব্যবহার করে]

এটিই হলো সরল ছন্দিত স্পন্দনের কম্পাঙ্কের সমীকরণ।

৬. কৌণিক কম্পাঙ্ক (Angular frequency) : সরল ছন্দিত স্পন্দন সম্পন্ন কোনো কণা একক সময়ে যে কৌণিক দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে কৌণিক কম্পাঙ্ক বলে। একে ω দ্বারা সূচিত করা হয়।

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n = 2\pi \times \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} \quad \text{[সমীকরণ (8.11) ব্যবহার করে]}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.12)$$

ω-এর একক রেডিয়ান/সেকেন্ড (rad s^{-1})।

৭. দশা (Phase) : সরল ছন্দিত স্পন্দনরত কোনো বস্তু বা কণার যে কোনো মুহূর্তের গতির অবস্থাকে (সরণ, বেগ, ত্বরণ ইত্যাদি) এর দশা বলে। দশা বলতে যে কোনো মুহূর্তের দোলনের সঠিক অবস্থা বোঝায়। অর্থাৎ এ সময়ে বস্তু বা কণাটির সরণ, বেগ, ত্বরণ, গতির অভিমুখ ইত্যাদি বোঝায়। সমীকরণ (8.9)-এ $(\omega t + \delta)$ রাশিটি গতির দশা নির্দেশ করছে। সমীকরণে $t = 0$ বসালে δ-এর মান দশাকে বোঝায়। এক্ষেত্রে δ-কে আদি দশা বা প্রারম্ভিক দশা (initial phase) বা ইপক (Epoch) বলা হয়। δ-এর মান সময় নির্ভর নয় বলে একে অনেক সময় দশা ধ্রুবকও (Phase constant) বলা হয়। ধ্রুবক δ গতির অবস্থা বোঝায়। যেমন—

$\delta = 0°$ হলে,

$x = A \sin(\omega t + \delta) = A \sin(\omega t + 0°) = A \sin \omega t$

কণা বা বস্তুটির গতি সাম্যাবস্থান হতে শুরু হয়েছে বুঝায়।

আবার, $\delta = \frac{\pi}{2}$ হলে,

$x = A \sin(\omega t + \delta) = A \sin(\omega t + \pi/2) = A \cos \omega t$

এক্ষেত্রে কণাটির গতি শুরু হয় সরণের সর্বোচ্চ অবস্থান থেকে। δ-এর বিভিন্ন মান ভিন্ন ভিন্ন আদি সরণ নির্দেশ করে।

সুতরাং $t = 0$ সময়ে $x = A$ অর্থাৎ সরণ x হচ্ছে সর্বাধিক। এক্ষেত্রে কণাটির গতি শুরু হয় এক প্রান্ত হতে। আবার কণাটির আদি অবস্থান এবং দ্রুতি দ্বারা সরল দোলন গতির বিস্তার এবং দশা পার্থক্য δ নির্ণীত হয়।

৮.৫ দশা ও দশা পার্থক্য

Phase and phase difference

দশা : সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন একটি কণার গতির সমীকরণ $x = A \sin(\omega t + \delta)$ লক্ষ করলে দেখা যায় যে, সমীকরণটিতে দুটি অংশ রয়েছে। যথা—(১) সময় নিরপেক্ষ অংশ (time independent part), A। এটি **বিস্তার অংশ** এবং (২) সময় নির্ভর অংশ (time dependent part) $(\omega t + \delta)$ বা **দশা অংশ**। এই সময় নির্ভর অংশই একটি সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন কণার সরণ, বেগ, ত্বরণ ইত্যাদির মান বিভিন্ন সময়ে কত তা নির্ধারণ করে। যখন $t = 0$, ওই সময়ে দশা δ হয়। δ-কে আদি দশা বা প্রারম্ভিক দশা বা দশা ধ্রুবক বলে।

দশা পার্থক্য : দুটি সরল ছন্দিত গতি একই ছন্দে না চললে তাদের মধ্যে দশা পার্থক্য (Phase difference) আছে ধরা হয়। দশা পার্থক্য বলতে একটি কণা অন্য আরেকটি কণা থেকে কত দশা কোণে এগিয়ে (lead) বা পিছিয়ে (lag) তা বোঝানো হয়।

ব্যাখ্যা : ধরা যাক দুটি ছন্দিত গতি স্পন্দন $x_1 = A \sin \omega t$ এবং $x_2 = A \sin(\omega t + \delta)$। এদের মধ্যে দ্বিতীয়টি প্রথমটির সাপেক্ষে δ কোণে এগিয়ে রয়েছে। সুতরাং এদের মধ্যে দশা পার্থক্য δ। এখন যদি ওই

(i) ছন্দিত গতির শর্ত দশা পার্থক্য $\delta = 0$, বা 2π কিংবা $\delta = 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$) হয়, তবে এদের গতির অবস্থা সবসময় একই থাকবে। এ ধরনের গতি সমদশায় (same phase) রয়েছে ধরা হয়। আবার

(ii) $\delta = \pi$ অথবা $\delta = (2n + 1)\pi$, ($n = 0, 12, \ldots\ldots\ldots$) হলে বিপরীত দশায় (opposite phase) রয়েছে ধরা হয়। আবার যদি,

(iii) $\delta = \frac{\pi}{2}$ অর্থাৎ 90° হয়, তবে এদের কণার স্পন্দনগতি পরস্পর লম্ব বরাবর ঘটে।

গাণিতিক উদাহরণ ৮.১

১। একটি বস্তুকণা তার দোলন সীমার শেষ প্রান্ত হতে দোলন শুরু করে 0·1 m বিস্তার ও 1 Hz কম্পাঙ্কযুক্ত সরল ছন্দিত গতি সম্পন্ন করে। 4·5 s পর কণাটির সরণ কত হবে ?

মনে করি, সরণ $= x$

আমরা পাই, $x = A \sin\omega t$

$= A \sin \frac{2\pi}{T} \times t \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (i)

এখানে, $n = 1\,\text{Hz}$

$A = 0{\cdot}1\,\text{m}$

$T = \frac{1}{n} = \frac{1}{1\,\text{s}^{-1}} = 1\,\text{s}$

দোলন সীমার শেষ প্রান্ত হতে মধ্য অবস্থানে যেতে $\frac{1}{4}\,\text{s} = 0{\cdot}25\,\text{s}$ সময় লাগে হেতু 4·25 s-এ কণাটি 4টি পূর্ণ কম্পন দিয়ে মধ্য অবস্থানে আসবে। কাজেই মধ্য অবস্থান অতিক্রম করার 0·25 s পরের সরণই হবে নির্ণেয় 4·5 s পর কণাটির সরণ।

$\therefore$ সমীকরণ (i) হতে পাই,

$$x = 0{\cdot}1\,\text{m} \times \sin\frac{2\pi}{1} \times 0{\cdot}25 = 0{\cdot}1\,\text{m} \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0{\cdot}1\,\text{m}$$

২। একটি সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন কণার সর্বোচ্চ বেগ $0{\cdot}03\,\text{ms}^{-1}$। কণাটির বিস্তার 0·006 m হলে পর্যায়কাল কত হবে ?

আমরা জানি, $v_{max} = \omega A$

$\therefore \omega = \frac{v_{max}}{A} = \frac{0{\cdot}03}{0{\cdot}006} = 0{\cdot}5\,\text{rad s}^{-1}$

আবার, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \times 3{\cdot}14}{0{\cdot}5} = 12{\cdot}56\,\text{sec}$

এখানে,

$v_{max} = 0{\cdot}03\,\text{ms}^{-1}$

$A = 0{\cdot}006\,\text{m}$

৩। একটি সরল ছন্দিত গতির বস্তুকণার পর্যায়কাল 0·001 s এবং বিস্তার 0·005 m। কণাটির সর্বোচ্চ বেগ এবং গতিপথের মধ্য অবস্থান হতে 0·002 m দূরে ত্বরণ নির্ণয় কর।

মনে করি, ত্বরণ $= \vec{a}$

আমরা পাই,

$|\vec{a}| = \omega^2 |x|$

$= \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 |x| \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (i)

এখানে,

$T = 0{\cdot}001\,\text{s}$

$A = 0{\cdot}005\,\text{m}$

$|x| = 0{\cdot}002\,\text{m}$

$\pi^2 = 9{\cdot}87$

∴ সমীকরণ (i) হতে পাই,

$$|\vec{a}| = \frac{4\pi^2}{T^2}|x| = \frac{4 \times 9.87}{(0.001)^2} \times 0.002$$

$$= 7.9 \times 10^4 \text{ ms}^{-2}$$

পুনরায়, ধরি সর্বোচ্চ বেগ $= v_{max}$

$$\therefore v_{max} = \omega A = \frac{2\pi}{T} \times A$$

$$\therefore v_{max} = \frac{2 \times 3.14}{0.001} \times 0.005 = 31.4 \text{ ms}^{-1}$$

৪। একটি সরল ছন্দিত গতিতে চলমান বস্তুর বিস্তার 0.01 m ও কম্পাঙ্ক 12 Hz। বস্তুটির 0.005 m সরণে বেগ কত হবে ? বস্তুটির সর্বোচ্চ বেগ কত হবে ? [য. বো. ২০০৬ ; রা. বো. ২০০১]

মনে করি, বেগ $= v$

আমরা পাই, $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ ... ... (i)

সমীকরণ (i) হতে পাই,

$$v = 2 \times 3.14 \times 12 \text{ rad s}^{-1}\sqrt{(0.01 \text{ m})^2 - (0.005 \text{ m})^2}$$

$$= 0.653 \text{ ms}^{-1}$$

এখানে,

$\omega = 2\pi n = 2 \times 3.14 \times 12 \text{ rad s}^{-1}$

$A = 0.01$ m

$x = 0.005$ m

$n = 12$ Hz

পুনরায়, সর্বোচ্চ বেগ v_{max}-এর ক্ষেত্রে, $x = 0$

∴ সমীকরণ (i) অনুযায়ী,

$$v_{max} = \omega A$$

$$= 2 \times 3.14 \times 12 \text{ rad s}^{-1} \times 0.01 \text{ m} = 0.7536 \text{ ms}^{-1}$$

৫। সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন একটি কণার বিস্তার 0.05 m এবং পর্যায়কাল 12 sec। এর সর্বোচ্চ দ্রুতি ও ত্বরণ নির্ণয় কর।

কৌণিক কম্পাঙ্ক ω হলে,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{12}$$

$$= \frac{2 \times 3.14}{12} = 0.52 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\therefore v_{max} = \omega A = 0.52 \times 0.05 = 0.026 \text{ ms}^{-1}$$

এবং সর্বোচ্চ ত্বরণ,

$$a_{max} = \omega^2 A = (0.52)^2 \times 0.05 = 0.0135 \text{ ms}^{-2}$$

এখানে,

পর্যায়কাল, $T = 12$ s

বিস্তার, $A = 0.05$ m

$v_{max} = ?$

$a_{max} = ?$

৬। প্রমাণ কর যে, একটি প্লাটফর্ম 4.9 m বিস্তারে কাঁপতে শুরু করলে এর ওপর একজন মানুষ দাঁড়িয়ে থাকলে, তার পা প্লাটফর্ম হতে আলাদা হবার জন্য প্লাটফর্মের কৌণিক কম্পাঙ্ক $\sqrt{2}$ হবে।

[BUET Admission Test, 2015-16]

যদি প্লাটফর্মের ত্বরণ g এর চেয়ে বেশি হয় তবে পা প্লাটফর্ম থেকে আলাদা হবে।

আমরা জানি,

$$a = \omega^2 A_{max}$$

বা, $g = \omega^2 A$

বা, $9.8 = \omega^2 \times 4.9$

$\therefore \omega^2 = 2$

$\therefore \omega = \sqrt{2}$

৭। দুটি সরল ছন্দিত গতির সমীকরণ $x_1 = 0{\cdot}2 \sin\left(50\pi + \frac{\pi}{3}\right)$ এবং $x_2 = 0{\cdot}2 \cos 50\pi t$। দ্বিতীয় কণাটির বেগের সাপেক্ষে প্রথম কণাটির দশা পার্থক্য নির্ণয় কর।

সরল স্পন্দিত গতির প্রথম কণাটির সমীকরণ $x_1 = 0{\cdot}2 \sin\left(50\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ এবং দ্বিতীয়টির সমীকরণ $x_2 = 0{\cdot}2 \cos 50\pi t$।

$\therefore$ প্রথমটির বেগ, $v_1 = \frac{dx_1}{dt} = 0{\cdot}2 \times 50\pi \cos\left(50\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$

এবং দ্বিতীয়টির বেগ, $v_2 = \frac{dx_2}{dt} = -0{\cdot}2 \times 50\pi \sin 50\pi t = 0{\cdot}2 \times 50\pi \cos\left(50\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

অতএব, এদের দশা পার্থক্য $= \left(50\pi t + \frac{\pi}{3}\right) - \left(50\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi - 3\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$$

কাজ : সাম্যাবস্থান থেকে একটি সরল দোল গতিসম্পন্ন কণার কী পরিমাণ সরণ হলে কণাটির বেগ সর্বোচ্চ বেগের অর্ধেক হবে?

ধরা যাক x সরণে কণাটির বেগ সর্বোচ্চ বেগের অর্ধেক হবে।

এখন x সরণে কণার বেগ,

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

এবং সর্বোচ্চ বেগ, $v_{max} = \omega A$

প্রশ্নানুযায়ী, $\frac{1}{2}\omega A = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

বা, $\frac{A}{2} = \sqrt{A^2 - x^2}$ বা, $\frac{A^2}{4} = A^2 - x^2$

বা, $x^2 = A^2 - \frac{A^2}{4} = \frac{3A^2}{4}$

$\therefore$ $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}A$

এটিই সরণের নির্ণেয় মান।

৮·৬ সরল দোলন গতিসম্পন্ন বস্তুর অন্তরকলন বা অবকলনীয় সমীকরণ
Differential equation of simple harmonic motion

মনে করি m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকণা সরল দোলন গতিতে আছে। t সময়ে এর সরণ x হলে

বেগ, $v = \frac{dx}{dt}$ এবং ত্বরণ, $a = \frac{d^2x}{dt^2}$

$\therefore$ কণাটির ওপর ক্রিয়াশীল বলের মান,

$F = \text{ভর} \times \text{ত্বরণ} = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$

যেহেতু বল বা ত্বরণ সরণের সমানুপাতিক এবং বিপরীতমুখি, অতএব

$$m\frac{d^2x}{dt^2} \propto -x$$

বা, $m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx$ ... ... (8.13)

এখানে K একটি ধ্রুব সংখ্যা। একে বল ধ্রুবক বলে। এই ধ্রুবকের মান স্প্রিং-এর দৈর্ঘ্য, জ্যামিতিক গঠন এবং পদার্থের স্থিতিস্থাপক ধর্মের ওপর নির্ভর করে। $K = \frac{F}{x}$ এর একক Nm^{-1} এবং মাত্রা MT^{-2}।

পুনঃ, কণাটির কৌণিক বেগ ω হলে, আমরা পাই

$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ ... ... (8.14)

এখন সমীকরণ (8.13) এবং (8.14) হতে পাই, $-\frac{K}{m}x = -\omega^2 x$ বা, $\frac{K}{m} = \omega^2$

সমীকরণ (8.13)-এ $\frac{K}{m}$-এর মান বসিয়ে পাই,

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.15)$$

সমীকরণ (8.15) হলো সরল ছন্দিত স্পন্দনরত কণার অবকলনীয় সমীকরণ।

৮.৬.১ অন্তরকলন বা অবকলনীয় সমীকরণের সমাধান

(8.15) নং সমীকরণকে $2\frac{dx}{dt}$ দিয়ে গুণ করে পাই,

$$2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 . 2x\frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{বা,} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \omega^2\frac{d}{dt}(x^2) = 0$$

t-এর সাপেক্ষে সমাকলন করে পাই,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \omega^2x^2 = c = \text{ধ্রুবক} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad [8.15(a)]$$

কিন্তু যখন $x = \pm a$, অর্থাৎ বিস্তারের সর্বোচ্চ অবস্থানে, তখন

বেগ $\frac{dx}{dt} = 0 \;\therefore\; c = \omega^2x^2$

সমীকরণ [8.15(a)]-তে $c = \omega^2a^2$ বসিয়ে পাই

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \omega^2(a^2 - x^2)$$

বা, $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \omega^2(a^2 - x^2)$

বা, $\frac{dx}{dt} = \omega\sqrt{a^2 - x^2}$

বা, $\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \omega dt$

এখানে,
x = ছন্দিত গতিসম্পন্ন কণার সরণ
a = বস্তুর সর্বোচ্চ সরণ
δ = আদি দশা
$\omega t + \delta$ = বস্তুর দশা

সমাকলন করে পাই,

$\sin^{-1}\frac{x}{a} = \omega t + \delta$ এখানে δ = সমাকলন ধ্রুবক

$$\therefore \boxed{x = a\sin(\omega t + \delta)} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.16)$$

এই সমীকরণ সরল দোলন গতির অবকলন সমীকরণের সমাধান।

কাজ : $x = A \sin \omega t$ সমীকরণটি একটি সরল দোলগতির সমীকরণ। কীভাবে দেখাবে ? গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর।

এক্ষেত্রে বেগ, $v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t$; এবং ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\sin\omega t = -\omega^2x$

ত্বরণের সমীকরণ থেকে দেখা যায় ত্বরণ সরণের সমানুপাতিক ও বিপরীতমুখি। অতএব $x = A \sin \omega t$ সমীকরণটি একটি সরল দোলগতি নির্দেশ করে।

গাণিতিক উদাহরণ ৮.২

১। সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন একটি কণার গতির সমীকরণ $y = 10\sin(\omega t + \delta)$, পর্যায়কাল 30s এবং আদি সরণ 0·05m হলে কণাটির (ক) কৌণিক কম্পাঙ্ক; (খ) আদি দশা নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০২]

এখানে,
পর্যায়কাল, T = 30s
কৌণিক কম্পাঙ্ক, ω = ?
আদি সময়, $t = 0$
সরণ, $y = 0·05$ m
আদি দশা, δ = ?

(ক) আমরা জানি,

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$\therefore \omega = \frac{2 \times 3·14}{30} = 0·209 \text{ rads}^{-1}$

(খ) আবার, $y = 10\sin(\omega t + \delta)$

বা, $0·05 = 10\sin(\omega t + \delta) = 10\sin(\omega \times 0 + \delta) = 10\sin\delta$

$\therefore \sin\delta = \frac{0·05}{10} = 0·005$

$\therefore \delta = \sin^{-1}(0·005) = 0·286°$

২। একটি বস্তুকণা সরল ছন্দিত স্পন্দনে দুলছে যার গতির সমীকরণ $x = 10 \cos (6\pi t + \pi/3)$ মিটার। $t = 3$ সেকেন্ড সময় পরে বস্তুটির সরণ, বেগ ও ত্বরণ কত হবে ? [KUET Admission Test, 2006-07 (মান ভিন্ন)]

এখানে,

সরণ, $x = 10 \cos (6\pi t + \pi/3)$

3 সেকেন্ড পরে সরণ, $x = 10 \cos (6\pi \times 3 + \pi/3) = 10 \cos (18\pi + \pi/3)$

$$= 10 \cos \pi/3 = 10 \times \frac{1}{2} = 5 \text{m}$$

বেগ, $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \{10 \cos (6\pi t + \pi/3) = -60\,\pi \sin (6\pi t + \pi/3)$

3 সেকেন্ড পরে, $v = -60\pi \sin (6\pi \times 3 + \pi/3) = -60\pi \sin (18\pi + \pi/3)$

$$= -60\pi \sin \pi/3 = -60 \times 3.14 \times 0.866$$
$$= -163.15 \text{ ms}^{-1}$$

ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \{-60\,\pi \sin (6\pi t + \pi/3) = -360\,\pi^2 \cos (6\pi t + \pi/3)$

3 সেকেন্ড পরে, $a = -360\,\pi^2 \cos (6\pi \times 3 + \pi/3) = -360\pi^2 \cos (18\pi + \pi/3)$

$$= -360\pi^2 \cos \pi/3 = -360 \times 9.87 \times \frac{1}{2} = -1776.6 \text{ms}^{-2}$$

৩। দেখাও যে, $x = A \sin \omega t$ সমীকরণটি একটি সরল দোলন গতি নির্দেশ করে।

$x = A \sin \omega t$

$\therefore$ বেগ, $v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t$

ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin \omega t$

বা, $a = -\omega^2 x$

অতএব ত্বরণ সরণের সমানুপাতিক এবং বিপরীতমুখি। ইহা সরল দোলন গতির একটি বৈশিষ্ট্য।

অতএব, $x = A \sin \omega t$ সমীকরণটি একটি সরল দোলন গতি নির্দেশ করে।

৪। সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন একটি কণার গতির সমীকরণ $y = 5 \sin (\omega t + \delta)$, পর্যায়কাল 20s এবং আদি সরণ 0.05m হলে কণাটির (ক) কৌণিক কম্পাঙ্ক; (খ) আদি দশা নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\therefore \omega = \frac{2 \times 3.14}{20} = 0.314 \text{ rads}^{-1}$$

আবার, $y = A \sin (\omega t + \delta)$

বা, $0.05 = 5 \sin (\omega t + \delta) = 5 \sin \delta$

বা, $\sin \delta = \frac{0.05}{5} = 0.01$

$\therefore \delta = \sin^{-1} (0.01)$ degree $= 0.57°$

এখানে,
পর্যায়কাল, $T = 20s$
কৌণিক কম্পাঙ্ক, $\omega = ?$
শুরুতে সময়, $t = 0$
সরণ, $y = 0.05$ m
বিস্তার, $A = 5$m
আদি দশা, $\delta = ?$

৫। কোনো স্প্রিং এর এক প্রান্তে 50 g ভরের একটি বস্তু সরল ছন্দিত স্পন্দনে স্পন্দিত হয়। বস্তুর গতিপথের বিস্তার 10 cm এবং পর্যায়কাল 1 s। কৌণিক কম্পাঙ্ক, কম্পাঙ্ক এবং স্প্রিং ধ্রুবক নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

কৌণিক কম্পাঙ্ক,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3.14}{1} = 6.28 \text{ rad s}^{-1}$$

কম্পাঙ্ক, $n = \frac{1}{T} = \frac{1}{1} = 1$ Hz

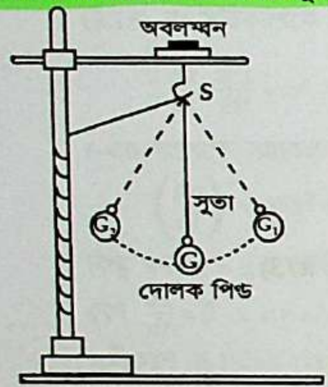
স্প্রিং ধ্রুবক, $k = \omega^2 m \quad \left(\because \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$

$$= (6.28)^2 \times 0.05 = 1.971 \text{ Nm}^{-1}$$

এখানে,
ভর, $m = 50$ g $= 0.05$ kg
বিস্তার, $A = 10$ cm $= 0.10$ m
পর্যায়কাল, $T = 1$ s
কৌণিক কম্পাঙ্ক, $\omega = ?$
কম্পাঙ্ক, $n = ?$
স্প্রিং ধ্রুবক, $k = ?$

৮.৭ সরল দোলন গতি
Simple harmonic motion

সরল দোলন গতির আলোচনা পদার্থবিজ্ঞানে একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। পর্যাবৃত্তিক গতিসম্পন্ন কোনো বস্তুর গতি যদি এমন হয় যে পর্যায়কালের অধিক সময় কোনো নির্দিষ্ট দিকে এবং বাকি অর্ধেক সময় বিপরীত দিকে চলে তবে ওই বস্তুর গতিকে দোলন গতি বা স্পন্দন বলে। এই গতির একটি বিশেষ রূপ হলো সরল দোলন গতি। যেকোনো জটিল দোলন গতিকে অনেকগুলি সরল দোলন গতির সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায়।



চিত্র ৮.৭

তোমরা সরল দোলক দেখেছ, এটিকে দুলতে দিলে এদিক ওদিক দোলে [চিত্র ৮.৭]। লক্ষ করলে দেখবে যে, ববকে ধরে যেকোনো একদিকে টেনে ছেড়ে দিলে তা আবার বিপরীত দিকে অর্থাৎ স্থির অবস্থায় বা যে অবস্থানে ছিল সেই দিকে চলে আসে। এ ধরনের গতিসম্পন্ন দোলকের গতি সরল দোলন গতি। সরল দোলকের কৌণিক বিস্তার 4° এর মধ্যে রাখতে হয়। কৌণিক বিস্তার 4° এর বেশি হলে সরল দোলকের গতি সরলরৈখিক না হয়ে বৃত্তাকার হয়। ফলে সরল দোলক সরল দোলন গতির বৈশিষ্ট্য মেনে চলে না। সেক্ষেত্রে $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ সমীকরণ প্রযোজ্য হয় না।

সংজ্ঞা : কোনো পর্যায়গতিসম্পন্ন বস্তুর উপর কার্যরত ত্বরণ যদি তার গতিপথের একটি নির্দিষ্ট বিন্দু অভিমুখে এমনভাবে ক্রিয়া করে যে, তার মান ওই বিন্দু হতে বস্তুর সরণের মানের সমানুপাতিক হয়, তবে বস্তুর উক্ত গতিকে সরল দোলন গতি বলে।

উদাহরণ : খুব কম বিস্তারের সরল দোলকের গতি, সুর শলাকার বাহুর কম্পন, স্প্রিং এর উল্লম্ব কম্পন, গাড়ির ইঞ্জিনের পিস্টনের গতি ইত্যাদি।

৮.৭.১ সরল দোলকের সূত্রাবলি

প্রথম সূত্র (সমকাল সূত্র) : কোনো স্থানে নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সরল দোলকের বিস্তার 4° এর মধ্যে থাকলে তার প্রতিটি দোলনের জন্য সমান সময় লাগবে।

দ্বিতীয় সূত্র (দৈর্ঘ্যের সূত্র) : বিস্তার 4° এর মধ্যে থাকলে কোনো নির্দিষ্ট স্থানে সরল দোলকের দোলন কাল তার কার্যকরী দৈর্ঘ্যের বর্গমূলের সমানুপাতিক। অর্থাৎ $T \propto \sqrt{L}$ অর্থাৎ কার্যকরী দৈর্ঘ্য 4 গুণ বাড়ালে দোলন কাল 2 গুণ বাড়বে।

তৃতীয় সূত্র (ত্বরণের সূত্র) : বিস্তার 4° এর মধ্যে থাকলে নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট কোনো একটি সরল দোলকের দোলনকাল ওই স্থানের অভিকর্ষীয় ত্বরণের বর্গমূলের ব্যস্তানুপাতিক। অর্থাৎ $T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$।

চতুর্থ সূত্র (ভরের সূত্র) : বিস্তার 4° এর মধ্যে এবং কার্যকরী দৈর্ঘ্য স্থির থাকলে কোনো স্থানে সরল দোলকের দোলনকাল দোলক পিণ্ডের ভর, আকৃতি, উপাদানের ওপর নির্ভর করে না।

সরল দোলকের সূত্রগুলোকে একত্রে $T \propto \frac{L}{\sqrt{g}}$ বা, $T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{L}{g}}$ আকারে লেখা যায়।

অতএব, স্বল্প বিস্তারে দোলায়মান সরল দোলকের গতি সরল দোলন বা দোল গতি। এটি নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্যগুলো মেনে চলে।

৮.৭.২ সরল দোলন গতির বৈশিষ্ট্য
Characteristics of simple harmonic motion

(১) এটি একটি পর্যাবৃত্ত গতি।
(২) একটি নির্দিষ্ট সময় পরপর এই গতি বিপরীতমুখি হয়।
(৩) এর গতি সরলরেখায় ঘটে।
(৪) ত্বরণ সর্বদা সরণের সমানুপাতিক।
(৫) ত্বরণ সরণের বিপরীতমুখি।
(৬) ত্বরণ বস্তু কণাটির মধ্য বা সাম্য অবস্থান অভিমুখী।
(৭) সরল গতিসম্পন্ন কণা বা বস্তু যেই মুহূর্তে সাম্যাবস্থান অতিক্রম করে সেই মুহূর্তে গতিবেগ সর্বোচ্চ হয়। সরণের শেষ প্রান্তে বেগ মুহূর্তের জন্য শূন্য হয়।
(৮) সরল দোলনগতির পর্যায়কাল তার বিস্তারের ওপর নির্ভরশীল নয়।
(৯) গতিপথের মধ্য অবস্থানে বেগ সর্বাধিক, সরণ সর্বনিম্ন।

নিজে কর : দোলনরত দোলক কোনো শব্দ উৎপন্ন করে না কেন ? কী ধরনের তরঙ্গ তা উৎপন্ন করে?

কোনো শব্দ শ্রুতিগোচর হতে গেলে শব্দ তরঙ্গের কম্পাঙ্ক 20 থেকে 20,000/sec (Hz) হতে হয়। সাধারণত দোলকের কম্পাঙ্ক অনেক কম হয়। যেমন সেকেন্ড দোলকের কম্পাঙ্ক 0·5/sec যা শ্রুতিগোচর শব্দের কম্পাঙ্কের চেয়ে খুব সামান্য, যে কারণে দোলকের কম্পনের শব্দ শোনা যায় না।

হিসাব কর : কোনো একটি দৃঢ় স্থান হতে একটি স্প্রিং খাড়াভাবে দোলানো হচ্ছে। এর নিচের প্রান্তে 200 g ভরের একটি বস্তু আটকানো আছে। নিচের দিকে 50 g-wt বল প্রয়োগ করায় বস্তুটি 5 cm নিচে নেমে গেল। এবার ছেড়ে দিলে বস্তুটি ওপর-নিচে সরল দোলন গতি লাভ করবে। দোলনের পর্যায়কাল এবং স্প্রিং-এর বল ধ্রুবক নির্ণয় কর।

৮·৮ সরল দোলন গতির ব্যবহার
Application of simple harmonic motion

সরল দোলন গতি ব্যবহার করে সরল দোলকের সাহায্যে পর্যায়কাল এবং স্প্রিং স্পন্দনের পর্যায়কাল নির্ণয় করা যায়। এই পর্যায় কালের মান থেকে নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে সরল দোলন গতি ব্যবহার করা যায়।

(১) অভিকর্ষজ ত্বরণ g-এর মান নির্ণয় করা যায়।

(২) পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় করা যায়।

(৩) সময় নির্ণয় করা যায়।

১. সরল দোলকের সাহায্যে g-এর মান নির্ণয়

মূলতত্ত্ব (Theory) : সরল দোলকের সাহায্যে কোনো স্থানের অভিকর্ষজ ত্বরণ নির্ণয় করা যায়। এর জন্য ব্যবহৃত সমীকরণটি হলো, $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

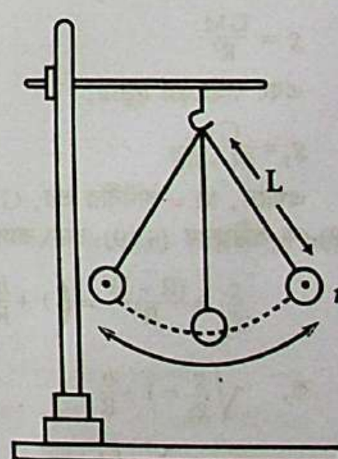
এখানে, T = দোলন কাল, L = কার্যকর দৈর্ঘ্য এবং g = অভিকর্ষজ ত্বরণ।

উপরের সমীকরণের উভয় পার্শ্বকে বর্গ করে পাই, $T^2 = 4\pi^2\frac{L}{g}$

বা, $g = 4\pi^2\frac{L}{T^2}$ ... ... (8.17)

π একটি ধ্রুব রাশি ও একটি নির্দিষ্ট স্থানে g ধ্রুব। কাজেই ঐ স্থানে L/T^2-এর একটি নির্দিষ্ট মান পাওয়া যাবে এবং গড় L/T^2-এর মান সমীকরণে বসিয়ে g-এর মান নির্ণয় করা যাবে।

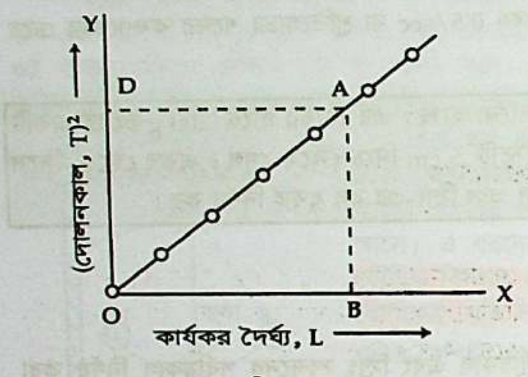
পরীক্ষা : প্রথমে একটি স্ট্যান্ড হতে হুকের সাহায্যে সুতা ঝুলিয়ে সুতার প্রান্তে ববকে আটকে সরল দোলক তৈরি করা হয় [চিত্র ৮·৮]। এরপর মিটার স্কেলের সাহায্যে একটি সরল দোলকের সুতার দৈর্ঘ্য l এবং স্লাইড ক্যালিপার্সের সাহায্যে দোলকের গোলাকার পিণ্ডের ব্যাস হতে ব্যাসার্ধ r জেনে দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য, $L = l + r$ নির্ণয় করা হয়। এরপর পর্যবেক্ষণ স্থানে দোলকটিকে 4° অপেক্ষা কম কৌণিক বিস্তারে দুলতে দিয়ে একটি স্টপ-ওয়াচের সাহায্যে তার 20টি পূর্ণ দোলনের সময় কাল t নির্ণয় করে 20 দ্বারা ভাগ করে দোলন কাল, $T = \frac{t}{20}$ বের করা হয় এবং দোলনকালের বর্গ T^2 নির্ণয় করা হয়। সুতরাং দৈর্ঘ্য l পরিবর্তন করে অনুরূপভাবে বিভিন্ন কার্যকর দৈর্ঘ্যে দোলকের দোলনকাল নির্ণয় করা হয় এবং প্রত্যেক ক্ষেত্রে দোলনকালের বর্গ বের করা হয়।



চিত্র ৮·৮

হিসাব : প্রাপ্ত ফলাফল হতে প্রত্যেক ক্ষেত্রে $\frac{L}{T^2}$ নির্ণয় করে গড় $\frac{L}{T^2}$-এর মান ওপরের সমীকরণে বসিয়ে g-এর মান নির্ণয় করা যায়, কেননা $4\pi^2$ একটি ধ্রুব রাশি যার মান জানা আছে।

বিকল্প পদ্ধতি : একটি ছক কাগজের অনুভূমিক অক্ষে কার্যকর দৈর্ঘ্য L এবং উল্লম্ব অক্ষে দোলন কালের বর্গ, T^2 নির্দেশ করে $L—T^2$ লেখচিত্র অঙ্কন করা হয়। অঙ্কনে $L—T^2$ লেখচিত্রটি মূল বিন্দু O-গামী একটি সরলরেখা হবে [চিত্র ৮.৯]। এই সরলরেখার যে কোনো বিন্দু A হতে X অক্ষের ওপর AB এবং Y অক্ষের ওপর AD লম্ব টেনে অঙ্কন অনুসারে AB ও AD-এর অর্থাৎ T^2 ও L-এর মান বের করা হয়। এখন L ও T^2-এর মান ওপরের সমীকরণে বসিয়ে g-এর মান নির্ণয় করা যায়।



চিত্র ৮.৯

এখানে, $g = 4\pi^2 \frac{AD}{AB}$

$= 4\pi^2 \frac{OB}{AB}$

$= 4\pi^2 \cot \angle BOA$

সতর্কতা :

(১) বিস্তার 4°-এর মধ্যে হওয়া উচিত।

(২) পিণ্ডের ব্যাস বেশ কয়েকবার নির্ধারণ করে তাদের গড় নেয়া উচিত।

(৩) T-এর মান নির্ভুল হওয়া উচিত এবং এর জন্য অধিক সংখ্যক পূর্ণ দোলনে ব্যয়িত সময় নির্ণয় করা উচিত।

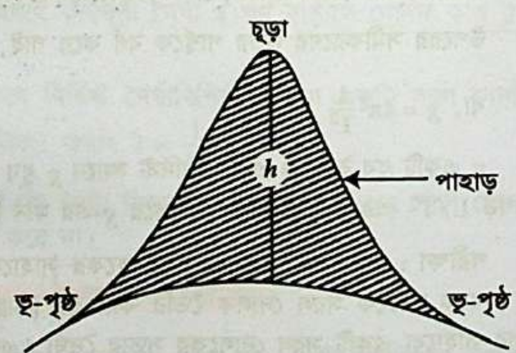
(৪) পিণ্ডটির উল্লম্ব তলে পাক খেতে না দিয়ে মুক্তভাবে দুলবার ব্যবস্থা করা উচিত।

২. পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয়

সরল দোলকের সাহায্যে কোনো পাহাড়ের উচ্চতা অর্থাৎ ভূ-পৃষ্ঠ হতে পাহাড়ের চূড়া বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করা যায় [চিত্র ৮.১০]। প্রথমে পাহাড়ের পাদদেশে অর্থাৎ ভূ-পৃষ্ঠে সরল দোলকের সাহায্যে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান পূর্বের নিয়মে নির্ণয় করা হয়। মনে করি এই মান = g.

এরপর পাহাড়ের চূড়ায় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান অনুরূপভাবে নির্ণয় করা যায়।

ধরি এই মান = g_1



চিত্র ৮.১০

হিসাব ও গণনা : নিউটনের মহাকর্ষজ সূত্রানুসারে পাহাড়ের পাদদেশে,

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad \ldots \quad (8.18)$$

এবং পাহাড়ের চূড়ায়,

$$g_1 = \frac{GM}{(R+h)^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.19)$$

এখানে, M = পৃথিবীর ভর, G = মহাকর্ষীয় ধ্রুবক, R = পৃথিবীর ব্যাসার্ধ এবং h = পাহাড়ের উচ্চতা। সমীকরণ (8.18)-কে সমীকরণ (8.19) দ্বারা ভাগ করে আমরা পাই,

$$\frac{g}{g_1} = \frac{(R+h)^2}{R^2} = \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2$$

বা, $$\sqrt{\frac{g}{g_1}} = 1 + \frac{h}{R} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.20)$$

আবার, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ এবং $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_1}}$, এখানে T এবং T_1 হলো যথাক্রমে পাহাড়ের পাদদেশ এবং চূড়ায় সরল দোলকের পর্যায়কাল।

$$\therefore \quad \frac{T}{T_1} = \sqrt{\frac{g_1}{g}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.21)$$

সমীকরণ (8.20) ও (8.21) থেকে পাই,

$$1+\frac{h}{R}=\frac{T_1}{T}$$

বা, $\frac{h}{R}=\frac{T_1}{T}-1$

বা, $h=R\left(\frac{T_1}{T}-1\right)$ ... ... (8.22)

R এর মান জানা থাকলে T ও T_1 এর মান নির্ণয় করে সমীকরণ (8.22) থেকে h এর মান নির্ণয় করা যায়।

৩. সময় নির্ণয়

দোলক ঘড়িতে দোলকের সাহায্যে সময় মাপা হয়। এ সব দোলক সাধারণত ধাতুর দ্বারা নির্মিত। শীতকালে তারের দৈর্ঘ্য কমে যায় এবং গ্রীষ্মকালে দৈর্ঘ্য বেড়ে যায়। সুতরাং শীতকালে ঘড়ির দোলন কাল কমে যায় এবং ঘড়ি দ্রুত চলে। গ্রীষ্মকালে ঘড়ির দোলন কাল বেড়ে যায় এবং ঘড়ি ধীরে চলে। সাধারণ দোলক ঘড়ির পিণ্ডের নিচের একটি স্ক্রুকে প্রয়োজনমতো ঘুরিয়ে পিণ্ডকে উঠা-নামা করিয়ে দোলন কাল নিয়ন্ত্রণ করা হয়।

মাটির নিচে বা উঁচু পাহাড়ের ওপর g-এর মান কম। কাজেই উঁচু পাহাড়ে বা মাটির নিচে দোলকের দোলন কাল বেশি হয়। এর অর্থ ঘড়ি ধীরে চলে। বিষুব অঞ্চলে g-এর মান কম এবং মেরু অঞ্চলে g-এর মান বেশি। অতএব একটি দোলক ঘড়িকে বিষুব অঞ্চল হতে মেরু অঞ্চলে নিলে ঘড়িটি দ্রুত চলে।

যাচাই কর : একটি সরল দোলকের ধাতব ফাঁপা পিণ্ডটি পানি দ্বারা পূর্ণ আছে। পিণ্ডের নিচে একটি ছোট ছিদ্র দিয়ে পানি ফোঁটায় ফোঁটায় পড়ে যায়। দেখা গেল দোলকের দোলনকাল প্রথমে বৃদ্ধি পাচ্ছে এবং পরে কমে যাচ্ছে।—ঘটনাটি ব্যাখ্যা কর।

গাণিতিক উদাহরণ ৮.৩

১। 1 মিটার কার্যকরী দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সরল দোলক 4 সেকেন্ডে ৪টি দোলন সম্পন্ন করে। অভিকর্ষজ ত্বরণের মান নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

বা, $T^2=4\pi^2\frac{L}{g}$

$\therefore\ g=4\pi^2\frac{L}{T^2}$

$=4\times 9.87\times\frac{1}{(0.5)^2}$

$=157.92\ ms^{-2}$

এখানে,

কার্যকরী দৈর্ঘ্য, L = 1 m

কম্পাঙ্ক, $n=\frac{8}{4}=2\ s^{-1}$

দোলনকাল, $T=\frac{1}{n}=0.5\ s$

$g=?$

২। 100 cm কার্যকরী দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি দোলক প্রতি মিনিটে 30টি দোলন সম্পন্ন করে। পরীক্ষণীয় স্থানে অভিকর্ষীয় ত্বরণ g-এর মান নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

বা, $T^2=4\pi^2\frac{L}{g}$

$\therefore\ g=\frac{4\pi^2L}{T^2}=\frac{4\times 9.87\times 1}{(2)^2}$

$=9.87\ ms^{-2}$

এখানে,

কার্যকরী দৈর্ঘ্য, L = 100 cm = 1 m

30টি দোল দিতে সময় লাগে = 1 min = 60 sec

1টি " " " " $=\frac{60}{30}=2$ sec

$\therefore$ T = 2 sec

$g=?$

৩। কোনো একটি সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য 25.6% বাড়ালে এর দোলনকাল কত হবে বের কর।

আমরা জানি,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}} \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$$

এবং $$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}} \quad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$$

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

বা, $$T_2 = T_1\sqrt{\frac{1.256\ L_1}{L_1}} = 2 \times \sqrt{1.256} = 2.24\ s$$

এখানে,

কার্যকরী দৈর্ঘ্য = L_1

25.6% বৃদ্ধি করলে কার্যকরী দৈর্ঘ্য, $L_2 = L_1$ এর $\frac{25.6}{100} + L_1$

$= 0.256\ L_1 + L_1 = 1.256\ L_1$

$T_1 = 2$ sec

$T_2 = ?$

৪। 1 m কার্যকরী দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সরল দোলকের ববের ভর 300 g, দোলকটিকে সাম্যাবস্থা থেকে 60° কোণে নিয়ে গিয়ে ছেড়ে দেওয়া হলো। ববটির গতিশক্তি বের কর যখন এটি সাম্যাবস্থা দিয়ে অতিক্রম করে এবং যখন সুতা সাম্যাবস্থার সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। [RUET Admission Test, 2015-16]

A অবস্থানে ববটির গতিশক্তি শূন্য,

∴ A অবস্থানে ববটির মোট শক্তি = বিভব শক্তি

$$= 300 \times 10^{-3} \times 9.8 \times \frac{1}{2}$$

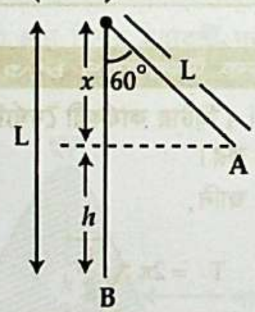
$$300 \times 9.8 \times 1 = 2.94\ J = 1.47\ J$$

এখানে,

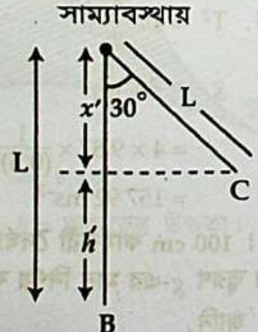
$x = L \cos 60°$

$h = L - x = L(1 - \cos 60°)$

$= 1\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$



সাম্যাবস্থায়



B অবস্থানে ববের বিভবশক্তি শূন্য

∴ B অবস্থানে মোট শক্তি = A অবস্থানে মোট শক্তি

= 1.47 জুল

এখানে, $h' = L - x' = L - L \cos 30°$

$= L(1 - \cos 30°) = 0.134$

∴ C অবস্থানে বিভবশক্তি $= mgh' = 0.4$ J

∴ C অবস্থানে গতিশক্তি $E_k = 1.47 - 0.4 = 1.07$ J

৫। একটি সরল দোলকের দোলনকাল 50% বৃদ্ধি করতে এর কার্যকর দৈর্ঘ্য কত গুণ বাড়াতে হবে?

[কু. বো. ২০০৯; য. বো. ২০০৮; ঢা. বো. ২০০৩; চ. বো. ২০০৩; মাদরাসা বোর্ড, ২০১৫]

আমরা জানি,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

বা, $$T^2 = 4\pi^2\frac{L}{g} \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$$

এখানে,

আদি দোলনকাল = Ts

শেষ দোলনকাল, $T_1 = \left(T + \frac{T\,50}{100}\right) s = \left(T + \frac{T}{2}\right) s$

আদি দৈর্ঘ্য = L

শেষ দৈর্ঘ্য = L_1

আবার, $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}$

বা, $T_1^2 = 4\pi^2\frac{L_1}{g}$

বা, $\left(T+\frac{T}{2}\right)^2 = 4\pi^2\frac{L_1}{g}$

বা, $\left(\frac{3T}{2}\right)^2 = 4\pi^2\frac{L_1}{g}$

বা, $T^2 = 4\pi^2\frac{L_1}{g}\times\frac{4}{9}$ ... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$$\frac{4\pi^2 L}{g} = \frac{4\pi^2 L_1}{g}\times\frac{4}{9}$$

বা, $\frac{L}{L_1} = \frac{4}{9}$

বা, $L_1 = \frac{9}{4}L = 2{\cdot}25L$

$\therefore$ দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি $= 2{\cdot}25L - L = 1{\cdot}25L$

$\therefore$ কার্যকর দৈর্ঘ্য 1.25 গুণ বাড়াতে হবে।

৬। 40 cm দীর্ঘ একটি সরল দোলক প্রতি মিনিটে 40 বার দোল দেয়। যদি এর দৈর্ঘ্য 160 cm করা হয় তবে 60 বার দুলতে কত সময় নেবে? [ঢা. বো. ২০০৮]

আমরা জানি,

$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

সুতরাং, $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}$ ... ... (i)

এবং $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}}$ ... ... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}}} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

বা, $T_2 = T_1\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$

$\therefore T_2 = 1{\cdot}5\times\sqrt{\frac{160}{40}} = 1{\cdot}5\times 2 = 3\text{ s}$

$\therefore$ 60 বার দুলতে সময় লাগে $= T_2\times 60 = 3\times 60 = 180\text{ s} = 3\text{ min}$

এখানে,
দৈর্ঘ্য, $L_1 = 40$ cm
দোলন সংখ্যা $= 40$
$\therefore$ দোলনকাল, $T_1 = \frac{60}{40} = 1{\cdot}5$ s
দৈর্ঘ্য, $L_2 = 160$ cm
দোলন সংখ্যা $= 60$
সময়, $T_2 = ?$

৭। অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9{\cdot}8\text{ ms}^{-2}$ এর জন্য সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য কত হবে?

আমরা জানি,

$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

$\therefore L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{(2)^2\times 9{\cdot}8}{4\times 9{\cdot}87}$

$= 99{\cdot}29$ cm

এখানে,
$T = 2$ sec
$g = 9{\cdot}8\text{ ms}^{-2}$

৮। একটি সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য ঢাকায় 100 cm এবং কাঠমুন্ডুতে 95 cm। কোনো বস্তুকে কাঠমুন্ড হতে ঢাকায় আনলে এর ওজনের কী পরিবর্তন হবে ? [CUET Admission Test, 2013-14]

আমরা জানি,

$$\frac{W_D}{W_K} = \frac{L_D}{L_K} = \frac{1}{0.95} = 1.05$$

$\therefore \quad W_D = 1.05\, W_K$

ওজনের পরিবর্তন,

$$\Delta W_z = W_D - W_K = 1.05\, W_K - W_K = 0.05\, W_K = 0.05 \times 100\%\, W_K$$

অর্থাৎ 5% বেড়েছে।

আবার, $\frac{W_D}{W_K} = \frac{L_D^2}{L_K} = \frac{1}{(0.95)^2}$

$$= \frac{1}{0.9025} = 1.108$$

$WD = 1.108\ WK$

$\Delta W = W_D - W_K = 0.108\, W_K = 10.8\%$ বাড়বে।

৯। একটি সরল দোলকের দৈর্ঘ্য অপরটির 4 গুণ। দ্বিতীয় সরল দোলকের দোলনকাল 4 sec হলে প্রথম দোলকটির দোলনকাল কত ?

আমরা জানি,

প্রথম দোলকের জন্য

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}} \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$$

২য় দোলকের জন্য

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}} \quad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$$

এখানে,
$L_1 = 4 L_2$
$T_2 = 4$ sec
$T_1 = ?$

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

বা, $T_1 = T_2\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$

$$= 4 \times \sqrt{\frac{4L_2}{L_2}} = 8 \text{ sec}$$

১০। যদি কোনো স্থানে একটি সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য 1 m হয়, তবে যে দোলক সেই স্থানে প্রতি মিনিটে 20 বার দোল দেয়, তার দৈর্ঘ্য বের কর। [RUET Admission Test, 2010-11]

আমরা জানি,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}$$

এবং $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}}$

এখানে,
$T_2 = \frac{60}{20} = 3$ s
$T_1 = 2$ s

$$\therefore \quad \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

$$\therefore \quad L_2 = L_1 \times \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = 1 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}\text{m}$$

১১। পৃথিবীর পৃষ্ঠে একটি সরল দোলকের দোলন কাল 2 s। একে চন্দ্রপৃষ্ঠে নেওয়া হলো। চন্দ্রপৃষ্ঠে এর দোলন কাল কত ? পৃথিবীর ভর ও ব্যাসার্ধ যথাক্রমে চন্দ্রের ভর ও ব্যাসার্ধের 81 গুণ এবং 4 গুণ।

দোলকে দোলন কাল পৃথিবী পৃষ্ঠে T_e এবং চন্দ্র পৃষ্ঠে T_m, কার্যকরী দৈর্ঘ্য, L এবং চন্দ্র পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ, g_m ও পৃথিবীতে অভিকর্ষজ ত্বরণ, g_e হলে

$$T_e = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_e}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

$$T_m = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_m}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$$

$$\therefore \frac{T_m}{T_e} = \sqrt{\frac{g_e}{g_m}} = \sqrt{\frac{GM_e}{R_e^2} \times \frac{R_m^2}{GM_m}} = \sqrt{\frac{M_e R_m^2}{M_m R_e^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{81 M_m}{M_m} \times \frac{R_m^2}{(4R_m)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{4}$$

$$\therefore T_m = \frac{9}{4} \times T_e = \frac{9}{4} \times 2 = 4{\cdot}5 \text{ sec}$$

১২। রাশেদ একদিন একটি সেকেন্ড দোলককে পাহাড়ের পাদদেশে নিয়ে গেলে সঠিক সময় পায়। কিন্তু পাহাড়ের চূড়ায় নিয়ে গিয়ে সে লক্ষ করল যে দোলকটি ঘণ্টায় 30 সেকেন্ড সময় হারায়। পাহাড়ের চূড়ায় সরল দোলকের দোলনকাল নির্ণয় কর। উক্ত পাহাড়ের উচ্চতা কত হবে ? [পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R = 6400 km, অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9{\cdot}8 \text{ ms}^{-2}$]

মনে করি, পাহাড়ের চূড়ায় দোলনকাল = T_2

এখানে,

পাহাড়ের চূড়ায় প্রতি ঘণ্টায় অর্থাৎ 3600 সেকেন্ডে প্রাপ্ত অর্ধ দোলন সংখ্যা = 3600 − 30 = 3570

যেহেতু 3570টি অর্ধ-দোলন দেয় 3600 সেকেন্ডে

∴ 2টি অর্ধ-দোলন দেয় $\frac{3600 \times 2}{3570} = 2{\cdot}0168$ সেকেন্ডে

∴ দোলন কাল, $T_2 = 2{\cdot}0168$ sec

ভূপৃষ্ঠে ও পাহাড়ের চূড়ায় দোলনকাল যথাক্রমে T_1 ও T_2 হলে,

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{g_2}{g_1}} = \sqrt{\frac{R^2}{(R+h)^2}} = \frac{R}{R+h}$$

$$\therefore \frac{T_2}{T_1} = \frac{R+h}{R} = 1 + \frac{h}{R}$$

বা, $\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{h}{R}$

বা, $\frac{2{\cdot}0168}{2} = 1 + \frac{h}{R}$

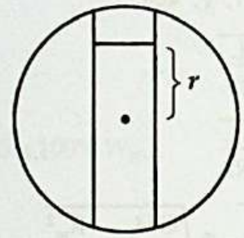
বা, $\frac{h}{R} = \frac{2{\cdot}0168}{2} - 1$

$$= \frac{0{\cdot}0168}{2} = 0{\cdot}0084$$

এখানে,
পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, R = 6400 km $= 6{\cdot}4 \times 10^6$ m
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9{\cdot}8 \text{ ms}^{-2}$
পাহাড়ের উচ্চতা, $h = ?$

$$\therefore h = 0{\cdot}0084 \times R = 0{\cdot}0084 \times 6{\cdot}4 \times 10^6 = 53760 \text{ m} = 53{\cdot}76 \text{ km}$$

১৩। কল্পনা কর যে, পৃথিবীর ব্যাস বরাবর একটি সুড়ঙ্গ খনন করা হলো। একটি বস্তুকে সুড়ঙ্গের এক প্রান্ত থেকে ছেড়ে দেওয়া হলো এবং বস্তুটি সরল ছন্দিত স্পন্দনে স্পন্দিত হতে লাগলো। পৃথিবীকে একটি সুষম গোলক মনে করে এবং বাধাদানকারী সকল বল উপেক্ষা করে পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে 5×10^5 m দূরত্বে বস্তুটির ত্বরণ ও দোলনের পর্যায়কাল নির্ণয় কর। $R = 6.4 \times 10^6$ m, $g = 9.8$ m/s^2 [BUET Admission Test, 2016-17]



আমরা জানি,

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

r বিন্দুতে অভিকর্ষজ ত্বরণ $g_r = \frac{GM(r)}{r^2}$

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \text{ কিন্তু } \rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$g_r = \frac{GMr^3}{r^2R^3} = \frac{g \cdot r}{R}$$

$$= 9.8 \times \frac{5 \times 10^5}{6.4 \times 10^6} = 0.766 \text{ ms}^{-2}$$

আবার, $F = -Kr = -m \times g\frac{r}{R}$ বা, $\frac{m}{K} = \frac{R}{g}$

এবং $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

এবং $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{6.4 \times 10^6}{9.8}}$$

$$= 5075 \text{ sec} = 84.58 \text{ min}$$

১৪। একটি স্থির লিফ্‌টে কোনো সরল দোলকের দোলনকাল T, লিফ্‌টটি $\frac{g}{5}$ ত্বরণে নিচে নামলে দোলনকাল কত হবে ?

আমরা জানি,

$$T \propto \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

এবং $T' \propto \sqrt{\frac{L}{g - \frac{g}{5}}} = \sqrt{\frac{5L}{4g}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$

$$\therefore \frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{5L}{4g} \times \frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$\therefore T' = \frac{\sqrt{5}}{2} \times T$$

৮.৯ সরল দোলন গতির ক্ষেত্রে শক্তি

Energy in simple harmonic motion

গতিশক্তি, E_k

সরল দোলন গতিসম্পন্ন কোনো কণার বিস্তার A, কৌণিক কম্পাঙ্ক ω এবং দশা ধ্রুবক δ হলে এবং t সময়ে কণাটির সরণ x হলে সরল দোলন গতির সমীকরণ

$$x = A \sin(\omega t + \delta)$$

একটি সরল দোলক সরল দোলন গতিতে দোলায়মান থাকলে এরূপ গতির জন্য কিছু পরিমাণ গতিশক্তি লাভ করে। তাছাড়া সরল দোলকের ববের ওপর একটি প্রত্যায়ক বল সব সময় এর সরণের বিপরীতে ক্রিয়া করে। ফলে কণার সরণের সময় কাজ করা হয়। এজন্য কণাটির কিছু পরিমাণ স্থিতিশক্তিও থাকে। ঘর্ষণ বা অনুরূপ কোনো অপচয়ী বল ক্রিয়া না করলে সরল দোলকের মোট যান্ত্রিক শক্তি স্থির থাকে।

মনে করি, ববের ভর m এবং যেকোনো মুহূর্তে এর সরণ ও বেগ যথাক্রমে x ও v। সুতরাং ঐ মুহূর্তে ববের তথা সরল দোলকের গতিশক্তি

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

যেহেতু $x = A\sin(\omega t + \delta)$

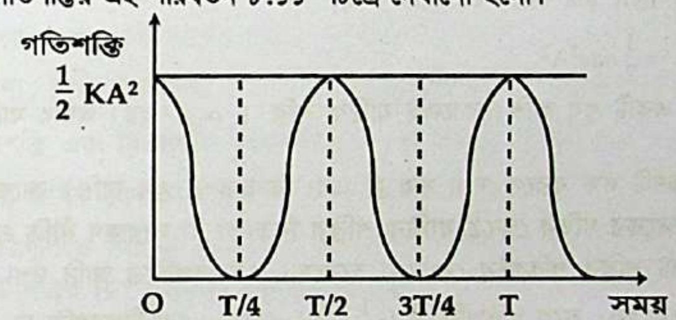
$$\therefore \quad v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\{A\sin(\omega t + \delta)\}$$
$$= A\omega\cos(\omega t + \delta)$$
$$\therefore \quad E_k = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \delta)$$
$$= \frac{1}{2}mA^2\omega^2[1 - \sin^2(\omega t + \delta)]$$
$$= \frac{1}{2}m\omega^2[A^2 - A^2\sin^2(\omega t + \delta)]$$
$$= \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.23)$$

আবার $\omega^2 = \frac{K}{m}$

$$\therefore \quad E_k = \frac{1}{2}mA^2\frac{K}{m}\cos^2(\omega t + \delta)$$
$$\therefore \quad \text{গতিশক্তি}, K_E = \frac{1}{2}KA^2\cos^2(\omega t + \delta) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.24)$$

সমীকরণ (8.24) থেকে দেখা যায় যে, যেহেতু $\cos^2(\omega t + \delta)$ এর সর্বোচ্চ মান 1, কাজেই সর্বোচ্চ গতিশক্তি $\frac{1}{2}KA^2$। এখানে K = ধ্রুবক, কাজেই $E_k \propto A^2$। গতিকালে কণাটির গতিশক্তি শূন্য থেকে এই সর্বোচ্চ মানে পরিবর্তিত হতে পারে।

∴ $\delta = 0$ ধরে গতিশক্তির এই পরিবর্তন ৮.১১ চিত্রে দেখানো হলো।



চিত্র ৮.১১

বিভবশক্তি, E_p

সমাকলন পদ্ধতিতে এবার আমরা সরল দোলকের গতির জন্য স্থিতিশক্তি নির্ণয় করব। সরণ x হলে ববের ওপর ক্রিয়ারত বল $m\omega^2 x$। এখন কণার সরণ আরও dx পরিমাণ বাড়লে, এই অতি ক্ষুদ্র দূরত্ব dx এর মধ্যে ক্রিয়ারত বল স্থির থাকে বলে ধরা হয়। এই অতিরিক্ত সরণের জন্য ববের ওপর কৃত কাজ $m\omega^2 x dx$। সুতরাং x সরণের জন্য কৃত কাজ অর্থাৎ বিচ্যুত অবস্থানে স্থিতিশক্তি,

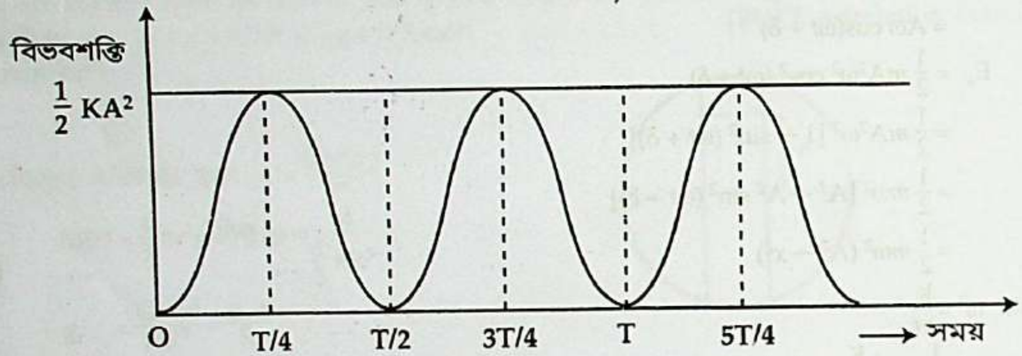
$$E_p = \int_0^x m\omega^2 x dx = m\omega^2\int_0^x x dx$$
$$= \frac{m\omega^2}{2}[x^2]_0^x = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 - 0)$$

∵ $F = -Kx = -\omega^2 mx$
$\omega = Fdx = m\omega^2 xdx$
(−ve চিহ্ন পরিহার করে)

$$\therefore \quad E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.25)$$
$$\therefore \quad E_p = \frac{1}{2}m\frac{K}{m}A^2\sin^2(\omega t + \delta)$$
$$= \frac{1}{2}KA^2\sin^2(\omega t + \delta) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.26)$$

এই সমীকরণ থেকে দেখা যায় যে, যেহেতু $\sin^2(\omega t + \delta)$ এর সর্বোচ্চ মান 1, সুতরাং বিভবশক্তির সর্বোচ্চ মান $\frac{1}{2}KA^2$। এখানে K = ধ্রুবক, কাজেই $E_k \propto A^2$। সুতরাং বিভবশক্তি বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক। গতিকালে কণাটির

বিভবশক্তি শূন্য থেকে এই সর্বোচ্চ মানের মধ্যে পরিবর্তিত হয়। কাজেই (8.26) সমীকরণে $\delta = 0$ ধরে বিভবশক্তির পরিবর্তন ৮.১২ চিত্রে দেখানো হলো।



চিত্র ৮.১২

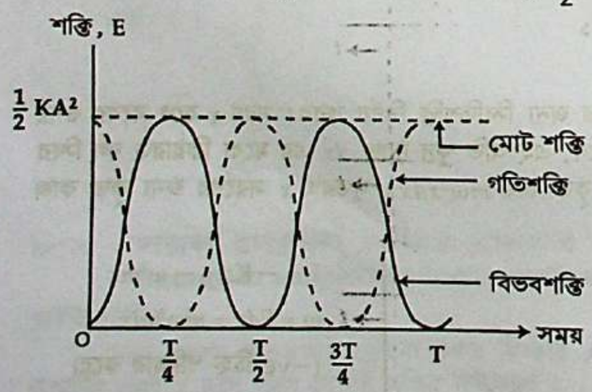
৮.১০ মোট যান্ত্রিক শক্তি, E এবং শক্তির সংরক্ষণশীলতা

এখন মোট যান্ত্রিক শক্তি, E নির্ণয় করতে হলে স্থিতিশক্তি ও গতিশক্তি যোগ করতে হয়। অর্থাৎ

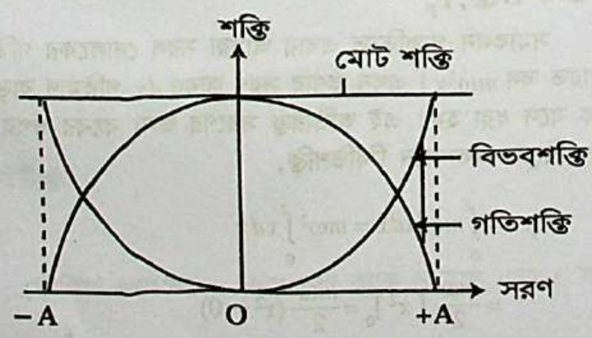
$$E = E_p + E_k$$
$$= \frac{1}{2}KA^2 \sin^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2}KA^2\cos^2(\omega t + \delta)$$
$$= \frac{1}{2}KA^2[\sin^2(\omega t + \delta) + \cos^2(\omega t + \delta)]$$
$$\therefore \quad E = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.27)$$

এই সমীকরণে K একটি ধ্রুব রাশি। কাজেই যান্ত্রিক শক্তি $E \propto A^2$ হয়। অর্থাৎ যান্ত্রিক শক্তি বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক।

আবার, এই সমীকরণটি লক্ষ করলে দেখা যায় K এবং বিস্তার A ধ্রুব রাশি। কাজেই মোট যান্ত্রিক শক্তি একটি ধ্রুব রাশি। অর্থাৎ সরল দোলকের গতির ক্ষেত্রে যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা বা সংরক্ষণ নীতি প্রযোজ্য হয়। চিত্র ৮.১৩(ক) অনুযায়ী সময়ের সাথে মোট শক্তির পরিবর্তন দেখানো হয়েছে। এই লেখচিত্রে আদি দশা $\delta = 0$ ধরা হয়েছে। তাই গতিকাল সাম্যাবস্থা হতে শুরু হয়। ফলে গতিশক্তি $E_k = \frac{1}{2}KA^2\cos^2\omega t$ এবং বিভবশক্তি $E_p = \frac{1}{2}KA^2\sin^2\omega t$ হয়।



চিত্র ৮.১৩(ক)



চিত্র ৮.১৩(খ)

t এর বিভিন্ন মানের জন্য মোট যান্ত্রিক শক্তি বা যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা প্রমাণ করা যায়।

(ক) $t = 0$ সময়ে অর্থাৎ পর্যায়কালের শুরুতে,

গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2}KA^2\cos^2(\omega \times 0) = \frac{1}{2}KA^2$

বিভবশক্তি, $E_p = \frac{1}{2}KA^2\sin^2(\omega \times 0) = 0$

$\therefore$ মোট যান্ত্রিক শক্তি $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}KA^2 + 0 = \frac{1}{2}KA^2$

(খ) $t = \frac{T}{4}$ সময়ে,

গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2}KA^2\cos^2\left(\omega \times \frac{T}{4}\right) = \frac{1}{2}KA^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{4}\right) = \frac{1}{2}KA^2\cos^2\frac{\pi}{2} = 0$

বিভবশক্তি, $E_p = \frac{1}{2}KA^2\sin^2\left(\omega \times \frac{T}{4}\right) = \frac{1}{2}KA^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{4}\right) = \frac{1}{2}KA^2$

$\therefore$ মোট যান্ত্রিক শক্তি, $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}KA^2$

(গ) $t = \frac{T}{2}$ সময়ে,

গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2}KA^2\cos^2\left(\omega \times \frac{T}{2}\right) = \frac{1}{2}KA^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{2}\right) = \frac{1}{2}KA^2\cos^2\pi = \frac{1}{2}KA^2$

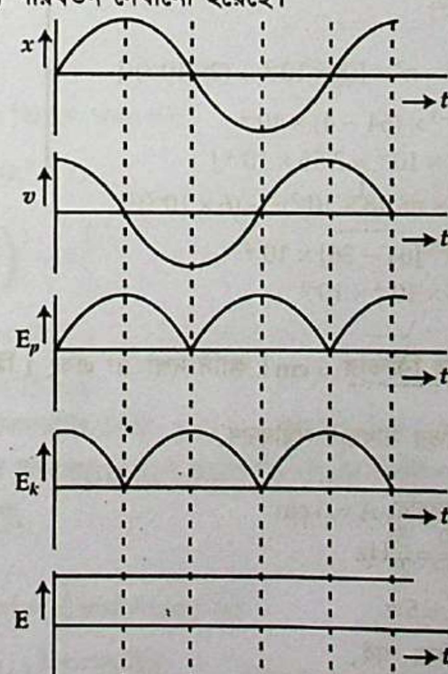
বিভবশক্তি, $E_p = \frac{1}{2}KA^2\sin^2\left(\omega \times \frac{T}{2}\right) = \frac{1}{2}KA^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{2}\right) = \frac{1}{2}KA^2\sin^2\pi = 0$

$\therefore$ মোট যান্ত্রিক শক্তি $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}KA^2 + 0 = \frac{1}{2}KA^2$

এভাবে, $t = \frac{3T}{4}$, $t = T$ সময়ে গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি নির্ণয় করে দেখানো যায় যে, মোট যান্ত্রিক শক্তি সর্বদা ধ্রুব থাকে।

৮.১৩(খ) চিত্রে সরণের সাথে মোট যান্ত্রিক শক্তির পরিবর্তন দেখানো হয়েছে। সর্বোচ্চ সরণের ক্ষেত্রে অর্থাৎ বিস্তারের প্রান্তে গতিশক্তি শূন্য, কিন্তু বিভবশক্তি $\frac{1}{2}KA^2$। সাম্যাবস্থায় বিভবশক্তি শূন্য কিন্তু গতিশক্তি $\frac{1}{2}KA^2$। অন্য সকল অবস্থানে কণাটির গতিশক্তি এবং বিভবশক্তি উভয়ই থাকে এবং তাদের সমষ্টি হলো $\frac{1}{2}KA^2$। আবার সাম্যাবস্থান থেকে সরণ যেখানে বিস্তারের অর্ধেক সেখানে গতিশক্তি ও বিভবশক্তি সমান।

চিত্র ৮.১৪-এর লেখচিত্রগুলিতে সময়ের (t) সাথে সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন কণার সরণ (x), বেগ (v), স্থিতিশক্তি (E_p), গতিশক্তি (E_k) এবং মোট শক্তির (E) পরিবর্তন দেখানো হয়েছে।



চিত্র ৮.১৪ : সময় বনাম সরল ছন্দিত স্পন্দনসম্পন্ন কণার সরণ, বেগ, স্থিতিশক্তি, গতিশক্তি এবং মোট শক্তির লেখচিত্র।

গাণিতিক উদাহরণ ৮.৪

১। একটি সরল দোলগতির (i) কোন অবস্থানে গতিশক্তির মান সর্বোচ্চ গতিশক্তির অর্ধেক হবে ? (ii) সরণ যখন বিস্তারের অর্ধেক তখন শক্তি কত ?

(i) আমরা জানি, একটি সরল দোলগতির গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2} m\omega^2(A^2 - x^2)$ এবং সর্বোচ্চ গতিশক্তি $= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$.

ধরি, সাম্যাবস্থান থেকে x দূরত্বে গতিশক্তি সর্বোচ্চ গতিশক্তির অর্ধেক।

এখন, প্রশ্নানুসারে,

$$\frac{\frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2)}{\frac{1}{2} m\omega^2 A^2} = \frac{1}{2}$$

বা, $A^2 = 2A^2 - 2x^2$

বা, $2x^2 = A^2$

$\therefore \quad x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}}$

(ii) আমরা জানি মোট শক্তি, $E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$

যখন $x = \frac{A}{2}$, তখন

$$E_k = \frac{1}{2} m\omega^2(A^2 - x^2) = \frac{1}{2} m\omega^2 \left\{A^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 \left(A^2 - \frac{A^2}{4}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} mA^2\omega^2$$

$$= \frac{3}{4} \cdot E_{k(max)} \qquad \left[\because \text{সর্বোচ্চ গতিশক্তি} = \frac{1}{2} mA^2\omega^2 = \text{মোট শক্তি} = E\right]$$

$$= \frac{3}{4} E$$

২। একটি 12 g ভরের কণা সরলরেখা বরাবর সরল দোলগতিতে দুলছে। এর পর্যায়কাল 2 s এবং বিস্তার 8 cm। কণাটি যখন সাম্যাবস্থান থেকে (i) 2 cm এবং (ii) 6 cm দূরে তখন এর গতিশক্তি নির্ণয় কর।

এখানে,
ভর, $m_1 = 12\ g = 12 \times 10^{-3}$ kg
পর্যায়কাল, $T = 2$ s
$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$
$x_1 = 2\ cm = 2 \times 10^{-2}$ m
$x_2 = 6\ cm = 6 \times 10^{-2}$ m

আমরা জানি,

(i) $E_k = \frac{1}{2} m\omega^2(A^2 - x^2)$

$= \frac{1}{2} \times 12 \times 10^{-3} \times \pi^2 \times [(8 \times 10^{-2} - (2\times 10^{-2})^2]$

$= 6 \times 9{\cdot}87 \times 10^{-3} \times (64 - 4) \times 10^{-4}$

$= 6 \times 9{\cdot}87 \times 60 \times 10^{-7} = 3{\cdot}55 \times 10^{-4}$ J

(ii) $E_k = \frac{1}{2} \times 12 \times 10^{-3} \times \pi^2 [(8 \times 10^{-2})^2 - (6 \times 10^{-2})^2]$

$= 6 \times 9{\cdot}87 \times 10^{-3} [64 - 36] \times 10^{-4}$

$= 6 \times 9{\cdot}87 \times 28 \times 10^{-4} \times 10^{-3}$

$= 1{\cdot}66 \times 10^{-4}$ J

৩। একটি সরল দোলন গতির বিস্তার 6 cm। আদি দশা 0° এবং 1 মিনিটে 150 বার কম্পন হয়। ওই সরল দোল গতির সমীকরণ লেখ।

আমরা জানি, সরল দোল গতির সাধারণ সমীকরণ,

$x = A \sin (wt + \delta)$ ... ... (i)

এখানে আদি দশা, $\delta = 0$, বিস্তার, $A = 6$ cm

$\therefore$ কম্পাঙ্ক, $n = \frac{1}{T} = \frac{150}{60} = \frac{5}{2}$ Hz

অতএব, $\omega t = 2\pi n = 2\pi \times \frac{5}{2} = 5\pi$

সমীকরণ (i)-এ মানগুলি বসিয়ে পাই,

$x = 6 \sin (5\pi t + 0°) = 6 \sin 5\pi t$

উল্লেখ্য, সমীকরণটিকে $x = 6 \cos 5\pi t$ রূপেও লেখা যায়।

৪। একটি গতিশীল কণার সরণের সমীকরণ $y = 4\sin\omega t + 3\cos\omega t$। দেখাও যে কণার গতি সরল দোলগতি।

$$y = 4\sin\omega t + 3\cos\omega t = 5\sin(\omega t + \theta)$$

এখানে, $\sin\theta = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = \frac{4}{5}$ এবং $\tan\theta = \frac{3}{4}$

$\therefore$ কণার বেগ, $v = \frac{dy}{dt} = 5\omega\cos(\omega t + \theta)$

এবং ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt} = -5\omega^2\sin(\omega t + \theta) = -\omega^2 y$

অতএব, কণার ত্বরণ সরণের সমানুপতিক এবং সাম্যাবস্থানের দিকে ক্রিয়া করে। সুতরাং কণার গতি সরল দোলগতি।

৫। একটি দোলক ঘড়ি প্রতিদিন 3 মিনিট স্লো (slow) যায়। সঠিক সময় পেতে হলে দোলকটির দৈর্ঘ্যের কী পরিবর্তন করতে হবে ? (ধরে নাও, দোলকটি একটি সরল দোলক, $g = 9.80\ ms^{-2}$)

আমরা জানি, একটি সরল দোলকের দোলনকাল,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$\therefore$ সরল দোলকের অর্ধ দোলনকাল, $t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

একটি ত্রুটিহীন সেকেন্ড দোলকের ক্ষেত্রে, $t = 1\ s$

$$\therefore \quad 1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

বা, $l = \frac{g}{\pi^2}$ ... ... (i)

আবার, 1 দিন (d) $= 1 \times 24 \times 60 \times 60\ s = 86400\ s$

দোলক ঘড়িটি দিনে 3 min অর্থাৎ $3 \times 60 = 180\ s$ স্লো যায়

1 d-এ ঘড়িটির অর্ধ দোলনের সংখ্যা $= 86400 - 180 = 86220$

$\therefore$ এর অর্ধ দোলনকাল, $t_1 = \frac{86400}{86220}\ s$

এই সরল দোলকটির দৈর্ঘ্য, l_1 হলে,

$$t_1 = \pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}$$

বা, $l_1 = \frac{g{t_1}^2}{\pi^2}$ ... ... (ii)

সমীকরণ (ii) থেকে সমীকরণ (i) বিয়োগ করে পাই,

$$l_1 - l = \frac{g{t_1}^2}{\pi^2} - \frac{g}{\pi^2} = \frac{g}{\pi^2}({t_1}^2 - 1)$$

$$= \frac{9.80}{9.87}\left[\left(\frac{86400}{86220}\right)^2 - 1\right]$$

$$= \frac{9.80}{9.87} \times 4.1799 \times 10^{-3}$$

$$= 4.15 \times 10^{-3}\ m = 4.15\ mm$$

সুতরাং, সঠিক সময় পেতে হলে দোলকটির দৈর্ঘ্য 4.15 mm কমাতে হবে।

৬। একটি সরল গতিসম্পন্ন কণার কম্পাঙ্ক ω হলে প্রমাণ কর যে এর স্থিতিশক্তি পরিবর্তনের কম্পাঙ্ক 2ω।

আমরা জানি, দোলগতির সমীকরণ,

$$x = A\cos\omega t$$

এবং স্থিতিশক্তি, $E_p = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2\omega t$

এখানে,
ω = কম্পাঙ্ক
A = বিস্তার

$$= \frac{1}{2}m\omega^2A^2\frac{1 + \cos 2\omega t}{2} = \frac{1}{4}m\omega^2A^2(1 + \cos 2\omega t)$$

সুতরাং, স্থিতিশক্তি পরিবর্তনের কম্পাঙ্ক $= 2\omega$ (প্রমাণিত)

৭। সাম্যাবস্থান থেকে একটি সরল দোলগতিসম্পন্ন বস্তুকণার কী পরিমাণ সরণ হলে এর বেগ সর্বোচ্চ বেগের অর্ধেক হবে ?

আমরা জানি, বস্তুকণার সরণ x হলে কণার বেগ, $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

এবং বস্তুকণার সর্বোচ্চ বেগ, $v = \omega A$

প্রশ্নানুসারে,

$$\frac{1}{2}\omega A = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

বা, $\frac{A}{2} = \sqrt{A^2 - x^2}$ বা, $\frac{A^2}{4} = A^2 - x^2$

বা, $x^2 = A^2 - \frac{A^2}{4} = \frac{3}{4}A^2$

$\therefore\quad x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}A = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}A$

এটিই নির্ণেয় সরণ।

দোলক ঘড়ি দ্রুত (Fast) বা ধীরে (slow) যাওয়া

দোলক ঘড়ি এক ধরনের সরল দোলক যার দোলনকাল 2 সেকেন্ড এবং অর্ধ দোলনকাল 1 সেকেন্ড। অর্থাৎ এটি একটি সেকেন্ড দালক।

একটি দোলক ঘড়ি এর দোলনকাল দ্বারা সময় নির্দেশ করে। দোলনকালের সমীকরণ, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$। এখানে l দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য এবং g অভিকর্ষজ ত্বরণ। ওই সমীকরণ থেকে দেখা যায় যে (ক) l-এর পরিবর্তন হলে বা (খ) g-এর মান পরিবর্তিত হলে সেকেন্ড দোলকের দোলনকাল, $T = 2$ s না হয়ে কম বা বেশি হয়। দোলনকাল বেশি হওয়ার অর্থ হলো যে দোলকটি ধীর গতিতে দোলে। অর্থাৎ ঘড়ি স্লো বা ধীরে যায়। আবার, দোলনকাল কমে গেলে ঘড়ি ফাস্ট বা দ্রুত হয়।

সরল দোলগতিসম্পন্ন কোনো বস্তুকণার সরণের সঙ্গে স্থিতিশক্তি ও গতিশক্তি কীভাবে পরিবর্তিত হয় তা নিচের সারণি দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

সরণ	$+A$	$+\frac{A}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{A}{\sqrt{2}}$	$-A$
গতিশক্তি, E_k	0	$\frac{1}{4}m\omega^2A^2$	$\frac{1}{2}m\omega^2A^2$	$\frac{1}{4}m\omega^2A^2$	0
স্থিতিশক্তি, E_p	$\frac{1}{2}m\omega^2A^2$	$\frac{1}{4}m\omega^2A^2$	0	$\frac{1}{4}m\omega^2A^2$	$\frac{1}{2}m\omega^2A^2$

গাণিতিক উদাহরণ ৮.৫

১। সরল দোলগতিসম্পন্ন একটি কণার মোটশক্তি 3×10^{-7} Joule। তার ওপর সর্বাধিক যে বল ক্রিয়া করে তার মান 1.5×10^{-5} N। দোলগতির পর্যায়কাল 2 s এবং আদি দশা 60° হলে ওই সরল গতির সমীকরণ বের কর।

আমরা জানি, দোলকের মোট শক্তি,

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = 3 \times 10^{-7}\text{ J} \quad \dots \dots \quad \text{(i)}$$

এর ওপর ক্রিয়ারত সর্বোচ্চ বল,

$$F_{max} = m\omega^2A = 1.5 \times 10^{-5}\text{ N} \quad \dots \dots \quad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i)-কে সমীকরণ (ii) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$A = 4 \times 10^{-2}$ m $= 0.04$ m

এখানে,
$E = 3 \times 10^{-7}$ J
$F_{max} = 1.5 \times 10^{-5}$ N
$T = 2$ s
$\theta = 60° = \frac{\pi}{3}$

পর্যায়কাল $= 2$ s $\therefore$ কৌণিক কম্পাঙ্ক, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ rad s^{-1}

আদি দশা, $\theta = 60° = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ কণাটির সরল দোলগতির সমীকরণ $x = 0.04\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$m

অনুসন্ধানমূলক কাজ : সাম্যাবস্থান হতে একটি সরল দোলগতিসম্পন্ন বস্তুর কী পরিমাণ সরণ হলে এর গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি সমান হবে?

আমরা জানি, সরল দোলগতিসম্পন্ন বস্তুর গতিশক্তি $= \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2)$

এবং স্থিতিশক্তি $= \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

বা, $\frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = m\omega^2 x^2$

বা, $A^2 = 2x^2$ বা, $x^2 = \frac{A^2}{4}$

$\therefore$ $x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}}$, এটিই নির্ণেয় সরণ।

জানার বিষয় :

I. সরল দোলন গতিসম্পন্ন বস্তুর বিভব শক্তি সাম্যাবস্থায় শূন্য এবং গতিশক্তি সর্বাধিক, $E_k = \frac{1}{2} KA^2$

II. সর্বাধিক উচ্চতায় গতিশক্তি শূন্য এবং বিভব শক্তি সর্বাধিক, $E_p = mgh$.

গাণিতিক উদাহরণ ৮.৬

১। 10 g ভরের একটি বস্তুকণা সরলরেখা বরাবর সরল দোলন গতি অর্জন করে। এর দোলনকাল 2 sec এবং বিস্তার 10 cm হলে (i) সাম্যাবস্থান থেকে 2 cm দূরে এর গতিশক্তি কত ? (ii) সাম্যাবস্থান থেকে 5 cm দূরে গতিশক্তি নির্ণয় কর।

(i) মনে করি সরল দোলন গতির সমীকরণ

$x = A \sin \omega t$

$\therefore$ বেগ, $v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t$

$\therefore$ গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} mA^2\omega^2 (1 - \sin^2 \omega t)$

$$= \frac{1}{2} mA^2\omega^2 \left[1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2\right] = \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2)$$

যখন $x = 0.02$ m, $m = 0.01$ kg $A = 10$ cm $= 0.1$ m

$T = 2$ sec, $\omega = \frac{2\pi}{T}$

তখন $E_k = \frac{1}{2} \times 0.01 \times \frac{4\pi^2}{4} \{(0.1)^2 - (0.02)^2\}$

$= 0.005\, \pi^2 \times 0.0096 = 4.737 \times 10^{-4}$ J

(ii) যখন $x = 5$ cm, $E_k = 0.005\, \pi^2 \times 0.0075 = 3.701 \times 10^{-4}$ J

২। একটি স্প্রিংয়ের অগ্রভাগে 0.03 kg ভর ঝুলানো হলে স্প্রিংটি 0.1 m লম্বা হয়। স্প্রিংটিকে এই সাম্যাবস্থা হতে আরো 8×10^{-2}m লম্বা করে ছেড়ে দেওয়া হলো। মোট শক্তি কত এবং বেগ কত হবে ?

আমরা জানি,

$F = kx$

বা, $k = \frac{F}{x} = \frac{mg}{x} = \frac{0.03 \text{ kg} \times 9.8 \text{ ms}^{-2}}{0.10 \text{ m}}$

$= 29.4$ Nm^{-1}

এখানে,

$m = 0.03$ kg

$g = 9.8$ ms^{-2}

$x = 0.10$ m

$A = 8 \times 10^{-2}$m $= 0.08$ m

মোট শক্তি, $E = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} \times 29.4 \text{ Nm}^{-1} \times (0.08 \text{ m})^2$

$= 9.41 \times 10^{-2}$ J

আবার, $v_{max} = A \sqrt{\frac{k}{m}} = 0.08 \text{ m} \sqrt{\frac{29.4 \text{ Nm}^{-1}}{0.30 \text{ kg}}} = 0.7920 \text{ ms}^{-1}$

৩। একটি সরল দোলগতিসম্পন্ন কণার বিস্তার 10 cm। সাম্যাবস্থান থেকে কণাটির সরণ কত হলে তার গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি সমান হবে?

এখানে বিস্তার $A = 10$ cm

মনে করি কণাটির সরণ x হলে তার গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি সমান হয়।

আমরা জানি,

সরল দোলগতিসম্পন্ন কণার গতিশক্তি $= \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2)$

এবং স্থিতিশক্তি $= \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

বা, $A^2 - x^2 = x^2$ বা, $2x^2 = A^2$

বা, $x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}}$

এখন, $A = 10$ cm

$\therefore \quad x = \pm \frac{10}{\sqrt{2}} = 7{\cdot}07$ cm

সুতরাং, কণাটির সরণ x হলে গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি সমান হয়।

৪। $t = 0$ সময়ে কোনো একটি সরল দোলগতিসম্পন্ন কণার সরণ সর্বোচ্চ হলে কণাটির সমীকরণ বের কর।

সরল দোলগতির সাধারণ সমীকরণ,

$$x = A \sin (\omega t + \alpha)$$

এখন সর্বোচ্চ সরণ অর্থ সরণের মান বিস্তার A-এর সমান।

সুতরাং, $A = A \sin (\omega \times 0 + \alpha) = A \sin \alpha$

বা, $\sin \alpha = 1 = \sin \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$

কাজেই, সরল দোলগতির সমীকরণ,

$$x = A \sin (\omega t + \frac{\pi}{2}) = A \cos \omega t$$

৫। একটি সরল দোলকের ববের ভর 100 g এবং কার্যকর দৈর্ঘ্য 1 মিটার। উল্লম্ব রেখা হতে ববটিকে 10 cm দূরে টেনে ছেড়ে দিলে গতিপথের সর্বনিম্ন বিন্দু অতিক্রমকালে ববের বেগ কত হবে?

আমরা জানি,

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgh = mg (L - \sqrt{L - x^2})$$

বা, $\frac{1}{2} v^2 = g (1 - \sqrt{1 - (0{\cdot}1)^2})$

$\therefore \quad v^2 = 2 \times 9{\cdot}8 (1 - \sqrt{1 - (0{\cdot}1)^2}) = 0{\cdot}098$

$\therefore \quad v = 0{\cdot}31$ ms^{-1}

এখানে,

$L = 1$ m

$x = 10$ cm $= 0{\cdot}1$ m

$g = 9{\cdot}8$ ms^{-2}

$v = ?$

নিজে কর : ১। গতিপথের মধ্য অবস্থানে অর্থাৎ $x = 0$ অবস্থানে মোট শক্তি নির্ণয় করে শক্তির নিত্যতা যাচাই কর।
২। গতিপথের কোন অবস্থানে গতিশক্তি শূন্য হবে ?

১। $x = 0$ অবস্থানে স্থিতিশক্তি $= 0$

$\therefore$ মোট যান্ত্রিক শক্তি = স্থিতিশক্তি + গতিশক্তি

বা, $E = 0 + \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \quad \therefore \; E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$

২। আবার গতিপথের সর্বোচ্চ অবস্থানে অর্থাৎ $x = A$ অবস্থানে শক্তির নিত্যতা যাচাই কর। সর্বোচ্চ অবস্থানে অর্থাৎ $x = A$ অবস্থানে গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - A^2) = 0$

$\therefore$ মোট যান্ত্রিক শক্তি,

E = স্থিতিশক্তি + গতিশক্তি

$= \frac{1}{2}m\omega^2A^2 + 0$

$\therefore \quad E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$

সুতরাং উপরোক্ত দুই অবস্থানে মোট শক্তি একই থাকে। অর্থাৎ মোট শক্তি তার সরণের ওপর নির্ভর করে না, গতিপথের সর্বত্র তার মান স্থির থাকে। এটা **শক্তির নিত্যতার সূত্র বা মোট শক্তির সংরক্ষণশীলতার সূত্র।**

৮·১১ সরল দোলন গতি এবং বৃত্তাকার গতির মধ্যে সম্পর্ক
Relation between simple harmonic motion and circular motion

বৃত্তাকার গতি এক ধরনের সরল দোলন গতি। অর্থাৎ বৃত্তাকার গতি সরল দোলন গতির বৈশিষ্ট্যগুলি মেনে চলে। এখন সরল দোলন গতি এবং বৃত্তাকার গতির মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করতে গিয়ে চিত্র ৮·১৫ লক্ষ কর।

মনে করি একটি বস্তুকণা A বিন্দু হতে যাত্রা শুরু করে ABCD বৃত্তাকার পথে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে সমকৌণিক বেগ ω-এ ঘুরছে [চিত্র ৮·১৫(ক)]। ধরি O বৃত্তের কেন্দ্র এবং A বৃত্তের ব্যাসার্ধ। মনে করি t সময় পর বস্তুকণাটি P অবস্থানে আসল। এখন P বিন্দু হতে বৃত্তের BOD ব্যাসের উপর PN লম্ব অঙ্কন করি। N হবে লম্বটির পাদবিন্দু।

মনে করি $ON = y$। চিত্রে OPN ত্রিভুজ থেকে পাওয়া যায়,

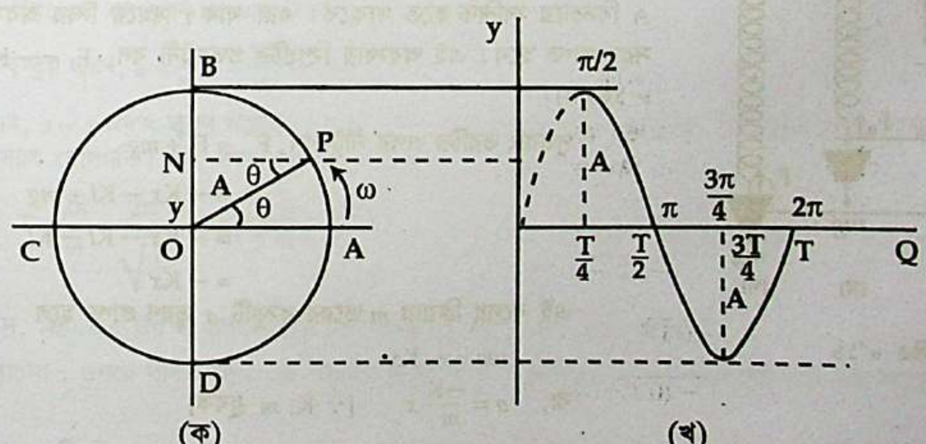
$y = OP \sin\theta = A \sin\theta$

যেহেতু কণাটি সমকৌণিক বেগে ঘুরছে, সুতরাং $\angle POA = \theta = \omega t$ ... ... (8.28)

θ-কে কণাটির দশা কোণ (phase angle) বা সংক্ষেপে দশা বলে।

এখন $y = A \sin\theta = A \sin\omega t$ ... ... (8.29)

P কণাটি যখন বৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকে তখন ব্যাস BOD-এর উপর কণার পাদবিন্দু N ব্যাস BOD বরাবর স্পন্দিত হতে থাকে।



চিত্র ৮·১৫

সুতরাং কণাটির বেগ,

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(A \sin \omega t) = A\,\omega \cos\omega t$$

এবং ত্বরণ, $$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -A\omega^2 \sin\omega t$$

$$= -\omega^2 y \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.30)$$

অর্থাৎ কণাটির ত্বরণ এর সরণের সমানুপাতিক। সুতরাং N বিন্দুর গতি সরল ছন্দিত গতি। O হচ্ছে এই ছন্দিত গতির মধ্যবিন্দু বা সাম্যাবস্থান, B ও D ছন্দিত গতির প্রান্তীয় অবস্থান এবং P উৎপাদনকারী বিন্দু (generating point)। বৃত্তটির নাম নির্দেশক বৃত্ত (reference circle) এবং কণাটির নাম নির্দেশক কণা (reference particle) [চিত্র ৮·১৫(ক)]। লক্ষ করলে দেখা যাবে যে কণাটি বৃত্তাকার পথে যখন ABCDA পথে একবার ঘুরে আসে সেই সময় পাদবিন্দুটি OBODO ব্যাস বরাবর যাত্রা বিন্দু বা আদি বিন্দু থেকে শুরু করে একবার পথ অতিক্রম শেষ করে আদি বিন্দুতে ফিরে আসে। কণাটির বৃত্তাকার পথে একবার ঘুরতে যে সময় লাগে তাই দোলন বা পর্যায়কাল T। ওই সময় একই পাদবিন্দুও একবার পথ পরিক্রমা শেষ করে। সুতরাং

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad [\because \theta = \omega t \text{ এবং যখন } \theta = 2\pi, t = T \text{ সুতরাং } 2\pi = \omega T]$$

উপরের বর্ণনা থেকে দেখা যাচ্ছে যে পাদবিন্দু N-এর গতি—

(ক) পর্যাবৃত্ত গতি

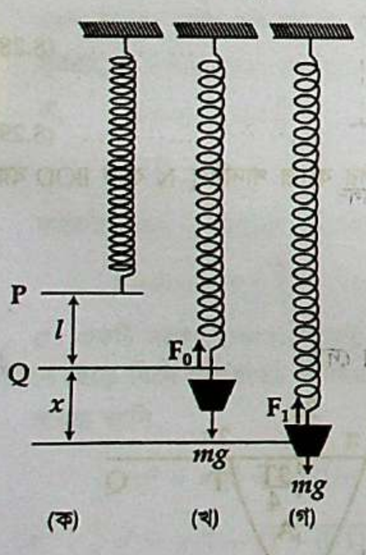
(খ) সরল রৈখিক গতি

(গ) ত্বরণ সরণের সমানুপাতিক এবং বিপরীতমুখি।

সুতরাং পাদবিন্দুর গতি সরল দোলনগতি।

৮·১২ উল্লম্ব স্প্রিং-এর দোলন
Oscillation of a vertical spring

স্প্রিং-এর এক প্রান্ত দৃঢ় অবলম্বনে আটকিয়ে অপর প্রান্তে একটি ভর ঝুলিয়ে সামান্য টেনে ছেড়ে দিলে তা ওপর-নিচে সরল দোলন গতিতে স্পন্দিত হতে থাকে। ৮·১৬ (ক) চিত্রে ভর ঝুলানোর পূর্বে স্প্রিংটির অবস্থা দেখানো হয়েছে। এ অবস্থায় স্প্রিংটির মুক্ত প্রান্ত P অবস্থানে ছিল। স্প্রিংটির মুক্ত প্রান্তে m ভরের একটি বস্তু ঝুলানোর ফলে এর দৈর্ঘ্য l পরিমাণ প্রসারিত হয়ে Q বিন্দুতে এসে স্থির হয় চিত্র ৮·১৬(খ)। এমতাবস্থায় স্প্রিং দ্বারা ঊর্ধ্বমুখি বল F বস্তুর ওজনের সমান হয় এবং বস্তুর ওজন স্প্রিংএর প্রত্যায়নী বল F_0 দ্বারা প্রশমিত হয়।



চিত্র ৮·১৬

সুতরাং $F_0 = -mg$

স্প্রিংটি স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে টানা হলে

$$F_0 = -Kl$$

$$\therefore \quad mg = Kl$$

এখন m ভরটিকে টেনে ছেড়ে দিলে ভরটি Q-কে সাম্যাবস্থানে রেখে A বিস্তারে স্পন্দিত হতে থাকবে। ধরা যাক t সময়ে স্থির অবস্থান হতে x সরণ প্রাপ্ত হবে। এই অবস্থায় স্প্রিংটির প্রত্যায়নী বল, $F_1 = -K(x + l)$ [চিত্র ৮·১৬(গ)]।

সুতরাং ভরটির ওপর নীট বল,
$$\begin{aligned} F &= F_1 + mg \\ &= -Kx - Kl + mg \\ &= -Kx - Kl - Kl \\ &= -Kx \end{aligned}$$

এই বলের ক্রিয়ায় m ভরের বস্তুটি a ত্বরণ প্রাপ্ত হলে

$$ma = -Kx$$

বা, $$a = \frac{-K}{m}x \qquad [\because K, m \text{ ধ্রুবক}]$$

$$\therefore \quad a \propto -x$$

অর্থাৎ ত্বরণ সরণের সমানুপাতিক ও বিপরীতমুখি। এটি সরল ছন্দিত গতির একটি শর্ত। সুতরাং স্প্রিং-এর গতি সরল ছন্দিত গতি।

ঝুলন্ত ভর m এর গতির জন্য নিম্নলিখিত শর্ত সাপেক্ষে সরল দোলকের গতি সরল দোলন গতি হবে—

(১) স্প্রিং এর ভর উপেক্ষণীয় হতে হবে।

(২) স্প্রিংটিকে তার স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে রেখে দোল দিতে হবে।

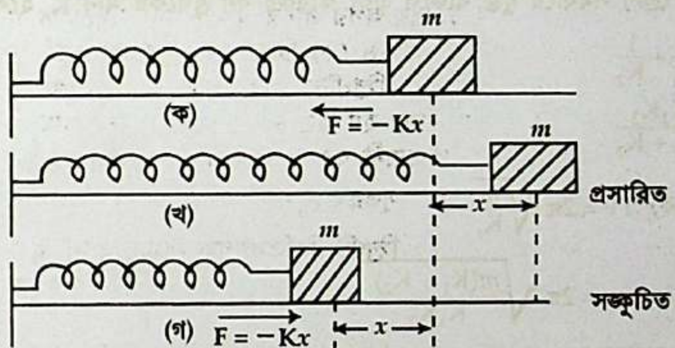
(৩) স্প্রিং এর বিস্তার x_0 কণাটির সাম্যাবস্থায় প্রসারণ e এর চেয়ে কম হতে হবে। অর্থাৎ $x_0 < e$ হতে হবে।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : সকল সরল ছন্দিত গতিই পর্যাবৃত্ত গতি, কিন্তু সকল পর্যাবৃত্ত গতি সরল দোলন গতি নয়—ব্যাখ্যা কর।

সকল সরল ছন্দিত গতি পর্যাবৃত্ত গতির বিশেষ রূপ মাত্র। পর্যাবৃত্তিক গতি (ক) যদি রৈখিক হয়, (খ) কণার ত্বরণ যদি সাম্যাবস্থান অভিমুখী ও (গ) সাম্যাবস্থান থেকে সরণের সমানুপাতিক হয় তাহলেই কেবল তাকে সরল ছন্দিত গতি বলা হয়। ঘড়ির কাঁটার গতি ও গ্রহ–উপগ্রহের গতি পর্যাবৃত্ত গতি, কিন্তু ওপরের শর্ত (ক) ও (খ) পূরণ না করায় ওই ধরনের গতি সরল ছন্দিত গতি নয়। সুতরাং, বলা যায় যে, সকল সরল ছন্দিত গতিই পর্যাবৃত্তিক গতি, কিন্তু সকল পর্যাবৃত্তিক গতি সরল দোলন গতি নয়।

৮·১৩ অনুভূমিক স্প্রিং-এর দোলন
Oscillation of a horizontal spring

ধরা যাক, নগণ্য ভরের একটি স্থিতিস্থাপক স্প্রিং-এর এক প্রান্ত দৃঢ় খাড়া অবলম্বনের সাথে যুক্ত এবং অপর প্রান্তে m ভরের একটি বস্তু যুক্ত করা হয়েছে [চিত্র ৮·১৭(ক)]। এটি একটি মসৃণ অনুভূমিক তলের ওপর রয়েছে। এবার বস্তুটিকে ডানদিকে সরালে স্প্রিংটি প্রসারিত হয় এবং বস্তুর ওপর বামদিকে প্রত্যায়নী বল $\vec{F}$ ক্রিয়াশীল হয় [চিত্র ৮·১৭(খ)] কিন্তু বস্তুটিকে বামদিকে সরালে স্প্রিংটি সংকুচিত হয় এবং বস্তুর ওপর ডানদিকে প্রত্যায়নী বল $\vec{F}$ কাজ করে [চিত্র ৮·১৭(গ)]।



চিত্র ৮·১৭ : অনুভূমিক স্প্রিং-এর সংশ্লিষ্ট দোলন।

এখন স্প্রিং-এর বল ধ্রুবক K এবং বস্তুর সরণ x হলে, $F = -Kx$

এবং বস্তুর ত্বরণ, $a = \frac{F}{m} = -\frac{Kx}{m} = -\omega^2 x$

অতএব, $a \propto x$ অর্থাৎ ত্বরণ সরণের সমানুপাতিক এবং বিপরীতমুখি যা সরল দোলকের শর্ত। সুতরাং স্প্রিং-এ যুক্ত বস্তুর গতি সরল দোলগতি। এই স্পন্দনের দোলনকাল,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{x}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.31)$$

[বি. দ্র. স্প্রিং-এর উল্লম্ব এবং অনুভূমিক স্পন্দনের দোলনকাল সমান হবে।]

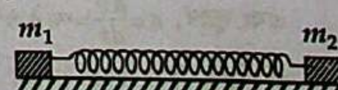
আলোচনা : ওপরে বর্ণিত স্প্রিং-এর উল্লম্ব বা অনুভূমিকভাবে দোলনের ক্ষেত্রে স্প্রিং-এর ভর নগণ্য বিবেচনা করা হয়েছে।

(i) এখন যদি স্প্রিং-এর ভর M এবং স্প্রিং-এর প্রান্তে সংযুক্ত ভর m হয়, তবে স্প্রিং দোলকের দোলনকাল হবে, $T' = 2\pi\sqrt{m + (M/3)}$.

(ii) m_1 ও m_2 ভরের দুটি বস্তুকে K বল ধ্রুবক বা স্প্রিং ধ্রুবকবিশিষ্ট একটি স্প্রিং দ্বারা যুক্ত করে ওদেরকে অনুভূমিক মসৃণ তলে টেনে ছেড়ে দিলে যে দোলন সৃষ্টি হবে তার দোলনকাল হবে,

$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{K_s}}$,

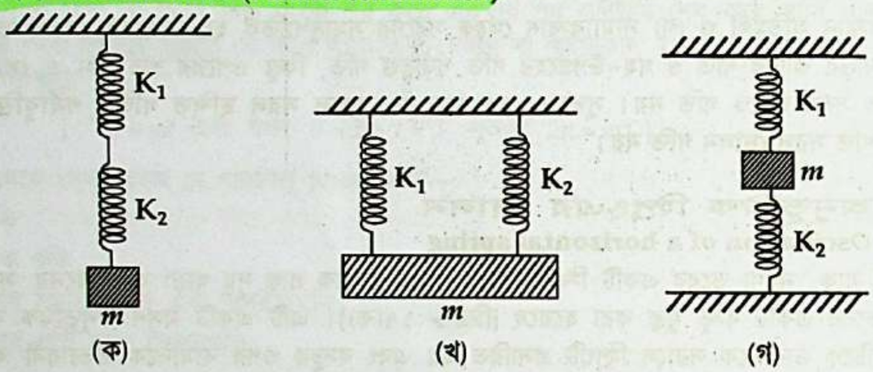
এখানে $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, μ হলো পরিমিত ভর (reduced mass)



চিত্র ৮·১৮

৮.১৩.১ সমন্বিত স্প্রিং-এর দোলন
Oscillation of a composite spring

K_1 ও K_2 বল ধ্রুবকবিশিষ্ট দুটি স্প্রিং-কে দুইভাবে সমন্বয় করণ যায়। যথা—(ক) শ্রেণি সমবায় (Series combination) এবং (খ) সমান্তরাল সমবায় (Parallel combination).



চিত্র ৮.১৯ : (ক) শ্রেণি সমবায়। চিত্র ৮.১৯(খ) ও (গ) : সমান্তরাল সমবায়।

(ক) স্প্রিং দুটি শ্রেণি সমবায়ে যুক্ত থাকলে এবং কার্যকর বল ধ্রুবকের মান K_s হলে,

$$\frac{1}{K_s} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

বা, $$K_s = \frac{K_1K_2}{K_1 + K_2}$$

দোলনকাল হবে, $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_s}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{m(K_1 + K_2)}{K_1K_2}}$$

(খ) স্প্রিং দুটি সমান্তরালে সমবায়ে যুক্ত থাকলে এবং কার্যকর বল ধ্রুবকের মান K_p হলে, (খ) ও (গ) উভয় ক্ষেত্রেই, $K_p = K_1 + K_2$ হবে এবং

এদের দোলনকাল হবে, $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_p}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_1 + K_2}}$$

অনুসন্ধানমূলক কাজ : একটি শিশু দোলনায় দুলছে। ওই অবস্থায় দোলনায় আরও একট শিশু বসলে দোলনার পর্যায়কালের পরিবর্তন হবে কী ? —ব্যাখ্যা কর।

সরল দোলগতিসম্পন্ন দোলনার পর্যায়কাল তার ওজনের ওপর নির্ভর করে না। অতএব, দোলনায় একটি শিশুর জায়গায় দুটি শিশু বসলেও দোলনার পর্যায়কালের কোনো পরিবর্তন হবে না। পর্যায়কাল একই থাকবে।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : সরল দোলগতিযুক্ত কণার সরণ ও ত্বরণ পরস্পর বিপরীত দশায় থাকে। —ব্যাখ্যা কর।

ধরা যাক, সরল দোলগতিসম্পন্ন কণাটির সরণের রাশিমালা,

$$x = A\sin(\omega t + \alpha)$$

$\therefore$ বেগ, $$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \alpha)$$

এবং ত্বরণ, $$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x$$

ঋণাত্মক চিহ্ন দ্বারা বোঝা যায়, ত্বরণ সর্বদা সরণের বিপরীতমুখি অর্থাৎ এরা পরস্পর বিপরীত দশায় থাকে [$\because x = A\sin(\omega t + \alpha)$]।

গাণিতিক উদাহরণ ৮.৭

১। একটি সরল দোলগতিসম্পন্ন কণার পর্যায়কাল 4 s। মধ্য অবস্থান পার হওয়ার কতক্ষণ পরে কণাটির মোট শক্তির অর্ধেক স্থিতিশক্তি ও অর্ধেক গতিশক্তি হবে ?

আমরা জানি,

স্থিতিশক্তি, $E_p = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$

এবং গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2)$

এখানে,

$T = 4$ s

$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ rad s^{-1}

প্রশ্নানুসারে, $\frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2)$

বা, $x^2 = A^2 - x^2$, বা, $2x^2 = A^2$

$\therefore \quad x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}}$

সরল গতির সমীকরণ, $x = A \sin \omega t$ থেকে পাই,

$\pm\frac{A}{\sqrt{2}} = A \sin \omega t$ বা, $\sin \omega t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \quad \omega t = \frac{\pi}{4}$ বা, $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$\therefore \quad t = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi}{4 \times \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$ s $= 0.5$ s

অথবা, $t = \frac{5\pi}{4\omega} = \frac{5\pi}{4 \times \frac{\pi}{2}} = \frac{5}{2}$ s $= 2.50$ s

সুতরাং, 0.5 s বা 2.5 s পরে কণাটির মোট শক্তির অর্ধেক স্থিতিশক্তি এবং অর্ধেক গতিশক্তি হবে।

২। সরল দোল গতিসম্পন্ন একটি কণার গতির সমীকরণ $x = 10 \sin\left(\frac{\pi}{3t} + \frac{\pi}{4}\right)$ m। ওই গতির পর্যায়কাল ও সর্বোচ্চ দ্রুতি নির্ণয় কর।

এখানে, $x = 10 \sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$ m ... ... (i)

আমরা জানি, সরল দোল গতির সাধারণ সমীকরণ,

$x = A \sin(\omega t + \delta)$ ... ... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) তুলনা করে পাই,

বিস্তার, $A = 10$ m

কৌণিক কম্পাঙ্ক, $\omega = \frac{\pi}{3}$ rad s^{-1}

$\therefore$ পর্যায়কাল, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ s

এবং সর্বোচ্চ দ্রুতি, $v_{max} = \omega A = 10 \times \frac{\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$

$= \frac{10 \times 3.14}{3} = 10.4$ ms^{-1}

৩। চন্দ্রপৃষ্ঠে একটি সরল দোলকের দৈর্ঘ্য কত হবে, যদি ওর পর্যায়কাল পৃথিবী পৃষ্ঠে একটি সরল দোলকের পর্যায়কালের সমান হয় ? (পৃথিবীর ভর চন্দ্রের ভরের 80 গুণ এবং পৃথিবীর ব্যাসার্ধ চন্দ্রের ব্যাসার্ধের 4 গুণ বেশি)।

ধরা যাক, পৃথিবী পৃষ্ঠে ও চন্দ্র পৃষ্ঠে সরল দোলকের দৈর্ঘ্য এবং অভিকর্ষ ত্বরণ যথাক্রমে l_1 ও l_2 এবং g_1 ও g_2

প্রশ্নানুসারে, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_1}{g_1}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_2}{g_2}}$

$\therefore \quad \dfrac{l_1}{g_1} = \dfrac{l_2}{g_2} \qquad \therefore \quad \dfrac{l_2}{l_1} = \dfrac{g_2}{g_1}$

আবার, $g_1 = \dfrac{GM_1}{R_1^2}$ এবং $g_2 = \dfrac{GM_2}{R_2^2}$ । এখানে M_1 ও M_2 এবং R_1 ও R_2 যথাক্রমে পৃথিবী ও চন্দ্রের ভর ও ব্যাসার্ধ।

$\therefore \quad \dfrac{g_2}{g_1} = \dfrac{R_1^2}{R_2^2}\cdot\dfrac{M_2}{M_1} = \dfrac{l_2}{l_1}$

$\therefore \quad \dfrac{l_2}{l_1} = (4)^2 \times \dfrac{1}{80} = \dfrac{16}{80} = \dfrac{1}{5} \qquad \left[\because \dfrac{M_1}{M_2} = 80, \dfrac{R_1}{R_2} = 4\right]$

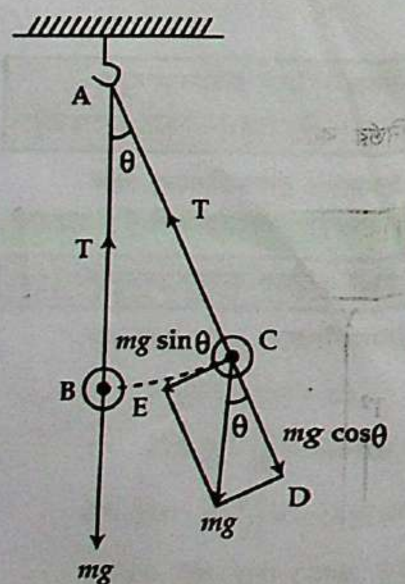
বা, $l_2 = \dfrac{l_1}{5}$

সুতরাং, চন্দ্রপৃষ্ঠে সরল দোলকের দৈর্ঘ্য পৃথিবী পৃষ্ঠে সরল দোলকের দৈর্ঘ্যের $\dfrac{1}{5}$ অংশ হতে হবে।

৮·১৪ সরল দোলকের গতি সরল দোলন গতি
Motion of a simple pendulum is simple harmonic motion

একটি দৃঢ় অবলম্বন থেকে ওজনহীন, নমনীয় ও অসম্প্রসারণীয় সুতা দিয়ে প্রায় আয়তনহীন একটি বস্তুকে ঝুলিয়ে দিয়ে বস্তুটিকে সরল ছন্দিত গতিতে দুলতে দিলে একটি সরল দোলক তৈরি হয়। এই দোলককে 4° এর মধ্যে রেখে দুলতে দিলে এর গতি সরল দোলন গতি হবে। এই ধরনের একটি সরল দোলক দেখানো হলো [চিত্র ৮·২০]।

মনে কর AB একটি সরল দোলক এবং এর ভারকেন্দ্র B এবং m এর ভর। দোলকটিকে দুলতে দিলে যেকোনো এক সময় সাম্যাবস্থান থেকে θ কোণে AC অবস্থানে আসে। এখন C বিন্দুর ওজন mg খাঁড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করে। এই ওজনকে দুটি উপাংশে বিভাজন করা যায়। একটি উপাংশ সুতার দৈর্ঘ্য CD এর দিকে $mg\cos\theta$ এবং অপর উপাংশ সরণের বিপরীতে CE বরাবর $mg\sin\theta$। এক্ষেত্রে $mg\cos\theta$ উপাংশ সুতার টান T দ্বারা নিষ্ক্রিয় হয়। একমাত্র কার্যকরী বল F হলো $mg\sin\theta$ যার দিক সাম্যাবস্থানের দিকে।



চিত্র ৮·২০

$\therefore \quad F = -mg\sin\theta \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.32)$

এখানে g = অভিকর্ষজ ত্বরণ। যেহেতু বল সরণের বিপরীতমুখি তাই $-ve$ চিহ্ন ব্যবহৃত হয়েছে।

কার্যকরী বলের জন্য ত্বরণ a হলে $F = ma$

$\therefore \quad ma = -mg\sin\theta$

বা, $a = -g\sin\theta \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.33)$

θ এর মান ক্ষুদ্র (4° এর বেশি না) হলে $\sin\theta = \theta$ রেডিয়ান ধরা হয়।

সেক্ষেত্রে সরল দোলকের গতিপথ সরলরৈখিক হয়।

সমীকরণ (8.32) থেকে পাই,

$$a = -g \times \frac{BC}{AC} = -g \times \frac{x}{L}$$

এখানে $\dfrac{g}{L}$ = ধ্রুবক = ω^2 ধরা হলে $a = -\omega^2 x$ বা, $a \propto -x$ হয়।

অর্থাৎ ত্বরণ সরণের সমানুপাতিক ও বিপরীতমুখি হয়, যা সরল দোলন গতির বৈশিষ্ট্যকে প্রকাশ করে।

দোলায়মান সরল দোলকের দোলনকাল উপরোক্ত সমীকরণ-এর সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

আমরা পাই,

$\omega^2 = \frac{g}{L}$ বা, $\omega = \sqrt{\frac{L}{g}}$ ∵ আমরা জানি, $\omega = 2\pi n$ এবং $T = \frac{1}{n}$

বা, $2\pi n = \sqrt{\frac{L}{g}}$

বা, $2\pi \times \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{L}{g}}$

$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.34)$$

এটি সরল দোলন গতির পর্যায়কালের সমীকরণ।

যদি কোনো সরল দোলকের দোলনকাল T = 2 sec হয় তাহলে ঐ দোলককে আমরা **সেকেন্ড দোলক** বলে থাকি। সমীকরণ (8.34) থেকে পাই,

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.35)$$

অর্থাৎ উপরোক্ত সমীকরণ থেকে বলা যায় অল্প বিস্তারে (4° এর কম) দোলায়মান **সরল দোলকের গতি সরল** দোলন গতি।

অনুধাবনমূলক কাজ : প্রত্যায়নী বল কী ? স্প্রিং-এর ক্ষেত্রে কী ধরনের বলের উদ্ভব ঘটে ?

বল প্রয়োগে কোনো বস্তুর বিকৃতি হলে স্থিতিস্থাপকতার কারণে পূর্বের অবস্থায় ফিরে যেতে বস্তুর মধ্যে যে বল উৎপন্ন হয় তাকে প্রত্যায়নী বল বলে। স্প্রিংকে বল প্রয়োগ করে প্রসারিত বা সংকুচিত করলে এটি পূর্বের অবস্থায় ফিরে যেতে প্রত্যায়নী বল সৃষ্টি হয়। এই প্রত্যায়নী বল মূলত স্থিতিস্থাপক বল।

৮·১৫ সেকেণ্ড দোলক
Second pendulum

যে সরল দোলকের দোলন কাল 2 সেকেন্ড তাকে সেকেন্ড দোলক বলে। অর্থাৎ সেকেন্ড দোলকের T = 2 সে.।

কোনো একটি সেকেন্ড দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য L হলে, $T = 2 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{1}{n}$

অর্থাৎ $2 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ বা, $1 = \pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

বা, $1 = \pi^2 \frac{L}{g}$

$$\therefore \quad L = \frac{g}{\pi^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.36)$$

সুতরাং, দেখা যায়, সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য অভিকর্ষজ ত্বরণের উপর নির্ভর করে। **সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য অভিকর্ষজ ত্বরণের সমানুপাতিক।** $\therefore L \propto g$.

যাচাই কর : একটি গ্রাফ কাগজে $L-T^2$ লেখচিত্রটি অঙ্কন করলে তা নিম্নরূপ হবে।
$T^2 = y$, $L = x$ এবং ধ্রুবক $= m$ ধরা হলে সরলরেখাটির সমীকরণ হয় $y = mx$

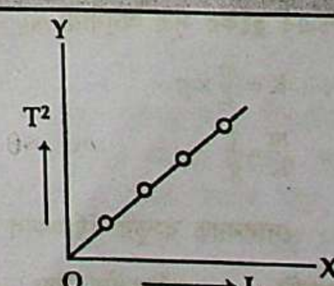
(ক) লেখচিত্র থেকে L ও T এর মধ্যে সম্পর্ক পর্যবেক্ষণ কর এবং g এর ক্ষেত্রে তা প্রয়োগ কর। কার্যকরী দৈর্ঘ্য বেড়ে গেলে g এর মান কীরূপ হবে ?

(খ) $L-\frac{1}{T^2}$ লেখচিত্রটি কীরূপ হবে ? গ্রাফ কাগজে অঙ্কন কর।

(গ) পর্যায়কাল কমে গেলে g-এর মানের কী পরিবর্তন হবে ?

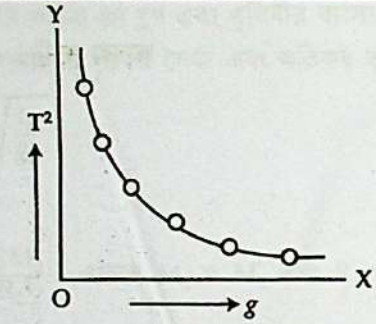
(ঘ) এই গ্রাফ থেকে g নির্ণয়ের পদ্ধতিটি লেখ।

(ঙ) পর্যায়কাল বৃদ্ধি পেলে g-এর মানের কী পরিবর্তন ঘটবে ?



চিত্র ৮·২১

যাচাই কর : পাশের চিত্রে $g - T^2$ লেখচিত্রে T^2 এবং g এর মধ্যে পারস্পরিক পরিবর্তনগুলি ব্যাখ্যা কর।

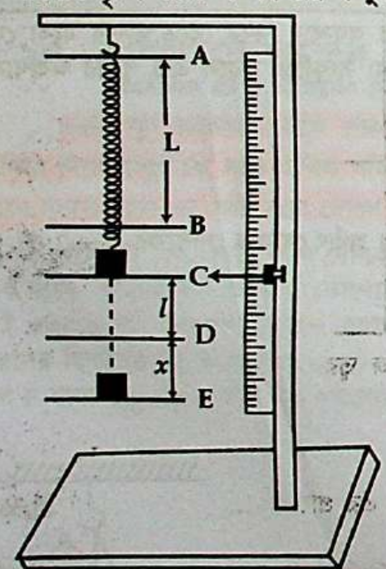


চিত্র ৮.২২

৮.১৬ ব্যবহারিক
Experimental

পরীক্ষণের নাম : পিরিয়ড : ২	(ক) স্প্রিং ধ্রুবক নির্ণয়ের পরীক্ষা **Experiment for the determination of spring constant**

তত্ত্ব : উল্লম্বভাবে ঝুলন্ত একটি পেঁচানো স্প্রিং থেকে m ভরের কোনো বস্তুকে ঝুলিয়ে দিলে স্প্রিংটির দৈর্ঘ্য l পরিমাণ বৃদ্ধি পায়। এ অবস্থায় বস্তুটি সাম্যাবস্থায় আছে ধরা হয়। এবার বস্তুটিকে নিচের দিকে x দূরত্ব টেনে ছেড়ে দিলে সেটি সরল ছন্দিত স্পন্দনে স্পন্দিত হতে থাকবে [চিত্র ৮.২৩]। বস্তুটিকে নিচের দিকে টানলে স্প্রিংটি এর ওপর প্রাথমিক অবস্থান অভিমুখে একটি প্রত্যায়নক বল (restoring force) প্রয়োগ করে। হুকের সূত্র অনুসারে প্রত্যায়নক বল বস্তুর সরণ x-এর সমানুপাতিক এবং বিপরীতমুখি। সুতরাং



চিত্র ৮.২৩

$$F = -Kx$$

এখানে K স্প্রিংটির বল ধ্রুবক। বস্তুকে ছেড়ে দিলে F বলের দরুন সেটি a ত্বরণ নিয়ে চলে। বস্তুটির ভর m হলে এর ত্বরণ হবে,

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{K'}{m}x$$

$$\therefore \quad a = -Kx \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

যেহেতু $K = \frac{K'}{m}$ = ধ্রুবক = স্প্রিং ধ্রুবক। অতএব বস্তুর গতি সরল দোলন গতি হবে।

যেহেতু একক সরণে বস্তুর ত্বরণ $= \frac{K'}{m}$। সুতরাং দোলনরত বস্তুর পর্যায়কাল, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ ... ... (ii)

বস্তুর ওজন mg-এর ক্রিয়ায় স্প্রিংটির দৈর্ঘ্য l পরিমাণ বেড়েছিল।

অতএব হুকের সূত্র অনুযায়ী $mg = Kl$

$$\text{বা,} \quad K = \frac{m}{l} \times g \quad \ldots \quad \ldots \quad (iii)$$

$$\text{বা,} \quad \frac{m}{K} = \frac{l}{g}$$

$\therefore$ দোলনরত বস্তুর পর্যায়কাল $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ... ... (iv)

যন্ত্রপাতি : (১) পরীক্ষণীয় স্প্রিং। (২) সুবিধাজনক কয়েকটি ভার। (৩) স্প্রিংটি ঝুলাবার জন্য হুক। (৪) মিটার স্কেল।

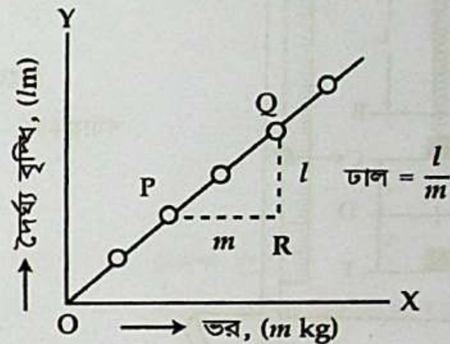
কার্যপদ্ধতি : (i) পরীক্ষণীয় স্থানের টেবিলের প্রান্ত থেকে অথবা কোনো দৃঢ় অবলম্বন হতে একটি হুক হতে স্প্রিংটিকে ঝুলিয়ে দেয়া হয়।

(ii) এর পর স্প্রিংটির AB এর দৈর্ঘ্য (L), স্কেলের সাহায্যে পরিমাপ করা হয়।

(iii) এবার স্প্রিং-এর নিচের প্রান্তের হুকে একটি ভার চাপানো হয় ফলে স্প্রিংটির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পায় এবং ভার এর অবস্থান C থেকে D তে এসে পৌঁছায়। মিটার স্কেলের সাহায্যে দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি (l) নির্ণয় করা হয়। D বিন্দু বরাবর একটি নির্দেশক চিহ্ন দিয়ে রাখতে হবে।

(iv) উপরোক্ত পদ্ধতিটি বিভিন্ন ভারের বস্তুর জন্য কয়েকবার করা হয় এবং বিভিন্ন ভারের জন্য দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পরিমাপ করা হয়।

(v) ভর হ্রাসের ক্ষেত্রে দৈর্ঘ্য সংকোচন পরিমাপ করা হয়।



চিত্র ৮·২৪

লেখচিত্র অঙ্কন : গ্রাফ কাগজে X-অক্ষ বরাবর ভার এবং Y-অক্ষ বরাবর দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি নিয়ে লেখচিত্র অঙ্কন করা হয়। লেখচিত্রটি একটি মূলবিন্দুগামী সরলরেখা হয় [চিত্র ৮·২৪]। এই সরলরেখার ঢাল $\frac{l}{m}$ নির্ণয় করা হয়।

ডাটা ছক-১

পর্যবেক্ষণ সংখ্যা	স্প্রিং এর আদি দৈর্ঘ্য, L(m)	প্রযুক্ত ভর m (kg)	স্প্রিং এর সম্প্রসারণ, l (m)	দৈর্ঘ্য প্রসারণের ক্ষেত্রে m/l (kgm^{-1})	দৈর্ঘ্য সংকোচনের ক্ষেত্রে m/l (kgm^{-1})	গড় m/l (kgm^{-1})	K (Nm^{-1})

হিসাব : পরীক্ষালব্ধ $\frac{l}{m}$ এর মান থেকে $\frac{m}{l}$ নির্ণয় করে এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ 'g' এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে স্প্রিং ধ্রুবক K নির্ণয় করা হয়।

ফলাফল : নির্ণেয় স্প্রিং ধ্রুবকের মান .... Nm^{-1}.

আলোচনা ও সতর্কতা : (১) স্প্রিংটিকে এমনভাবে ঝুলাতে হবে যাতে এর প্রান্তে ভার ঝুলাবার পর এটি ওপরের হুক থেকে খুলে না যায়।

(২) ভার ক্রমান্বয়ে বর্ধিত করে স্প্রিং-এর সম্প্রসারণ নির্ণয় করা হয়।

(৩) স্প্রিংটির প্রান্তে ভার ঝুলাবার পর দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির সময় যাতে বাধা প্রাপ্ত না হয় সেদিকে লক্ষ রাখতে হবে।

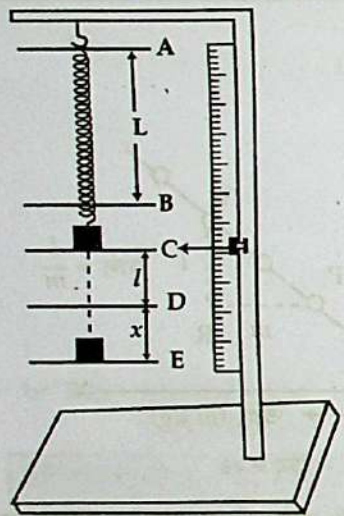
(৪) দৈর্ঘ্য সম্প্রসারণ সঠিকভাবে পরিমাপ করতে হবে।

পরীক্ষণের নাম : পিরিয়ড : ২	(খ) স্প্রিং এর সাহায্যে ভরের তুলনা **Comparing the masses with the help of a spring**

তত্ত্ব : উল্লম্বভাবে ঝুলানো একটি পেঁচানো স্প্রিং থেকে m ভরের কোনো বস্তুকে ঝুলিয়ে দিলে স্প্রিংটির দৈর্ঘ্য l পরিমাণ বৃদ্ধি পায়। এ অবস্থায় বস্তুটি সাম্যাবস্থায় আছে ধরা হয়। এবার বস্তুটিকে নিচের দিকে x দূরত্ব টেনে ছেড়ে দিলে সেটি সরল ছন্দিত স্পন্দনে দুলতে থাকে [চিত্র ৮·২৫]। বস্তুটিকে নিচের দিকে টানলে স্প্রিং-এর ওপর প্রাথমিক অবস্থান অভিমুখে একটি প্রত্যায়নক বল প্রয়োগ করে। হুকের সূত্র অনুসারে প্রত্যায়নক বল বস্তুর সরণ x এর সমানুপাতিক এবং বিপরীতমুখি। সুতরাং $F = -K'x$

এখানে K' স্প্রিংটির বল ধ্রুবক।

বস্তুটিকে টেনে ছেড়ে দিলে F বলের দরুন সেটি a ত্বরণ নিয়ে চলে। বস্তুটির ভর m হলে এর ত্বরণ হবে



চিত্র ৮·২৫

$$a = \frac{F}{m} \quad \therefore \; a = \frac{-K'}{m}x$$

$$\therefore \quad a = -Kx, \text{ এখানে } K = \frac{K'}{m} = \text{স্প্রিং ধ্রুবক}$$

যেহেতু একক সরণে বস্তুর ত্বরণ $\frac{K'}{m}$, সুতরাং দোলনরত বস্তুর পর্যায়কাল,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

$$T^2 = 4\pi^2\frac{m}{K}$$

$$\therefore \; m = \frac{T^2K}{4\pi^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$$

দুটি বস্তুর ভর m_1 ও m_2 এবং এই দুই ভরের জন্য পর্যায়কাল T_1 ও T_2 হবে। সমীকরণ (ii) থেকে লেখা যায়।

$$m_1 = \frac{T_1^2K}{4\pi^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (iii)$$

এবং $m_2 = \frac{T_2^2\,K}{4\pi^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (iv)$

$$\therefore \; \frac{m_1}{m_2} = \frac{T_1^2K}{4\pi^2} \times \frac{4\pi^2}{T_2^2K} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (v)$$

$$m_1 : m_2 = T_1^2 : T_2^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (vi)$$

যন্ত্রপাতি : (১) জানা স্প্রিং ধ্রুবকবিশিষ্ট একটি স্প্রিং।

(২) স্প্রিংটি ঝুলাবার জন্য হুক।

(৩) পরীক্ষণীয় বিভিন্ন ভারের বস্তু।

(৪) স্টপ-ওয়াচ।

(৫) একটি কাঠের মিটার স্কেল।

কার্যপদ্ধতি : (১) স্প্রিংটিকে হুকের সাহায্যে কোনো দৃঢ় অবলম্বন থেকে ঝুলিয়ে দিতে হবে। স্প্রিং-এর প্রান্তে পরীক্ষণীয় প্রথম ভারের বস্তু (m_1) স্প্রিং এর নিচের প্রান্তে বেঁধে দিলে প্রথমে দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পাবে এবং একটি অবস্থানে স্থির থাকবে। এটাই সাম্য বিন্দু।

(২) সাম্যবিন্দু ঠিক রাখার জন্য পাশে একটি লম্বা স্কেলে বা দেওয়ালের গায়ে দাগ দিয়ে চিহ্নিত কর।

(৩) এরপর সাম্য বিন্দু হতে নিচের দিকে বস্তুটিকে অল্প টেনে ছেড়ে দিলে স্প্রিংটি উপরে-নিচে কম্পিত হবে। এই অবস্থায় 3 বার 20 দোলনের সময় নির্ণয় কর। প্রতিবারে সময়কে দোলন সংখ্যা দিয়ে ভাগ করে দোলনকাল (T_1) নির্ণয় কর। তিনটি পাঠের মান থেকে গড় T_1 নির্ণয় কর।

(৪) একইভাগে দ্বিতীয় ভারের বস্তু (m_2) এর জন্য (৩) নং পরীক্ষণ অনুযায়ী দোলনকাল T_2 নির্ণয় কর।

পর্যবেক্ষণ ছক-১

পর্যবেক্ষণ সংখ্যা	প্রথম ভর m_1				দ্বিতীয় ভর m_2			
	10টি দোলনের জন্য		দোলন কাল	T_1^2	10টি দোলনের জন্য		দোলন কাল	T_2^2
	সময় sec	গড় sec	T_1 sec	sec^2	সময় sec	গড় sec	T_2 sec	sec^2
1								
2								
3								
4								

হিসাব (Calculation) :

প্রথম ভর m_1-এর জন্য, T_1^2 = ----- sec^2

দ্বিতীয় ভর m_2-এর জন্য, T_2^2 = ----- sec^2

সুতরাং বস্তু দুটির ভরের তুলনা, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{T_1^2}{T_2^2}$

ফলাফল (Result) :

বস্তু দুটির ভরের তুলনা, $m_1 : m_2$ = -------

সতর্কতা ও আলোচনা :

১. স্প্রিং প্রসারণের সময় যেন স্প্রিংটি খাড়াভাবে প্রসারিত হয় সেদিকে লক্ষ রাখতে হবে।

২. স্প্রিংটি দোলনের সময় ডানে বা বামে না দুলে যেন উল্লম্বভাবে দুলতে থাকে সেদিকে লক্ষ রাখা হয়।

৩. স্টপ-ওয়াচের সাহায্যে নিখুঁতভাবে সময় নির্ণয় করা হয়েছে।

৪। বস্তুর ভর এমনভাবে নির্ধারণ করতে হবে যাতে স্প্রি-এর প্রান্তে ঝুলিয়ে দিলে তা স্থিতিস্থাপক সীমা অতিক্রম না করে।

প্রয়োজনীয় গাণিতিক সূত্রাবলি

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \ldots \quad (1)$$

$$T = 2\pi n,\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \quad \ldots \quad (2)$$

$$F = -Kx \quad \ldots \quad (3)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

$$x = A\sin(\omega t + \delta) \quad \ldots \quad (5)$$

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \quad \ldots \quad (6)$$

$$a = -\omega^2 x \quad \ldots \quad (7)$$

$$v_{max} = \omega A \quad \ldots \quad (8)$$

$$a_{max} = \omega^2 A \quad \ldots \quad (9)$$

$$K = \frac{1}{2}K(A^2 - x^2) \quad \ldots \quad (10)$$

$$U = \frac{1}{2}Kx^2 \quad \ldots \quad (11)$$

$$T = \frac{1}{n},\ n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} \quad \ldots \quad (12)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \ldots \quad (13)$$

$$h = \left(\sqrt{\frac{g}{g_1}} - 1\right) \times R \quad \ldots \quad (14)$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{g_2}{g_1}} = \sqrt{\frac{R^2}{(R+h)^2}} = \frac{R}{R+h} \quad \ldots \quad (15)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{R+h}{R} = 1 + \frac{h}{R} \quad \ldots \quad (16)$$

উচ্চতর দক্ষতাভিত্তিক নমুনার গাণিতিক উদাহরণ

১। পদার্থবিজ্ঞানের শিক্ষক তাঁর তিন ছাত্রকে একটি পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় করতে বললেন। ছাত্র তিনজন ভিন্ন ভিন্ন দৈর্ঘ্যের তিনটি সরল দোলক নিল। তিনজন পাহাড়ের উচ্চতা একই পেল। [পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $R = 6.4 \times 10^6$ m]

(ক) পাহাড়টির উচ্চতা 400 m হলে পাহাড়ের চূড়ায় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান কত ?

(খ) সরল দোলকের সাহায্যে পাহাড়ের উচ্চতা মাপার পদ্ধতি ব্যাখ্যা কর। সবার প্রাপ্ত ফলাফল একই হবার কারণ কী ?

(ক) আমরা জানি, ভূপৃষ্ঠে $g = \frac{GM}{R^2}$ ... ... (i)

পাহাড়ের ওপর $g' = \frac{GM}{(R+h)^2}$ ... ... (ii)

সমীকরণ (ii)-কে (i) দ্বারা ভাগ করে পাই,

পাহাড়ের ওপরে $g' = \frac{g \times R^2}{(R+h)^2} = \frac{9.8 \times (6.4 \times 10^6)^2}{(6.4 \times 10^6 + 400)^2} = 9.799 \text{ ms}^{-2}$

(খ) সরল দোলককে পাহাড়ের উপর (h-উচ্চতায়) নিয়ে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান (g') নির্ণয় করতে হবে। মনে করি, এই অভিকর্ষজ ত্বরণ

$$g' = \frac{GM}{(R+h)^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (iii)$$

সমীকরণ (i) কে (iii) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\therefore \frac{g}{g'} = \frac{(R+h)^2}{R^2}$$

বা, $\frac{g}{g'} = \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2$

বা, $\left(1 + \frac{h}{R}\right) = \sqrt{\frac{g}{g'}}$

বা, $\frac{h}{R} = \sqrt{\frac{g}{g'}} - 1$

$$\therefore h = \left(\sqrt{\frac{g}{g'}} - 1\right) \times R \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (iv)$$

সমীকরণ (iii)-এ R, g, g' এর মান বসিয়ে h নির্ণয় করা হয়।

রাশিগুলোর তারতম্যের কারণে T এর মানের তারতম্য ঘটে। L বেড়ে গেলে T-ও বাড়ে আবার L কমে গেলে T কমে যায়। কিন্তু $\frac{L}{T^2}$ ধ্রুব রাশি হয় । অভিকর্ষজ ত্বরণের কোনো পরিবর্তন হয় না। এই কারণে তিনজন ছাত্র একই উচ্চতা পরিমাপ করে।

২। তৌফিক পদার্থবিজ্ঞান ল্যাবরেটরিতে 3.5 kg ভরের একটি গোল লোহার বলকে তারের প্রান্তে আংটায় ঝুলিয়ে দোল দিল। দেখল যে এটি প্রতি সেকেন্ডে 3 বার স্পন্দিত হচ্ছে। সর্বাধিক সরণ হচ্ছে 5 cm। [A = 10 cm]

(ক) উদ্দীপকে উল্লেখিত সরণকালে বস্তুটির বেগ কত ?

(খ) উল্লেখিত সরণের জন্য বস্তুটির উপর ক্রিয়ারত বল বস্তুটির ওজনের কত গুণ হবে বিশ্লেষণ কর।

(ক) আমরা জানি,

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$
$$= 6\pi\sqrt{(0.1)^2 - (0.05)^2}$$
$$= 6 \times 3.14\sqrt{0.01 - 0.0025}$$
$$= 18.84\sqrt{0.0075}$$
$$= 18.84 \times 0.087 = 1.632 \text{ ms}^{-1}$$

এখানে,

$m = 3.5$ kg

$A = 10 \text{ cm} = 0.1$ m

সরণ, $x = 5 \text{ cm} = 0.05$ m

$T = \frac{1}{3}$ sec

$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1/3} = 2\pi \times 3 = 6\pi$

(খ) $a = -\omega^2 A = -(6\pi)^2 \times 0.1$

$= -36 \times 9.87 \times 0.1 = -35.532\ ms^{-2}$

$\therefore$ বল, $F = ma = 3.5 \times 35.532 = 124.36\ N$

ওজন, $W = F' = mg = 3.5 \times 9.87 = 34.543\ N$

$\therefore \frac{F}{F'} = \frac{124.36}{34.543} = 3.6$ $\therefore$ বল, ওজনের 3.6 গুণ।

৩। একটি সেকেন্ড দোলককে পাহাড়ের চূড়ায় নিয়ে গিয়ে দোলনকাল নির্ণয় করা হলো। অভিকর্ষজ ত্বরণের মান (g_h) পাওয়া গেল $9.7\ ms^{-2}$। ভূ-পৃষ্ঠে অভিকর্ষ ত্বরণের মান (g_e) পাওয়া গেল $9.8\ ms^{-2}$।

(ক) সেকেন্ড দোলকটির দৈর্ঘ্য 4 গুণ করলে দোলনকাল কত হবে ?

(খ) দোলকটিকে পাহাড়ের চূড়ায় নেবার পর কী ব্যবস্থা নিলে দোলনকাল একই থাকবে ?

(ক) আমরা জানি,

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \sqrt{\frac{4L_1}{L_1}} = \sqrt{4} = 2\ sec$$

$\therefore T_2 = 2 \times T_1 = 2 \times 2 = 4\ sec$

এখানে,
সরল দোলকের আদি দোলনকাল $T_1 = 2\ sec$
কার্যকারী দৈর্ঘ্য, $L_2 = 4L_1$
পরিবর্তিত দোলনকাল, $T_2 = ?$

(খ) দোলকটিকে পাহাড়ের ওপর নেওয়ার পর কার্যকরী দৈর্ঘ্য কমালে এটি পুনরায় সেকেন্ড দোলক হিসেবে আচরণ করবে।

আমরা জানি,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}$$

বা, $T^2 = 4\pi^2 \frac{L_1}{g}$

বা, $L_1 = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{(2)^2 \times 9.8}{4 \times 9.87} = 0.993\ m$

আবার,

$$2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g_2}}$$

এখানে,
$g_2 = 9.7\ ms^{-2}$
$L_2 = ?$
$T = 2\ sec$

$\therefore \frac{L_1}{g_1} = \frac{L_2}{g_2}$

$\therefore L_2 = L_1 \times \frac{g_2}{g_1} = 0.993 \times \frac{9.7}{9.8} = 0.983\ m$

সুতরাং, দোলকটিকে পাহাড়ের ওপর নেওয়ার পর $(0.999 - 0.983)\ m = 0.01\ m$ দৈর্ঘ্য কমাতে হবে। তাহলে দোলনকাল একই থাকবে।

৪। তানজিনা 100 cm কার্যকর দৈর্ঘ্যের একটি সরল দোলক তৈরি করল। 4° কৌণিক বিস্তারে দোলকটি 2 sec দোলনকাল সহকারে দোল দেয়। তাকে দোলনকাল 50% বাড়াতে বলায় সে কার্যকরী দৈর্ঘ্য 150 cm নিয়ে দোলনকাল নির্ণয় করতে শুরু করল।

(ক) তানজিনার তৈরি সেকেন্ড দোলকের কৌণিক কম্পাঙ্ক কত?

(খ) 150 cm কার্যকর দৈর্ঘ্যের দোলকটি কী উদ্দীপকের শর্ত পূরণ করবে? গাণিতিক বিশ্লেষণ দাও।

(ক) আমরা জানি,

কৌণিক কম্পাঙ্ক,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3.14}{2} = 3.14\ rads^{-1}$$

এখানে,
দোলনকাল, $T = 2\ sec$

(খ) প্রাথমিক অবস্থায় দোলকটির দোলনকাল $T_1 = 2$ sec

পরিবর্তিত দোলনকাল হবে $T_1 = 2 + 2 \times 50\% = 3$ sec

প্রাথমিক কার্যকর দৈর্ঘ্য, $L_1 = 100$ cm

পরবর্তী কার্যকর দৈর্ঘ্য L_2 হলে,

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

বা, $\frac{L_1}{L_2} = \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

বা, $L_2 = \frac{9}{4} L_1 = \frac{9}{4} \times 100 \text{ cm} = 225 \text{ cm}$

সুতরাং উদ্দীপকের শর্তানুসারে দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য হতে হবে 225 cm। কিন্তু কার্যকর দৈর্ঘ্য করা হয়েছে 150 cm। সুতরাং 150 cm কার্যকর দৈর্ঘ্যের দোলকটি উদ্দীপকের শর্ত পূরণ করেনি।

৫। মতিন একদিন একটি সেকেন্ড দোলককে পাহাড়ের পাদদেশে নিয়ে গিয়ে দেখল দোলকটি সঠিক সময় দেয়। পাহাড়ের চূড়ায় নিয়ে গিয়ে দেখল দোলকটি ঘণ্টায় 30 সেকেন্ড সময় হারায়। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, R = 6400 km, অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8$ ms^{-2}। [য. বো. ২০১৫]

(ক) পাহাড়ের চূড়ায় সরল দোলকের দোলনকাল বের কর।

(খ) উদ্দীপকের ভিত্তিতে পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় করা সম্ভব কি-না—গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর।

(ক) পাহাড়ের চূড়ায় প্রতি ঘণ্টায় প্রাপ্ত অর্ধ দোলন সংখ্যা = 3600 – 30 = 3570

যেহেতু 3570টি অর্ধ দোলন দেয় 3600 সেকেন্ডে

∴ 1টি অর্ধ দোলন দেয় $\frac{3600}{3570}$ সেকেন্ডে

2টি অর্ধ দোলন দেয় $\frac{3600 \times 2}{3570} = 2.0168$ সেকেন্ডে

∴ দোলনকাল, T = 2.0168 sec

(খ) আমরা জানি, পাহাড়ের উচ্চতা, $h = \sqrt{\left(\frac{g}{g'} - 1\right)}\ R$ ... ... (i)

যেহেতু $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{g}{g'}}$

$$\therefore h = \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) R$$

$$= \left(\frac{2.0168}{2} - 1\right) \times 6400 \times 10^3$$

$$= 53760 \text{ m}$$

সুতরাং উক্ত দোলক দ্বারা পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় করা সম্ভব।

৬। কোনো সুউচ্চ পাহাড়ে নিয়ে যাওয়ায় একটি সরল দোলক 10 ঘণ্টায় 11990টি পূর্ণ দোলন সম্পন্ন করল। কিন্তু ভূ–পৃষ্ঠে দোলকটি 3 sec-এ একটি পূর্ণ দোলন সম্পন্ন করে। পৃথিবীর গড় ব্যাসার্ধ 6400 km এবং সর্বোচ্চ শৃঙ্গ এভারেস্টের উচ্চতা 8.854 km। [ভূ–পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ 9.8 ms^{-2}]

(ক) সরল দোলকটির কার্যকর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(খ) পাহাড়টি এভারেস্টের তুলনায় কত উঁচু বা নিচু ছিল তা গাণিতিক যুক্তিসহ ব্যাখ্যা কর। [ঢা. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

বা, $T^2 = 4\pi^2 \frac{L}{g}$

$$\therefore L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{3^2 \times 9.8}{4 \times (3.141)^2} = 2.23413 \text{ m}$$

এখানে,

দোলনকাল, T = 3 sec

অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8$ ms^{-2}

কার্যকর দৈর্ঘ্য, L = ?

(খ) আমরা জানি,

পাহাড়ের উচ্চতা,

$$h = \left(\frac{T'}{T} - 1\right) \times R$$

$$= \left(\frac{3.0025}{3} - 1\right) \times 6.4 \times 10^6 \text{ m}$$

$$= 5333.33 \text{ m}$$

এভারেস্টের উচ্চতা, $h' = 8.854 \text{ km} = 8854 \text{ m}$

এখানে,

ভূ-পৃষ্ঠে দোলনকাল, $T' = 3 \text{ sec}$

পাহাড়ের উপর দোলনকাল,

$$T' = \frac{10 \times 60 \times 60}{11990} = \frac{36000}{11990} = 3.0025 \text{ sec}$$

পৃথিবীর গড় ব্যাসার্ধ,

$R = 6400 \text{ km} = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$

পাহাড়ের উচ্চতা, $h = ?$

অতএব, পাহাড়টি এভারেস্টের তুলনায় $(8854 - 5333.33) \text{ m} = 3520.667 \text{ m}$ কম উচ্চতার।

৭। একদল শিক্ষার্থী পদার্থবিজ্ঞান ল্যাবরেটরিতে 500 g ভরের একটি বস্তুকে তারের প্রান্তে আংটায় ঝুলিয়ে দোল দিল। তারা দেখল যে, এটি প্রতি সেকেন্ডে 0.5 বার স্পন্দিত হচ্ছে। বস্তুটির সরণ 5 cm এবং বিস্তার 10 cm।

(ক) উদ্দীপকে উল্লেখিত সরণ কালে বস্তুটির বেগ কত হবে ?

(খ) উদ্দীপকে উল্লেখিত সরণের জন্য বস্তুটির ওপর ক্রিয়ারত বল বস্তুটির ওজনের 0.05 গুণ হবে— গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ করে মতামত দাও। [রা. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি,

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$= 2\pi n\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$= 2 \times 3.1416 \times 0.5 \times \sqrt{(0.1)^2 - (0.05)^2}$$

$$= 0.272 \text{ ms}^{-1}$$

এখানে,

কম্পাঙ্ক, $n = 0.5 \text{ Hz}$

বিস্তার, $A = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$

বস্তুর সরণ, $x = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}$

$\therefore$ $x = 0.05 \text{ m}$ সরণে বস্তুর বেগ, $v = ?$

(খ) আমরা জানি,

$$W = mg$$

$$\therefore \frac{F}{W} = \frac{m4\pi^2n^2x}{mg} = \frac{4\pi^2n^2x}{g}$$

$$= \frac{4 \times (3.1416)^2 \times (0.5)^2 \times 0.05}{9.8}$$

$$= 0.05$$

$$\therefore F = 0.05 \times W$$

এখানে,

ববের ভর, $m = 500 \text{ g} = 0.5 \text{ kg}$

মনে করি, $x = 0.05 \text{ m}$ সরণে বস্তুটির উপর ক্রিয়ারত বল $= F$

$$\therefore F = ma = m\omega^2 x = m(2\pi n)^2 x = m \times 4\pi^2 n^2 x$$

অতএব, উল্লেখিত সরণের জন্য বস্তুটির ওপর প্রযুক্ত বল বস্তুটির ওজনের 0.05 গুণ হবে, উক্তিটি যথার্থ।

৮। একটি সরল দোলকের ববের ভর 1.2×10^{-2} kg। এটি 51 mm বিস্তারে দুলছে। এটি 25টি দোলন সম্পন্ন করতে 49.75 সে. সময় নেয়। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6.4×10^6 m।

(ক) দোলকটির কার্যকরী দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(খ) দোলকটিকে পৃথিবীর পৃষ্ঠ হতে 53760 m উচ্চতায় নিয়ে গেলে ববের সর্বোচ্চ সরণে ববের ওপর প্রত্যায়নী বলের কীরূপ পরিবর্তন হবে যাচাই কর। [য. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\text{বা, } T^2 = 4\pi^2\frac{L}{g}$$

$$\therefore L = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{9.8 \times (1.99)^2}{4 \times 9.87}$$

$$= \frac{9.8 \times 3.9601}{4 \times 9.87} = 0.983 \text{ m}$$

এখানে,

$N = 25$ টি দোলন

$t = 49.75 \text{ sec}$

দোলনকাল, $T = \frac{49.75}{25} \text{ sec} = 1.99 \text{ sec}$

কার্যকরী দৈর্ঘ্য, $L = ?$

(খ) আমরা জানি,

$\therefore$ ভূ-পৃষ্ঠে সর্বোচ্চ সরণে ববের ওপর কার্যকর প্রত্যায়নী বল, $F = \frac{mg}{L}A$

এবং h উচ্চতায় ববের ওপর ওই সরণে কার্যকরী প্রত্যায়নী বল, $F_h = \frac{mg_h}{L}A$

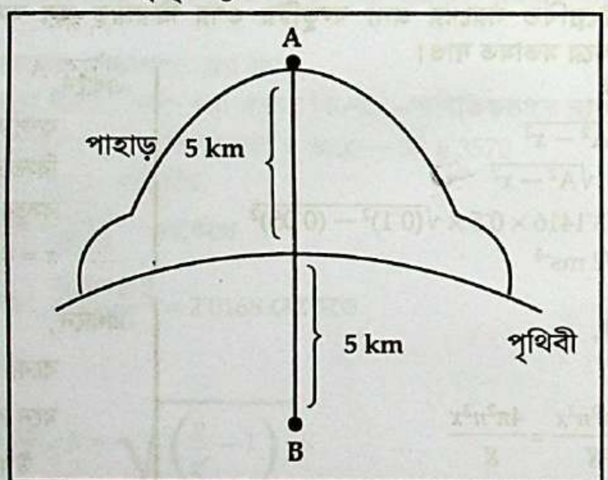
এখানে,
পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6.4 \times 10^6$ m
ভূ-পৃষ্ঠ থেকে উচ্চতা, $h = 53760$ m

$$\therefore \quad \frac{F_h}{F} = \frac{g_h}{g} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 = \left(\frac{6.4 \times 10^6}{6.4 \times 10^6 + 53760}\right)^2 = 0.9834$$

$$\text{বা,} \quad \frac{F - F_h}{F} = \frac{1 - 0.9834}{1} = 0.0166 = 1.66\%$$

$\therefore$ দোলকটি উল্লেখিত উচ্চতায় নিয়ে গেলে ববের ওপর প্রত্যায়নী বল 1.66% কমে যাবে।

৯। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $R = 6.4 \times 10^6$ m; ভূ-পৃষ্ঠে $g = 9.8$ ms^{-2}।



...াহাড়ের চূড়ায় অভিকর্ষজ ত্বরণ নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকে A ও B স্থানের মধ্যে কোথায় একটি সরল দোলক ধীরে চলবে ? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে তোমার মতামত দাও। [ঢা. বো. ২০১৬]

(ক) ধরি উদ্দীপকের A বিন্দুতে অর্থাৎ পাহাড়ের চূড়ায় অভিকর্ষজ ত্বরণ g_A।

আমরা জানি,

$$g_A = \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

$$= \frac{(6.4 \times 10^6)^2}{(6.4 \times 10^6 + 5 \times 10^3)^2} \times 9.8$$

$$\therefore \quad g_A = 9.78 \text{ ms}^{-2}$$

এখানে,
পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6.4 \times 10^6$ m
A বিন্দুর উচ্চতা, $h = 5$ km $= 5 \times 10^3$ m
ভূ-পৃষ্ঠে g-এর মান, $g = 9.8$ ms^{-2}

সুতরাং, পাহাড়ের চূড়ায় অভিকর্ষজ ত্বরণ $= 9.78$ ms^{-2}

(খ) মনে করি B বিন্দুতে অভিকর্ষজ ত্বরণ, g_h

আমরা জানি,

$$g_h = \left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

$$= 9.8 \times \left(1 - \frac{5 \times 10^3}{6.4 \times 10^6}\right) = 9.79 \text{ ms}^{-2}$$

এখানে,
$R = 6.4 \times 10^6$ m
ভূ-পৃষ্ঠ হতে B বিন্দুর গভীরতা, $h = 5$ km $= 5 \times 10^3$ m
ভূ-পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8$ ms^{-2}

এখন মনে করি A বিন্দুতে একটি সরল দোলকের দোলনকাল T_A এবং B বিন্দুতে ওই দোলকের দোলন-কাল T_B।

আমরা জানি,

$$T_A = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_A}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

এবং $$T_B = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_B}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$$

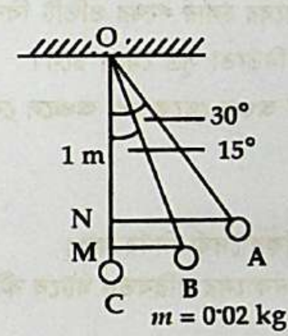
সমীকরণ (ii) কে সমীরণ (i) দিয়ে ভাগ করে পাই,

$$\frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\frac{g_B}{g_A}} = \sqrt{\frac{9.79}{9.78}} = 1.0005$$

বা, $T_A = 1.0005 \times T_B$

$\therefore$ $T_A > T_B$, অর্থাৎ B স্থানের তুলনায় A স্থানে দোলকটির দোলনকাল বেশি। সুতরাং, A স্থানে সরল দোলকটি অধিক ধীরে চলবে।

১০। নিচের চিত্রে 0.02 kg ভরের একটি বস্তুকে O বিন্দু থেকে 1 m লম্বা সুতার সাহায্যে ঝুলানো হলো। A বিন্দু সর্বোচ্চ বিস্তার নির্দেশ করে যা O বিন্দুতে 30° কোণ উৎপন্ন করে। এটিকে A বিন্দু পর্যন্ত টেনে ছেড়ে দেওয়া হলে এটি দুলতে শুরু করে। ($g = 9.8\ ms^{-2}$)



(ক) উদ্দীপকের B বিন্দুতে দোলকটির গতিশক্তি বের কর।

(খ) উদ্দীপকে ব্যবহৃত দোলকটি যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা সূত্র মেনে চলে কি না—গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক মতামত দাও। [রা. বো. ২০১৫]

(ক) চিত্রানুসারে,

$CN = 1 - \cos 30°$
$CM = 1 - \cos 15°$

এখানে,
ববের ভর, $m = 0.02$ kg
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8\ ms^{-2}$

এখন, B বিন্দুতে বেগ v হলে,

$v^2 = v_0^2 + 2g\,(CN - CM)$

বা, $v^2 = 2g\,(CN - CM)$ $\quad [\because v_0^2 = 0]$

অতএব, B বিন্দুতে গতিশক্তি,

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 0.02 \times 2g\,(CN - CM)$$
$$= \frac{1}{2} \times 0.02 \times 2 \times 9.8 \times \{(1 - \cos 30°) - 1 - \cos 15°)\}$$
$$= \frac{1}{2} \times 0.02 \times 2 \times 9.8\,(0.134 - 0.0341)$$
$$= 0.02 \times 9.8 \times 0.099 = 0.01958$$
$$= 1.958 \times 10^{-2}\ J$$

(খ) এখানে, A বিন্দুটি C বিন্দু অপেক্ষা h উচ্চতায় অবস্থিত হলে C বিন্দুর সাপেক্ষে A অবস্থানে ববের বিভবশক্তি $= mgh$। A বিন্দুতে ববের বেগ শূন্য। অতএব A বিন্দুতে ববের গতিশক্তি $= 0$

$\therefore$ A বিন্দুতে ববের মোট শক্তি $= mgh + 0 = mgh$

আবার, C বিন্দুতে ববের বিভবশক্তি $= 0$

A হতে C তে আসতে ববের উল্লম্ব সরণ h হলে, C বিন্দুতে ববের বেগ,

$$v^2 = u^2 + 2gh = 0 + 2gh = 2gh$$

$\therefore$ C বিন্দুতে ববের গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \times 2gh = mgh$

$\therefore$ C বিন্দুতে ববের মোট শক্তি $= 0 + mgh = mgh$

পুনঃ, A বিন্দু হতে ববটি B বিন্দুতে আসতে উল্লম্ব সরণ x হলে, B বিন্দুতে ববের বিভবশক্তি $= mg(h - x)$

আবার, B বিন্দুতে বেগ v_1 হলে, $v_1^2 = u^2 + 2gx = 0 + 2gx$

$\therefore$ B বিন্দুতে গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv_1^2$

$$= \frac{1}{2}m \times 2gx = mgx$$

$\therefore$ B বিন্দুতে মোট শক্তি $= mg(h - x) + mgx = mgh$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে ববের চলার পথের প্রতিটি বিন্দুতে মোট শক্তি $= mgh$

অতএব, দোলকটি যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা সূত্র মেনে চলে।

১১। একটি সেকেন্ড দোলক 'ক' অঞ্চল থেকে 'খ' অঞ্চলে নেওয়া হলো।

$g_{ক} = 9.78\ \text{ms}^{-2}$

$g_{খ} = 9.83\ \text{ms}^{-2}$

(ক) 'ক' অঞ্চলে দোলকটির কার্যকর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(খ) 'খ' অঞ্চলে দোলকটির দোলনকালের পরিবর্তন ঘটবে কী ? গাণিতিক বিশ্লেষণসহ যুক্তি দাও।

[সি. বো. ২০১৬]

(ক) আমরা জানি,

$$T_{ক} = 2\pi\sqrt{\frac{L_{ক}}{g_{ক}}}$$

বা, $L_{ক} = \frac{T_{ক}^2 \times g_{ক}}{4\pi^2}$

$$= \frac{(2)^2 \times 9.78}{4 \times 9.87} = 0.9909\ \text{m}$$

$$= 99.09\ \text{cm}$$

এখানে,

'ক' অঞ্চলে দোলকের দোলনকাল, $T = 2\ \text{s}$

'ক' অঞ্চলে অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g_{ক} = 9.78\ \text{ms}^{-2}$

'খ' অঞ্চলে অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g_{খ} = 9.83\ \text{ms}^{-2}$

'ক' অঞ্চলে দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য, $L_{ক} = ?$

'খ' অঞ্চলে দোলকের দোলনকাল, $T_{খ} = ?$

দোলনকালের পরিবর্তন, $\Delta T = T_{খ} \sim T_{ক}$

(খ) $T_{খ} = 2\pi\sqrt{\frac{L_{ক}}{g_{খ}}}$

$$= 2 \times \pi \times \sqrt{\frac{0.9909}{9.83}} = 2 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{0.9909}{9.83}}$$

$$= 1.993\ \text{s} \simeq 1.99$$

$\therefore$ $\Delta T = T_{ক} - T_{খ} = 2 - 1.99 = 0.01\ \text{s}$

$\therefore$ $T_{খ} < T_{ক}$

অর্থাৎ 'খ' অঞ্চলে দোলনকাল হ্রাস পায়।

১২। একটি সেকেন্ড দোলক ঘড়ি পাহাড়ের পাদদেশে ঠিক সময় দেয় কিন্তু পাহাড়ের চূড়ায় উঠালে 2 ঘন্টায় 8 সেকেন্ড সময়ের পার্থক্য দেখায়। পৃথিবীর ব্যাস 12800 Km হলে—

(ক) পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় কর।

(খ) পাহাড়ের চূড়ায় সঠিকভাবে কাজ করতে হলে দোলকের দৈর্ঘ্য কত % পরিবর্তন করতে হবে ?

[BUET Admission Test, 2017-18]

(ক) আমরা জানি, $T' = \left(\frac{t}{t-8}\right) \times T$

$$\therefore \quad T' = \left(\frac{2\times60\times60}{2\times60\times60-8}\right)\times T$$

$$= \left(\frac{7200}{7200-8}\right)\times 2$$

এখানে,

$T = 2\,s$

$t' = t - 8 = 2\times60\times60 - 8$

$R = \frac{D}{2} = \frac{12800\times10^3}{2}\,m$

$= 6400\times10^3\,m = 6.4\times10^6\,m$

পাহাড়ের চূড়ায় দোলন কাল T'

আবার,

$$T' = T\sqrt{\frac{g}{g'}} = 2\times\sqrt{\frac{(R+h)^2}{R^2}}$$

$$T' = 2\times\frac{(R+h)}{R}$$

$$\therefore \quad 2\times\frac{R+h}{R} = \frac{7200}{7200-8}\times 2$$

$$7192\,R + 7192\,h = 7200\,R$$

$$h = \frac{8R}{7192}$$

$$\therefore \quad h = \frac{8\times6.4\times10^6}{7192} = 7119.02\,m = 71.19\,km$$

(খ) আমরা জানি, $T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{L}{g}}$

$$\therefore \quad \frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{L'}{L}}$$

বা, $L' = \left(\frac{T'}{T}\right)^2 = \frac{L'}{L}$

বা, $L' = \left(\frac{\frac{7200\times2}{7200-8}}{2}\right)^2 \times L = 1.0022\,L$

$\therefore \quad \Delta L = (L' - L)\times100\% = 0.22\%\,L$

বা, $\frac{\Delta L}{L} = 0.22\%$ কমাতে হবে।

সার-সংক্ষেপ

স্থানিক পর্যায়ক্রম : পর্যায়বৃত্তির পর্যায়কাল যদি স্থান সাপেক্ষ হয়, তবে তাকে স্থানিক পর্যায়ক্রম বলে।

কালিক পর্যায়ক্রম : পর্যায়বৃত্তির পর্যায়কাল যদি একটি নির্দিষ্ট সময় সাপেক্ষ হয়। তবে তাকে কালিক পর্যায়ক্রম বলে।

পর্যাবৃত্ত গতি : কোনো বস্তুর গতি যদি এমন হয় যে একটি নির্দিষ্ট সময় পরপর বস্তুটির গতির পুনরাবৃত্তি ঘটে তবে ওই গতিকে পর্যাবৃত্ত গতি বলে।

স্পন্দন গতি : পর্যাবৃত্ত গতিসম্পন্ন কোনো বস্তুর গতি যদি এমন হয় যে, পর্যায়কালের অর্ধেক সময় কোনো নির্দিষ্ট দিকে এবং বাকি অর্ধেক সময় বিপরীত দিকে চলে তবে বস্তুর ওই গতিকে স্পন্দন বলে।

সরল ছন্দিত স্পন্দন : কোনো পর্যায় গতিসম্পন্ন বস্তুর উপর কার্যকর ত্বরণ যদি তার গতিপথের একটি নির্দিষ্ট বিন্দু অভিমুখে এমনভাবে ক্রিয়া করে যে তার মান ওই বিন্দু হতে বস্তুর সরণের মানের সমানুপাতিক হয়, তবে বস্তুর উক্ত গতিকে সরল ছন্দিত স্পন্দন বলে।

সরল দোলক : একটি ছোট ভারী বস্তু পিণ্ডকে একটি ওজনবিহীন, অপ্রসারণীয় এবং নমনীয় সুতার সাহায্যে একটি দৃঢ় অবলম্বনে ঝুলিয়ে দেওয়ায় তা যদি বিনা বাধায় এদিক-ওদিক দোলে, তবে সুতা সমেত পিণ্ডটিকে সরল দোলক বলে।

পূর্ণ দোলন (Complete oscillation) : কোনো একটি সরল দোলকের দোলক পিণ্ড তার গতিপথের যে কোনো বিন্দু হতে যাত্রা শুরু করে দুই প্রান্ত অবধি যেয়ে পুনরায় সেই বিন্দুতে ফিরে এলে একটি পূর্ণ দোলন হয়।

দোলন বা পর্যায় কাল (Time period) : কোনো একটি সরল দোলকের দোলক পিণ্ডের একটি পূর্ণ দোলন দিতে যে পরিমাণ সময় লাগে তাকে দোলন কাল বলে।

কম্পাঙ্ক (Frequency) : কোনো একটি সরল দোলকের দোলক পিণ্ড এক সেকেন্ডে যতবার পূর্ণ দোলন দেয়, তাকে কম্পাঙ্ক বা কম্পনি বলে।

বিস্তার (Amplitude) : দুলবার সময় কোনো একটি সরল দোলকের দোলক পিণ্ড সাম্যাবস্থা হতে সর্বাপেক্ষা যতটা বেশি দূরে যায় তাকে তার বিস্তার বলে।

দশা : কোনো একটি কম্পমান বস্তুর যে কোনো মুহূর্তের দোলনের অবস্থা অর্থাৎ বস্তুটির অবস্থান, বেগ, ত্বরণ এবং গতির অভিমুখ যা দ্বারা বুঝা যায় তাকে দশা বলে।

সেকেন্ড দোলক (Second pendulum) : যে সরল দোলকের দোলনকাল 2 সেকেন্ড, তাকে সেকেন্ড দোলক বলে।

কৌণিক কম্পাঙ্ক : সরল ছন্দিত স্পন্দনসম্পন্ন কোনো কণা একক সময়ে যে কৌণিক দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে কৌণিক কম্পাঙ্ক বলে।

বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তরের জন্য প্রয়োজনীয় বিষয়াবলির সার-সংক্ষেপ

১। সরল দোল গতিসম্পন্ন কণার ক্ষেত্রে $\frac{1}{2}KA^2$ হচ্ছে—

(i) সর্বোচ্চ গতিশক্তি, (ii) সর্বোচ্চ স্থিতিশক্তি, (iii) মোট শক্তি।

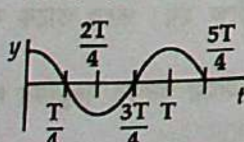
২। পর্যায়কাল 2 গুণ করা হলে দোলকের দৈর্ঘ্য 4 গুণ করতে হবে। পৃথিবীর কেন্দ্রে সরল দোলকের দোলনকাল অসীম হয়। $T = \sqrt{L}$

৩। সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার পর্যায়কাল, $T \propto \sqrt{\frac{K}{m}}$ অর্থাৎ বল ধ্রুবকের বর্গমূলের সমানুপাতিক।

৪। সরল দোলন গতিসম্পন্ন কোনো কণার অন্তরক সমীকরণ, $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$।

৫। সরল দোলন গতিসম্পন্ন কোনো কণার অন্তরক সমীকরণের কম্পাঙ্ক $\frac{\omega}{2\pi}$ এবং পর্যায়কাল $\frac{2\pi}{\omega}$।

৬। সরল দোলন গতিসম্পন্ন কোনো কণা যখন সাম্যাবস্থা অতিক্রম করে তখন এর গতিশক্তি সর্বোচ্চ এবং বিভবশক্তি সর্বনিম্ন হয়। সরল দোলন গতির জন্য কৌণিক সরণ 4° এর চেয়ে বেশি হতে পারবে না।

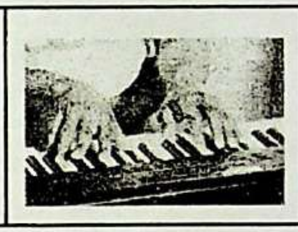
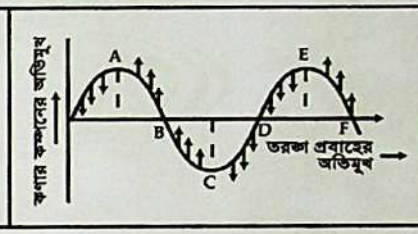
৭। 

সরল ছন্দিত গতিতে গতিশীল একটি বস্তুর গতির সরণ–সময় লেখচিত্রের জন্য প্রযোজ্য

(i) যখন $t = \frac{3T}{4}$ তখন $E = 0$, (ii) যখন $t = \frac{T}{4}$ তখন $E_k = E_p$ প্রযোজ্য নয়। যখন $t = T$ হয় তখন সরণ সর্বনিম্ন হয়। সরল দোলকের ক্ষেত্রে পর্যায়কাল $T = 2 \times$ এক বার টিক শব্দের সময়।

৯
তরঙ্গ
WAVE

প্রধান শব্দ (Key Words) : তরঙ্গ, তরঙ্গের প্রকারভেদ, আড় বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গ, লম্বিক বা অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ, শব্দ, শব্দের উৎপত্তি, পূর্ণ কম্পন, তরঙ্গ বেগ, তরঙ্গদৈর্ঘ্য, কম্পাঙ্ক বা স্পন্দন সংখ্যা, দোলনকাল, বিস্তার, দশা, আদি দশা, তরঙ্গ মুখ, তরঙ্গ শীর্ষ, অগ্রগামী তরঙ্গ, স্থির তরঙ্গ, তরঙ্গের উপরিপাতন, শব্দের ব্যতিচার।

সূচনা
Introduction

তরঙ্গ ও তরঙ্গ গতি পদার্থবিজ্ঞানের একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। সব ধরনের তরঙ্গের ক্ষেত্রে দুটি বৈশিষ্ট্য লক্ষ করা যায়। প্রথমত, মাধ্যমের আলোড়ন বা স্পন্দন এবং দ্বিতীয়ত, তরঙ্গের এক স্থান থেকে অন্য স্থানে শক্তি সঞ্চালনের বিষয়। আমরা যে শব্দ শুনি তা তরঙ্গ আকারে আমাদের কানে পৌঁছে। কাজেই তরঙ্গের প্রকৃতি এবং তরঙ্গ গতি সম্পর্কে আমাদের স্পষ্ট ধারণা থাকা আবশ্যক। প্রতিদিন আমরা বিভিন্ন ধরনের শব্দ শুনি, কোনোটি শ্রুতিমধুর আবার কোনোটি শ্রুতিকটু। এ অধ্যায়ে সংযুক্তি শব্দ, শব্দের তীব্রতা, বীট, উপরিপাতন এবং শব্দের সংগীতগুণ সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

এই অধ্যায় পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা—

- তরঙ্গের উৎপত্তি এবং মাধ্যমে শব্দ সঞ্চালন প্রক্রিয়া ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- তরঙ্গের বৈশিষ্ট্য, তীব্রতার গাণিতিক রাশিমালা প্রতিপাদন ও বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- উপরিপাতন নীতি এবং স্থির তরঙ্গের গাণিতিক রাশিমালা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
  ব্যবহারিক : মেলডির পরীক্ষার সাহায্যে সুর কম্পাঙ্কের কম্পাঙ্ক নির্ণয়।
- শব্দের তীব্রতা লেভেল, বীটের গাণিতিক রাশিমালা প্রতিপাদন করতে পারবে।
- স্বরগ্রাম, হারমোনিক ব্যাখ্যা করতে, সংগীতগুণ বিশ্লেষণে পদার্থবিজ্ঞানের অবদান ব্যাখ্যা করতে এবং শোরগোল ও সংগীত সুরের প্রভাব ব্যাখ্যা করতে পারবে।

৯·১ তরঙ্গের উৎপত্তি
Propagation of wave

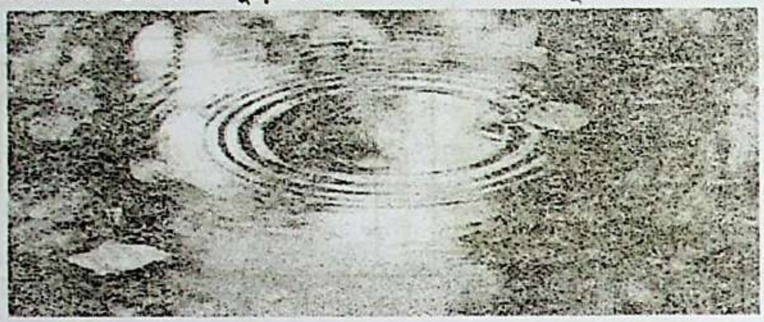
হাত থেকে একটি ধাতব পাত্রকে ফেলে দিলে শব্দ উৎপন্ন হয়। আবার কাঠের একটি টেবিলের এক প্রান্তে আঘাত করলে শব্দ উৎপন্ন হয়। লক্ষ করলে দেখা যাবে কোনো বস্তুর কম্পনের ফলেই শব্দের বা তরঙ্গের উৎপত্তি হয়। আবার কম্পন থেমে গেলে শব্দ বা তরঙ্গও থেমে যায়। কম্পনশীল কোনো বস্তুকে হাত দিয়ে চেপে ধরলে কম্পন ও শব্দ দুইই থেমে যায়। আমরা যখন কথা বলি তখন শব্দ বায়ু মাধ্যমের মধ্য দিয়ে তরঙ্গ আকারে এক স্থান থেকে অন্য স্থানে সঞ্চালিত হয় [চিত্র ৯·১]। সুতরাং বলা যায়— কোনো বস্তুর কম্পনের ফলে শব্দের সৃষ্টি হয়। শব্দ মাধ্যমকে আন্দোলিত করে এবং মাধ্যমের এ আন্দোলন তরঙ্গ আকারে এক স্থান থেকে অন্য স্থানে সঞ্চালিত হয়। এভাবেই তরঙ্গের উৎপত্তি হয়। কম্পনশীল এই বস্তুই হলো শব্দ উৎস বা স্বনক (acoustics)।

চিত্র ৯·১

যাচাই কর : হাতে একটি হ্যান্ড মাইক সেট নাও। এবার জোরে ডাক দাও।

পুকুরের স্থির পানিতে ঢিল ছুড়লে ঢিলটি পানির যেখানে পতিত হয় সেখানে কম্পনের সৃষ্টি হয়। এই কম্পন এক কণা থেকে অপর কণায় স্থানান্তরিত হতে হতে এক সময় সমগ্র পুকুরে ছড়িয়ে পড়ে। এই কম্পনের ফলে পানির কোনো

কণাই তার সাম্যাবস্থান থেকে দূরে সরে যায় না। শুধু সাম্যাবস্থানকে কেন্দ্র করে ওপরে নিচে পর্যায়বৃত্ত গতিতে কম্পিত হতে থাকে এবং প্রত্যেকটি কণাই তার পার্শ্ববর্তী কণায় শক্তির স্থানান্তর ঘটায় [চিত্র ৯.২]। কিন্তু কোনো এক মুহূর্তে পানির কণাগুলো বিভিন্ন বিন্দুতে অবস্থান করায় এগুলো দেখতে ঢেউয়ের মতো মনে হয়। এই ঢেউই হলো তরঙ্গ। তোমরা নিশ্চয় খেয়াল করেছ সবুজ ধান ক্ষেতে মৃদুমন্দ বাতাস বয়ে গেলে ধানের পাতার পর্যায়বৃত্ত কম্পনের ফলে ঢেউয়ের সৃষ্টি হয়। আবার পানিতে ঢিল ছুড়ে কোনো পাতা বা কাগজের টুকরাকে ফেলে লক্ষ করলে দেখা যায় যে,



চিত্র ৯.২

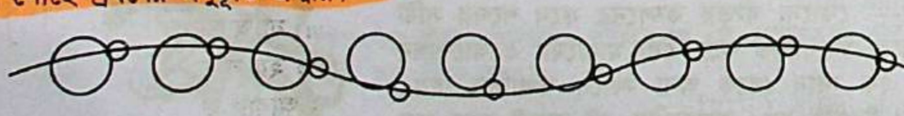
পানির তরঙ্গগুলি একে একে পেরিয়ে যাবার সময় পাতা বা কাগজের টুকরো তরঙ্গের সঙ্গে এগিয়ে না গিয়ে একই জায়গায় থেকে ওপর নিচে দুলতে থাকে। এ ঘটনা থেকে বোঝা যায় যে, ঢিলটি যেখানে পানিকে আঘাত করে সেখানে পানির কণাগুলিতে আলোড়ন (disturbance) সৃষ্টি হয়ে কণাগুলো ওপর নিচে দুলতে শুরু করে। মাধ্যমের অর্থাৎ পানির কণাগুলোর সংসক্তির জন্য এই গতি পাশের পানির কণাগুলোর মধ্যে সঞ্চালিত হয়। ফলে এই কণাগুলিও একই ধরনের গতিতে দুলতে শুরু করে। এরা আবার পাশের পানি কণাগুলিকে আন্দোলিত করে। এভাবে স্থির পানির ওপর কোনো স্থানে আলোড়ন সৃষ্টি করলে ওই আলোড়ন পানির উপরিতল ধরে এগিয়ে যায়। একেই তরঙ্গ বলে। এখানে কেবলমাত্র আলোড়নের রূপ তরঙ্গ আকারে এগিয়ে যায়; পানির কণাগুলো একই জায়গায় থেকে ওপরে নিচে আন্দোলিত হতে থাকে, কিন্তু কণাগুলো তরঙ্গের সঙ্গে এগিয়ে যায় না। পানিতে ভাসমান পাতা বা কাগজের টুকরোর গতি থেকে এই কথা স্পষ্ট বোঝা যায়। আবার তরঙ্গ এগিয়ে যাবার সাথে সাথে স্থির পানির কণাগুলি দুলতে শুরু করে— এই কথার অর্থ হলো তরঙ্গ প্রতিটি পানিকণায় কিছু পরিমাণ শক্তি সঞ্চালিত করে। সুতরাং বলা যায় যে— ঢিলটি পানিতে পড়ে সেই জায়গার পানিকণাগুলিকে যে শক্তি দিয়েছিল, সেই শক্তি তরঙ্গ আকারে এক জায়গা থেকে অন্য জায়গায় ছড়িয়ে পড়েছে [চিত্র ৯.২]।

৯.১.১ শব্দ তরঙ্গের উৎপত্তি
Production of sound wave

তোমরা যদি কখনও পুকুরে বা লেকের পানিতে ঢিল নিক্ষেপ কর তাহলে দেখবে যেখানে ঢিলটি পানিকে স্পর্শ করেছে সেখানে একটি আলোড়ন সৃষ্টি হয়েছে। এই আলোড়ন এক বিন্দুতে স্থির না থেকে চারদিকে ছড়িয়ে পরছে। ঢিলটি যখন পানি স্পর্শ করে তখন ওই স্থানের পানি আন্দোলিত হয়। এই কণাগুলো আবার পাশের কণাগুলোকে আন্দোলিত করে। এভাবে আন্দোলন এক কণা থেকে অন্য কণায় ছড়িয়ে পড়ে এবং কিনারা পর্যন্ত বিস্তৃত হয়। এ আন্দোলনই হলো তরঙ্গ। সুতরাং তরঙ্গের নিম্নরূপ সংজ্ঞা দেওয়া যায় :

কোনো স্থিতিস্থাপক মাধ্যমের কণাগুলোর স্থানান্তর ছাড়া যে পর্যাবৃত্ত আন্দোলনের দ্বারা এক স্থান হতে অন্য স্থানে শক্তি সঞ্চালিত হয় তাকে তরঙ্গ বলে।

৯.৩ চিত্রে পর্যায়বৃত্ত আন্দোলন দ্বারা তরঙ্গের উৎপত্তি দেখান হলো। **শব্দ উৎপত্তির মূল উৎসই বস্তুর কম্পন।** বস্তুতে যতক্ষণ কম্পন থাকে ততক্ষণই এর শব্দ নিঃসরণ হয়। এ শব্দ নিরবচ্ছিন্ন স্থিতিস্থাপক মাধ্যমের মধ্য দিয়ে আমাদের কানে পৌঁছে শ্রবণের অনুভূতি জন্মায়।



চিত্র ৯.৩

আমাদের দৈনন্দিন অভিজ্ঞতা থেকেও শব্দের উৎপত্তি ও প্রকৃতি বুঝতে পারি। যেমন কোনো ধাতব পদার্থ মেঝেতে পড়ে গেলে বা ধাতব পদার্থকে কোনো ধাতব দণ্ড দিয়ে আঘাত করলে শব্দের সৃষ্টি হয়; কিন্তু হাত বা শক্ত কিছু দিয়ে চেপে ধরলে শব্দ বন্ধ হয়ে যায়। বাঁশিতে ফুঁ দিয়ে কিংবা বাদ্যযন্ত্রের তারে টান দিয়ে বা ঢাক-ঢোলের চামড়ার পর্দা কাঁপিয়ে শব্দ সৃষ্টি করা হয়। সুতরাং বুঝা যাচ্ছে যে কম্পন থেকেই শব্দ সৃষ্টি হয়। এই কম্পন মাধ্যমে তরঙ্গের সৃষ্টি করে যা আমাদের কানের পর্দাকেও আন্দোলিত করে এবং আমরা শব্দ শুনতে পাই।

সিদ্ধান্ত : কোনো বস্তুর কম্পনের দরুন শব্দ উৎপন্ন হয়। সর্বপ্রকার শব্দ উৎপত্তির মূল উৎস বস্তুর কম্পন। কম্পনের ফলে যান্ত্রিক শক্তি হতে শব্দ উৎপন্ন হয়।

নিজে কর : শব্দের বিস্তারের জন্য জড় মাধ্যমের প্রকৃতি কেমন হওয়া দরকার ?

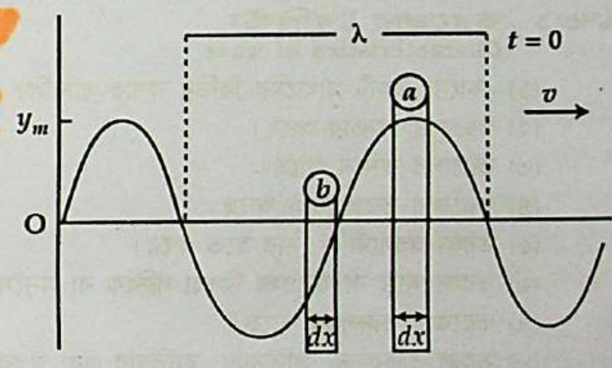
শব্দের বিস্তারের জন্য জড় মাধ্যমকে স্থিতিস্থাপক এবং অবিচ্ছিন্ন হতে হবে। অস্থিতিস্থাপক মাধ্যম অধিক দূরত্বে শব্দকে সঞ্চালিত করতে পারে না, যেহেতু খুব দ্রুত শক্তির অবক্ষয় হয়। তাছাড়া বিচ্ছিন্ন বস্তু যেমন ধুলো, পশম ইত্যাদি শব্দ প্রেরণের পক্ষে অত্যন্ত কুপরিবাহী।

৯·২ তরঙ্গ ও শক্তি
Wave and energy

কম্পনশীল বস্তুর আঘাতে এর সংলগ্ন মাধ্যমের কণা সাম্যাবস্থানের দুদিকে এদিক-ওদিক (to and fro) সরল দোলন গতিতে কাঁপতে থাকে। ওইসব বায়ুকণা তাদের পাশের কণাকে একই জাতীয় কম্পনে কম্পিত করে। এভাবেই পরপর কণা থেকে কণাতে কম্পন স্থানান্তর হতে থাকে, অর্থাৎ শব্দ উৎস থেকে তরঙ্গ বিস্তারের অভিমুখে কম্পনরত কণার একটি শৃঙ্খল তৈরি হয় এবং শেষ পর্যন্ত শ্রোতার কানে কম্পন আঘাত করে।

সুতরাং শব্দ উৎস হতে প্রাপ্ত শক্তি কণা থেকে কণাতে স্থানান্তরিত হয়ে অবশেষে শ্রোতার কানে পৌছায়; কিন্তু মাধ্যমের কণার কোনো স্থায়ী স্থানচ্যুতি ঘটে না।

জড় মাধ্যমের ভেতর দিয়ে তরঙ্গের বিস্তারের সময় মাধ্যমের কণাগুলি আন্দোলিত হয়, ফলে শক্তির স্থানান্তর ঘটে। ওই শক্তির কিছু অংশ গতিশক্তি ও বাকি অংশ স্থিতিশক্তি; যদিও মোট শক্তি সর্বত্র সমান। তরঙ্গ মাধ্যমের মধ্য দিয়ে সঞ্চালিত হলে মাধ্যমের কণাগুলো সরল দোলন গতি লাভ করে [চিত্র ৯·৪]। শক্তি সঞ্চালনে কণাগুলো সরাসরি ভূমিকা পালন করে না এবং কণাগুলো স্থায়ীভাবে স্থানচ্যুতও হয় না। পক্ষান্তরে তরঙ্গ সঞ্চালনে মাধ্যমের প্রয়োজন না হলে শক্তি স্থানান্তরে কণার কোনো ভূমিকাই থাকে না। পানির ওপর একটি শোলা বা পাটকাঠি থাকলে দেখা যাবে যে, শোলা বা কাঠিটি একই স্থানে থেকে ওপরে-নিচে উঠানামা করছে। এর অর্থ হলো মাধ্যমের কণাগুলো স্থান ত্যাগ করে না, যদি করত তবে শোলা বা কাঠিটি সরে পাড়ে চলে আসত। মাধ্যমের কণাগুলোর মধ্যে সংসক্তি বলের কারণে এগুলো স্থান ত্যাগ করে না; তবে আন্দোলনের দ্বারা পার্শ্ববর্তী কণাগুলোতে শক্তি সঞ্চালিত হয় বলে পাশের কণাগুলো আন্দোলিত হয়। এভাবে শক্তি তরঙ্গাকারে এক স্থান হতে অন্য স্থানে সঞ্চালিত হয়।



চিত্র ৯·৪

তরঙ্গ শক্তির এক প্রকার রূপ তাই পানিতে ঢিল নিক্ষেপের সময় হাত থেকে শক্তি ঢিলে স্থানান্তরিত হয়। আবার যখন টানা দেয়া তারে একটি তরঙ্গকে স্থাপন করা হয় তখন প্রকৃতপক্ষে তারে তরঙ্গ সঞ্চালনের জন্য শক্তি সরবরাহ করা হয়। সুতরাং দেখা যায় যে, মাধ্যমে আন্দোলনের ফলে মাধ্যমের কণাসমূহে যে যান্ত্রিক শক্তির সৃষ্টি হয় তা কম্পনের মাধ্যমে এক স্থান হতে অন্য স্থানে সঞ্চালিত হয়। তরঙ্গ দ্বারা শক্তি এক স্থান থেকে অন্য স্থানে সঞ্চালিত হয়। এই তরঙ্গ এক স্থান থেকে অন্য স্থানে চলাচলের সময় গতিশক্তি ও স্থিতিস্থাপক স্থিতিশক্তি স্থানান্তরিত হয়।

গতিশক্তি (Kinetic energy) : মনে করি তারের একটি কণার ভর dm, যা আড় তরঙ্গরূপে সরল ছন্দিত গতিতে কম্পিত হচ্ছে। যখন তরঙ্গ এই কণাকে অতিক্রম করে তখন তা গতিশক্তি প্রাপ্ত হয় যার বেগ v। $y = 0$ অবস্থানে কণার অবস্থানের জন্য আড় কম্পনের বেগ তথা গতিশক্তি সর্বাধিক হয় [চিত্র ৯.৪]। আবার কণাটির চূড়ান্ত অবস্থান $y = y_m$ অবস্থানে আড় কম্পনের বেগ তথা গতিশক্তি শূন্য বা সর্বনিম্ন হয়।

স্থিতিস্থাপক স্থিতিশক্তি (Elastic potential energy) : এখন একটি সাইন-তরঙ্গ পূর্বের টানা তারে সঞ্চালনের জন্য প্রয়োগ করা হলে তা তারটিতে চাপ (stress) প্রয়োগ করে। ৯·৪ চিত্র অনুযায়ী ধরি তারের ক্ষুদ্র dx অংশ আড়াআড়িভাবে কম্পিত হচ্ছে; কাজেই এই দৈর্ঘ্য dx বরাবর পর্যায়ক্রমিকভাবে সংকুচিত ও প্রসারিত হয়। সেক্ষেত্রে বলা যায় তারটি স্থিতিস্থাপক স্থিতিশক্তি লাভ করার জন্য দৈর্ঘ্য পরিবর্তিত হচ্ছে যেমনটি লক্ষ করা যায় একটি স্প্রিং-এর ক্ষেত্রে। যখন তারে কণার অবস্থান $y = y_m$ হয় তখন ক্ষুদ্রতম দৈর্ঘ্য dx অপরিবর্তিত থাকে এবং এই অবস্থানে

স্থিতিস্থাপক স্থিতিশক্তি সর্বাধিক হয়। আবার $y = 0$ অবস্থানে স্থিতিস্থাপক স্থিতিশক্তি সর্বনিম্ন (শূন্য) হয়। এভাবে কম্পিত তার গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি লাভ করে।

সম্প্রসারিত ক্রিয়াকর্ম : সরণ-সময় কিংবা সরণ-দূরত্ব লেখচিত্র তরঙ্গ আকৃতি দেখায়। এ থেকে মন্তব্য করা যায় যে শব্দ তরঙ্গ পথে বিস্তার লাভ করে।

আমরা যখন কথা বলি তখন উৎপন্ন শব্দ তরঙ্গ আকারে ছড়িয়ে পড়ে। প্রকৃতপক্ষে, একটি শব্দসৃষ্টিকারী উৎসের কম্পনে পর্যায়ক্রমে মাধ্যমে সংকোচন ও প্রসারণ সৃষ্টি হয় এবং তরঙ্গ সমবেগে চারদিকে ছড়িয়ে যায়। একটি পূর্ণ কম্পনকালের মধ্যে মাধ্যমের কোনো কণার সরণ-সময় লেখচিত্র কিংবা তরঙ্গের বিস্তারের অভিমুখে নির্দিষ্ট সময় বিভিন্ন কণার সরণ-দূরত্ব লেখচিত্র অঙ্কন করলে লেখচিত্রগুলি তরঙ্গ আকারের হবে।

৯·৩ তরঙ্গ
Wave

পূর্বের আলোচনা থেকে জেনেছি, যে পর্যাবৃত্ত আন্দোলন কোনো জড় মাধ্যমের এক স্থান থেকে অন্য স্থানে শক্তি সঞ্চলিত করে, কিন্তু মাধ্যমের কণাগুলো স্থায়ীভাবে স্থানান্তরিত করে না তাই তরঙ্গ। তরল বা গ্যাসীয় এবং কঠিন মাধ্যমে যে তরঙ্গের উদ্ভব হয় তা যান্ত্রিক তরঙ্গ। যান্ত্রিক তরঙ্গ সঞ্চালনের জন্য স্থিতিস্থাপক মাধ্যমের প্রয়োজন। তবে তড়িৎ চৌম্বক তরঙ্গ সঞ্চালনের জন্য কোনো মাধ্যমের প্রয়োজন হয় না। তরঙ্গ ও শক্তি কী ? তাও জেনেছি। এবার তরঙ্গের বৈশিষ্ট্যগুলি জানা দরকার। তাহলে আমরা বিভিন্ন প্রকার তরঙ্গের প্রকৃতি জানতে সক্ষম হব।

৯·৩·১ তরঙ্গের বৈশিষ্ট্য
Characteristics of wave

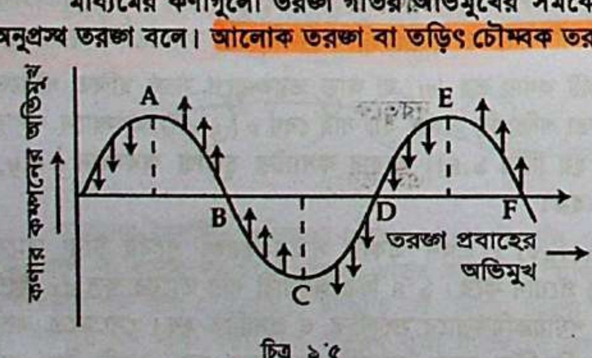
(১) কোনো একটি মাধ্যমের বিভিন্ন কণার সম্মিলিত কম্পনের ফলশ্রুতিই হলো তরঙ্গ।
(২) তরঙ্গের বিস্তার আছে।
(৩) তরঙ্গের কম্পন আছে।
(৪) তরঙ্গের তরঙ্গদৈর্ঘ্য আছে।
(৫) তরঙ্গ অগ্রগামী ও স্থির হতে পারে।
(৬) তরঙ্গ আড় বা অনুপ্রস্থ কিংবা লম্বিক বা অনুদৈর্ঘ্য হতে পারে।
(৭) তরঙ্গের তরঙ্গমুখ আছে।
(৮) তরঙ্গ প্রতিফলন, প্রতিসরণ, ব্যতিচার এবং অপবর্তন ঘটায়।
(৯) তরঙ্গ এক স্থান থেকে অন্য স্থানে শক্তি সঞ্চালিত করে।

৯·৩·২ তরঙ্গের প্রকারভেদ
Types of waves

মাধ্যমের কণাগুলো সরল দোল গতিতে কম্পিত হলে যে তরঙ্গের সৃষ্টি হয় তাকে **সরল দোল তরঙ্গ** (Simple harmonic wave) বা **সাইন তরঙ্গ** (Sine wave) বলে। সরল দোল তরঙ্গ আবার দুই প্রকারের। যথা—(১) আড় তরঙ্গ বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গ (Transverse wave) এবং (২) লম্বিক তরঙ্গ বা অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ (Longitudinal wave)।

১. আড় তরঙ্গ বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গ
Transverse wave

মাধ্যমের কণাগুলো তরঙ্গ গতির অভিমুখের সমকোণে কম্পিত হতে থাকলে সেই তরঙ্গকে আড় তরঙ্গ বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গ বলে। আলোক তরঙ্গ বা তড়িৎ চৌম্বক তরঙ্গ হলো অনুপ্রস্থ তরঙ্গ।



চিত্র ৯.৫

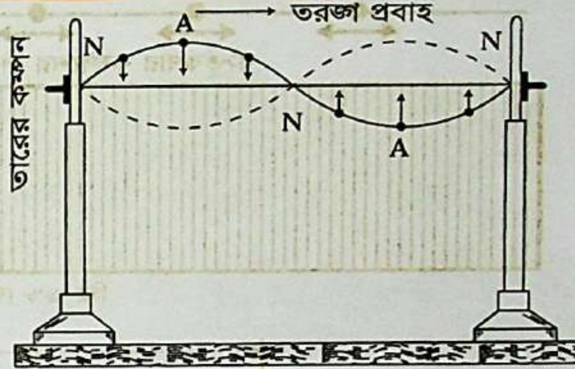
ব্যাখ্যা : চিত্র ৯·৫-এ একটি অনুপ্রস্থ তরঙ্গ দেখানো হয়েছে। তরঙ্গের উপর ছোট ছোট তীর চিহ্ন দ্বারা কণার কম্পনের অভিমুখ দেখানো হয়েছে। তরঙ্গের ওপরের দিকে A ও E বিন্দুতে কণার সর্বোচ্চ সরণ ঘটেছে। তরঙ্গের এই বিন্দুগুলোকে **তরঙ্গ শীর্ষ** বা **তরঙ্গ চূড়া** (Crest) বলে। আবার নিচের দিকে C বিন্দুতে সর্বোচ্চ সরণ ঘটেছে। একে **তরঙ্গ পাদ** বা **তরঙ্গ খাঁজ** (Trough) বলে।

এক্ষেত্রে কণার স্পন্দনের অভিমুখ তরঙ্গ প্রবাহের অভিমুখের সমকোণে ঘটেছে। অতএব এটা আড় তরঙ্গ।

উদাহরণ :

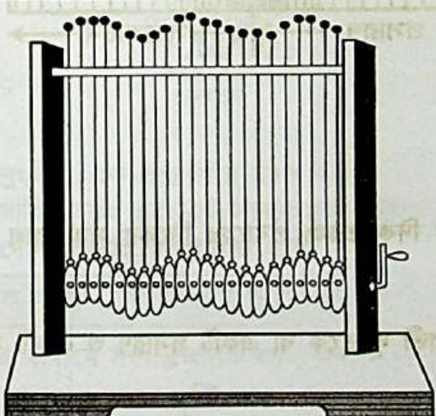
(১) পুকুরের পানিতে ঢিল ছুঁড়লে দেখা যায় যে পানির কণাগুলো ওপরে-নিচে দুলতে থাকে এবং এই আন্দোলন কিনারার দিকে অগ্রসর হতে থাকে। সৃষ্ট এরূপ আন্দোলনই আড় তরঙ্গ বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গ।

(২) একটি তার টান করে বেঁধে এর দৈর্ঘ্যের সমকোণে টেনে ছেড়ে দিলে তারে একটি তরঙ্গের সৃষ্টি হবে [চিত্র ৯.৬]। লক্ষ করলে দেখা যাবে যে, তারটি এর দৈর্ঘ্যের সাথে সমকোণে আন্দোলিত হচ্ছে। এই আন্দোলন তারের দৈর্ঘ্য বরাবর প্রবাহিত হচ্ছে। সুতরাং টানা তারের এরূপ কম্পন হতে স্পষ্ট যে, এই তরঙ্গ আড় তরঙ্গ।



চিত্র ৯.৬

> **পরীক্ষণ : আড় তরঙ্গ প্রদর্শন (Demonstration of transverse wave) :** পরীক্ষায় সমান দৈর্ঘ্যের কতকগুলো দণ্ড নেয়া হয় যাদের প্রত্যেকের এক মাথায় একটি করে বল এবং অপর মাথায় একটি করে চাকা যুক্ত আছে [চিত্র ৯.৭]। চাকাগুলো একটি হাতলযুক্ত ঘূর্ণনক্ষম দণ্ডের সাথে এমনভাবে লাগানো আছে যে চাকাগুলো কম-বেশি উৎকেন্দ্রিক (eccentric) অবস্থায় থাকে অর্থাৎ দণ্ডগুলো এক এক চাকার এক এক স্থান দিয়ে পরানো থাকে এবং দণ্ডগুলো খাড়াভাবে অবস্থান করে।



চিত্র ৯.৭

হাতল ঘুরালে চাকাগুলোও ঘুরতে থাকে এবং দণ্ডগুলো উঠা-নামা করে। চাকাগুলো কম-বেশি উৎকেন্দ্রিক হওয়ায় বিভিন্ন দণ্ডের উপরের প্রান্তের বলগুলো একসঙ্গে ওপরে ওঠে না বা নিচে নামে না; পর্যায়ক্রমে উঠা-নামা করে। ভালোভাবে লক্ষ করলে দেখা যাবে যে বলগুলো যেদিকে উঠা-নামা করে তার সমকোণে তরঙ্গ প্রবাহিত হচ্ছে। সুতরাং এস্থলে উদ্ভূত তরঙ্গ আড় তরঙ্গ।

আড় বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গের বৈশিষ্ট্য
Characteristics of transverse wave

আড় তরঙ্গের মধ্যে নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্য পরিলক্ষিত হয়—

১। যে তরঙ্গের ক্ষেত্রে জড় মাধ্যমের কণাগুলির কম্পনের দিক তরঙ্গ প্রবাহের দিকের সমকোণী হয়, তাকে আড় তরঙ্গ বলে।

২। তরঙ্গ প্রবাহে মাধ্যমে তরঙ্গ শীর্ষ এবং তরঙ্গ পাদ সৃষ্টি হয়।

৩। পর পর দুটি তরঙ্গ শীর্ষ বা পর পর দুটি তরঙ্গ পাদের মধ্যবর্তী দূরত্বকে তরঙ্গদৈর্ঘ্য বলে।

৪। আড় তরঙ্গের দরুন মাধ্যমে এর সমবর্তন বা পোলারণ ঘটে।

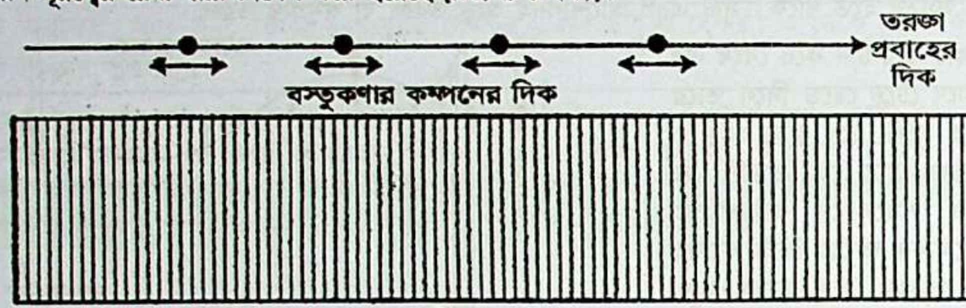
৫। অনম্যতার বা আকৃতির স্থিতিস্থাপক ধর্মসম্পন্ন মাধ্যমে (কঠিন) এই তরঙ্গ উৎপন্ন হয়।

৬। প্রবাহীতে পৃষ্ঠটানের দরুন আড় তরঙ্গের সৃষ্টি হয়।

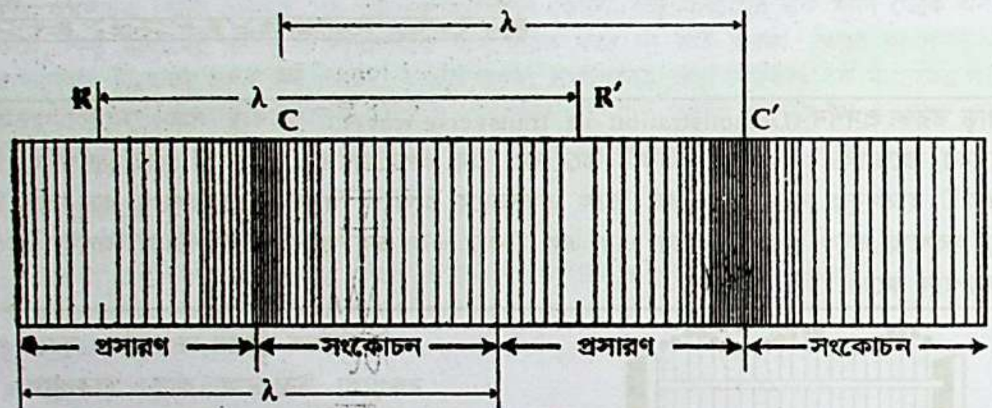
২. লম্বিক তরঙ্গ বা অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ
Longitudinal wave

মাধ্যমের কণাগুলো তরঙ্গের গতির অভিমুখের সমান্তরালে কম্পিত হতে থাকলে, সেই তরঙ্গকে লম্বিক তরঙ্গ বা অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ বলে। শব্দ তরঙ্গ, স্প্রিং-এ সৃষ্ট তরঙ্গ, ঢোলে বাড়ি দিলে সৃষ্ট তরঙ্গ এবং বাঁশির সুর অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ।

ব্যাখ্যা : চিত্র ৯·৮(খ)-এ অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ প্রবাহ দেখানো হয়েছে। মাধ্যমের বিভিন্ন স্তরের সাম্যাবস্থান কতগুলো সমান দূরত্বের রেখা দ্বারা নির্দেশ করা হয়েছে [চিত্র ৯·৮ (ক)]।



চিত্র ৯·৮ (ক)



চিত্র ৯·৮ (খ)

লম্বিক তরঙ্গের বৈশিষ্ট্য
Characteristics of longitudinal wave

১। যে তরঙ্গের ক্ষেত্রে জড় মাধ্যমের কণাগুলির কম্পনের দিক তরঙ্গ প্রবাহের দিকের সমান্তরাল হয় তাকে লম্বিক তরঙ্গ বলে।

২। তরঙ্গ প্রবাহে মাধ্যমে সংকোচন ও প্রসারণ সৃষ্টি হয়।

৩। পর পর দুটি সংকোচন বা পর পর দুটি প্রসারণের মধ্যবর্তী দূরত্বকে বা একটি প্রসারণ ও একটি সংকোচনের মিলিত দৈর্ঘ্যকে তরঙ্গদৈর্ঘ্য বলে।

৪। মাধ্যমে এর সমবর্তন বা পোলারণ ঘটে না।

৫। স্থিতিস্থাপক ধর্মসম্পন্ন মাধ্যমে এই তরঙ্গ উৎপন্ন হয়।

জানার বিষয় :

শব্দ—লম্বিক তরঙ্গ	আলোক তরঙ্গ—আড় তরঙ্গ
বাঁশির সুর—লম্বিক তরঙ্গ	পানি তরঙ্গ—আড় তরঙ্গ
ঢোলের বাড়ির শব্দ—লম্বিক তরঙ্গ	এক্সরে—আড় তরঙ্গ
স্প্রিং-এ সৃষ্ট তরঙ্গ—লম্বিক তরঙ্গ	টানা তারের তরঙ্গ—আড় তরঙ্গ

৯·৩·৬ তরঙ্গ সঞ্চালন প্রক্রিয়া
Process of transferring or moving waves

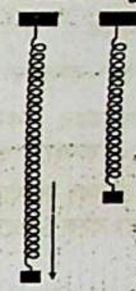
মাধ্যমের ভেতর দিয়ে লম্বিক তরঙ্গ প্রবাহিত হতে থাকলে যে কোনো সময়ে স্তরগুলোর অবস্থান কীরূপ হবে তা ৯·৮(খ) চিত্রে দেখানো হয়েছে। অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের ক্ষেত্রে মাধ্যমের কণাগুলো সাম্যাবস্থানের উভয় পার্শ্বে তরঙ্গের গতিপথের সমান্তরালে কম্পিত হয়, ফলে তরঙ্গশীর্ষ বা তরঙ্গপাদ সৃষ্টি হয় না। এক্ষেত্রে কম্পনের সময় কিছু কিছু স্থানে কণাগুলো কাছাকাছি চলে আসে আবার কোথাও দূরে সরে যায়। কণাগুলো কাছাকাছি আসায় মাধ্যমের সংকোচন (compression) হয় এবং কণাগুলো সরে গেলে মাধ্যমের প্রসারণ (rarefaction) হয়। চিত্রে রেখাগুলোর মধ্যবর্তী দূরত্ব কম দ্বারা সংকোচন এবং রেখাগুলোর দূরত্ব বৃদ্ধি দ্বারা সম্প্রসারণ বুঝানো হয়েছে। সংকোচনের স্থানগুলোতে মাধ্যমের ঘনত্ব ও চাপ বেড়ে যায় এবং প্রসারণের স্থানগুলোতে মাধ্যমের ঘনত্ব ও চাপ কমে যায়। এভাবে মাধ্যমের কণাগুলোর সংকোচন ও প্রসারণের মধ্য দিয়ে অনুদৈর্ঘ্য বা লম্বিক তরঙ্গ সঞ্চালিত হয়। পাশাপাশি একটি সংকোচন ও একটি প্রসারণ নিয়ে একটি তরঙ্গদৈর্ঘ্য গঠিত হয়।

উদাহরণ :

(১) কথা বলার সময় আমরা জিহ্বার সাহায্যে মুখের মধ্যকার বায়ুকণাতে কম্পন সৃষ্টি করি। বায়ুকণাগুলোর কম্পনের দিক শব্দ তরঙ্গের গতির অভিমুখে সংঘটিত হয়। অতএব শব্দ লম্বিক তরঙ্গ। বক্তা বা গায়কের মুখ হতে শব্দ বায়ু মাধ্যমে সঙ্কোচন ও প্রসারণ সৃষ্টি করে লম্বিক তরঙ্গের আকারে শ্রোতার কানে পৌঁছায়।

(২) একটি স্প্রিং খাড়াভাবে ঝুলিয়ে দিয়ে এর নিচের প্রান্ত খানিকটা নিচের দিকে টেনে ছেড়ে দিলে দেখা যাবে যে স্প্রিং-এর কুণ্ডলী পর্যায়ক্রমে সংকুচিত ও প্রসারিত হতে থাকে [চিত্র ৯.৯] এবং এই স্পন্দন তারের দৈর্ঘ্য বরাবর প্রবাহিত হয়।

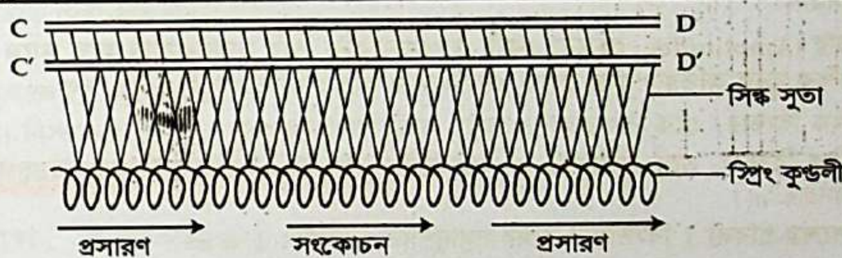
অর্থাৎ, কুণ্ডলীগুলো সরল দোলন গতিতে তরঙ্গের গতির সমান্তরালে আন্দোলিত হচ্ছে। সুতরাং স্প্রিং-এ সৃষ্ট এই তরঙ্গ লম্বিক তরঙ্গ।



চিত্র ৯.৯

অনুশীলন : একটি স্প্রিংকে খাড়াভাবে ঝুলিয়ে দাও। এবার স্প্রিংটিকে টেনে ছেড়ে দাও। কী দেখতে পাচ্ছ? স্প্রিংটি কি আগের অবস্থায় আছে, না কি কোনো পরিবর্তন লক্ষ করতে পারছ ?

পরীক্ষণ : লম্বিক বা অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ প্রদর্শন (Demonstration of longitudinal wave) : পরীক্ষায় একটি সরু তারের স্প্রিং নিয়ে এর প্রত্যেক কুণ্ডলীকে দুটি অনুভূমিক দণ্ড CD ও C′D′ হতে V-আকারে সিল্ক সুতা দ্বারা এমনভাবে ঝুলাও যাতে তারটি অনুভূমিক থাকে [চিত্র ৯.১০]।



চিত্র ৯.১০

এই স্প্রিং-এর এক প্রান্ত ধরে হঠাৎ অনুভূমিকভাবে ধাক্কা দিলে দেখা যাবে যে, তারের কুণ্ডলীগুলো পর্যায়ক্রমে সঙ্কুচিত ও প্রসারিত হচ্ছে এবং এই স্পন্দন ক্রমে ক্রমে তার বরাবর এগিয়ে যাচ্ছে। অর্থাৎ কুণ্ডলীগুলো তরঙ্গ প্রবাহের দিকেই সরল দোল গতিতে আন্দোলিত হচ্ছে। সুতরাং উদ্ভূত তরঙ্গই লম্বিক তরঙ্গ।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : বায়ু মাধ্যমে আড় তরঙ্গ সৃষ্টি হতে পারে কী ? — ব্যাখ্যা কর।

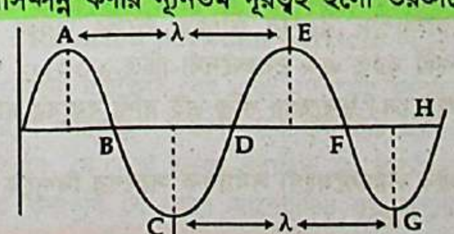
গ্যাসীয় মাধ্যমে সংশক্তিজনিত ধর্ম দেখা যায় না। তাছাড়া বায়ু মাধ্যমের দৃঢ়তা গুণাঙ্ক (rigidity modulus) শূন্য। তাই বায়ু মাধ্যমে আড় তরঙ্গ সৃষ্টি হতে পারে না। বায়ু মাধ্যমে শুধুমাত্র অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ বিস্তার লাভ করতে পারে।

৯.৩.৪ তরঙ্গ সংক্রান্ত কয়েকটি ভৌত রাশির সংজ্ঞা
Definition of some physical quantities related to wave

তরঙ্গ সংক্রান্ত কয়েকটি রাশির সংজ্ঞা নিম্নে দেয়া হলো :

১. **পূর্ণ কম্পন (Complete oscillation) :** কম্পমান বস্তু একটি বিন্দু হতে যাত্রা শুরু করে আবার একই দিক হতে সে বিন্দুতে ফিরে এলে একে পূর্ণ কম্পন বলে।

২. **তরঙ্গদৈর্ঘ্য (Wavelength) :** তরঙ্গ সৃষ্টিকারী কোনো কম্পনশীল কণার একটি পূর্ণ কম্পন সম্পন্ন করতে যে সময় লাগে, ওই সময়ে তরঙ্গ যে দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে তরঙ্গদৈর্ঘ্য বলে। তরঙ্গের উপরিস্থিত পরপর দুটি সমদশাসম্পন্ন কণার ন্যূনতম দূরত্বই হলো তরঙ্গদৈর্ঘ্য। একে λ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।



চিত্র ৯.১১

আড় তরঙ্গের ক্ষেত্রে পরপর দুটি তরঙ্গশীর্ষ বা পরপর দুটি তরঙ্গ পাদ-এর মধ্যবর্তী দূরত্বকে তরঙ্গদৈর্ঘ্য বলে। চিত্র ৯.১১-এ AE বা BF বা CG আড় তরঙ্গের ক্ষেত্রে তরঙ্গদৈর্ঘ্য এবং চিত্র ৯.৮(খ)-এ RR′ বা CC′ লম্বিক তরঙ্গের ক্ষেত্রে তরঙ্গদৈর্ঘ্য।

কোনো একটি মাধ্যমে বিভিন্ন শব্দের তরঙ্গদৈর্ঘ্য বিভিন্ন। একই শব্দের তরঙ্গদৈর্ঘ্য বিভিন্ন মাধ্যমেও বিভিন্ন।

৩. কম্পাঙ্ক বা স্পন্দন সংখ্যা (Frequency) : কোনো একটি কম্পমান বস্তু বা কণা এক সেকেন্ডে যতগুলো পূর্ণ কম্পন সম্পন্ন করে তাকে তার কম্পাঙ্ক বা স্পন্দন সংখ্যা বলে।

কম্পাঙ্ক n বা f দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

কোনো বস্তু বা কণা t সময়ে N সংখ্যক কম্পন সম্পন্ন করলে কম্পাঙ্ক, f বা $n = \frac{N}{t}$

কম্পাঙ্কের একককে হার্টজ (Hertz সংক্ষেপে Hz) বলে। অনেক সময় সাইকেল/সেকেন্ড (cs^{-1}) এককও ব্যবহার করা হয়। N কম্পনে তরঙ্গের অতিক্রান্ত দূরত্ব s হলে $s = N\lambda$.

৪. তরঙ্গ সংখ্যা (Wave number) : একক দৈর্ঘ্যের মধ্যে যে কয়টি পূর্ণ তরঙ্গ থাকে তাকে ওই তরঙ্গের তরঙ্গ সংখ্যা বলে। একে $\bar{\upsilon}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। তরঙ্গসংখ্যা ও তরঙ্গদৈর্ঘ্যের মধ্যে সম্পর্ক হলো,

$$\bar{\upsilon} = \frac{1}{\lambda}$$

৫. দোলনকাল বা পর্যায়কাল (Time period) : কোনো একটি কম্পমান বস্তু একটি পূর্ণ কম্পন সম্পন্ন করতে যে সময় নেয়, তাকে এর দোলনকাল বা পর্যায়কাল বলে। একে T দ্বারা প্রকাশ করা হয়। মনে করি t সেকেন্ডে একটি উৎস Nটি পূর্ণ কম্পন সম্পন্ন করে।

$\therefore$ দোলনকাল, $T = \frac{t}{N}$ এবং কম্পাঙ্ক, $n = \frac{N}{t}$

চিত্র ৯.১১-এ তরঙ্গের B হতে F বা D হতে H-এ যেতে ব্যয়িত সময়ই পর্যায়কাল বা দোলনকাল।

বিভিন্ন তরঙ্গের পর্যায়কাল বা কম্পাঙ্ক একই মাধ্যমে বিভিন্ন। কিন্তু একই তরঙ্গের কম্পাঙ্ক বা পর্যায়কাল বিভিন্ন মাধ্যমে সমান।

৬. বিস্তার (Amplitude) : কোনো একটি কম্পমান বস্তু তার সাম্যাবস্থান হতে ডানে বা বামে অথবা ওপরে বা নিচে যে সর্বাধিক দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে এর বিস্তার বলে। বিস্তার দুই প্রকার, যথা—

(ক) রৈখিক বিস্তার; একে সাধারণত 'a' দ্বারা সূচিত করা হয় এবং

(খ) কৌণিক বিস্তার; একে সাধারণত 'θ' দ্বারা সূচিত করা হয়। চিত্র ৯.১১-এ BF হতে E বা C বা A-এর লম্ব দূরত্বই রৈখিক বিস্তার 'a'।

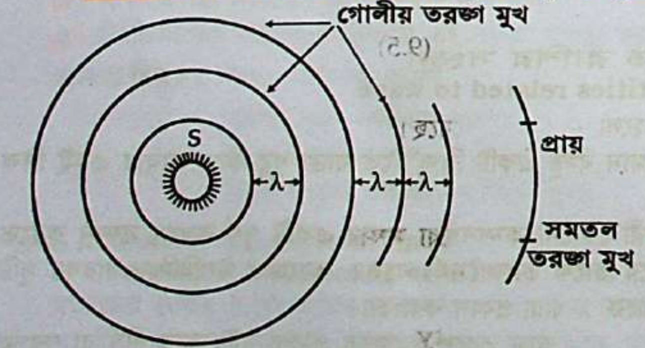
কোনো শব্দের প্রাবল্য I বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক। অর্থাৎ $I \propto a^2$

৭. দশা (Phase) : দশা কোনো একটি কম্পমান বস্তুর কোনো মুহূর্তের দোলনের অবস্থা প্রকাশ করে। আরও বিস্তারিতভাবে বলা যায়—তরঙ্গাস্থিত কোনো একটি কণার কোনো মুহূর্তের অবস্থান এবং তার গতির অবস্থা ও দিক যার দ্বারা নির্দেশ করা হয় তাকে দশা বলে। λ দূরত্বে দুটি কণার দশা পার্থক্য 2π। চিত্র ৯.১১-এ A ও E এবং C ও G একই দশাসম্পন্ন। আবার A ও C এবং E ও G বিপরীত দশাসম্পন্ন।

৮. আদি দশা (Epoch) : কোনো একটি কম্পমান বস্তু যে দশা নিয়ে কম্পন শুরু করে, তাকে আদি দশা বলে।

৯. তরঙ্গ বেগ (Wave velocity) : কোনো একটি তরঙ্গ কোনো মাধ্যমে এক সেকেন্ডে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে সেই মাধ্যমের তরঙ্গ বেগ বলে। একে v দ্বারা সূচিত করা হয়।

মাধ্যম ভেদে একই শব্দের বেগ বিভিন্ন। কিন্তু বিভিন্ন শব্দের বেগ একই মাধ্যমে সমান।



চিত্র ৯.১২

১০. তরঙ্গ মুখ (Wave front) : কোনো তরঙ্গের ওপরিস্থিত সমদশাসম্পন্ন কণাগুলো যে তলে অবস্থান করে সেই তলকে তরঙ্গ মুখ বলে। যেমন পানির তরঙ্গ শীর্ষে অবস্থিত সব কণার দশা একই। তেমনি এর তরঙ্গ পাদে অবস্থিত সব কণার দশাও একই। কাজেই তরঙ্গ শীর্ষ বরাবর অঙ্কিত তল হবে একটি তরঙ্গ মুখ এবং তরঙ্গ পাদ বরাবর অঙ্কিত তল হবে আর একটি তরঙ্গ মুখ। পরপর দুটি তরঙ্গ শীর্ষ বা তরঙ্গপাদ বরাবর অঙ্কিত তলের তরঙ্গ মুখের মধ্যবর্তী দূরত্ব এক তরঙ্গদৈর্ঘ্য [চিত্র ৯.১২]।

১১. রশ্মি (Rays) : তরঙ্গ মুখের ওপর অঙ্কিত অভিলম্বকে রশ্মি বলে। তরঙ্গের শক্তি এই রশ্মি বরাবর মাধ্যমের এক অংশ থেকে অন্য অংশে স্থানান্তরিত হয়।

১২. তরঙ্গ শীর্ষ (Crest) : আড় তরঙ্গের ক্ষেত্রে এর ধনদিকে এক তরঙ্গদৈর্ঘ্যে সর্বাধিক সরণের বিন্দুকে তরঙ্গ শীর্ষ বলে [চিত্র ৯.১১-এ A ও E বিন্দু]।

১৩. তরঙ্গ পাদ (Trough) : আড় তরঙ্গের ক্ষেত্রে এর ঋণদিকে এক তরঙ্গদৈর্ঘ্যে সর্বাধিক সরণের বিন্দুকে তরঙ্গ পাদ বলে [চিত্র ৯.১১-এ C বিন্দু]।

১৪. তীক্ষ্ণতা বা পীচ (Pitch) : শব্দের যে বৈশিষ্ট্য দ্বারা কোন সুর চড়া ও কোন সুর মোটা তা বুঝা যায় তাকে তীক্ষ্ণতা বা পীচ বলে।

১৫. জাতি বা গুণ (Quality) : যে বৈশিষ্ট্য দ্বারা দুটি ভিন্ন উৎস হতে নির্গত শব্দের তীব্রতা ও তীক্ষ্ণতা এক হলেও তাদের একটিকে অন্যটি হতে পৃথক করা যায়, তাকে তার জাতি বা গুণ বলে।

১৬. তরঙ্গের তীব্রতা (Intensity of wave) : কোনো তরঙ্গের সমকোণে একক ক্ষেত্রফলের মধ্য দিয়ে এক সেকেন্ডে যে পরিমাণ শক্তি প্রবাহিত হয় তাকে ওই তরঙ্গের তীব্রতা বলে। একে মাধ্যমের শক্তি প্রবাহও (energy current or energy flux) বলা হয়। একে I দ্বারা সূচিত করা হয়।

তরঙ্গের তীব্রতা, I = শক্তি ঘনত্ব × তরঙ্গ বেগ

গাণিতিকভাবে দেখানো যায় যে,

$$I = 2\rho\pi^2 a^2 n^2 v \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9.1)$$

এখানে,

ρ মাধ্যমের ঘনত্ব

n তরঙ্গের কম্পাঙ্ক

a তরঙ্গের বিস্তার এবং

v তরঙ্গের বেগ।

সমীকরণ (9.1) হতে দেখা যায় যে,

$$I \propto a^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9.2)$$

বা, $I = Ka^2$, এখানে K ধ্রুবক।

অর্থাৎ তীব্রতা (I) বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক।

এস. আই. পদ্ধতিতে তীব্রতার একক $Js^{-1}m^{-2}$ বা Wm^{-2}।

৯·৪ তরঙ্গ বেগ, তরঙ্গদৈর্ঘ্য এবং কম্পাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক

Relation among wave velocity or speed, wavelength and frequency

মনে করি, কোনো মাধ্যমে কোনো একটি তরঙ্গের বেগ = v, তরঙ্গ উৎসের কম্পাংক = n এবং তরঙ্গদৈর্ঘ্য = λ। তাদের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করতে হবে। যেহেতু v তরঙ্গ বেগ,

অতএব আমরা পাই,

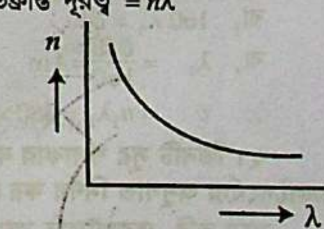
v = তরঙ্গ কর্তৃক এক সেকেন্ডের অতিক্রান্ত দূরত্ব ... ... (9.3)

পুনঃ, তরঙ্গদৈর্ঘ্য = λ, সুতরাং শব্দ উৎসের একটি পূর্ণ কম্পনে তরঙ্গ কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব = λ। কম্পাঙ্ক n হওয়ায় প্রতি সেকেন্ডে nটি পূর্ণ কম্পন সম্পন্ন হয়। অতএব nটি পূর্ণ কম্পনের জন্য অতিক্রান্ত দূরত্ব = $n\lambda$

∴ $n\lambda$ = তরঙ্গ কর্তৃক এক সেকেন্ডের অতিক্রান্ত দূরত্ব ... ... (9.4)

সমীকরণ (9.3) এবং (9.4) হতে পাই,

$$v = n\lambda \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9.5)$$



চিত্র ৯·১৩

অর্থাৎ তরঙ্গ বেগ = কম্পাঙ্ক × তরঙ্গদৈর্ঘ্য।

কম্পাঙ্ক ও তরঙ্গদৈর্ঘ্যের সম্পর্ক লেখচিত্র ৯·১৩ দ্বারা প্রকাশ করা হয়েছে।

এটিই হলো তরঙ্গ বেগ, কম্পাঙ্ক এবং তরঙ্গদৈর্ঘ্যের মধ্যে সম্পর্ক।

আবার, $v = n\lambda = \frac{1}{T} \times \lambda = \frac{\lambda}{T}$। ইহাই শব্দের বেগ এবং পর্যায়কালের মধ্যে সম্পর্ক।

৯·৪·১ কণার বেগ ও তরঙ্গ বেগের সম্পর্ক

Relation between particle velocity and wave velocity

কোনো তরঙ্গের বেগ এবং মাধ্যমের কণার বেগ এক নয়। মাধ্যমের কোনো বিন্দুতে আলোড়ন (disturbance) সৃষ্টি করলে আলোড়ন তরঙ্গাকারে প্রবাহিত হয়। আর মাধ্যমের কণাগুলি এদের সাম্যাবস্থানের সাপেক্ষে আন্দোলিত হয়। অতএব, যে বেগে তরঙ্গ প্রবাহিত হয় তাকে তরঙ্গ বেগ (wave velocity) বলে। পক্ষান্তরে তরঙ্গ বিস্তারের সময় মাধ্যমের কণাগুলি যে বেগে আন্দোলিত হয় তাকে কণার বেগ (particle velocity) বলে। কণার বেগ সাম্যাবস্থানে সর্বাধিক এবং প্রান্তিক অবস্থানে শূন্য হয়।

তরঙ্গ বেগ মাধ্যমের স্থিতিস্থাপকতা ও জড়তার ধর্মের ওপর নির্ভর করে।

কণার বেগ ও তরঙ্গ বেগের সম্পর্ক : একটি চলমান বা অগ্রগামী তরঙ্গ বিবেচনা করি,

$y = a \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$, এখানে v হলো তরঙ্গের বেগ, y হলো কণার সরণ। কণার বেগ পাওয়ার জন্য y-কে t এর সাপেক্ষে অবকলন করলে কণার বেগ পাওয়া যায়।

অতএব, কণার বেগ,

$$V = \frac{dy}{dt} = \frac{2\pi v}{\lambda} a \cos\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

আবার, $$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\pi}{\lambda} a \cos\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$$

সুতরাং, সমীকরণ (i) ও (ii) থেকে পাই,

$$V = -v\frac{dy}{dx} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (iii)$$

অর্থাৎ, কণার বেগ = – তরঙ্গ বেগ × সরণ বা দূরত্ব লেখচিত্রের নতিমাত্রা (gradient)।

গাণিতিক উদাহরণ ৯.১

১। কোনো মাধ্যমে 480 Hz এবং 320 Hz কম্পাঙ্কের দুটি শব্দের তরঙ্গদৈর্ঘ্যের পার্থক্য 2m হলে মাধ্যমে শব্দের বেগ কত হবে ? [দি. বো. ২০১০; ব. বো. ২০১০, ২০০৮; রা. বো. ২০০৬; সি. বো. ২০০৪; ঢা. বো. ২০০৩]

আমরা জানি,

$$v = n_1\lambda_1 = n_2\lambda_2$$

বা, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1}$

বা, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{320}{480}$

বা, $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2} = \frac{320}{480}$

বা, $480\,\lambda_1 = 320\,\lambda_1 + 640$

বা, $480\,\lambda_1 - 320\,\lambda_1 = 640$

বা, $160\,\lambda_1 = 640$

বা, $\lambda_1 = \frac{640}{160} = 4\,\text{m}$

$\therefore\ v = n_1\lambda_1 = 480 \times 4 = 1920\,\text{ms}^{-1}$

এখানে,
$n_1 = 480$ Hz
$n_2 = 320$ Hz
$\lambda_2 - \lambda_1 = 2$ m
$\therefore\ \lambda_2 = 2 + \lambda_1$
$v = ?$

২। তিনটি সুর শলাকার কম্পাঙ্ক যথাক্রমে 123, 369 এবং 615 Hz। এরা বায়ুতে যে তরঙ্গ সৃষ্টি করে তাদের তরঙ্গদৈর্ঘ্যের অনুপাত নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০১১; য. বো. ২০০৯; চ. বো. ২০০৯]

মনে করি, তরঙ্গদৈর্ঘ্য যথাক্রমে λ_1, λ_2 ও λ_3

আমরা পাই,

$\therefore\ v = n_1\lambda_1 = n_2\lambda_2 = n_3\lambda_3$

বা, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1}$ এবং $\frac{\lambda_1}{\lambda_3} = \frac{n_3}{n_1}$

$\therefore\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{369}{123} = \frac{3}{1} = \frac{3 \times 5}{1 \times 5} = \frac{15}{5}$ (ওপরে নিচে 5 দ্বারা গুণ করে)

বা, $\lambda_1 : \lambda_2 = 15 : 5 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$

আবার, $\frac{\lambda_1}{\lambda_3} = \frac{615}{123} = \frac{5}{1} = \frac{5 \times 3}{1 \times 3} = \frac{15}{3}$ (ওপরে নিচে 3 দ্বারা গুণ করে)

বা, $\lambda_1 : \lambda_3 = 15 : 3 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$

অতএব, $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = 15 : 5 : 3$

এখানে,
$n_1 = 123$ Hz
$n_2 = 369$ Hz
$n_3 = 615$ Hz

৩। বায়ু ও পানিতে 300 Hz কম্পাঙ্কের একটি শব্দের তরঙ্গদৈর্ঘ্যের পার্থক্য 4·16 m। বায়ুতে শব্দের বেগ 352 ms^{-1} হলে, পানিতে শব্দের বেগ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০১১; ঢা. বো. ২০০৯; কু. বো. ২০০৮, ২০০১; সি. বো. ২০০৭, ২০০১; চ. বো. ২০০৬]

মনে করি, পানিতে ও বাতাসে শব্দ তরঙ্গদৈর্ঘ্য যথাক্রমে λ_w ও λ_a

আমরা জানি,

$$\lambda_a = \frac{v_a}{n} = \frac{352}{300}$$

$$\lambda_w = \frac{v_w}{n} = \frac{v_w}{300}$$

প্রশ্নানুসারে,

$$\lambda_w - \lambda_a = \frac{v_w}{300} - \frac{352}{300}$$

বা, $4·16 = \frac{1}{300}(v_w - 352)$

বা, $v_w - 352 = 300 \times 4·16$

$\therefore \quad v_w = 300 \times 4·16 + 352 = 1600 \text{ ms}^{-1}$

এখানে,
$\lambda_w - \lambda_a = 4·16$ m
$n = 300$ Hz
$v_a = 352 \text{ ms}^{-1}$
$v_w = ?$

৪। 0·325m ব্যবধানে অবস্থিত তরঙ্গের দুটি কণার মধ্যে দশা পার্থক্য 3·14 rad। তরঙ্গ উৎসের কম্পাঙ্ক 512 Hz হলে মাধ্যমে তরঙ্গের বেগ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০১০]

ধরি মাধ্যমে তরঙ্গের বেগ $= v$

$\therefore$ আমরা পাই, দশা পার্থক্য $= \frac{2\pi}{\lambda} \times$ পথ পার্থক্য ... (i)

কাজেই সমীকরণ (i) অনুসারে,

$$3·14 \text{ rad} = \frac{2 \times 3·14 \text{ rad}}{\lambda} \times 0·325 \text{ m}$$

বা, $\lambda = 2 \times 0·325 \text{ m} = 0·65$ m

$\therefore$ নির্ণেয় বেগ, $v = n\lambda = 512 \text{ Hz} \times 0·65 \text{ m} = 332·8 \text{ ms}^{-1}$

এখানে,
পথ পার্থক্য $= 0·325$ m
দশা পার্থক্য $= 3·14$ rad
$n = 512$

৫। একটি শব্দ তরঙ্গ বায়ুতে 3 মিনিটে 1020 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে। এই শব্দ তরঙ্গের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য 50 cm হলে তরঙ্গের পর্যায়কাল কত ? [কু. বো. ২০০৩]

$$v = \frac{s}{t} = \frac{1020}{3 \times 60} = 5·67 \text{ ms}^{-1}$$

আবার, $v = n\lambda$

বা, $n = \frac{v}{\lambda} = \frac{5·67}{0·5} = 11·34$ Hz

পর্যায়কাল, $T = \frac{1}{n} = \frac{1}{11·34} = 0·09$ s

এখানে,
$t = 3$ মি. $= 3 \times 60$ সে.
$s = 1020$ মি.
$\lambda = 50$ cm $= 0·5$ m
$T = ?$

৬। কোনো একটি সীমাবদ্ধ মাধ্যমে সৃষ্ট স্থির তরঙ্গের কম্পাঙ্ক 480 Hz। তরঙ্গস্থ পরপর দুটি নিস্পন্দ বিন্দুর দূরত্ব 0·346 m। মাধ্যমে তরঙ্গের বেগ নির্ণয় কর। [দি. বো. ২০১১; য. বো. ২০১০; রা. বো. ২০০৯]

আমরা জানি,

পরপর দুটি নিস্পন্দ বিন্দুর দূরত্ব $= \frac{\lambda}{2}$

$\therefore \quad \frac{\lambda}{2} = 0·346$ m

বা, $\lambda = 0·346 \times 2 = 0·692$ m

তরঙ্গের বেগ, $v = n\lambda$

$\therefore \quad v = 480 \times 0·692 \text{ ms}^{-1} = 332·2 \text{ ms}^{-1}$

এখানে,
$n = 480$ Hz
পরপর দুটি নিস্পন্দ বিন্দুর দূরত্ব,
$\frac{\lambda}{2} = 0·346$
$v = ?$

৭। P ও Q দুটি মাধ্যমে শব্দের বেগ যথাক্রমে $300\ ms^{-1}$ এবং $350\ ms^{-1}$। মাধ্যম দুটিতে শব্দের তরঙ্গদৈর্ঘ্যের পার্থক্য = $0.1\ m$ হলে সুর শলাকার 50 কম্পনে শব্দ Q মাধ্যমে কত দূর যাবে ?

[য. বো. ২০০৬ ; কু. বো. ২০০৬; ঢা. বো. ২০০০]

যেহেতু 'Q' মাধ্যমে শব্দের বেগ বেশি তাই 'Q' মাধ্যমে সৃষ্ট তরঙ্গের তরঙ্গদৈর্ঘ্য 'P' মাধ্যমে সৃষ্ট তরঙ্গদৈর্ঘ্যের চেয়ে বড় হবে। অর্থাৎ $\lambda_Q > \lambda_P$

এখানে,
$v_P = 300\ ms^{-1}$
$v_Q = 350\ ms^{-1}$
$\lambda_Q - \lambda_P = 0.1\ m$
$N = 50$

$\therefore \quad \lambda_Q - \lambda_P = 0.1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$

আবার, $v_P = n\lambda_P$

বা, $300 = n\lambda_P \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$

আবার, $v_Q = n\lambda_Q$

বা, $350 = n\lambda_Q \quad \ldots \quad \ldots \quad (iii)$

(iii) হতে (ii) বিয়োগ করলে পাই,

$n(\lambda_Q - \lambda_P) = 50$

বা, $n = \dfrac{50}{\lambda_Q - \lambda_P} = \dfrac{50}{0.1} = 500\ Hz$

আবার, $s = N\lambda = N \times \dfrac{v}{n} = \dfrac{50 \times 350}{500} = 35\ m$

৮। দুটি সুর শলাকার কম্পাঙ্কের পার্থক্য 218 Hz। বাতাসে শলাকা দুটি যে তরঙ্গ উৎপন্ন করে, তাদের একটির দুটি পূর্ণ তরঙ্গদৈর্ঘ্য অপরটির তিনটি পূর্ণ তরঙ্গদৈর্ঘ্যের সমান। শলাকাদ্বয়ের কমাঙ্ক নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০০৯]

প্রথম সুরশালাকার তরঙ্গদৈর্ঘ্য ও কম্পাঙ্ক যথাক্রমে λ_1 ও n_1 এবং দ্বিতীয় সুরশালাকার তরঙ্গদৈর্ঘ্য ও কম্পাঙ্ক যথাক্রমে λ_2 ও n_2

এখানে,
$n_2 - n_1 = 218\ Hz$
প্রথম সুরশলাকার কম্পাঙ্ক, $n_1 = ?$
দ্বিতীয় সুরশলাকার কম্পাঙ্ক, $n_2 = ?$

প্রশ্নমতে,

$2\lambda_1 = 3\lambda_2$

$\therefore \quad \lambda_1 = \dfrac{3}{2}\lambda_2$

বাতাসে শব্দের বেগ, v হলে,

$v = n_1\lambda_1 = n_2\lambda_2$

$\therefore \quad n_1 \times \dfrac{3}{2}\lambda_2 = n_2\lambda_2$

বা, $n_1 = \dfrac{2}{3}n_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$

আবার, $n_2 - n_1 = 218\ Hz \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$

বা, $n_2 - \dfrac{2}{3}n_2 = 218$

$n_2 = 218 \times 3 = 654\ Hz$

$\therefore \quad n_1 = 654 - 218 = 436\ Hz$

৯। কোনো সুরশলাকা একটি মাধ্যমে 5 cm দৈর্ঘ্যের এবং $350\ ms^{-1}$ বেগের তরঙ্গ উৎপন্ন করে। অপর একটি মাধ্যমে তরঙ্গ বেগ যদি $332.5\ ms^{-1}$ হয় তবে ওই মাধ্যমে সুরশলাকার 100 কম্পনে শব্দ কতদূর যাবে ?

এখানে,
$\lambda_1 = 5\ cm = 0.05\ m$
$v_1 = 350\ ms^{-1}$
$v_2 = 332.5\ ms^{-1}$
$N = 100$
$s_2 = ?$

আমরা জানি,

$s_2 = N\lambda_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$

আবার,

$n = \dfrac{v_1}{\lambda_1} = \dfrac{v_2}{\lambda_2}$

$\therefore \quad \lambda_2 = \dfrac{v_2}{v_1} \times \lambda_1 = \dfrac{332.5}{350} \times 0.05 = 0.0475\ m$

$\therefore \quad s_2 = 100 \times 0.0475 = 4.75\ m$

১০। একটি শব্দ তরঙ্গ 50 কম্পনে 300 m দূরত্ব অতিক্রম করে। তরঙ্গটির কম্পাঙ্ক 150 Hz হলে তরঙ্গ বেগ কত হবে ?

আমরা জানি,

$$v = n\lambda = n \times \frac{s}{N} \qquad [\because s = N\lambda]$$

$$= 150 \times \frac{300}{50}$$

$$= 900 \text{ ms}^{-1}$$

এখানে,

$s = 300$ m

$n = 150$ Hz

$N = 50$

৯.৫ অগ্রগামী তরঙ্গ
Progressive wave

পূর্বের উদাহরণ থেকে জেনেছি পুকুরের স্থির পানিতে ঢিল ছুড়লে অগ্রগামী আড় তরঙ্গের সৃষ্টি হয় এবং এই তরঙ্গ ক্রমাগতভাবে পানির মধ্য দিয়ে অগ্রসর হয়ে কিনারায় পৌছায়। কোনো উন্মুক্ত খোলা প্রান্তরে শব্দ তৈরি করলে অগ্রগামী লম্বিক তরঙ্গের সৃষ্টি হয় এবং এই তরঙ্গ ক্রমাগতভাবে বায়ুর মধ্য দিয়ে অগ্রসর হতেই থাকে। মাধ্যমের সকল কণাগুলো সরল ছন্দিত স্পন্দনে কাঁপতে থাকলে চলমান তরঙ্গের সৃষ্টি হয়। কম্পনের উৎস থেকে কোনো কম্পন বা আন্দোলন পরবর্তী কোনো কণাতে স্থানান্তরিত হতে কিছু সময়ের প্রয়োজন হয় ফলে পার্শ্ববর্তী দুটি কণার মধ্যে দশা পার্থক্য সৃষ্টি হয়। যদি তরঙ্গ বাম থেকে ডানদিকে যায় তাহলে স্বাভাবিকভাবেই বাম থেকে ডানদিকের কণার দশা কম হয়। সুতরাং প্রথম কণার দশা ও দূরবর্তী কণার দশা পার্থক্য বৃদ্ধি পেতে থাকবে। তবে পাশাপাশি দুটি কণার দশা পার্থক্য একই হবে।

কোনো তরঙ্গ যদি কোনো বিস্তৃত মাধ্যমের এক স্তর হতে অন্য স্তরে সঞ্চালিত হয়ে ক্রমাগত সম্মুখের দিকে অগ্রসর হতে থাকে, তবে তাকে অগ্রগামী বা চলমান তরঙ্গ (progressive wave) বলে।

উদাহরণ : (ক) পুকুরের পানিতে ঢিল ছুঁড়লে আড় তরঙ্গ সৃষ্টি হয়। এই ঢেউ বা তরঙ্গ পানির মধ্য দিয়ে কিনারার দিকে ক্রমাগত অগ্রসর হতে থাকে। সুতরাং পানির ঢেউ **অগ্রগামী আড় বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গ (progressive transverse wave)**।

(খ) বক্তা কথা বললে শব্দ উৎপন্ন হয়। শব্দ লম্বিক বা অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ। এই শব্দ বক্তার মুখ হতে বাতাসের মধ্য দিয়ে ক্রমাগত সম্মুখের দিকে অগ্রসর হয়ে শ্রোতার কানে পৌছায়। অতএব শব্দ **অগ্রগামী লম্বিক তরঙ্গ (progressive longitudinal wave)**।

৯.৫.১ অগ্রগামী তরঙ্গের বৈশিষ্ট্য
Characteristics of progressive wave

অগ্রগামী তরঙ্গের নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্য পরিলক্ষিত হয় :

(ক) কোনো মাধ্যমের একই প্রকার কম্পনে এই তরঙ্গের উৎপত্তি হয়।

(খ) এটি একটি সুষম মাধ্যমের মধ্য দিয়ে একটি নির্দিষ্ট দ্রুতি বা বেগে প্রবাহিত হয়।

(গ) অগ্রগামী তরঙ্গের বেগ মাধ্যমের ঘনত্ব ও স্থিতিস্থাপকতার উপর নির্ভর করে।

(ঘ) মাধ্যমের কণাগুলোর কম্পন তরঙ্গ প্রবাহের সাপেক্ষে আড় ও লম্বিক হতে পারে।

(ঙ) মাধ্যমের কণাগুলো কখনও স্থির থাকে না।

(চ) তরঙ্গ মুখের অভিলম্ব বরাবর শক্তি বহন করে এ তরঙ্গ প্রবাহিত হয়।

(ছ) তরঙ্গ প্রবাহে মাধ্যমের বিভিন্ন অংশের চাপ ও ঘনত্বের একই প্রকার পরিবর্তন ঘটে।

(জ) মাধ্যমের প্রতিটি কণার কম্পাঙ্ক ও বিস্তার একই হয় এবং তারা একই ধরনের কম্পনে কম্পিত হয়।

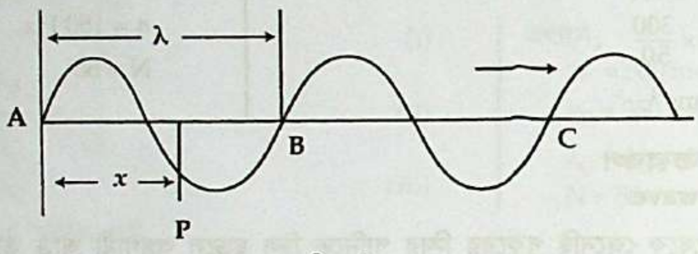
(ঝ) তরঙ্গ প্রবাহের দরুন মাধ্যমের কণার দশা পরবর্তী কণাতে স্থানান্তরিত হয়। এরূপ দুটি কণার দশা বৈষম্য তাদের দূরত্বের সমানুপাতিক।

(ঞ) মাধ্যমের যে কোনো কণার বিভিন্ন ধর্ম যেমন বেগ, ত্বরণ, শক্তি প্রভৃতি একইরূপ পরিবর্তনের মধ্য দিয়ে যায়।

৯·৫·২ অগ্রগামী তরঙ্গের গাণিতিক রাশিমালা
Mathematical expression for progressive wave

ধরি একটি চলমান তরঙ্গ A থেকে C এর দিকে অগ্রসর হচ্ছে [চিত্র ৯·১৪]। যেহেতু মাধ্যমের কণাগুলো ছন্দিত স্পন্দনে কম্পিত হয়, সেহেতু A বিন্দুস্থ কণার সরণকে নিচের সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

$$y = a \sin \omega t \quad \ldots \quad (9.6)$$



চিত্র ৯·১৪

এখানে, y = t সময়ে সাম্যাবস্থান থেকে কণাটির সরণ

a = কণাটির কম্পনের বিস্তার

ω = কণাটির কৌণিক কম্পাঙ্ক

যদি কণাটির কম্পাঙ্ক n হয়, তাহলে $\omega = 2\pi n$ [n = কম্পাঙ্ক]

$$\therefore\ y = a \sin 2\pi nt \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9.7)$$

আমরা জানি, সমদশাসম্পন্ন পরপর দুটি কণার মধ্যবর্তী দূরত্ব হচ্ছে তরঙ্গদৈর্ঘ্য λ, চিত্রে, $\lambda = AB$। এখন বলা যায়, B বিন্দুস্থ কণার দশা A বিন্দুস্থ কণার দশার চেয়ে 2π পরিমাণ কম। A থেকে x দূরত্বে P একটি বিন্দু লই। অতএব, P বিন্দুস্থ কণার দশা A বিন্দুস্থ কণার দশার চেয়ে $\frac{2\pi x}{\lambda}$ পরিমাণ কম।

[যেহেতু λ দূরত্বের জন্য দশা পার্থক্য $= 2\pi$

$\therefore$ 1 " " " " $= \frac{2\pi}{\lambda}$

বা, x " " " " $= \frac{2\pi}{\lambda} \times x$]

এখন, P বিন্দুস্থ কণার সরণ,

$$y = a \sin \left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9.8)$$

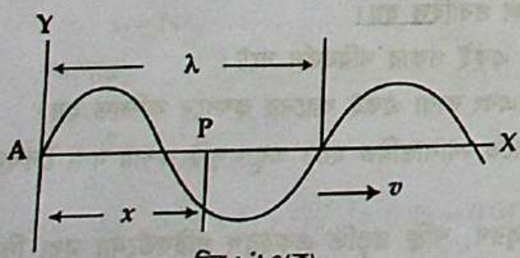
বা, $y = a \sin (\omega t - kx)$ $\left(\text{এখানে, } k = \frac{2\pi}{\lambda} = \text{তরঙ্গ সংখ্যা}\right)$

বা, $y = a \sin \left(2\pi n\, t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$

বা, $y = a \sin \left(\frac{2\pi\, vt}{\lambda} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ $\left[\text{এখানে, } v = n\lambda\ \therefore\ n = \frac{v}{\lambda}\right]$

বা, $y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9.9)$

বিকল্প পদ্ধতি (Alternative method)



চিত্র ৯·১৪(ক)

আমরা জানি,

$$y = a \sin 2\pi nt \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

তরঙ্গটি X-এর ধনাত্মক দিকে গতিশীল। OA থেকে ডানদিকে x দূরত্বে অবস্থিত P বিন্দুতে পৌঁছাতে তরঙ্গটির সময় লাগে $\frac{x}{v}$। সুতরাং, সময় বিবেচনায় P বিন্দুটি সর্বদা A বিন্দু অপেক্ষা $\frac{x}{v}$ পরিমাণ পিছিয়ে থাকে। এখন A বিন্দু ও P বিন্দুর সময় যথাক্রমে

t ও t' হলে, $t' = t - \frac{x}{v}$ । অতএব P বিন্দুতে অবস্থিত কণার সরণ,

$$y = a \sin \omega t' = a \sin \omega (t - \frac{x}{v}) = a \sin \left(\omega t - \frac{\omega x}{v} \right)$$

$$= a \sin \left(\omega t - \frac{2\pi n}{v} x \right) = a \sin \left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \quad \dots \quad \dots \quad \text{(ii)}$$

বা, $y = a \sin (\omega t - kx)$ $\left(\text{এখানে}, k = \frac{2\pi}{\lambda} = \text{তরঙ্গ সংখ্যা} \right)$

বা, $y = a \sin \left(2\pi n t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right)$

বা, $y = a \sin \left(\frac{2\pi v t}{\lambda} - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \left[\because v = n\lambda \ \therefore \ n = \frac{v}{\lambda} \right]$

বা, $y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \text{(iii)}$

এটি হলো A বিন্দু থেকে x দূরত্বে অবস্থিত P বিন্দুস্থ কণার সরণের সমীকরণ। একে মাধ্যমের যেকোনো সরণের সাধারণ সমীকরণ বলে। যেহেতু এটি কোনো মাধ্যমের যেকোনো কণার সরণের সমীকরণ নির্দেশ করে তাই **সমীকরণ (iii)-কে চলমান বা অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ** বলা হয়।

X অক্ষের ঋণাত্মক দিকে অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ হবে, $y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt + x) \quad \dots \quad \text{(iv)}$

দ্রষ্টব্য : যেহেতু সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন কোনো কণার সরণ সাইন বা কোসাইনের অপেক্ষক তাই উপরোক্ত সমীকরণগুলোতে সাইন-এর জায়গায় কোসাইন বসালেও অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ পাওয়া যাবে।

অগ্রগামী তরঙ্গ থেকে আমরা যা জানতে পারি তা তোমার পঠিত জ্ঞানের সাথে মিলাও।

(১) x এর নির্দিষ্ট মান বসালে এই সমীকরণ থেকে ওই বিন্দুতে অবস্থিত কণার গতির সমীকরণ পাওয়া যায়।

(২) t এর নির্দিষ্ট মানে এই সমীকরণ থেকে ওই মুহূর্তে তরঙ্গের আকার জানা যায়।

(৩) অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ থেকে দেখা যায় যে, নির্দিষ্ট সময়ে বিভিন্ন কণার সরণের লেখচিত্র অর্থাৎ স্থান-সরণ লেখ $(y - x)$ সাইন বক্র হয়। আবার কোনো নির্দিষ্ট কণার বিভিন্ন সময়ে সরণের লেখচিত্র $(y - t)$ সাইন বক্র হয়।

(৪) এই সমীকরণ থেকে সহজে প্রমাণ করা যায় যে, কণার সরণ y সময় T পরপর অথবা λ দূরত্ব চাপের পুনরাবৃত্ত হয়। অতএব তরঙ্গ দ্বি-পর্যাবৃত্ত হয়। সময়ের সাথে এই পর্যায় T এবং দূরত্বের সঙ্গে পর্যায় λ।

অনুধাবনমূলক কাজ : অগ্রগামী তরঙ্গের গতিবেগ ধ্রুব হলেও তরঙ্গের ওপরিস্থিত মাধ্যমের কণার ত্বরণ সর্বদা শূন্য হয় না কেন ? —ব্যাখ্যা কর।

অগ্রগামী তরঙ্গের গতিবেগ এবং তরঙ্গের মাধ্যমের কণার গতিবেগ এক নয়। তরঙ্গের গতিবেগ ধ্রুব হলেও মাধ্যমের কণার সরল ছন্দিত স্পন্দন গতির বেগ প্রতিনিয়ত পরিবর্তিত হয়। সময়ের সাথে এই স্পন্দন গতির পরিবর্তনের হার হলো কণার তাৎক্ষণিক ত্বরণ, যা সাম্যাবস্থান হতে কণার সরণের সমানুপাতিক। এ কারণেই অগ্রগামী তরঙ্গের গতিবেগ ধ্রুব হলেও তরঙ্গের উপরিস্থিত মাধ্যমের কণার ত্বরণ সর্বদা শূন্য হয় না।

কাজ : একটি অগ্রগামী তরঙ্গ মাধ্যমের মধ্য দিয়ে যখন বিস্তার লাভ করে, তখন মাধ্যমের কণাগুলি সরল দোলগতি সম্পাদন করে।—ব্যাখ্যা কর।

অগ্রগামী বা চলমান তরঙ্গের সমীকরণ,

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \text{(i)}$$

সমীকরণ (i) কে t এর সাপেক্ষে দুই বার অবকলন করে পাই,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2\pi v}{\lambda} a \cos \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{2\pi v}{\lambda} \times \frac{2\pi v}{\lambda} \; a \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$$

$$= -\frac{4\pi^2 v^2}{\lambda^2} \; a \cos\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$$

$$= -\left(\frac{4\pi^2 v^2}{\lambda^2}\right) y$$

$\therefore$ ত্বরণ, $f \propto -y$

অর্থাৎ কণার ত্বরণ সরণের সমানুপাতিক এবং সর্বদা সাম্যাবস্থানের দিকে ক্রিয়া করে। এটিই সরল দোলগতির সমীকরণ। সুতরাং যখন তরঙ্গ মাধ্যমের মধ্য দিয়ে বিস্তার লাভ করে, তখন মাধ্যমের কণাগুলি সরল দোলগতি সম্পাদন করে।

গাণিতিক উদাহরণ ৯.২

১। একটি অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ, $y = y_0 \sin 2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)$। মাধ্যমের কণার সর্বাধিক বেগ তরঙ্গের বেগের দ্বিগুণ হলে দেখাও যে, $\lambda = \pi y_0$।

এখানে, $y = y_0 \sin 2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right) = y_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}(\lambda ft - x)$ ... ... (i)

আমরা জানি, অগ্রগামী তরঙ্গের সাধারণ সমীকরণ,

$$y = a \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i) ও (ii) তুলনা করলে, $a = y_0$ এবং তরঙ্গের বেগ, $V = f\lambda$

এখন, কণার বেগ,

$$v = \frac{dy}{dt} = 2\pi f y_0 \cos 2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$\therefore$ কণার সর্বোচ্চ বেগ, $v_{max} = 2\pi f y_0$

প্রশ্নানুসারে, $2\pi f y_0 = 2f\lambda$

$\therefore \quad \lambda = \pi y_0$ (প্রমাণিত)

২। একটি অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ $y = 0{\cdot}5 \sin\left(200\,t - 0{\cdot}4\,x + \frac{\pi}{3}\right)$। নির্ণয় কর : (i) $x = 0$ বিন্দুতে $t = 0$ সময়ে কণার দশা, (ii) X-অক্ষ বরাবর 50 cm দূরত্বে অবস্থিত দুটি বিন্দুর মধ্যে দশা পার্থক্য এবং (iii) যে কোনো বিন্দুতে 4×10^{-2} sec সময়ে দশার পরিবর্তন।

এখানে, তরঙ্গের দশা, $\phi = 200\,t - 0{\cdot}4\,x + \frac{\pi}{3}$

(i) $x = 0$ বিন্দুতে $t = 0$ সময়ে দশা, $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$

(ii) দশা পার্থক্য, $\Delta\varphi = -0{\cdot}4\,\Delta x = -0{\cdot}4\,(x_2 - x_1)$

$= -0{\cdot}4\,(50 - 0) = -0{\cdot}4 \times 50$

$= -20$ rad

(iii) দশার পরিবর্তন $= 200\,t = 200 \times 4 \times 10^{-2} = 8$ rad

৯.৫.৩ দশা ও দশা পার্থক্য
Phase and phase difference

দশা
Phase

অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ, $y = a\sin\omega(t - \frac{x}{v})$ থেকে পাই,

$$y = a\sin\frac{\omega}{v}(vt - x)$$

$$= a\sin k(vt-x) = a\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt-x) \quad \left(\because k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi n}{n\lambda} = \frac{2\pi n}{v} = \frac{\omega}{v}\right)$$

$$= a\sin\theta$$

যেখানে $\theta = \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$ ... ... (9.10)

এই θ কোণকে তরঙ্গের দশা কোণ বা দশা বলা হয়।

একটি তরঙ্গের নির্দিষ্ট মাধ্যমে v ও λ ধ্রুবক হয়। স্পষ্টতই θ নির্ভর করে দূরত্ব x ও সময় t-এর উপর। কোনো নির্দিষ্ট মুহূর্তে অর্থাৎ t = ধ্রুবক হলে তরঙ্গের দশা দূরত্বের সঙ্গে পরিবর্তিত হয়। আবার, কোনো বিন্দুতে অর্থাৎ, x = ধ্রুবক হলে তরঙ্গের দশা সময়ের সঙ্গে পরিবর্তিত হয়।

দশা পার্থক্য
Phase difference

অগ্রগামী তরঙ্গের যে কোনো দুটি ভিন্ন অবস্থানে অবস্থিত দুটি কণার দশা পার্থক্য বলতে একই সময়ে ওই দুটি অবস্থানের দশা কোণের পার্থক্যকে বুঝায়। তরঙ্গটি যদি X-অক্ষ অভিমুখে চলে এবং দুটি কণার অবস্থান যথাক্রমে x_1 ও x_2 হলে ওই দুটি কণার মধ্যে পথ পার্থক্য (path difference) হবে $x_2 - x_1$।

এখন সমীকরণ (9.10) অনুসারে t সময়ে কণা দুটির দশা কোণ যথাক্রমে,

$$\theta_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x_1) \text{ এবং } \theta_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x_2)$$

সুতরাং দশা পার্থক্য $= \theta_2 \sim \theta_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1)$

অর্থাৎ, দশা পার্থক্য $= \frac{2\pi}{\lambda} \times$ পথ পার্থক্য ... ... (9.11)

সমীকরণ (9.11) থেকে পাই,

(i) কণা দুটির পথ পার্থক্য $0, \lambda, 2\lambda,$ ...... ইত্যাদি হলে দশা পার্থক্য হবে $0, 2\pi, 4\pi,$ .... ইত্যাদি। এক্ষেত্রে কণা দুটি সমদশাসম্পন্ন।

(ii) কণা দুটির পথ পার্থক্য $\frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2},$ ....ইত্যাদি হলে দশা পার্থক্য হবে $\pi, 3\pi, 5\pi,$ .... ইত্যাদি। এক্ষেত্রে কণা দুটি বিপরীত দশায় থাকে।

গাণিতিক উদাহরণ ৯.৩

১। একটি অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ, $y = 5\sin(200\pi t - 1{\cdot}57x)$, এখানে সব কটি রাশি S. I. এককে প্রদত্ত। তরঙ্গটির বিস্তার, কম্পাঙ্ক, বেগ, পর্যায়কাল ও $x = 0{\cdot}2$ m এবং $x = 1$ m; দুটি বিন্দুর মধ্যে দশা পার্থক্য নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০১৫ (মান ভিন্ন)]

দেওয়া আছে,

$$y = 5\sin(200\pi t - 1{\cdot}57x) \quad ... \quad ... \quad \text{(i)}$$

আমরা জানি, অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ

$$y = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$$

$$= A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}vt - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \quad ... \quad ... \quad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i) ও (ii) তুলনা করে পাই,

$$A = 5\,m \text{ এবং } \frac{2\pi}{\lambda} v = 200\pi$$

বা, $2\pi n = 200\pi$ $[\because \frac{v}{\lambda} = n]$

$\therefore n = 100\,Hz$

আবার, $\frac{2\pi}{\lambda} = 1.57$ $\therefore \lambda = \frac{2\pi}{1.57} = 4m$

এখন, $\frac{v}{\lambda} = n$

বা, $v = \lambda n = 4 \times 100 = 400\,ms^{-1}$

$T = \frac{1}{n} = \frac{1}{100} = 0.01s$

যেহেতু $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\left(vt - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ $\therefore \Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$

এখানে, $\Delta x = 1.0 - 0.2 = 0.8\,m$

$\therefore \Delta\varphi = -\frac{2\pi}{4} \times 0.8 = -0.4\,\pi$

উত্তর : বিস্তার 5m ; কম্পাঙ্ক = 100 Hz ; বেগ = 400 ms^{-1}, পর্যায়কাল = 0.01s এবং দশা পার্থক্য = $-0.4\,\pi$

২। একটি অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ হচ্ছে $y = 100 \sin \pi \left(\frac{x}{100} - \frac{t}{0.25}\right)$। এখানে সবকয়টি রাশি SI এককে হলে তরঙ্গটির তরঙ্গদৈর্ঘ্য, পর্যায়কাল, কম্পাঙ্ক এবং বেগ নির্ণয় কর। [KUET Admission Test, 2004-05]

$$y = 100 \sin \pi \left(\frac{x}{100} - \frac{t}{0.25}\right)$$

$$= -100 \sin \pi \times \frac{1}{100}\left(\frac{100}{0.25}t - x\right)$$

এখানে বিস্তার $a = 100\,m$

$v = \frac{100}{0.25} = 400\,ms–1$

$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{100}$

$\therefore \lambda = 200\,m$ $\therefore f = \frac{v}{\lambda} = 2\,Hz$

আবার, $T = \frac{1}{f} - 0.5\,sec$

৩। কোনো তরঙ্গের বিস্তার 0.2 m হলে $t = \frac{T}{3}$ সময়ে কম্পনের উৎস হতে $x = \frac{\lambda}{6}$ দূরত্বে অবস্থিত বিন্দুর সাম্যাবস্থান হতে সরণ কত হবে ? [ব. বো. ২০০৯]

আমরা জানি,

সরণ, $y = A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$

বা, $y = A \sin \left(\frac{2\pi vt}{\lambda} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$

$\therefore y = A \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ $[\because \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda}]$

$= 0.2 \sin \left(\frac{2\pi T}{T \times 3} - \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{\lambda}{6}\right) = 0.2 \sin \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{6}\right)$

$= 0.2 \sin \left(\frac{4\pi - 2\pi}{6}\right) = 0.2 \sin \left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.173\,m$

এখানে,

তরঙ্গের বিস্তার, $A = 0.2\,m$

সময়, $t = T/3$

উৎস হতে দূরত্ব, $x = \frac{\lambda}{6}$

সরণ, $y = ?$

৪। দুটি অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ যথাক্রমে $y_1 = 0.5 \sin \frac{\pi}{2}(50t - x)$ ও $y_2 = 0.5 \sin \frac{\pi}{2}(50t - x + 5)$। দেখাও যে এদের দশা পার্থক্য সময়ের সাথে অপরিবর্তিত থাকে। এই দশা পার্থক্যের মান কত ?

কোনো এক মুহূর্ত t-তে তরঙ্গ দুটির দশা পার্থক্য

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \left\{\frac{\pi}{2}(50t - x) - \frac{\pi}{2}(50t - x + 5)\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 5 = \text{ধ্রুবক}$$

যেহেতু, দশা পার্থক্যে কোনো t রাশি নেই সুতরাং সময়ের সঙ্গে দশা পার্থক্য অপরিবর্তিত থাকে।

সুতরাং, দশা পার্থক্য, $\frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ radian

৫। একটি লাউড স্পিকারের শঙ্কু (Cone) 262 Hz কম্পাঙ্কে সরল ছন্দিত স্পন্দনে স্পন্দিত হয়। শঙ্কুর কেন্দ্রের বিস্তার $A = 1.5 \times 10^{-4}$ m এবং $t = 0$ সময়ে সরণ $x = A$ হয়। শঙ্কুর কেন্দ্রের গতি বর্ণনাকারী সমীকরণটি নির্ণয় কর। শঙ্কুর বেগ ও ত্বরণকে সময়ের ফাংশন হিসেবে প্রকাশ কর। [BUET Admission Test, 2014-15]

এখানে,
$n = 262$ Hz
$A = 1.5 \times 10^{-4}$ m

আমরা জানি,

$$\omega = 2\pi n = 2\pi \times 262 = 524\pi \text{ rad s}^{-1}$$

গতির সমীকরণ, $x = A \cos \omega t$

$\therefore \quad x = 1.5 \times 10^{-4} \cos 524\pi t$

বেগ, $v = \frac{dx}{dt}$

$v = -0.24681 \sin 524\pi t$

ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt}$

$a = -406 \cos 524\pi t$

৬। সরল ছন্দিত গতি সম্পন্ন একটি কণার সমীকরণ $y = 10 \sin(\omega t + \delta)$ পর্যায়কাল 30 sec এবং আদি সরণ 0.05 m হলে, কণাটির (ক) কৌণিক কম্পাঙ্ক (খ) আদি দশা নির্ণয় কর। [CUET Admission Test, 2009-10]

এখানে,
$T = 30$ sec
$y = 0.05$ m

(ক) $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{30} = \frac{\pi}{15}$ rad s^{-1}

(খ) এখানে, $y = 10 \sin(\omega t + \delta)$

বা, $0.05 = 10 \sin\left(\frac{\pi}{15} \times 0 + \delta\right)$

$\therefore \quad \delta = 0.287 \text{ deg} = 5 \times 10^{-3}$ rad

৭। দুটি $\frac{\pi}{2}$ rad দশা পার্থক্যের সদৃশ অগ্রগামী তরঙ্গ একই দিকে ধাবিত হচ্ছে। যদি তরঙ্গ দুটির প্রত্যেকটির বিস্তার y_m হয়, তবে লব্ধি তরঙ্গটির বিস্তার কত ? [BUET Admission Test, 2014-15]

এখানে,
$\delta = \frac{\pi}{2}$ rad
$A = y_m$

যেহেতু দশা পার্থক্য $\frac{\pi}{2}$ সুতরাং লব্ধি তরঙ্গের বিস্তার

$$y = \sqrt{y_m^2 + y_m^2}$$
$$= y_m\sqrt{2}$$

৯·৬ তরঙ্গের তীব্রতা
Intensity of waves

প্রাবল্য বলতে শব্দ কতটা জোরে হচ্ছে তা বোঝায়। শব্দের প্রাবল্য নির্ধারিত হয় শব্দের তীব্রতা দিয়ে। তীব্রতা যত বাড়ে অর্থাৎ শব্দ তরঙ্গ যত বেশি হারে শব্দ শক্তি আমাদের কানে পৌঁছে দেয়, শব্দের প্রাবল্য তত বেশি হয়। আবার তীব্রতা কমলে প্রাবল্য কমে। অতএব, তীব্রতা হলো কারণ এবং প্রাবল্য তার ফল।

প্রাবল্যের এই সংজ্ঞা ব্যক্তিনির্ভর। কম্পাঙ্কের পার্থক্য খুব বেশি হলে একই তীব্রতার বিভিন্ন কম্পাঙ্কের শব্দ শ্রোতার কাছে কমবেশি জোরে মনে হতে পারে। অতএব, শব্দের প্রাবল্য কম্পাঙ্কের ওপরও নির্ভর করে। স্পষ্টত প্রাবল্য ও তীব্রতা পুরোপুরি এক নয়। তীব্রতা শব্দের একটি ভৌত ধর্ম, কিন্তু প্রাবল্য একটি অনুভূতি।

তীব্রতা যেকোনো ধরনের শব্দের বৈশিষ্ট্য। সুরবর্জিত শব্দেরও তীব্রতা আছে। শব্দের তীব্রতা নির্ভর করে এর বিস্তারের ওপর। আমাদের কানে সহনীয় শব্দের জোরালো তীব্রতার বিস্তার হলো 10^{-5} m। অন্যদিকে ক্ষীণতম শব্দের তীব্রতার বিস্তার প্রায় 10^{-11} m। শব্দ তরঙ্গের তীব্রতার একটি বড় পাল্লা (range) মানুষের কানের জন্য সংবেদনশীল।

শব্দ বিস্তারের অভিমুখের সঙ্গে লম্বভাবে রাখা একক ক্ষেত্রফলের মধ্য দিয়ে প্রতি সেকেন্ডে যে পরিমাণ শব্দ শক্তি প্রবাহিত হয়, তাকে ওই শব্দের তীব্রতা বলে।

গোলকের একক ক্ষেত্রফলের মধ্য দিয়ে শক্তি প্রবাহের হার $= \frac{P}{4\pi r^2}$; এখানে $4\pi r^2$ = গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল। সংজ্ঞানুযায়ী এটি গোলক থেকে r দূরত্বে তীব্রতা I বোঝায়, অর্থাৎ $I = \frac{P}{4\pi r^2}$।

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9.12)$$

সুতরাং, নির্দিষ্ট উৎসের ক্ষেত্রে $I \propto \frac{1}{r^2}$। অতএব ব্যস্তবর্গীয় সূত্র প্রমাণিত হলো।

তীব্রতার একক : সংজ্ঞানুযায়ী তীব্রতা হলো একক ক্ষেত্রফলের মধ্য দিয়ে শক্তি প্রবাহের হার। অতএব এর S. I. একক হলো Joule s^{-1} m^{-2} বা, Wm^{-2} (watt per square metre)। কিন্তু এই এককটি খুব বড় বলে সাধারণত microwatt per square metre অর্থাৎ μWm^{-2} এককটি ব্যবহৃত হয়।

জানার বিষয় : I. জোরালো শব্দের বিস্তার 10^{-5} m
II. ক্ষীণতর শব্দের বিস্তার 10^{-11} m

৯.৬.১ বিভিন্ন বিষয়ের উপর তীব্রতার নির্ভরতা
Dependence of intensity on different factors

শব্দের তীব্রতা নিচের বিষয়গুলোর ওপর নির্ভর করে—

১। উৎসের কম্পনের বিস্তার : শব্দের তীব্রতা উৎসের কম্পনের বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক। অর্থাৎ, শব্দের তীব্রতা I এবং উৎসের কম্পনের বিস্তার a হলে $I \propto a^2$।

২। উৎসের আকার : উৎসের আকার যত বড় হয় উৎপন্ন শব্দের তীব্রতা তত বাড়ে। যেমন, তবলার শব্দের চেয়ে ঢাকের শব্দ অনেক বেশি জোরালো।

৩। উৎস থেকে দূরত্ব : উৎস থেকে শ্রোতার দূরত্ব যত বেশি হয় শব্দের তীব্রতা তত কমে। অর্থাৎ শব্দের তীব্রতা I এবং উৎস থেকে শ্রোতার দূরত্ব r হলে, $I \propto 1/r^2$।

৪। মাধ্যমের ঘনত্ব : শব্দ যে মাধ্যমের মধ্য দিয়ে যায় তার ঘনত্ব যত বেশি হয় শব্দের তীব্রতাও তত বেশি হয়। যেমন, উষ্ণতা কমলে বায়ুর ঘনত্ব বাড়ে বলে শীতের রাতে অনেক দূরের শব্দ স্পষ্ট শোনা যায়।

৫। মাধ্যমের গতি : মাধ্যমের গতির অভিমুখে গেলে শব্দের তীব্রতা বাড়ে এবং বিপরীত দিকে গেলে শব্দের তীব্রতা কমে। যেমন, বায়ু প্রবাহের দিকে শব্দ অগ্রসর হলে জোরে শব্দ শোনা যায়।

৬। অন্যান্য বস্তুর উপস্থিতি : শব্দের কম্পমান উৎসের নিকটে কোনো বস্তু থাকলে উৎসের কম্পনের প্রভাবে ওই বস্তুটিও একই কম্পাঙ্কে কম্পিত হতে শুরু করে। একে পরবশ কম্পন বলে। বস্তুটির ক্ষেত্রফল অনেক বেশি হলে পরবশ কম্পন সৃষ্টির জন্য শব্দের তীব্রতা বেড়ে যায়। এই কারণে সেতার, বেহালা, গীটার প্রভৃতি তারের বাদ্যযন্ত্রে ফাঁপা খোল থাকে। যন্ত্রটি বাজালে তারগুলো কাঁপে, ফলে ওই খোল এবং খোলের মধ্যের বায়ুতে পরবশ কম্পন সৃষ্টি হয়। তাই জোরে শব্দ শোনা যায়।

৯.৬.২ তরঙ্গের তীব্রতার গাণিতিক রাশিমালা
Mathematical expression for intensity of wave

পূর্বের অনুচ্ছেদে আমরা বিভিন্ন বিষয়ের ওপর তীব্রতার নির্ভরতা আলোচনা করেছি। এখন আমরা যেকোনো প্রকার চল তরঙ্গের জন্য তীব্রতার একটি রাশিমালা নির্ণয় করব। স্পষ্টত এই আলোচনা শব্দ তরঙ্গের ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য হয়।

মনে করি, একটি চল তরঙ্গ ধনাত্মক x অভিমুখে স্থির বেগ v নিয়ে চলছে। তরঙ্গগতির জন্য মাধ্যমের কণাগুলো ওদের সাম্যাবস্থান সাপেক্ষে সরল দোলগতিতে কম্পিত হবে। যেকোনো সময় t-তে কোনো কণার সরণ y হলে কণার গতির সমীকরণ হয়, $y = a \sin \omega t$; এখানে a বিস্তার বোঝায়। তরঙ্গের কম্পাঙ্ক n হলে $\omega = 2\pi n$।

সরল দোলগতিযুক্ত কণার শক্তির এক অংশ গতিশক্তি এবং বাকি অংশ স্থিতিশক্তি হয়। কিন্তু কণার সাম্যাবস্থানে স্থিতিশক্তি শূন্য হয়; অতএব কণার শক্তির পুরোটাই গতিশক্তি হয়। সুতরাং সাম্যাবস্থানে m ভরের কণার বেগ v_0 হলে ওই কণার মোট শক্তি $\frac{1}{2}mv_0^2$ হয়। কিন্তু $v_0 = a\omega = 2\pi na$।

অতএব কম্পনরত কণার মোট শক্তি হয়

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(a\omega)^2 = \frac{1}{2}m(2\pi na)^2 = 2\pi^2n^2a^2m$$

যে মাধ্যমের মধ্য দিয়ে তরঙ্গ অগ্রসর হচ্ছে সেই মাধ্যমের একক আয়তনে কণার সংখ্যা, ধরি N। সুতরাং একক আয়তনের জন্য সব কণার মোট শক্তি অর্থাৎ তরঙ্গের শক্তি ঘনত্ব (energy density) হয়,

$$E = N\left(\frac{1}{2}mv_0^2\right) = 2\pi^2n^2a^2\,mN$$

কিন্তু $mN = \rho$, মাধ্যমের ঘনত্ব

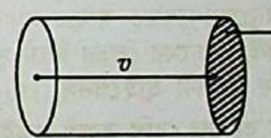
$\therefore$ মোট শক্তি, $E = 2\pi^2n^2a^2\rho$ ... ... (9.13)

একক সময়ে তরঙ্গ v দূরত্ব অগ্রসর হয়। সুতরাং তরঙ্গের গতির অভিমুখের সঙ্গে লম্বভাবে রাখা একক ক্ষেত্রফলের মধ্য দিয়ে একক সময়ে প্রবাহিত শক্তির পরিমাণ অর্থাৎ তরঙ্গের তীব্রতা (I), একক প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল এবং v দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট C চোঙের মধ্যে যে পরিমাণ শক্তি আছে তার সমান হয় [চিত্র ৯·১৫]।

অতএব তরঙ্গের তীব্রতা

I = শক্তির ঘনত্ব × C চোঙে শব্দের বেগ,

$= E \times v = 2\pi^2n^2a^2\rho v$ ... ... (9.14)



চিত্র ৯·১৫

এই সমীকরণ থেকে দেখা যায় যে তরঙ্গের তীব্রতা (i) এর বিস্তারের বর্গের, (ii) এর কম্পাঙ্কের বর্গের (iii) এর বেগের এবং (iv) মাধ্যমের ঘনত্বের সমানুপাতিক হয়।

আমাদের কান তীব্রতার একটি বিরাট পাল্লা জুড়ে শব্দ শুনতে পায়। 1000 Hz কম্পাঙ্কে আমাদের কান সবচেয়ে মৃদু যে শব্দ শুনতে পায় তার তীব্রতা হলো প্রায় 10^{-12} Wm^{-2}। একে শ্রাব্যতার সীমা (threshold of hearing or audibility) বলে। সবচেয়ে জোরালো যে শব্দ কান সহ্য করতে পারে তার প্রাবল্য প্রায় 1 Wm^{-2}। শব্দের প্রাবল্য এর চেয়ে বেশি হলে কানে যন্ত্রণা হয়। তীব্রতার এই উর্ধ্বসীমাকে সহন বা অনুভূতি সীমা (threshold of pain or feeling) বলে। শ্রাব্য তীব্রতার পাল্লা এত বড় বলে বিভিন্ন তীব্রতার তুলনা করতে হলে আপেক্ষিক তীব্রতাকে লগারিদমে প্রকাশ করলে সুবিধা হয়। তীব্রতা I একটি ভৌত রাশি বলে এর নির্দিষ্ট মাত্রা আছে, সুতরাং এর লগারিদম নেয়া যায় না। কিন্তু দুটি তীব্রতার অনুপাত $\frac{I}{I_0}$ একটি মাত্রাহীন রাশি বলে এর লগারিদম নেয়া যায়।

কাজ : সেতার, বেহেলা, গীটার প্রভৃতি তারের বাদ্যযন্ত্রে ফাঁপা খোল রাখা হয় কেন ?

যন্ত্রটি বাজালে তারগুলি কাঁপে ফলে ওই খোল এবং খোলের মধ্যস্থ বায়ুতে পরবশ কম্পন সৃষ্টি হয়। তাই জোরে শব্দ শোনা যায়।

গাণিতিক উদাহরণ ৯.৪

১। বায়ুতে একটি শব্দ তরঙ্গের উৎসের কম্পাঙ্ক 412 Hz এবং বিস্তার 0·25 cm, বায়ুর ঘনত্ব 1·29 kg m^{-3} হলে উৎসের তীব্রতা কত হবে ?

আমরা জানি,

শব্দের তীব্রতা,

$$I = 2\pi^2n^2a^2\rho v$$
$$= 2 \times 9{\cdot}87 \times (412)^2 \times (0{\cdot}25 \times 10^{-2})^2 \times 1{\cdot}29 \times 330$$
$$= 8915{\cdot}08\ Wm^{-2}$$

এখানে,
$n = 412$ Hz
$a = 0{\cdot}25$ cm $= 0{\cdot}25 \times 10^{-2}$ m
$\rho = 1{\cdot}29$ kg m^{-3}
$v = 330$ ms^{-1}
$I = ?$

২। একটি উৎস 40 W ক্ষমতার শব্দ উৎপন্ন করে। উৎসটিকে বিন্দু উৎস ধরে নিয়ে ওর থেকে 2 km দূরত্বে তীব্রতা নির্ণয় কর। সংশ্লিষ্ট তীব্রতা স্তর ডেসিবেল এককে গণনা কর।

একটি বিন্দু উৎস থেকে নিঃসৃত ক্ষমতা P হলে বিপরীত বর্গীয় সূত্রানুযায়ী উৎস থেকে r দূরত্বে তীব্রতা,

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

এখানে, $P = 40\ W$

$r = 2\ km = 2 \times 10^3\ m$

$$\therefore \quad I = \frac{40}{4\pi \times (2 \times 10^3)^2}\ Wm^{-2}$$

$$= \frac{40}{4\pi \times 4 \times 10^6}$$

$$= 7{\cdot}962 \times 10^{-7}\ Wm^{-2}$$

তীব্রতা, I ডেসিবেল এককে পাই,

এখানে, $I_0 = 10^{-12}\ Wm^{-2}$

$$\therefore \quad \beta = 10 \times \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

$$= 10 \times \log_{10}\left(\frac{7{\cdot}962 \times 10^{-7}}{10^{-12}}\right) = 44{\cdot}1\ dB$$

৯·৭ উপরিপাতন নীতি
Principle of superposition

আগের অনুচ্ছেদগুলোতে আমরা মাধ্যমের ভেতর দিয়ে শুধুমাত্র একটি তরঙ্গের গতি সম্পর্কে আলোচনা করেছি। এবার আমরা একই মাধ্যমের ভেতর দিয়ে দুটি বা তার বেশি তরঙ্গ একই সঙ্গে চলতে থাকলে কী ঘটবে তা আলোচনা করব। এই বিষয়ে বিজ্ঞানী হাইগেনস্ (Huygens) একটি সহজ সূত্র আবিষ্কার করেন। সূত্রটি নিম্নরূপ :

যখন দুটি বা তার বেশি তরঙ্গ একই সঙ্গে একই মাধ্যমের ভেতর দিয়ে এগোতে থাকে তখন এরা একটি অপরটি সাপেক্ষে স্বাধীনভাবে সঞ্চালিত হয়। মাধ্যমের যে অংশে তরঙ্গগুলো উপরিপাতিত হয়, সেই অংশে যেকোনো কণার লব্ধি সরণ প্রতিটি তরঙ্গ পৃথকভাবে ওই কণার যে সরণ সৃষ্টি করে তাদের ভেক্টর যোগফলের সমান হয়। এই সূত্রকে তরঙ্গের উপরিপাতনের সূত্র বা উপরিপাতনের নীতি (principle of superposition) বলে।

নীতি : "কোনো কণার ওপর একই সময়ে দুটি তরঙ্গ আপতিত হলে সাম্যাবস্থান থেকে কণাটির লব্ধি সরণ হবে তরঙ্গ দুটির জন্য কণাটির সরণদ্বয়ের ভেক্টর সমষ্টির সমান।"

মনে করি, কোনো মাধ্যমের ভেতর দিয়ে দুটি তরঙ্গ একসাথে অগ্রসর হচ্ছে। প্রথম তরঙ্গের জন্য মাধ্যমের কোনো কণার সরণ যদি y_1 হয় এবং দ্বিতীয় তরঙ্গের জন্য যদি ওই কণার সরণ y_2 হয়, তবে এই সূত্র অনুযায়ী কণার লব্ধি সরণ হবে

$$\vec{y} = \vec{y_1} + \vec{y_2} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9.15)$$

$$y = y_1 \pm y_2 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9.16)$$

যদি সরণ দুটি একই সরলরেখা বরাবর একই অভিমুখে হয়, তবে যোগ চিহ্ন এবং যদি সরণ দুটি একই সরলরেখা বরাবর কিন্তু বিপরীতমুখি হয়, তবে বিয়োগ চিহ্ন দিতে হয়। উপরিপাতন নীতির নিম্নের প্রায়োগিক দিকগুলি লক্ষ কর।

(i) একই মাধ্যমের ভেতর দিয়ে বিভিন্ন তরঙ্গ যে স্বাধীনভাবে সঞ্চালিত হয়, তা আমরা দৈনন্দিন অভিজ্ঞতা থেকেও সহজে বুঝতে পারি। পুকুরের পানিতে একসঙ্গে দুটি ঢিল ফেললে যে দুটি বৃত্তাকার তরঙ্গের সৃষ্টি হয়, তারা একে অপরের মধ্য দিয়ে অপরিবর্তিত আকার, অভিমুখ এবং বেগ নিয়ে এগিয়ে যায়। একসঙ্গে কথা বললেও আমরা দুই-তিন জন লোকের কথাবার্তা অবিকৃতভাবে শুনতে পাই। ছবি তোলার সময় বিভিন্ন বস্তু থেকে আগত আলোর তরঙ্গগুলি ক্যামেরার সাটারের ছিদ্রের মধ্য দিয়ে একই সঙ্গে ভেতরে ঢোকে, কিন্তু একে অপরকে প্রভাবিত করে না। ফলে প্রতিটি বস্তুর পরিষ্কার ছবি পাওয়া যায়।

(ii) পানির তরঙ্গ, শব্দ তরঙ্গ প্রভৃতি যেসব তরঙ্গ জড় মাধ্যমের ভেতর দিয়ে চলে তাদের ক্ষেত্রে যদি উপরিপাতিত তরঙ্গগুলোর বিস্তার কম হয়, শুধুমাত্র তখনই এই সূত্রটি প্রযোজ্য হয়।

(iii) উপরিপাতের সূত্রটি একটি সাধারণ সূত্র। বিভিন্ন তরঙ্গের কম্পাঙ্ক বা গতির অভিমুখ যাই হোক না কেন, ওদের উপরিপাতের ক্ষেত্রে সূত্রটি সব সময় প্রযোজ্য হয়। কিন্তু আমরা আমাদের আলোচনা শুধুমাত্র সমান বা কাছাকাছি কম্পাঙ্কের তরঙ্গের ক্ষেত্রে সীমাবদ্ধ রাখব।

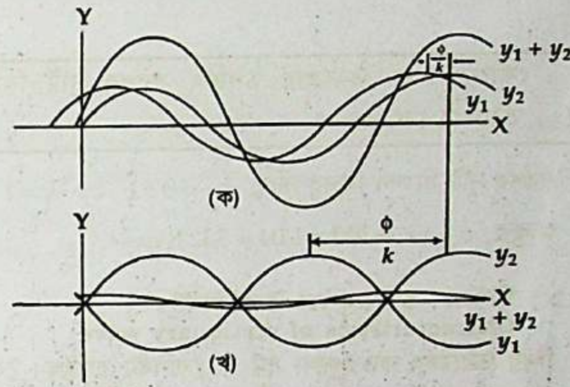
৯·৭·১ উপরিপাতনের ফলে সৃষ্ট লব্ধি তরঙ্গ
Resultant wave due to superposition of two waves

নিচের লেখচিত্র দুটি লক্ষ কর কীভাবে দুটি তরঙ্গার উপরিপাতনে লব্ধি তরঙ্গের বিস্তার পরিবর্তিত হয়।

৯.১৬(ক) চিত্রে দুটি সমান কম্পাঙ্ক, বিস্তার এবং প্রায় একই দশাসম্পন্ন কণার উপরিপাতনের ফলে সৃষ্ট লব্ধি তরঙ্গের বিস্তার তরঙ্গাদ্বয়ের যেকোনো একটির বিস্তারের প্রায় দ্বিগুণ।

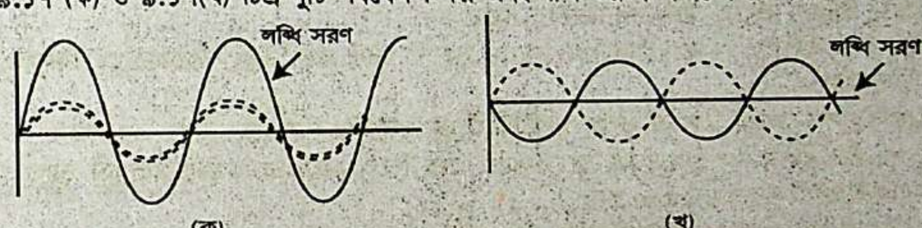
৯.১৬(খ) চিত্রে দুটি সমান কম্পাঙ্ক, বিস্তার এবং বিপরীত দশায় অর্থাৎ 180° দশা পার্থক্যে দুটি তরঙ্গের উপরিপাতনের ফলে সৃষ্ট লব্ধি তরঙ্গের বিস্তার প্রায় শূন্য।

উভয় ক্ষেত্রে লব্ধি কম্পাঙ্ক অপরিবর্তিত আছে।



চিত্র ৯.১৬

যাচাই কর : ৯.১৭ (ক) ও ৯.১৭(খ) চিত্র দুটি পর্যবেক্ষণ কর এবং লব্ধি তরঙ্গ সম্বন্ধে তোমার মতামত প্রদান কর।



চিত্র ৯.১৭

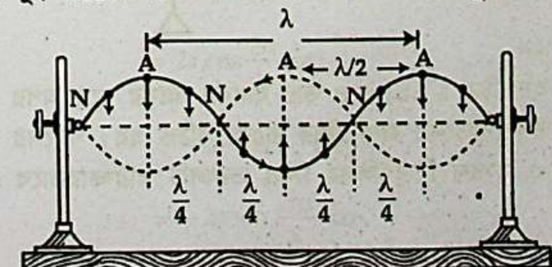
৯·৮ স্থির তরঙ্গ
Stationary wave

আড় বা লম্বিক উভয় প্রকার তরঙ্গের ক্ষেত্রেই স্থির তরঙ্গের সৃষ্টি হতে পারে। একটি তারের উভয় প্রান্তকে টান টান করে বেঁধে যেকোনো বিন্দুতে দৈর্ঘ্যের সমকোণে টেনে ছেড়ে দিলে আড় তরঙ্গ তারের উভয়দিকে প্রবাহিত হবে। বন্ধ দুই প্রান্তে প্রতিফলিত হয়ে তরঙ্গ বিপরীত দিকে এসে মূল তরঙ্গের উপর আপতিত হবে। কিছুক্ষণ পরে এই তরঙ্গ দুটি আবার থেমেও যাবে। এই ধরনের তরঙ্গ স্থির তরঙ্গ।

কোনো মাধ্যমের একটি সীমিত অংশে পরস্পর বিপরীতমুখি সমান বিস্তার ও তরঙ্গাদৈর্ঘ্যের দুটি অগ্রগামী তরঙ্গ একে অপরের উপর আপতিত হলে যে নতুন তরঙ্গ সৃষ্টি হয় তাকে স্থির তরঙ্গ বলে।

এই তরঙ্গ মাধ্যমের ওই অংশে সীমাবদ্ধ থাকে, মাধ্যমের ভেতর দিয়ে অগ্রসর হয় না। সাধারণভাবে বলা যায় যে, এ স্থলে সীমাবদ্ধ থেকে পর্যায়ক্রমে গতিশক্তি (স্থিতিস্থাপক) স্থিতি বা বিভব শক্তিতে পরিবর্তিত হয়।

উদাহরণ : একটি টানা তারের কোথাও আঘাত করলে একটি তরঙ্গ সৃষ্টি হয় [চিত্র ৯.১৮]] এবং এই তরঙ্গ তার বেয়ে দুই প্রান্তের দিকে অগ্রসর হয় এবং পরিশেষে দুই প্রান্ত হতে প্রতিফলিত হয়ে ফিরে আসে। এই প্রতিফলিত তরঙ্গ ও মূল তরঙ্গের প্রকৃতি অভিন্ন থাকলেও তাদের মধ্যে দশা বৈষম্য 180° হয়। ফলে তারে প্রতিফলিত তরঙ্গ ও এর বিপরীত দিকে গতিশীল (নতুন) মূল তরঙ্গ মিলে স্থির তরঙ্গ সৃষ্টি হয়। এই তরঙ্গ তারের বাইরে যায় না—তারের মধ্যেই পর্যায়ক্রমে উৎপন্ন ও বিলুপ্ত হয়। তারটি ভালোভাবে লক্ষ করলে দেখা যাবে যে, তারের সকল বিন্দুর বিস্তার সমান নয়।



চিত্র ৯.১৮

সুস্পন্দ বিন্দু : স্থির তরঙ্গের উপরস্থ কোনো কোনো বিন্দুতে বস্তুকণার বিস্তার শূন্য এবং কোনো কোনো বিন্দুতে বিস্তার সর্বাধিক। যে বিন্দুগুলোতে বিস্তার সর্বাধিক (চিত্রে A চিহ্নিত বিন্দুগুলো) তাদেরকে সুস্পন্দ বিন্দু (Antinode) বলে। পরপর দুটি সুস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $\frac{\lambda}{2}$

নিস্পন্দ বিন্দু : স্থির তরঙ্গের উপরস্থ যে সকল বিন্দুতে বিস্তার শূন্য (চিত্রে N চিহ্নিত বিন্দুগুলো) তাদেরকে নিস্পন্দ বিন্দু (Node) বলে। পরপর দুটি নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $\frac{\lambda}{2}$। একটি সুস্পন্দ ও একটি নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $\frac{\lambda}{4}$.

হিসাব : কোনো স্থির তরঙ্গের উপরস্থ পরপর দুটি নিস্পন্দ বিন্দুর দূরত্ব 0·52 m। স্থির তরঙ্গের কম্পাঙ্ক 320 Hz। তরঙ্গের বেগ কত ?

পরপর দুটি নিস্পদ বিন্দুর দূরত্ব $= \frac{\lambda}{2} = 0{\cdot}52 \quad \therefore \quad \lambda = 1{\cdot}04$ m

আবার, $v = n\lambda = 320 \times 1{\cdot}04 = 332{\cdot}8 \text{ ms}^{-1}$.

৯·৮-১ স্থির তরঙ্গের বৈশিষ্ট্য
Characteristics of stationary wave

স্থির তরঙ্গের কতকগুলো ধর্ম বা বৈশিষ্ট্য রয়েছে। বৈশিষ্ট্যগুলো নিম্নে উল্লেখ করা হলো :

(ক) এই তরঙ্গ কোনো একটি মাধ্যমের সীমিত অংশে উৎপন্ন হয়।

(খ) অগ্রগামী তরঙ্গের ন্যায় অগ্রসর না হয়ে একই স্থানে সীমাবন্ধ থাকে।

(গ) তরঙ্গের বিভিন্ন বিন্দুতে কম্পনের বিস্তার সমান নয়।

(ঘ) তরঙ্গের যে বিন্দুতে বিস্তার সর্বাধিক তাকে 'সুস্পন্দ' বিন্দু বলে এবং তরঙ্গের যে বিন্দুতে বিস্তার শূন্য তাকে 'নিস্পন্দ' বিন্দু বলে।

(ঙ) তরঙ্গের সুস্পন্দ বিন্দুর বিস্তার তরঙ্গ সৃষ্টিকারী মূল তরঙ্গের বিস্তারের দ্বিগুণ-এর সমান।

(চ) দুটি পর পর নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী কণার সরণ একই দিকে হয় এবং তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব $\lambda/2$। পর পর নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী অংশকে লুপ (Loop) বলে।

(ছ) পর পর দুটি লুপের সরণ পরস্পর বিপরীত দিকে হয়।

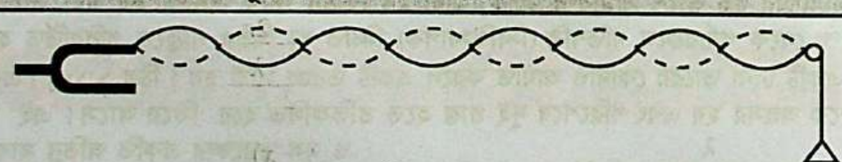
(জ) নিস্পন্দ বিন্দুতে চাপ ও ঘনত্বের পরিবর্তন সর্বাধিক, কিন্তু সুস্পন্দ বিন্দুতে চাপ ও ঘনত্বের পরিবর্তন শূন্য।

(ঝ) পর পর তিনটি সুস্পন্দ বিন্দু বা পর পর তিনটি নিস্পন্দ বিন্দু বা দুটি লুপের মধ্যবর্তী দূরত্বই স্থির তরঙ্গের তরঙ্গদৈর্ঘ্য।

(ঞ) স্থির তরঙ্গের স্থির বিন্দুস্থ কণাগুলো ছাড়া সকল কণার গতি সরল ছন্দিত গতি।

(ট) কোনো মাধ্যমে স্থির তরঙ্গের তরঙ্গদৈর্ঘ্য (λ) বা কম্পাঙ্ক (n) তরঙ্গ সৃষ্টিকারী যে কোনো একটি মূল তরঙ্গের তরঙ্গদৈর্ঘ্য (λ) বা কম্পাঙ্ক (n)-এর সমান।

স্থির তরঙ্গ সৃষ্টির পরীক্ষণ : একটি তারকে একটি কপিকলের উপর দিয়ে নিয়ে এর এক প্রান্তে একটি স্কেল প্যান যুক্ত কর। তারের অন্য প্রান্ত একটি সুরশলাকার যেকোনো বাহুর সাথে আটকাও। স্কেল প্যানে ওজন চাপাও। দেখতে পাবে তারটি টান টান হয়ে আছে। এখন সুরশলাকাকে আঘাত কর।



চিত্র ৯·১৯

সুরশলাকাকে কম্পিত করলে একটি চলতরঙ্গের সৃষ্টি হয় [চিত্র ৯·১৯] এবং তার বরাবর অগ্রসর হয়ে অপর প্রান্ত থেকে প্রতিফলিত হয়। আপতিত ও প্রতিফলিত তরঙ্গ দুটির উপরিপাতনের জন্য স্থির তরঙ্গ গঠিত হয়। প্যানের উপর রাখা ওজন প্রয়োজন মতো অদল-বদল করলে নিস্পন্দ বিন্দু ও সুস্পন্দ বিন্দুগুলিসহ স্থির তরঙ্গটি পরিষ্কারভাবে দেখা যায়।

৯·৮-২ স্থির তরঙ্গ সৃষ্টির শর্ত
Conditions for propagation of stationary wave

নিম্নলিখিত শর্ত সাপেক্ষে স্থির তরঙ্গ উৎপন্ন করা হয় :

(১) দুটি অভিন্ন চল তরঙ্গ বিপরীত দিক থেকে অগ্রসর হয়ে একে অন্যের উপর উপরিপাতিত হতে হবে।

(২) তরঙ্গ দুটি একই বেগে বিপরীত দিক থেকে আসতে হবে।

(৩) তরঙ্গ পৃষ্ঠ অনুভূমিক অবস্থানে সংকুচিত হয়।

(৪) তরঙ্গ শীর্ষ তরঙ্গ অবস্থানে প্রসারিত হয়।

(৫) প্রতিটি বিন্দুতে তরঙ্গ দুটির জন্য সরণ সমান ও বিপরীত হতে হবে।

(৬) তরঙ্গ দুটির বিস্তার সমান হতে হবে।

(৭) তরঙ্গ দুটির তরঙ্গদৈর্ঘ্য সমান হতে হবে।

৯.৮.৩ গাণিতিক রাশিমালা
Mathematical expression

ধরি, সমান বিস্তার ও তরঙ্গদৈর্ঘ্যের দুটি চলমান তরঙ্গ একটি তার বেয়ে একই মানের বেগে পরস্পর বিপরীত দিকে অগ্রসর হয়। এদের উপরিপাতনের ফলে যে তরঙ্গের উদ্ভব হয় তা কোনো দিকে অগ্রসর হয় না। তাই একে স্থির তরঙ্গ বলে। সৃষ্ট স্থানেই এ তরঙ্গ পর্যায়ক্রমে উৎপন্ন ও বিলুপ্ত হয়। ধরি, a বিস্তার ও λ তরঙ্গদৈর্ঘ্যবিশিষ্ট দুটি তরঙ্গ পরস্পর বিপরীত দিকে v মানের বেগে অগ্রসর হচ্ছে।

+ X অক্ষের দিকে অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ,

$$y_1 = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (9.17)$$

এবং − X অক্ষের দিকে প্রতিফলিত অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ,

$$y_2 = a \sin \left\{\frac{2\pi}{\lambda}(vt + x) + \pi\right\}$$

বা, $$y_2 = -a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt + x) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (9.18)$$

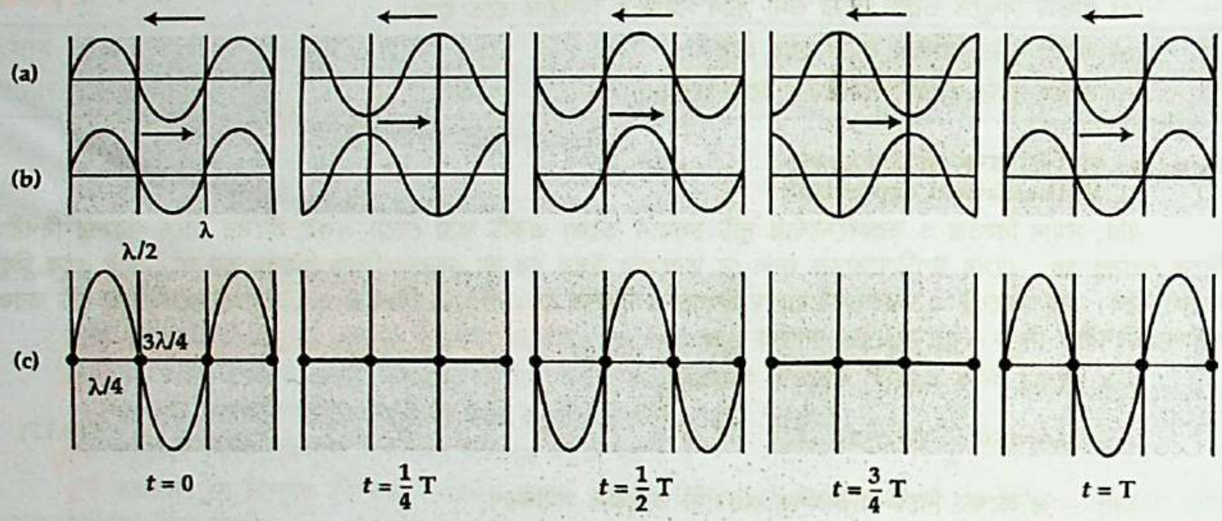
লব্ধি তরঙ্গের জন্য,

$$\begin{aligned}
y &= y_1 + y_2 \\
&= a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) - a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt + x) \\
&= a \left[\sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) - \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt + x)\right] \\
&= a \times 2 \cos \frac{\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) + \frac{2\pi}{\lambda}(vt + x)}{2} \sin \frac{\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) - \frac{2\pi}{\lambda}(vt + x)}{2} \\
&= 2a \cos \frac{\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) + \frac{2\pi}{\lambda}(vt + x)}{2} \sin \frac{\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) - \frac{2\pi}{\lambda}(vt + x)}{2} \\
&= 2a \cos \frac{\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x + vt + x)}{2} \sin \frac{\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x - vt - x)}{2} \\
&= 2a \cos \frac{2\pi}{\lambda}(vt) \sin \frac{2\pi}{\lambda}(-x) \quad = 2a \cos \frac{2\pi}{\lambda}(vt) \sin \left(-\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \\
&= -2a \cos \frac{2\pi}{\lambda}(vt) \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \\
&= -2a \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \frac{2\pi}{\lambda}(vt) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (9.19)
\end{aligned}$$

বা, $$y = A \cos \frac{2\pi}{\lambda}(vt) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (9.20)$$

যেহেতু (9.20) সমীকরণে অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণের ন্যায় দশা কোণের ভেতর $(vt - x)$ জাতীয় কোনো রাশি অন্তর্ভুক্ত নেই তাই এটি অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ নয়। এটি স্থির তরঙ্গের সমীকরণ।

এখানে, লব্ধি তরঙ্গের বিস্তার, $A = -2a \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$। লব্ধি তরঙ্গের বিস্তার x এর উপর নির্ভরশীল। ৯.১৯ চিত্রে লব্ধি বিস্তারের বিভিন্ন মানের জন্য সৃষ্ট সুস্পন্দ ও নিস্পন্দ বিন্দু সৃষ্টি দেখানো হলো।



চিত্র ৯.২০

সুস্পন্দ বিন্দু সৃষ্টির শর্ত

লব্ধি তরঙ্গের বিস্তার সর্বাধিক হবে অর্থাৎ সুস্পন্দ বিন্দু তৈরি হবে যখন,

$$\sin \frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 1$$

বা, $\sin \frac{2\pi x}{\lambda} = \sin \frac{\pi}{2}, \sin \frac{3\pi}{2}, \sin \frac{5\pi}{2} \ldots \sin(2n+1)\frac{\pi}{2}$ (এখানে, $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$)

বা, $\frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ldots (2n+1)\frac{\pi}{2}$

বা, $\frac{2x}{\lambda} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \ldots \frac{(2n+1)}{2}$

বা, $2x = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2} \ldots (2n+1)\frac{\lambda}{2}$

বা, $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4} \ldots (2n+1)\frac{\lambda}{4}$ ... ... (9.21)

সুতরাং দেখা যায় যে, x-এর মান যদি $\frac{\lambda}{4}$ এর বেজোড় গুণিতক হয় তাহলে সুস্পন্দ বিন্দু তৈরি হবে। অর্থাৎ স্থির তরঙ্গের ওপর যে সকল বিন্দু $\frac{\lambda}{4}$ এর জোড় গুণিতক দূরে অবস্থিত সেই সকল বিন্দুতে সুস্পন্দ বিন্দু গঠিত হবে।

নিস্পন্দ বিন্দু সৃষ্টির শর্ত

লব্ধি তরঙ্গের বিস্তার সর্বনিম্ন হবে অর্থাৎ নিস্পন্দ বিন্দু তৈরি হবে যখন,

$$\sin \frac{2\pi x}{\lambda} = 0$$

বা, $\sin \frac{2\pi x}{\lambda} = \sin 0, \sin \pi, \sin 2\pi \ldots \sin n\pi$ (এখানে, $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$)

বা, $\frac{2\pi x}{\lambda} = 0, \pi, 2\pi \ldots n\pi$ বা, $\frac{2x}{\lambda} = 0, 1, 2 \ldots n$

বা, $2x = 0, \lambda, 2\lambda \ldots n\lambda$ বা, $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda \ldots n\frac{\lambda}{2}$

বা, $x = 0, \frac{2\lambda}{4}, 4\frac{\lambda}{4} \ldots 2n\frac{\lambda}{4}$ ... ... (9.22)

সুতরাং দেখা যায় যে, x এর মান যদি $\frac{\lambda}{4}$ এর জোড় গুণিতক হয় তাহলে নিস্পন্দ বিন্দু তৈরি হবে। অর্থাৎ স্থির তরঙ্গের ওপর যে সকল বিন্দু $\frac{\lambda}{4}$ এর বিজোড় গুণিতক দূরে অবস্থিত সেই সকল বিন্দুতে নিস্পন্দ বিন্দু গঠিত হবে।

গাণিতিক উদাহরণ ৯.৫

১। সমান বিস্তার এবং তরঙ্গের দুটি তরঙ্গ, $y_1 = \frac{A}{2}\sin(\omega t - Kx)$ ও $y_2 = \frac{A}{2}\sin(\omega t + Kx)$ একটি তার বরাবর বিপরীত দিকে থেকে এসে একে অপরের ওপর আপতিত হয়ে স্থির তরঙ্গের সৃষ্টি হয়। $A = 2.0$ mm, $K = 3.14$ cm^{-1} এবং $\omega = 78.5$ rad s^{-1}। (ক) উপরিপাতিত তরঙ্গ দুটির বেগ নির্ণয় কর। (খ) $x = 2.33$ cm দূরে কণার কম্পনের বিস্তার নির্ণয় কর।

(ক) এখানে উপরিপাতনের ফলে সৃষ্ট তরঙ্গের সমীকরণ,

$$y = y_1 + y_2 = \frac{A}{2}\sin(\omega t + Kx) + \frac{A}{2}\sin(\omega t - Kx)$$
$$= A\cos Kx \sin\omega t$$

সুতরাং, তরঙ্গবেগ, $v = \frac{\omega}{K} = \frac{78.5}{3.14} = 50\ \text{cms}^{-1}$

(খ) x বিন্দুতে কণার কম্পনের বিস্তার $= A\cos Kx$

$$Kx = 3.14 \times 2.33 = \pi \times \frac{7}{3} = \frac{7\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$$

$\therefore$ বিস্তার $= 2\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -2 \times 0.5 = -1.0$ mm

২। দুই প্রান্তে আটকানো 72 cm দীর্ঘ একটি তারের কম্পনের সমীকরণ, $y = 5\sin\left(\frac{\pi x}{12}\right)\cos(48\pi t)$, এখানে x এবং y সেমি-এ এবং t সেকেন্ডে প্রকাশিত। (i) $x = 4$ cm দূরে অবস্থিত বিন্দুর সর্বোচ্চ সরণ কত ? (ii) তার বরাবর নিস্পন্দ বিন্দুগুলি কোথায় অবস্থিত ? (iii) $x = 12$ cm দূরে অবস্থিত কণার গতিবেগ $t = 0.5$ s পরে কত ?

এখানে, $y = 5\sin\left(\frac{\pi x}{12}\right)\cos(48\pi t)$

কণার সর্বোচ্চ সরণের জন্য, $\cos(48\pi t) = 1$ হবে।

সুতরাং, $x = 4$ cm স্থানে অবস্থিত বিন্দুর সর্বোচ্চ সরণ,

$$y_{max} = 5\sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) = 5\sin\left(\frac{\pi \times 4}{12}\right) = 5\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4.33\ \text{cm}$$

(ii) আমরা জানি, নিস্পন্দ বিন্দুতে কণার সরণ শূন্য, অতএব,

$$\sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) = 0 \qquad \therefore \frac{\pi x}{12} = n\pi \qquad (n = 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots\ldots)$$

$\therefore \quad x = 12n$

সুতরাং, $x = 0, 12, 24, 36, 48, 60$ এবং 72 cm

(iii) এখন, $y = 5\sin\left(\frac{\pi x}{12}\right)\cos(48\pi t)$

$\therefore$ কণার বেগ, $v = \frac{dy}{dt}$

$$= -5 \times 48\pi \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right)\sin(48\pi t) \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

$\therefore$ $x = 12$ cm এবং $t = 0.5$ s সমীকরণ (i) বসালে,

$$v = 5 \times 48\pi \times \sin\left(\frac{\pi \times 12}{12}\right)\sin(48\pi \times 0.5) = 0$$

৩। সমুদ্রের উপরিতলে পরপর দুটি তরঙ্গশীর্ষের দূরত্ব 16 m এবং তরঙ্গের বেগ 28·8 kmh⁻¹। তরঙ্গের ওঠানামার সঙ্গে সঙ্গে একটি নৌকার ওপর–নিচে 3 মিটার সরণ হয়। নৌকাটির সর্বোচ্চ উল্লম্ব বেগ নির্ণয় কর।

আমরা জানি, তরঙ্গের কম্পাঙ্ক,

$$n = \frac{v}{\lambda} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}\,s = 0{\cdot}5\,s$$

ধরা যাক, নৌকাটির গতি সরল দোল গতি এবং গতির সমীকরণ $y = A \sin \omega t$

$\therefore$ নৌকাটির গতিবেগ, $v = \frac{dy}{dt} = A\omega \cos \omega t$

$\therefore$ নৌকাটির সর্বোচ্চ গতিবেগ, $v_{max} = \omega A = 2\pi n A$

এখানে,

তরঙ্গদৈর্ঘ্য, $\lambda = 16\,m$

তরঙ্গের বেগ, $v = 28{\cdot}8\,kmhr^{-1}$

$$= \frac{28{\cdot}8 \times 10^{-3}}{60 \times 60}\,ms^{-1}$$

$$= 8\,ms^{-1}$$

$$A = \frac{3}{2}\,m = 1{\cdot}5\,m$$

সুতরাং, নৌকাটির সর্বোচ্চ উল্লম্ব বেগ, $v_{max} = 2\pi n A = 2 \times 3{\cdot}14 \times 0{\cdot}5 \times 1{\cdot}5$

$$= 4{\cdot}71\,ms^{-1}$$

৪। বায়ু ও পানিতে 300 cycle/sec কম্পাঙ্কের একটি শব্দ তরঙ্গদৈর্ঘ্যের পার্থক্য 4·16 m। বায়ুতে শব্দের বেগ 352 ms⁻¹ হলে পানিতে শব্দের বেগ কত ? [RUET Admission Test, 2004-05]

প্রশ্নানুসারে,

$$\lambda_w - \lambda_a = 4{\cdot}16 \qquad (\because v_w > v_a)$$

$$\frac{v_w}{f} - \frac{v_a}{f} = 4{\cdot}16 \qquad \left[\because \lambda = \frac{v}{f}\right]$$

$$\therefore \quad v_w = 4{\cdot}16 \times 300 + 352 = 1600\,ms^{-1}$$

এখানে,

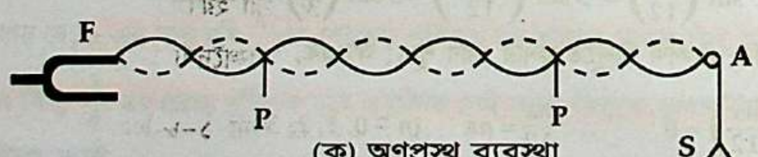
$f = 300\,c/s$

৯·৯ ব্যবহারিক
Experimental

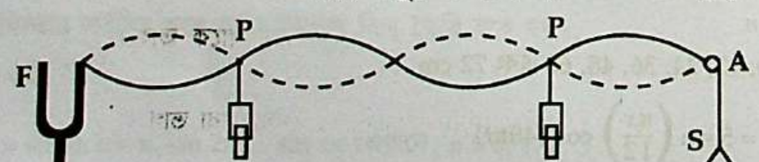
পরীক্ষণের নাম :	মেলডির পরীক্ষা Melde's experiment
পিরিয়ড : ২	

তত্ত্ব (Theory) : একটি সুতার এক প্রান্ত একটি সুরশলাকার এক বাহুতে বেঁধে অপর প্রান্তকে কপিকলের ওপর দিয়ে নিয়ে ওজন চাপালে সুতাটি টানটান অবস্থায় থাকে। এখন সুরশলাকাতে কম্পন সৃষ্টি করা হলে সুতায় আড় তরঙ্গের সৃষ্টি হবে যা সুতা বরাবর সঞ্চালিত হয়ে কপিকলে বাধা পেয়ে প্রতিফলিত হবে এবং উপরিপাতনের ফলে সুতায় স্থির তরঙ্গ উৎপন্ন হবে। সুতার দৈর্ঘ্যের ওপর নির্ভর করে কয়েকটি লুপ সৃষ্টি হবে। এখন সুতার টান T, একক দৈর্ঘ্যের ভর m এবং সুতায় সৃষ্ট স্থির তরঙ্গের তরঙ্গদৈর্ঘ্য বা দুটি লুপের দৈর্ঘ্য λ হলে সুতার কম্পাঙ্ক,

$$n = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{T}{m}}$$



(ক) অণুপ্রস্থ ব্যবস্থা



(খ) অণুদৈর্ঘ্য ব্যবস্থা

চিত্র ৯·২১

তারের অপর প্রান্তে ঝুলানো ভর M এবং ওই স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণ g হলে, $T = Mg$

$$\therefore \quad n = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{Mg}{m}} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

সুরশলাকার সাহায্যে সুতায় দুইভাবে কম্পন সৃষ্টি করা যায়। যথা—

(i) অণুপ্রস্থ ব্যবস্থা এবং (ii) অণুদৈর্ঘ্য ব্যবস্থা।

(i) অণুপ্রস্থ ব্যবস্থা : অণুপ্রস্থ ব্যবস্থায় সুরশলাকার কম্পন সুতার দৈর্ঘ্যের সাথে সমকোণে হয় [চিত্র ৯·২১(ক)]। এক্ষেত্রে সুরশলাকার কম্পাঙ্ক N, সুতার কম্পাঙ্ক n-এর সমান হয়। অর্থাৎ

$$\therefore \quad N = n = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{Mg}{m}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

(ii) অণুদৈর্ঘ্য ব্যবস্থা : অণুদৈর্ঘ্য ব্যবস্থায় সুরশলাকার কম্পন সুতার দৈর্ঘ্যের সমান্তরালে হয় [চিত্র ৯·২১(খ)]। এক্ষেত্রে সুর শলাকার কম্পাঙ্ক N সুতার কম্পাঙ্ক n-এর দ্বিগুণ হয়। অর্থাৎ,

$$N = 2n = \frac{2}{\lambda}\sqrt{\frac{Mg}{m}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(iii)}$$

উভয় ক্ষেত্রেই, N = সুরশলাকার কম্পাঙ্ক

n = সুতার কম্পাঙ্ক

λ = সুতায় সৃষ্ট স্থির তরঙ্গের তরঙ্গদৈর্ঘ্য

T = সুতার টান

m = সুতার একক দৈর্ঘ্যের ভর

যন্ত্রপাতি : (১) মেলডির যন্ত্র (২) সুতা (৩) মিটার স্কেল (৪) ওজন-বাক্স (৫) ক্লাম্প

কার্যপদ্ধতি :

(১) প্রথমে সুরশলাকাকে আড়াআড়ি বা লম্বিক ব্যবস্থায় রাখা হয়।

(২) নিক্তির সাহায্যে মেলডির যন্ত্রের পাল্লার ভর নির্ণয় করা হয়।

(৩) পরীক্ষণীয় সুতার এক প্রান্তকে সুর শলাকার সাথে এবং অপর প্রান্তকে কপিকলের ওপর দিয়ে নিয়ে পাল্লার সাথে আটকানো হয়।

(৪) পাল্লায় সামান্য ওজন চাপিয়ে সুতাটিকে টান টান অবস্থায় রাখা হয়।

(৫) সুর শলাকাটিকে একটি রাবারের হাতুড়ি দ্বারা হালকা আঘাত করা হয়।

(৬) কপিকলের অবস্থান অনুভূমিকভাবে পরিবর্তন করে এবং পাল্লায় ওজন কম-বেশি করে স্থির তরঙ্গের লুপ এবং নিস্পন্দ বিন্দুগুলো সুস্পষ্ট করা হয়।

(৭) দুটি পিন স্ট্যান্ড নিয়ে এদেরকে দুটি সুস্পষ্ট নিস্পন্দ বিন্দুর নিচে রাখা হয়। একটি মিটার স্কেলের সাহায্যে পিন দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করা হয় এবং লুপের সংখ্যাও গণনা করা হয়। যদি পিন দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব d হয় এবং লুপের সংখ্যা k হয় তাহলে, $\frac{\lambda}{2} = \frac{d}{k}$। এখান থেকে তরঙ্গদৈর্ঘ্য নির্ণয় করা হয়।

(৮) পাল্লায় একই ওজন রেখে একই প্রক্রিয়ায় আরও দুবার তরঙ্গদৈর্ঘ্য নির্ণয় করে গড় তরঙ্গদৈর্ঘ্য নির্ণয় করা হয়।

(৯) পাল্লায় এবার ওজন দুবার পরিবর্তন করে প্রতিবারের জন্য ১–৮ ধাপ অনুসরণ করে আরও দুবার গড় তরঙ্গদৈর্ঘ্য নির্ণয় করা হয়।

(১০) সুরশলাকাকে যদি আগে আড়াআড়ি ব্যবস্থায় রাখা হয়ে থাকে তাহলে এবার লম্বিক ব্যবস্থায় রাখা হয় এবং পূর্বের পদ্ধতি অনুসরণ করে গড় তরঙ্গদৈর্ঘ্য নির্ণয় করা হয়।

(১১) এবার সম্পূর্ণ সুতার দৈর্ঘ্য ও ভর নির্ণয় করে ভরকে দৈর্ঘ্য দ্বারা ভাগ করে একক দৈর্ঘ্যের ভর m নির্ণয় করা হয়।

এখন প্রতিবারের গড় তরঙ্গদৈর্ঘ্য, প্রতিবারের ওজন ও m এর মান বসিয়ে আড়াআড়ি বা লম্বিক ব্যবস্থায় সুর শলাকার কম্পাঙ্ক নির্ণয় করা হয়।

হিসাব ও উপাত্ত সংগ্রহ :

(ক) স্কেল প্যানের ভর, W = ... g (খ) সুতার ভর, M = ...g (গ) সুতার দৈর্ঘ্য, L = ...cm

(ঘ) সুতার প্রতি একক দৈর্ঘের ভর, $m = \frac{M}{L}$ g = ... g/cm

ডাটা ছক-১

লম্বিক অবস্থানের জন্য :

পর্যবেক্ষণ সংখ্যা	দুই প্রান্তের মাঝে লুপ-সংখ্যা	স্কেলে চাপানো ভর (W_1) g	সুতার টান, T = Wg = (W + W_1) g dyne	নির্ধারিত দুই প্রান্তের মধ্যবর্তী দূরত্ব, D	নির্ধারিত দুই প্রান্তের মধ্যবর্তী লুপসংখ্যা, N	সেগমেন্টের দৈর্ঘ্য, $l = \frac{D}{N}$	$\frac{T}{l}$	তারের কম্পাঙ্ক, $n = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{T}{m}}$	টিউনিং ফর্কের কম্পাঙ্ক, $n = n'$ (Hz)

ডাটা ছক-২

আড়াআড়ি অবস্থানের জন্য :

পর্যবেক্ষণ সংখ্যা	দুই প্রান্তের মাঝে লুপসংখ্যা	স্কেলে চাপানো ভর (W_1) g	সুতার টান, T = Wg = (W + W_1) g dyne	নির্ধারিত দুই প্রান্তের মধ্যবর্তী দূরত্ব, D	নির্ধারিত দুই প্রান্তের মধ্যবর্তী লুপসংখ্যা, N	সেগমেন্টের দৈর্ঘ্য, $l = \frac{D}{N}$	$\frac{T}{l}$	তারের কম্পাঙ্ক, $n = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{T}{m}}$	টিউনিং ফর্কের কম্পাঙ্ক, $n = n'$ (Hz)

সতর্কতা ও আলোচনা :

(১) সুরশলাকাকে হাতুড়ি (hammer)-এর সাহায্যে একটিমাত্র স্ট্রোকে (stroke) কম্পন সৃষ্টি করতে হবে।
(২) প্যানে ভর বৃদ্ধি বা কমিয়ে লুপসংখ্যা বৃদ্ধি বা কমাতে হবে।
(৩) লুপ যথাসম্ভব স্পষ্ট করতে হবে।
(৪) সরু সুতা ব্যবহার করতে হবে।
(৫) পাল্লায় অত্যন্ত বেশি ভর ব্যবহার করা যাবে না।

৯·১০ মুক্ত বা স্বাভাবিক কম্পন ও পরবশ কম্পন
Free or natural vibration and forced vibration

মুক্ত কম্পন : একটি সুর শলাকাকে আঘাত করলে এটি নির্দিষ্ট কম্পাঙ্ক ও পর্যায়কালে কাঁপতে থাকে। এ কম্পন সুর শলাকার মুক্ত কম্পন। আবার একটি সরল দোলককে সাম্যাবস্থা থেকে টেনে ছেড়ে দিলে দোলকটি নির্দিষ্ট কম্পাঙ্ক ও পর্যায়কালে দুলতে থাকে। এটিও মুক্ত কম্পন। সুতরাং মুক্ত কম্পনের নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেয়া যায়।

সংজ্ঞা : **স্পন্দনক্ষম যে কোনো বস্তুকে আন্দোলিত করলে বস্তুটি একটি নির্দিষ্ট কম্পাঙ্ক ও পর্যায়কালে স্পন্দিত হয়। এই স্পন্দনকে মুক্ত কম্পন (free vibration) বা স্বাভাবিক কম্পন (natural vibration) বলে।** মুক্ত কম্পাঙ্ক বস্তুর ঘনত্ব, আকৃতি ও স্থিতিস্থাপকতার ওপর নির্ভর করে। যেমন সরল দোলকের দৈর্ঘ্য পরিবর্তন করলে এর কম্পাঙ্ক ভিন্নতর হয়।

এই কম্পনের কম্পাঙ্ককে বস্তুর স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক (natural frequecny) এবং পর্যায়কালকে স্বাভাবিক পর্যায়কাল বলে। যেমন সরল দোলকের স্বাভাবিক পর্যায়কাল, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

পরবশ কম্পন : কোনো পরিবর্তনশীল বলের মান ও দিক যদি নির্দিষ্ট সময় অন্তর একই হয়, তবে ওই বলকে পর্যাবৃত্ত বল বলে এবং এ ধরনের স্পন্দনকে পর্যাবৃত্ত স্পন্দন বলে। এরূপ কোনো পর্যাবৃত্ত বল দ্বারা স্পন্দনক্ষম কোনো বস্তুকে কম্পিত করলে বস্তুটি প্রথমে তার মুক্ত বা স্বাভাবিক কম্পাঙ্কে স্পন্দিত হওয়ার চেষ্টা করে, কিন্তু ধীরে ধীরে বস্তুটি পর্যাবৃত্ত বলের কম্পাঙ্কে স্পন্দিত হতে থাকে। এ ধরনের কম্পন বস্তুটির মধ্যে বাইরে থেকে আরোপ করা হয়েছে। একে আরোপিত বা পরবশ কম্পন বলে।

সুতরাং, পরবশ কম্পন নিম্নোক্তভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়।

সংজ্ঞা : স্পন্দনক্ষম বস্তুর ওপর আরোপিত পর্যাবৃত্ত স্পন্দনের জন্য বস্তুটি তার স্বাভাবিক কম্পাঙ্কে কম্পিত হওয়ার পরিবর্তে যখন আরোপিত কম্পনের কম্পাঙ্কে স্পন্দিত হতে থাকে তখন এ কম্পনকে আরোপিত বা পরবশ কম্পন বলে।

ব্যাখ্যা : একটি সুর শলাকাকে আঘাত করে বায়ু মাধ্যমে রাখলে খুব ক্ষীণ শব্দ শোনা যাবে। কিন্তু ওই স্পন্দিত সুর শলাকাকে একটি টেবিলের উপরে চেপে ধরলে বেশ জোরে শব্দ শোনা যাবে। এক্ষেত্রে সুর শলাকার কম্পনে টেবিলটি পরবশ কম্পনে কম্পিত হয়। এর ফলে টেবিল সংলগ্ন সমস্ত বায়ুই কম্পিত হয়। এতে অধিক পরিমাণে বায়ু কম্পিত হওয়ার ফলে শব্দের তীব্রতা বা প্রাবল্য বেড়ে যায়।

তানপুরা, সেতার, বেহালা, গিটার ইত্যাদি তারের বাদ্যযন্ত্রে একটি ফাঁপা বায়ুপূর্ণ খোল থাকে। তারের কম্পনের সাথে সাথে বাক্সের বায়ুস্তম্ভে পরবশ কম্পন সৃষ্টি হয়। একসঙ্গে অনেক বাতাস কম্পিত হওয়ার কারণে শব্দের প্রাবল্য বাড়ে।

কাজ : তীব্র ভূমিকম্পে ঘরবাড়ি ভেঙ্গে পড়ে কেন, ব্যাখ্যা কর।

ভূমিকম্প ঘরবাড়ির দেওয়ালে পরবশ কম্পনের সৃষ্টি করে। তীব্র ভূমিকম্পে পরবশ কম্পনের বিস্তার অনেক বেশি হয়, যা ঘরবাড়িতে ব্যবহৃত উপাদানসমূহের স্থিতিস্থাপক সীমা অতিক্রম করে, ফলে বহু ঘরবাড়ি ভেঙ্গে পড়ে।

৯.১০.১ মুক্ত কম্পন ও পরবশ কম্পনের মধ্যে পার্থক্য

Differences between free vibration and forced vibration

মুক্ত কম্পন (free vibration)	পরবশ কম্পন (forced vibration)
১। শুধুমাত্র প্রত্যায়নী বল ছাড়া অন্য কোনো বল বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল হয় না।	১। বাইরে থেকে পর্যাবৃত্ত বল প্রয়োগ করলে পরবশ কম্পন সৃষ্টি হয়।
২। মুক্ত কম্পনের কম্পাঙ্ক বস্তুটির ভর, আকৃতি ও স্থিতিস্থাপকতা ধর্মের ওপর নির্ভর করে।	২। পরবশ কম্পনের কম্পাঙ্ক বস্তুর ওপর প্রযুক্ত পর্যাবৃত্ত বলের কম্পাঙ্কের সমান হয়।
৩। বাধাজনিত বলের ক্রিয়ায় বস্তুর মুক্ত কম্পন আস্তে আস্তে কমে যায়।	৩। প্রযুক্ত পর্যাবৃত্ত বল বস্তুর ওপর যতক্ষণ ক্রিয়া করে, পরবশ কম্পনও ততক্ষণ স্থায়ী হয়।
৪। মুক্ত কম্পনের বিস্তার সাধারণত কম হয়।	৪। পরবশ কম্পনের বিস্তার সাধারণত মুক্ত কম্পনের বিস্তারের বেশি হয়।

৯.১১ অনুনাদ

Resonance

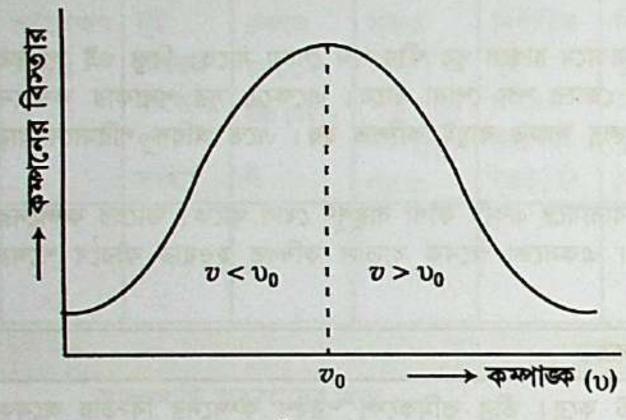
মা যখন বাচ্চাকে দোলনায় রেখে দোল দেয় তখন বাচ্চা কখনো ঘুমিয়ে পড়ে আবার কখনো ঘুমায় না। দোলনার কম্পন এবং বায়ুতে অবস্থিত কণাসমূহের কম্পন সমান হলেই বাচ্চা আরাম অনুভব করে এবং অল্পক্ষণের মধ্যে ঘুমিয়ে পড়ে। আবার সৈনিকেরা যখন একটা পুল বা কালভার্টের উপর পা মিলিয়ে ডবল মার্চ করতে থাকে তখন যদি সেখানে অবস্থান কর তাহলে বুঝতে পারবে পুল বা কালভার্ট এত জোরে কম্পিত হয় যে ভেঙ্গে যাবার উপক্রম হয় বা কোনো কোনো ক্ষেত্রে ভেঙ্গেও যেতে পারে। উপরের দুটি ক্ষেত্রেই অনুনাদের জন্য এ ঘটনা ঘটে।

অনুনাদ নলের বায়ুস্তম্ভের উপর একটি কম্পমান সুর শলাকা স্পন্দনে কম্পিত করে ধরলে এবং নলের বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য কম-বেশি করলে এক পর্যায়ে জোরালো শব্দ সৃষ্টি করে। এক্ষেত্রে উৎসের কম্পন ও নলের বায়ুস্তম্ভের কম্পন সমান হবে। ফলে অনুনাদ সৃষ্টি হয় এবং জোরালো শব্দ শোনা যায়।

একটি কম্পমান বস্তুকে অন্য একটি বস্তুর নিকট ধরলে দ্বিতীয় বস্তুটি কাঁপতে শুরু করে। যদি বস্তুর স্বাভাবিক পর্যায়কাল ও প্রযুক্ত বলের পর্যায়কাল ভিন্ন হয় তবে বস্তু ক্ষুদ্র বিস্তারে কাঁপবে যা পরবশ কম্পনের বৈশিষ্ট্য। কিন্তু বস্তুর স্বাভাবিক পর্যায়কাল ও তার ওপর প্রযুক্ত বলের পর্যায়কাল সমান হলে বস্তুটি বৃহত্তর বিস্তারে কাঁপতে বাধ্য হয় এবং শব্দের প্রাবল্য বৃদ্ধি পায়। এ প্রক্রিয়াকে অনুনাদ বলে। অনুনাদ হচ্ছে কম্পনের একটি বিশেষ অবস্থা যার সংজ্ঞা নিম্নোক্তভাবে দেওয়া যায়।

সংজ্ঞা : কোনো বস্তুর ওপর প্রযুক্ত পর্যাবৃত্ত বলের কম্পাঙ্ক বস্তুটির স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের সমান হলে বস্তুটি সর্বোচ্চ বিস্তারে কম্পিত হয়। এ ধরনের কম্পনকে অনুনাদ বলে।

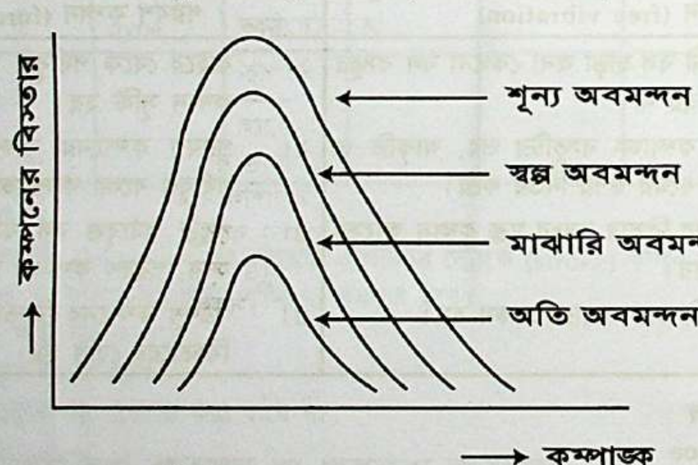
অন্যভাবে বলা যায় উৎসের কম্পন এবং উৎসের দ্বারা সৃষ্ট শব্দ যে মাধ্যম দিয়ে চলাচল করে তার কণার কম্পন সমান হলে একটি জোরালো শব্দ সৃষ্টি হয় বা কণাগুলি সর্বাধিক বিস্তারে কম্পিত হয়। এই ঘটনাকে অনুনাদ বলে।



চিত্র ৯.২২

ব্যাখ্যা : কম্পনশীল বস্তুর কম্পনের বিস্তার প্রযুক্ত বলের কম্পাঙ্কের ওপর নির্ভর করে। চিত্র ৯.২২-এ প্রযুক্ত বলের কম্পাঙ্কের সাথে বস্তুর কম্পনের বিস্তারের পরিবর্তন দেখানো হয়েছে। এখানে বস্তুর স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক υ এবং প্রযুক্ত বলের কম্পাঙ্ক υ_0 দ্বারা বিস্তার চিহ্নিত করা হয়েছে। এখন, $\upsilon = \upsilon_0$ হলে অনুনাদ সৃষ্টি হয়। তাই υ_0-কে অনুনাদী কম্পাঙ্ক (resonant frequency) বলে এবং সংশ্লিষ্ট বিস্তারকে অনুনাদী বিস্তার বলে। বস্তুর কম্পনের কম্পাঙ্ক প্রযুক্ত বলের কম্পাঙ্ক অপেক্ষা কম বা বেশি হলে অর্থাৎ $\upsilon < \upsilon_0$ বা $\upsilon > \upsilon_0$ উভয় ক্ষেত্রেই বস্তুর কম্পনের বিস্তার অনুনাদী বিস্তার অপেক্ষা কম হয়।

অনুনাদী কম্পনের সময় কম্পনের বিস্তার কম বেশি হওয়া নির্ভর করে অবমন্দনের (damping) মানের ওপর। বিভিন্ন মানের অবমন্দনের ক্ষেত্রে প্রযুক্ত বলের কম্পাঙ্কের সাথে বস্তুর পরবশ কম্পনের বিস্তার কীভাবে পরিবর্তিত হয় তা চিত্র ৯.২৩-এ দেখানো হয়েছে। এই লেখগুলোকে অনুনাদী লেখ (resonant curves) বলে।



চিত্র ৯.২৩

প্রযুক্ত বলের যে কম্পাঙ্কের জন্য বিস্তার সর্বোচ্চ হয় তাকে অনুনাদী কম্পাঙ্ক বলে। লেখ থেকে স্পষ্ট যে অবমন্দন যত কম হবে অনুনাদী কম্পনের বিস্তার তত বৃদ্ধি পাবে। অর্থাৎ অনুনাদের তীক্ষ্ণতা তত বৃদ্ধি পাবে। সুতরাং, বলা যায় যে, অবমন্দন শূন্য হলে অনুনাদী কম্পনের বিস্তার অসীম হবে। লেখচিত্রগুলো বিশ্লেষণ করলে দেখা যায় যে, অবমন্দন যত কম হয়, অনুনাদ তত তীক্ষ্ণ হয়। কম্পাঙ্কের সামান্য পরিবর্তনের জন্য বিস্তার অনেক কমে যায়। এই ঘটনাকে অনুনাদের তীক্ষ্ণতা (sharpness of resonance) বলে। অবমন্দন যত বাড়ে তীক্ষ্ণতা তত কমে। তখন কম্পাঙ্কের সামান্য পরিবর্তনের জন্য বিস্তারের তেমন পরিবর্তন লক্ষ করা যায় না। সুতরাং অবমন্দন বাড়লে অনুনাদের তীক্ষ্ণতা হ্রাস পায়।

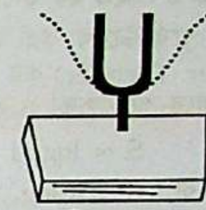
অনুসন্ধানমূলক কাজ : পানিপূর্ণ পাত্র অপেক্ষা শূন্য পাত্রকে আঘাত করলে জোরালো শব্দ হয় কেন, ব্যাখ্যা কর।

কোনো একটি পাত্রকে আঘাত করলে যে কম্পনের সৃষ্টি হয় তা পাত্রের ভেতরের বায়ু বা পানিতে পরবশ কম্পন সৃষ্টি করে। এখন পাত্র পানিপূর্ণ থাকলে কম্পনের বিস্তার কম হয়। ফলে উৎপন্ন শব্দের প্রাবল্য কম হয়। তবে পাত্র খালি থাকলে তখন পাত্র হাল্কা থাকে। তাই খালি পাত্রকে আঘাত করলে কম্পনের বিস্তার বেশি হয়। ফলে সৃষ্ট শব্দের প্রাবল্যও বেশি হয়। অর্থাৎ জোরালো শব্দ সৃষ্টি হয়।

পরবশ কম্পন ও অনুনাদের সংজ্ঞা থেকে এটি স্পষ্ট যে সকল অনুনাদই পরবশ কম্পন কিন্তু সকল পরবশ কম্পন অনুনাদ নয়।

উদাহরণ :

১। একটি সুরশলাকাকে কম্পিত করে তা বায়ুতে স্থাপন করলে খুব ক্ষীণ শব্দ উৎপন্ন হয়। কিন্তু এই কম্পিত সুরশলাকা টেবিলের উপর চেপে ধরলে জোরে শব্দ শোনা যায়। এক্ষেত্রে সুরশলাকার কম্পনের ফলে টেবিলের কাঠ পরবশ কম্পনে স্পন্দিত হয় এবং টেবিলের চারপাশের বায়ু স্পন্দিত হয়। এক্ষেত্রে স্পন্দনের মাত্রা বৃদ্ধি পায় বলে শব্দের প্রাবল্যও বেড়ে যায়। এভাবে স্পন্দন সৃষ্টি হয় [চিত্র ৯.২৪]।



চিত্র ৯.২৪

২। একটি ঝুলন্ত ব্রীজের ওপর দিয়ে সৈন্যদল যখন মার্চ করে যায় তখন সৈন্যদলের পা মিলিয়ে যাবার কারণে আরোপিত কম্পনের সৃষ্টি হয়। ফলে ব্রীজের লোহা বা অন্যান্য উপাদানের কণাগুলোও কম্পিত হয়। যখন আরোপিত কম্পন এবং ব্রীজের উপাদানের কণাগুলোর কম্পন সমান হয় তখন ব্রিজটি সর্বোচ্চ বিস্তারে কম্পিত হয়। এক পর্যায়ে ব্রিজটি ভেঙ্গেও পড়তে পারে। এভাবে ব্রিজে অনুনাদ সৃষ্টি হয়।

অনুনাদের বৈশিষ্ট্য :

১। কোনো একটি বস্তুর স্বাভাবিক পর্যায়কাল যদি এর ওপর আরোপিত পর্যায় বলের পর্যায়কালের সমান হয়, তখন বস্তুটির কম্পনে অনুনাদ হয়।

২। সকল অনুনাদী কম্পন পরবশ কম্পন।

৩। অনুনাদী কম্পনে বিস্তার সবচেয়ে বেশি হবে।

৪। অনুনাদে বস্তুর কম্পন শুরু হওয়ার অল্প সময় পরই নিয়মিত হয়।

অনুধাবনমূলক কাজ : "সকল অনুনাদই পরবশ কম্পন কিন্তু সকল পরবশ কম্পন অনুনাদ নয়"—কেন?

একটি পর্যাবৃত্ত বল প্রয়োগ করে কোনো বস্তুকে কম্পিত করলে বস্তুটি প্রথমে তার নিজস্ব স্বাভাবিক কম্পাঙ্কে কম্পিত হওয়ার চেষ্টা করে। কিন্তু পরে দেখা যাবে যে বস্তুটি পর্যাবৃত্ত বলের কম্পাঙ্ক অনুযায়ী স্পন্দিত হচ্ছে। বস্তুটির স্থানিক কম্পাঙ্ক যাই হোক না কেন পর্যাবৃত্ত বলটি যতক্ষণ ক্রিয়াশীল থাকবে বস্তুটিও ততক্ষণ ধরে পর্যাবৃত্ত বলের কম্পনে কম্পিত হতে থাকবে। এ ধরনের কম্পনকে পরবশ কম্পন বলে। অন্যদিকে, অনুনাদ বিশেষ ধরনের পরবশ কম্পন। বস্তুর নিজস্ব কম্পাঙ্ক এবং তার উপর আরোপিত পর্যাবৃত্ত স্পন্দনের কম্পাঙ্ক সমান হলে বস্তুটি সর্বোচ্চ বিস্তারে কম্পিত হতে থাকে। এ ধরনের কম্পনই অনুনাদ। সুতরাং সকল অনুনাদ পরবশ কম্পন হলেও সকল পরবশ কম্পন অনুনাদ নয়।

৯.১২ শব্দের তীব্রতা ও তীব্রতা লেভেল
Intensity of sound and intensity level

মানুষের কান একটি স্বাভাবিক শব্দগ্রাহক যন্ত্র। উৎস হতে শব্দ তরঙ্গ মাধ্যমের মধ্য দিয়ে সঞ্চালিত হয়ে আমাদের কানের পর্দায় কম্পন সৃষ্টি করে। এই কম্পন সংকেত অনুসারে মস্তিষ্কে অনুভূতি সৃষ্টি করে এবং মস্তিষ্ক শব্দের প্রকৃতি বিশ্লেষণের মাধ্যমে শব্দ জোরালো না ক্ষীণ তা চিহ্নিত করে। মানুষের কান এত সংবেদনশীল (sensitive) যে অতি ক্ষীণ এবং অত্যন্ত জোরালো শব্দ শুনতে পায়। ক্ষীণ এবং জোরালো শব্দের অনুপাত 10^{13}। এই সীমার মধ্যে সৃষ্ট শব্দ আমরা শুনতে পাই।

শব্দোচ্চতা হচ্ছে মূলত কর্ণের অনুভূতি। এটি শারীরবৃত্তীয় বিষয় (physiological phenomenon), ভৌত বিষয় নয়। শব্দোচ্চতা শ্রবণের মাত্রা প্রকাশ করে। শব্দোচ্চতা বলতে শব্দ কতটা জোরে হচ্ছে তা বুঝায়। অপরদিকে প্রতি একক ক্ষেত্রফল হতে প্রতি সেকেন্ডে লম্বভাবে নির্গত শব্দ শক্তিই হলো শব্দের তীব্রতা।

অনুধাবনমূলক কাজ : "শব্দোচ্চতা তীব্রতার উপর নির্ভরশীল কিন্তু সমানুপাতিক নয়"—এর ব্যাখ্যা কর।

যে বৈশিষ্ট্য দ্বারা একটি শব্দ অন্য একটি শব্দ হতে কত বেশি জোরালো তা বুঝা যায় তাকে শব্দোচ্চতা বলে। লক্ষণীয় যে, শব্দোচ্চতার সংজ্ঞা ব্যক্তিনির্ভর। অর্থাৎ শব্দ চলার পথে একক ক্ষেত্রফল হতে লম্বভাবে প্রতি সেকেন্ডে নির্গত শব্দ শক্তিই হলো শব্দের তীব্রতা। একই তীব্রতার বিভিন্ন কম্পাঙ্কের শব্দ শ্রোতার কাছে কম-বেশি জোরে মনে হতে পারে। শব্দোচ্চতা শব্দের তীব্রতা দ্বারা নির্ধারিত হয়। একই তীব্রতার শব্দ ভিন্ন ভিন্ন লোকের কাছে ভিন্ন ভিন্ন শব্দোচ্চতার অনুভূতি সৃষ্টি করতে পারে। তীব্রতা যত বাড়ে শব্দোচ্চতা তত বেশি জোরালো হয়। তবে শব্দোচ্চতা শব্দের তীব্রতার সাথে সমানুপাতিক হারে বাড়ে না। তাই বলা যায়, শব্দোচ্চতা শব্দের তীব্রতার উপর নির্ভরশীল হলেও সমানুপাতিক নয়।

তীব্রতা (Intensity) : শব্দের তীব্রতা একটি সুনির্দিষ্ট ভৌত রাশি। তীব্রতার সংজ্ঞা নিম্নরূপ :

শব্দ সঞ্চালনের অভিমুখের সাথে লম্বভাবে স্থাপিত একক ক্ষেত্রফলের মধ্য দিয়ে যে পরিমাণ শক্তি প্রতি সেকেন্ডে প্রবাহিত হয় তাকে তীব্রতা বলে। একে I দ্বারা প্রকাশ করা হয়। তীব্রতার একক $Js^{-1}m^{-2}$ বা Wm^{-2}।

পূর্বে উল্লেখ করা হয়েছে যে শব্দোচ্চতা তীব্রতার সাথে বাড়ে তবে সমানুপাতিক হারে নয়। ওয়েবার ফেচনার (Weber Fechner)-এর সূত্র অনুসারে শব্দোচ্চতা শব্দের তীব্রতার লগারিদম (Logarithm)-এর সমানুপাতিক। এই সূত্রানুসারে শব্দোচ্চতা S এবং শব্দের তীব্রতা I হলে, এদের মধ্যে সম্পর্ক হলো,

$$S \propto \log_{10} I$$

বা, $$S = K\log_{10} I \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (9.23)$$

শব্দের তীব্রতার একক Wm^{-2} হলেও ব্যবহারিক ক্ষেত্রে প্রমাণ তীব্রতার সাপেক্ষে একে পরিমাপ করা হয়। প্রমাণ তীব্রতা কী তা জানা দরকার।

প্রমাণ তীব্রতা (Standard intensity) : 1000 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট শব্দের শ্রাব্যতার সীমা 10^{-12} Wm^{-2} তীব্রতার সমান ধরা হয় এবং একেই প্রমাণ বা আদর্শ তীব্রতা বলে। অর্থাৎ **1000 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট 10^{-12} Wm^{-2} তীব্রতাকে প্রমাণ তীব্রতা বলে**। একে I_0 দ্বারা সূচিত করা হয়। I_0 এর সাপেক্ষে সকল তীব্রতা পরিমাপ করা হয়।

তীব্রতা লেভেল (Intensity level) : যে কোনো শব্দের তীব্রতা এবং আদর্শ বা প্রমাণ তীব্রতার শব্দের শব্দোচ্চতার পার্থক্যকে তীব্রতা লেভেল বলে। অন্যভাবে বলা যায়, কোনো শব্দের তীব্রতা ও প্রমাণ তীব্রতার অনুপাতের লগারিদমকে ওই শব্দের তীব্রতা লেভেল বলে। তীব্রতা লেভেলকে বেল (bel) এবং ডেসিবেল (dB) এককে প্রকাশ করা হয়।

ব্যাখ্যা : ধরা যাক, দুটি নির্দিষ্ট কম্পাঙ্কের শব্দের তীব্রতা I ও I_0 এবং শব্দোচ্চতা যথাক্রমে S ও S_0। এখন সমীকরণ (9.23) হতে পাই,

$$S \propto \log_{10} I \qquad \text{বা,} \quad S = K\log_{10} I$$

আবার, $S_0 \propto \log_{10} I_0$ বা, $S_0 = K\log_{10} I_0$

$\therefore$ শব্দোচ্চতার পার্থক্য, $\beta = S - S_0 = K(\log_{10} I - \log_{10} I_0)$

বা, তীব্রতা লেভেল $= K\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (9.24)$

এখানে K হচ্ছে ধ্রুবক। এটি এককের ওপর নির্ভর করে। শব্দোচ্চতার পার্থক্য β-কে তীব্রতা লেভেল বলা হয়।

এখন K = 1 এবং I_0 প্রমাণ তীব্রতা হলে শব্দোচ্চতার পার্থক্যকে বেল (bel) বলা হয়। অর্থাৎ $\beta = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ bel

টেলিফোনের আবিষ্কারক আলেকজান্ডার গ্রাহাম বেলের নামকরণে এই এককের নামকরণ করা হয়েছে। শব্দোচ্চতার একক বেল খুবই বড় একক, তাই ডেসিবেল ব্যবহার করা হয়। **1 বেলের 1 দশমাংশকে 1 ডেসিবেল (dB) বলা হয়। এই ডেসিবেলই শব্দের তীব্রতার আদর্শ একক।**

তীব্রতা লেভেল থেকে শব্দের তীক্ষ্ণতা কেমন তা জানা যায়। যেমন মাথার ওপরের জে প্লেনের শব্দের তীব্রতা লেভেল 100 dB.

সমীকরণ (9.24)-কে ডেসিবেলে লেখা হলে তীব্রতা লেভেল,

$$\beta = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) dB \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (9.25)$$

যদি, $\beta = 1\,dB$ হয়, তবে

$$1 = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

বা, $$\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) = \frac{1}{10}$$

$$\therefore \quad \frac{I}{I_0} = 1.26$$

এর অর্থ হলো শব্দের তীব্রতার 26% পরিবর্তনের জন্য তীব্রতার লেভেল 1 dB পরিবর্তিত হয়। উল্লেখ্য, মানুষের কান 1 dB এর কম শব্দোচ্চতার পার্থক্য বুঝতে পারে না।

সমীকরণ (9.25) হতে দেখা যায়—

(i) যখন $I = 100 I_0$, তখন $\beta = 10 \log_{10} (100) = 10 \log_{10} 10^2 = 20\, dB$

(ii) যখন $I = 1000 I_0$, তখন $B = 10 \log_{10} (1000) = 10 \log_{10} 10^3 = 30\, dB$

সুতরাং, দেখা যাচ্ছে যে দুটি শব্দের শব্দোচ্চতার পার্থক্য 20 dB হলে জোরালো শব্দ ক্ষীণ শব্দের চেয়ে 100 গুণ তীব্র বুঝায়। আবার পার্থক্য 30 dB হলে জোরালো শব্দ 1000 গুণ বেশি তীব্র বুঝায়।

এখন $I = I_0$ হলে, সমীকরণ (9.25) হতে পাই,

$$\beta = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0}\right) = 0$$

শব্দোচ্চতার পার্থক্য বা তীব্রতা লেভেল শূন্যকে নিম্নতর প্রান্তীয় সীমা বা শ্রাব্যতার সীমা বলে।

শব্দোচ্চতার সর্বোচ্চ সীমা, $L = 10 \log_{10} 10^{12} = 120\, dB$। এর চেয়ে বেশি তীব্রতার শব্দ কানে জ্বালা বা অস্বস্তির উদ্রেক করে।

উপরের আলোচনা থেকে বেল ও ডেসিবেলের নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেওয়া যায়।

বেল : শব্দের তীব্রতা যখন 10 গুণ বৃদ্ধি পায় তখন শব্দোচ্চতা যে পরিমাণ বাড়ে তাকে 1 বেল বলে।

ডেসিবেল : শব্দের তীব্রতা যখন $10^{0.1}$ গুণ বৃদ্ধি পায় তখন শব্দোচ্চতা যতটুকু বাড়ে তাকে 1 ডেসিবেল বলে। অন্যভাবে বলা যায়, 1 বেলের দশভাগের এক ভাগকে 1 ডেসিবেল বলে।

সোন : 40 dB এবং 100 Hz কম্পাঙ্কের সুরের প্রাবল্যকে সোন (Sone) বলে।

কোনো শব্দ উৎসের তীব্রতা I_1 হতে I_2-তে পরিবর্তিত হলে তীব্রতা লেভেলের পরিবর্তন হবে,

$$\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2 = 10 \log_{10} \left(\frac{I_2}{I_1}\right) dB \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (9.26)$$

অনুরূপভাবে, শব্দ উৎসের ক্ষমতা P_1 হতে P_2-তে পরিবর্তিত হলে তীব্রতা লেভেল বা ক্ষমতা লেভেলের পরিবর্তন হবে,

$$\Delta\beta = 10 \log_{10} (P_2 / P_1)\, dB \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (9.27)$$

1000 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট প্রমাণ তীব্রতার এক ডেসিবেল-এর একটি বিশুদ্ধ সুর যে প্রাবল্য সৃষ্টি করে তাকে ফন (Faun) বলে। শব্দ প্রাবল্যের আরও একটি একক আছে। এর নাম সোন (Sone)। শ্রোতার শ্রাব্যতার সীমার 40 ডেসিবেল উর্ধ্বে 1000 Hz কম্পাঙ্কের একটি বিশুদ্ধ সুর যে প্রাবল্য সৃষ্টি করে তাকে 'সোন' বলে।

সারণি ৯.১ : কয়েকটি শব্দের তীব্রতা ও তীব্রতা লেভেল

শব্দ	তীব্রতা, I (Wm^{-2})	আপেক্ষিক তীব্রতা, I/I_0	তীব্রতা লেভেল (dB)
সর্বনিম্ন শ্রাব্য শব্দ	1×10^{-12}	10^0	0
পাতার মর্মর শব্দ	1×10^{-11}	10^1	10
ফিসফিসানী	1×10^{-9}	10^3	30
শ্রেণিকক্ষের শব্দ	1×10^{-7}	10^5	50
স্বাভাবিক কথাবার্তা	1×10^{-6}	10^6	60
ব্যস্ততম রাস্তার শব্দ	1×10^{-5}	10^7	70
কারখানার কোলাহল	1×10^{-3}	10^9	90
মাথার উপরের জেট প্লেনের শব্দ	1×10^{-2}	10^{10}	100
তীব্র বজ্রনির্ঘোষের শব্দ	1×10^{-1}	10^{11}	110
কানে বেদনা দানকারী সূচন শব্দ	1×10^0	10^{12}	120

গাণিতিক উদাহরণ ৯.৬

১। কোনো জনসভায় শব্দের তীব্রতা 10^{-8} watt m^{-2}। শব্দের তীব্রতা লেভেল ডেসিবেলে নির্ণয় কর। শব্দের তীব্রতা তিনগুণ হলে নতুন তীব্রতা লেভেল কত হবে ? [সি. বো. ২০১৫; দি. বো. ২০১১, ২০০৯; চ. বো. ২০১০; রা. বো. ২০০৭, ২০০৩; কু. বো. ২০০৪]

আমরা জানি,

$$\beta = 10\log_{10}\frac{I}{I_0}$$
$$= 10\log_{10}\frac{10^{-8}}{10^{-12}}$$
$$= 10\log_{10}(10^4) = 40\ dB$$

আবার, $\beta' = 10\log_{10}\frac{I'}{I_0} = 10\log_{10}\frac{3\times10^{-8}}{1\times10^{-12}}$
$$= 10\log_{10}3\times10^4$$
$$= 44.77\ dB$$

এখানে,
প্রমাণ তীব্রতা, $I_0 = 10^{-12}\ Wm^{-2}$
জনসভায় শব্দের তীব্রতা, $I = 10^{-8}\ Wm^{-2}$
তীব্রতা লেভেল, $\beta = ?$
আবার, $I' = 3I = 3\times10^{-8}\ Wm^{-2}$
$\beta' = ?$

২। কোনো শ্রেণিকক্ষের শব্দের তীব্রতা $1\times10^{-6}\ Wm^{-2}$ হলে শব্দের তীব্রতা লেভেল ডেসিবেলে নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০১১; ব. বো. ২০১০; ঢা. বো. ২০০৬; য. বো. ২০০৪; চ. বো. ২০০৩]

আমরা জানি,

$$\beta = 10\log_{10}\frac{I}{I_0}$$
$$= 10\log_{10}\frac{10^{-6}}{10^{-12}}$$
$$= 10\log_{10}10^6$$
$$= 60\ dB$$

এখানে,
প্রমাণ তীব্রতা, $I_0 = 10^{-12}\ Wm^{-2}$
শ্রেণিকক্ষের শব্দ তীব্রতা, $I = 10^{-6}\ Wm^{-2}$
তীব্রতা লেভেল, $\beta = ?$

৩। একটি ক্যাসেট প্লেয়ার হতে নিঃসৃত শব্দের ক্ষমতা 30mW হতে 60mW-এ পরিবর্তিত হলে শব্দের তীব্রতা লেভেলের কত পরিবর্তন হবে ? [সি. বো. ২০০৯, ২০০৭]

মনে করি, শব্দের তীব্রতা লেভেলের পরিবর্তন = $\Delta\beta$
আমরা জানি,

$$\Delta\beta = 10\log_{10}\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$
$$= 10\log_{10}\left(\frac{60\times10^{-3}\ W}{30\times10^{-3}\ W}\right)$$
$$= 10\log_{10}(2) = 3\ dB$$

এখানে,
নিঃসৃত শব্দের প্রাথমিক ক্ষমতা,
$P_1 = 30\ mW = 30\times10^{-3}\ W$
নিঃসৃত শব্দের পরিবর্তিত ক্ষমতা,
$P_2 = 60\ mW = 60\times10^{-3}\ W$
$\Delta\beta = ?$

৪। কোনো শ্রেণিকক্ষে শব্দের তীব্রতা $10^{-7}Wm^{-2}$। শব্দের তীব্রতা দ্বিগুণ হলে নতুন তীব্রতা লেভেল কত হবে ? [ব. বো. ২০০৬ ; রা. বো. ২০০৫; KUET Admission Test, 2017-18]

আমরা জানি,

$$\beta = 10\log_{10}\frac{I}{I_0} = 10\log_{10}\frac{10^{-7}}{10^{-12}}$$
$$= 10\log_{10}10^5$$
$$= 50\ dB$$

আবার, আমরা জানি,

$$\beta' = 10\log_{10}\frac{I'}{I_0} = 10\log_{10}\frac{2I}{I_0}$$
$$= 10\log_{10}\frac{2\times10^{-7}}{10^{-12}} = 10\log_{10}2\times10^5$$
$$= 53.01\ dB$$

এখানে,
তীব্রতা, $I = 10^{-7}\ Wm^{-2}$
প্রমাণ তীব্রতা, $I_0 = 10^{-12}\ Wm^{-2}$
তীব্রতা লেবেল, $\beta = ?$
আবার,
$I' = 2I = 2\times10^{-7}\ Wm^{-2}$
$\beta' = ?$

৫। একটি অ্যামপ্লিফায়ার থেকে নিঃসৃত শব্দের ক্ষমতা 20 mW থেকে 40 mW এ পরিবর্তিত হলো। শব্দের তীব্রতা লেভেলের পরিবর্তন dB এককে প্রকাশ কর।

আমরা জানি,

$$\Delta\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{P_2}{P_1}\right) dB$$

$$= 10 \log_{10}\left(\frac{40}{20}\right) dB = 10 \log_{10} 2dB = 3\,dB$$

এখানে,
$P_1 = 20\,mW$
$P_2 = 40\,mW$
$\Delta\beta = ?$

৯·১৩ বীট বা স্বরকম্প
Beats

সমান বা প্রায় সমান তীব্রতা ও প্রায় সমান কম্পাঙ্কের দুটি শব্দতরঙ্গ একসঙ্গে উৎপন্ন করলে দেখা যাবে যে, শব্দ একটানা হচ্ছে না—একটি নির্দিষ্ট সময় অন্তর অন্তর একবার বাড়ছে ও একবার কমছে। শব্দের তীব্রতার এরূপ পর্যায়ক্রমিক হ্রাস-বৃদ্ধিকে বীট বা স্বরকম্প বলে। প্রতি সেকেন্ডে শব্দের তীব্রতার পর্যায়ক্রমিক হ্রাস বা বৃদ্ধির দ্বারা স্বরকম্পের সংখ্যা (বা কম্পাঙ্ক) নির্ণয় করা হয়।

সংজ্ঞা : সমান বা প্রায় সমান তীব্রতা এবং প্রায় সমান কম্পাঙ্কবিশিষ্ট একই দিকে অগ্রগামী দুটি শব্দতরঙ্গের উপরিপাতনের ফলে শব্দের লব্ধি প্রাবল্যের পর্যায়ক্রমিক হ্রাস-বৃদ্ধির ঘটনাকে বীট বা স্বরকম্প বলে। বীটের সংখ্যা প্রতি সেকেন্ডে 10 এর বেশি হলে তা উপলব্ধি করা যায় না।

পরীক্ষাটি করে দেখ :

সমান কম্পাঙ্কের দুটি সুর শলাকা লও এবং তাদেরকে খাড়াভাবে একটি ফাঁপা বাক্সের ওপর পাশাপাশি স্থাপন কর। এখন সুর শলাকা দুটির একটিকে একবার এবং অপরটিকে আর একবার একটি রবারের প্যাডযুক্ত হাতুড়িতে আঘাত কর। দেখা যাবে তারা প্রায় একই রকম একটানা শব্দ উৎপন্ন করছে। এবার সুর শলাকা দুটিকে একই সাথে আঘাত করলে দেখা যাবে এখনও তারা একটানা শব্দ উৎপন্ন করছে; কিন্তু শব্দের তীব্রতা অনেকখানি বৃদ্ধি পাচ্ছে। এখন একটি সুর শলাকার এক বাহুতে কিছুটা মোম লাগিয়ে একে ভারী কর। এর কম্পাঙ্ক কিছুটা কমে যাবে এবং সুর শলাকা দুটির কম্পাঙ্কের মধ্যে কিছুটা পার্থক্য সৃষ্টি হবে। এ অবস্থায় সুর শলাকা দুটিকে একই সাথে আঘাত করে শব্দ উৎপন্ন করলে একটানা শব্দ শোনা যাবে না। শব্দ পর্যায়ক্রমে জোরে এবং ধীরে ধীরে শোনা যাবে। কাছাকাছি ভিন্ন কম্পাঙ্কের দুটি সুর শলাকা হতে উৎপন্ন শব্দ প্রাবল্যের এ রকম হ্রাস-বৃদ্ধি ঘটবে। শব্দ তীব্রতার এ রকম হ্রাস-বৃদ্ধির নাম বীট বা স্বরকম্প এবং শব্দ তীব্রতার একটি বৃদ্ধি এবং একটি হ্রাস নিয়ে একটি বীট সৃষ্টি হয়।

দুটি শব্দ উৎসের ক্রিয়ায় প্রতি সেকেন্ডে 5টি বীট উৎপন্ন হয়—এটি বলতে কী বুঝ ?

এটি বলতে নিম্নলিখিত বিষয়গুলো বুঝা যায় :

১। উৎসদ্বয়ের ক্রিয়ায় শব্দের তীব্রতা প্রতি সেকেন্ডে 5 বার হ্রাস-বৃদ্ধি হয়।

২। উৎসদ্বয়ের কম্পাঙ্কের পার্থক্য $N = 5$ Hz

৩। উৎসদ্বয় হতে আগত শব্দ কোনো বিন্দুতে বা কানে প্রতি সেকেন্ডে 5 বার সমদশায় ও 5 বার বিপরীত দশায় মিলিত হয়।

৪। পর পর একটি সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন তীব্রতার মধ্যে সময়ের ব্যবধান $= \frac{1}{2N} = 0{\cdot}1$ সেকেন্ড।

বীট উৎপত্তির শর্ত :

১। বীট সৃষ্টিকারী শব্দতরঙ্গ দুটি একই সময়ে উৎপন্ন হতে হবে।

২। তরঙ্গ দুটির কম্পাঙ্ক ও তীব্রতা প্রায় সমান হতে হবে।

৩। তরঙ্গ দুটির দরুন মাধ্যমের কোনো একটি কণার সরণ একই রেখায় হতে হবে।

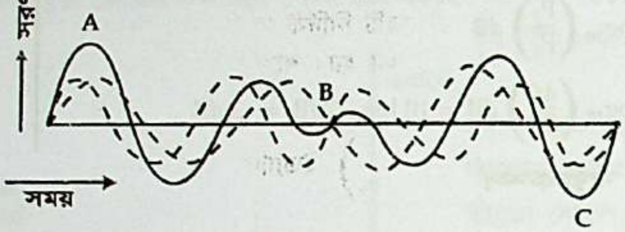
৪। মাধ্যমের কোনো একটি কণার ওপর তরঙ্গ দুটি মিলিত হবার পর তাদের মধ্যে দশা বৈষম্য সময়ের সাথে পরিবর্তিত হবে।

৫। তরঙ্গ দুটির মিলিত ক্রিয়ার বিস্তার সময়ের সাথে পরিবর্তিত হবে।

৯·১৩·১ বীট বা স্বরকম্প গঠনের কৌশল
Mechanism of formation of beats

প্রায় সমান কম্পাঙ্কবিশিষ্ট দুটি শব্দতরঙ্গ মাধ্যমের কোনো একটি কণার ওপর মিলিত হবার পর তাদের মধ্যে দশা বৈষম্য সময়ের সাথে পরিবর্তিত হয় এবং কোনো এক মুহূর্তে কণাটির ওপর তরঙ্গ সমদশায় আবার পরবর্তী মুহূর্তে তরঙ্গদ্বয় বিপরীত দশায় ক্রিয়া করে। এজন্য তরঙ্গদ্বয়ের মিলিত ক্রিয়ায় একটি নির্দিষ্ট সময় অন্তর অন্তর কণাটির

সরণ তথা শব্দের তীব্রতা একবার সবচেয়ে বেশি হয় এবং আর একবার সবচেয়ে কম হয়। শব্দের তীব্রতার এই পর্যায়ক্রমিক হ্রাস-বৃদ্ধিই স্বরকম্প।



চিত্র ৯.২৫

প্রায় সমান কম্পাঙ্কবিশিষ্ট দুটি সুর শলাকা লই। তাদেরকে আঘাত করে শব্দতরঙ্গ উৎপন্ন করি। এ তরঙ্গ দুটি মাধ্যমের মধ্য দিয়ে চলতে থাকবে। এতে মাধ্যমের এক বিন্দুতে শব্দতরঙ্গ দুটি কোনো এক সময় সমদশায় এবং পরবর্তী অপর এক সময় বিপরীত দশায় মিলিত হবে। ৯.২৫ চিত্রে A বিন্দুতে দুটি শব্দতরঙ্গ একই দশায় মিলিত হওয়ায় লব্ধি শব্দের বিস্তার তরঙ্গ দুটির বিস্তারের যোগফলের সমান হবে। ফলে লব্ধি শব্দের তীব্রতা বেশি হবে। এখানে তরঙ্গ দুটিকে সরু রেখা এবং লব্ধি শব্দতরঙ্গাকে অবিচ্ছিন্ন মোটা রেখা দ্বারা সূচিত করা হয়েছে।

যতই সময় অতিবাহিত হবে ততই একটি তরঙ্গ অপরটিকে অতিক্রম করার চেষ্টা করবে। B বিন্দুতে তরঙ্গ দুটি বিপরীত দশায় থাকায় লব্ধি শব্দের বিস্তার তরঙ্গ দুটির বিস্তারের বিয়োগফলের সমান হবে। অতএব লব্ধি শব্দের তীব্রতা কম হবে। পুনরায় C বিন্দুতে তরঙ্গ দুটি একই দশায় থাকায় লব্ধি শব্দের বিস্তার তরঙ্গ দুটির বিস্তারের যোগফলের সমান হবে। ফলে লব্ধি শব্দের তীব্রতা অধিক হবে। এভাবে লব্ধি শব্দের তীব্রতার পর্যায়ক্রমে হ্রাস-বৃদ্ধি ঘটবে। প্রতি সেকেন্ডে শব্দের পর্যায়ক্রমে হ্রাস বা বৃদ্ধি দ্বারা স্বরকম্পের সংখ্যা নির্ণীত হবে।

৯.১৩.২ বীটের বৈশিষ্ট্য
Characteristics of beat

১। সমান বা প্রায় সমান তীব্রতা এবং প্রায় সমান কম্পাঙ্কবিশিষ্ট একই দিকে অগ্রগামী দুটি শব্দতরঙ্গের উপরিপাতনের ফলে শব্দের লব্ধি প্রাবল্যের পর্যায়ক্রমিক হ্রাস-বৃদ্ধির ফলে বীট সৃষ্টি হয়।

২। বীটের ক্ষেত্রে কোনো বিন্দুতে তরঙ্গ দুটির মধ্যে দশা পার্থক্য সময়ের সাথে পরিবর্তিত হয়।

৩। শব্দের তীব্রতা সময়ের সাথে পরিবর্তিত হয়।

৪। লব্ধি তরঙ্গের কম্পাঙ্ক বীট উৎপন্নকারী তরঙ্গদ্বয়ের গড় কম্পাঙ্কের সমান হয়।

৯.১৩.৩ বীটের গাণিতিক রাশিমালা
Mathematical expression of beat

ধরা যাক দুটি শব্দায়িত সুর শলাকার কম্পাঙ্ক যথাক্রমে n_1 ও n_2 $(n_1 > n_2)$ এবং কম্পাঙ্ক দুটির পার্থক্য খুব বেশি নয়। আরও ধরা যাক শলাকা দুটি হতে আগত শব্দতরঙ্গ মাধ্যমের কোনো একটি কণার উপর সমদশায় আপতিত হবার t সেকেন্ড পরে তরঙ্গ দুটির দরুন কণাটির পৃথক সরণ যথাক্রমে,

$$y_1 = a \sin 2\pi n_1 t \quad \cdots \quad (9.28)$$

ও $$y_2 = b \sin 2\pi n_2 t \quad \cdots \quad (9.29)$$

উপরিপাতনের নীতি অনুসারে লব্ধি সরণ,

$$y = y_1 + y_2 = a \sin 2\pi n_1 t + b \sin 2\pi n_2 t \quad \cdots \quad (9.30)$$

যদি তরঙ্গ দুটির বিস্তার সমান অর্থাৎ $a = b$ হয়, তবে

$$y = a(\sin 2\pi n_1 t + \sin 2\pi n_2 t)$$

$$= 2a \sin\left\{2\pi\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)t\right\}\cos 2\pi \frac{(n_1-n_2)}{2}t$$

$$= \left[2a \cos 2\pi \frac{(n_1-n_2)t}{2}\right] \sin 2\pi\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)t$$

ধরা যাক, $A = 2a \cos 2\pi \frac{(n_1-n_2)t}{2}$ এবং $n = (n_1+n_2)/2$

$$\therefore \quad y = A \sin 2\pi n t \quad \cdots \quad (9.31)$$

এটি সমীকরণ (9.28) ও (9.29)-এর ন্যায় লব্ধি তরঙ্গের সমীকরণ। এর কম্পাঙ্ক n ও বিস্তার A। এই বিস্তার সময়ভেদে বিভিন্ন হবে। কারণ, শব্দতরঙ্গ দুটি কোনো একটি কণার ওপর মিলিত হলে তাদের মধ্যে দশা বৈষম্য সময়ের সাথে পরিবর্তিত হয়। কোনো এক মুহূর্তে কণাটির ওপর তরঙ্গদ্বয় সমদশায় আবার পরবর্তী মুহূর্তে বিপরীত দশায় ক্রিয়া করে। এতে তরঙ্গদ্বয়ের মিলিত ক্রিয়ায় একটি নির্দিষ্ট সময় অন্তর অন্তর কণাটির সরণ তথা শব্দের তীব্রতা একবার সবচেয়ে বেশি হয় এবং আর একবার সবচেয়ে কম হয়। শব্দের এ পর্যায়ক্রমিক হ্রাস-বৃদ্ধিতে স্বরকম্পের উৎপত্তি হয়। যেমন—

$t = 0, \left(\frac{1}{n_1 - n_2}\right), \left(\frac{2}{n_1 - n_2}\right), \left(\frac{3}{n_1 - n_2}\right)$ ইত্যাদি হলে,

$A = 2a, -2a, 2a, -2a$ ইত্যাদি হবে।

সুতরাং এসব মুহূর্তে বিস্তার সর্বাধিক হবে এবং শব্দ সবচেয়ে জোরে শোনা যেতে পারে। কেননা শব্দের তীব্রতা বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক।

আবার, $t = \frac{1}{2(n_1 - n_2)}, \frac{3}{2(n_1 - n_2)}, \frac{5}{2(n_1 - n_2)}$ ইত্যাদি হলে, $A = 0$ হবে। সুতরাং এসব মুহূর্তে কোনো শব্দ শোনা যাবে না। অতএব দেখা যাচ্ছে যে, পর পর দুটি প্রবল শব্দ বা নিঃশব্দের মধ্যে সময়ের ব্যবধান $T = \frac{1}{(n_1 - n_2)}$ এবং এটিই শব্দের হ্রাস বা বৃদ্ধির তথা স্বরকম্পের পর্যায়কাল।

$\therefore$ 1 সেকেন্ডে স্বরকম্পের সংখ্যা বা কম্পাঙ্ক $= \frac{1}{T} = (n_1 - n_2)$ = শব্দ দুটির কম্পাঙ্কের পার্থক্য।

সাধারণভাবে লেখা যায়, $N = (n_1 \sim n_2)$

এ সমীকরণ অনুযায়ী বীটের একক হবে "....../সেকেন্ড" বা "সেকেন্ড$^{-1}$"। সুতরাং বলা যায় প্রতি সেকেন্ডে সৃষ্ট বীটসংখ্যা উৎসদ্বয়ের কম্পাঙ্কের পার্থক্যের সমান।

যদি তরঙ্গ দুটির বিস্তার সমান না হয় তাহলে নিঃশব্দের পরিবর্তে মৃদু শব্দ শোনা যাবে কারণ তখন বিস্তারদ্বয়ের বিয়োগফল শূন্য হবে না। কম্পাঙ্কের পার্থক্য খুব বেশি হলে বীট সংখ্যাও বেড়ে যায় ফলে তীব্রতা হ্রাস-বৃদ্ধি এত দ্রুত হয় যে তা উপলব্ধি করা যায় না বা কানে একটানা শব্দ শোনা যায় না। বীটের সংখ্যা প্রতি সেকেন্ডে 10 এর বেশি হলে কানে তা উপলব্ধি করা যায় না।

৯·১৩·৪ বীট বা স্বরকম্পের প্রয়োগ
Application of beats

স্বরকম্পের তিনটি প্রয়োগ আছে; যথা—

(১) স্বরকম্পের সাহায্যে সুর শলাকার অজ্ঞাত কম্পাঙ্ক নির্ণয় করা যায়।
(২) স্বরকম্পের সাহায্যে খনিতে দূষিত বাতাসের অস্তিত্ব নির্ণয় করা যায়।
(৩) বাদ্যযন্ত্রাদির সুর নির্ণয় করা যায়।

১. অজ্ঞাত কম্পাঙ্ক নির্ণয় : স্বরকম্পের সাহায্যে কোনো স্বনকের অজানা কম্পাঙ্ক n_1 পরিমাপ করা যায়। এই স্বনকের সঙ্গে স্বরকম্প উৎপন্ন করে এরূপ একটি জানা কম্পাঙ্কের সুরশলাকা পরীক্ষা-নিরীক্ষা করে বাছাই করা হয়। জানা সুরশলাকাটির কম্পাঙ্ক n_2 হলে স্পষ্টত n_2 অপেক্ষা n_1 প্রায় সমান হয়। এবার প্রতি সেকেন্ডে স্বরকম্পের সংখ্যা N গণনা করা হয়; সংজ্ঞানুযায়ী $N = n_1 \sim n_2$।

এরপর n_2 অপেক্ষা n_1 বড় না ছোট তা নির্ণয় করার জন্য অজানা সুরশলাকাটির যে কোনো বাহুতে মোম লাগিয়ে ওর কম্পাঙ্ক সামান্য কমান হয়। এর ফলে স্বরকম্পের সংখ্যা বাড়লে স্পষ্টত n_2 অপেক্ষা n_1 বড় বা $n_1 > n_2$ হয় অতএব $N = n_1 - n_2$ বা $n_1 = n_2 + N$। কিন্তু স্বরকম্পের সংখ্যা কমে গেলে বা সমান হলে $n_2 > n_1$ হয় তখন $N = n_2 - n_1$ বা $n_1 = n_2 - N$। এভাবে অজানা কম্পাঙ্ক n_1 নির্ণয় করা যায়।

আবার অজানা সুরশালাকার বাহুতে ভর কমালে যদি বীট বাড়ে অর্থাৎ কম্পাঙ্কের পার্থক্য বাড়ে তাহলে অজানা কম্পাঙ্ক জানা কম্পাঙ্ক অপেক্ষা বড় হবে। সেক্ষেত্রে $n_1 > n_2$ হয়। $\therefore N = n_1 - n_2$ হয়। আবার বীটসংখ্যা কমে বা সমান হলে, কম্পাঙ্কের পার্থক্য কমে সেক্ষেত্রে $n_1 < n_2$ হয়। $\therefore N = n_2 - n_1$ হয়।

২. খনিতে দূষিত বাতাসের অস্তিত্ব নির্ণয় : খনিতে দূষিত বাতাসের অস্তিত্ব নির্ণয় করতে গিয়ে দুটি অভিন্ন প্রকৃতির অর্গান নল লই। একটি অর্গান নলে খনির বাতাস এবং অপরটিতে বিশুদ্ধ বাতাস নিয়ে নল দুটিতে একই সঙ্গে শব্দ

উৎপন্ন করি। খনির বাতাস বিশুদ্ধ না হলে নল দুটিতে সৃষ্ট শব্দের কম্পাঙ্কের প্রভেদ থাকবে। ফলে স্বরকম্পের সৃষ্টি হবে। কিন্তু খনির বাতাস বিশুদ্ধ হলে কম্পাঙ্কের প্রভেদ থাকবে না। ফলে স্বরকম্প শোনা যাবে না।

সিদ্ধান্ত : স্বরকম্পের সৃষ্টি হলে বুঝতে হবে যে, খনির বাতাস দূষিত।

৩. বাদ্যযন্ত্রাদির সুর নির্ণয় : দুটি বাদ্যযন্ত্রকে এক সুরে আনতে হলে তাদেরকে একই সঙ্গে বাজিয়ে স্বরকম্পের উপস্থিতি লক্ষ করতে হয়। সুর মিললে স্বরকম্প আর শোনা যাবে না। এমনিভাবে বীটের সাহায্যে বিভিন্ন বাদ্যযন্ত্রের সুর মিলানো এবং নির্ণয় করা যায়।

গাণিতিক উদাহরণ ৯.৭

১। দুটি সুরশলাকা A ও B একই সাথে শব্দায়িত হওয়ায় প্রতি সেকেন্ডে 5টি বীট উৎপন্ন হয়। কিন্তু A-তে খানিকটা মোম লাগিয়ে ওজন বাড়ালে বীটসংখ্যা কমে যায়। B-এর কম্পাঙ্ক 256 Hz হলে A-এর কম্পাঙ্ক কত ?

[দি. বো. ২০১১; রা. বো. ২০০৮; ব. বো. ২০০৫]

আমরা জানি,

$$N = n_A \sim n_B$$

যেহেতু A সুর শলাকার বাহুতে মোম লাগানোর ফলে কম্পাঙ্ক কমে এবং বীটসংখ্যা হ্রাস পায়; কাজেই $n_A < n_B$ হবে। অতএব,

এখানে,
$N = 5$
$n_B = 256$ Hz
$n_A = ?$

$$N = n_B - n_A$$
$$n_A = n_B - N = 256 - 5 = 251$$
$$\therefore \quad n_A = 251 \text{ Hz}$$

২। A ও B দুটি সুরেলী কাঁটা একত্রে শব্দায়িত করলে প্রতি সেকেন্ডে 5টি বীট শোনা যায়। A-এর বাহুর ভর কিছু কমালে বীট উৎপত্তির হার বৃদ্ধি পায়। B-এর কম্পাঙ্ক 512 Hz হলে A-এর প্রকৃত কম্পাঙ্ক কত ?

[ঢা. বো. ২০০৮]

আমরা পাই, $N = n_1 \sim n_2$

প্রশ্নানুসারে ভর হ্রাসে A-এর কম্পাঙ্ক বৃদ্ধি পায়। এতে বীট উৎপত্তির হার বৃদ্ধি পায় হেতু তাদের কম্পাঙ্কের পার্থক্যও বৃদ্ধি পায়।

$\therefore$ A-এর কম্পাঙ্ক, $n_1 >$ B-এর কম্পাঙ্ক, n_2

সুতরাং, $n_1 - n_2 = N$

এখানে, $N = 5$ বীট/সে. ও $n_2 = 512$ Hz

$\therefore \quad n_1 = N + n_2 = (512 + 5)$ Hz $= 517$ Hz

৩। দুটি সুর শলাকা A ও B একই সময় শব্দায়িত হওয়ায় প্রতি সেকেন্ডে 6টি বীট উৎপন্ন হয়। কিন্তু A-তে খানিকটা মোম লাগালে বীটের সংখ্যা হ্রাস পায়। B-এর কম্পাঙ্ক 320 Hz হলে, A-এর কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

[কু. বো. ২০০৮]

আমরা পাই, $N = n_1 \sim n_2$

প্রশ্নানুসারে ভরের বৃদ্ধিতে A-এর কম্পাঙ্ক হ্রাস পায়।

কাজেই A-এর কম্পাঙ্ক, $n_1 >$ B-এর কম্পাঙ্ক, n_2

কাজেই, $N = n_1 - n_2$

এখানে, $N = 6$ বীট/সে. ও $n_2 = 320$ Hz

$\therefore \quad n_1 = n_2 + N = (320 + 6)$ Hz

$= 326$ Hz

৪। 64টি সুর শলাকা ক্রমবর্ধমান কম্পাঙ্কে সাজানো আছে। তাদের শেষটির কম্পাঙ্ক প্রথমটির দ্বিগুণ এবং পর পর যে কোনো দুটি শলাকা প্রতি সেকেন্ডে 4টি বীট উৎপন্ন করে। প্রথম সুর শলাকার কম্পাঙ্ক কত ?

ধরি প্রথমটির কম্পাঙ্ক $= n$

তা হলে শেষটির কম্পাঙ্ক $= 2n$

আবার পর্যায়ক্রমিক দুটি সুর-শলাকার কম্পাঙ্কের পার্থক্য = 4 Hz

$\therefore$ দ্বিতীয় সুর শলাকার কম্পাঙ্ক $= n + 4$
$= n + (2-1)4$

তৃতীয় সুর শলাকার কম্পাঙ্ক $= n + 4 + 4 = n + (3-1)4$

চতুর্থ সুর শলাকার কম্পাঙ্ক $= n + (4-1)4$

64-তম সুর শলাকার কম্পাঙ্ক $= n + (64-1)\,4$

কিন্তু, $n + (64-1)\,4 = 2n$

$\therefore \quad n = (64-1)4 = 252$ Hz

৫। A ও B দুটি সুরেলী কাঁটা একত্রে ধ্বনিত করলে প্রতি সেকেন্ডে 5টি বীট উৎপন্ন হয়। A-কে একটু ঘষে পুনরায় ধ্বনিত করলে একই সংখ্যক বীট উৎপন্ন হয়। B-এর কম্পাঙ্ক 510 Hz। ঘষার পূর্বে ও পরে A-এর কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

মনে করি, A ও B সুর শলাকার কম্পাঙ্ক যথাক্রমে n_A ও n_B

এখানে, n_A অজানা কম্পাঙ্ক, $n_B = 510$ Hz এবং বীট সংখ্যা, N = 5, A শলাকা ঘষলে কম্পাঙ্ক বাড়ে এবং বীট সমান থাকে কাজেই $n_A > n_B$

$N = n_A - n_B$

$\therefore$ ঘষার পর A-এর কম্পাঙ্ক

$n_A = N + n_B$

বা, $n_A = 510 + 5 = 515$ Hz

এবং ঘষার পূর্বে A-এর কম্পাঙ্ক

$n_A = 510 - 5 = 505$ Hz

যেহেতু A সুর শলাকাকে ঘষা হয়েছে তাই ঘষার পর এর কম্পাঙ্ক পূর্বের তুলনায় বেড়ে যাবে। কাজেই ঘষার পূর্বে A এর সম্ভাব্য কম্পাঙ্ক, $n_A = 515$ Hz বিবেচনা করলে ঘষার পর বীটসংখ্যা একই হবার সম্ভাবনা নেই। তাই ঘষার পূর্বে A-এর কম্পাঙ্ক = 505 Hz হবে এবং ঘষার পর A-এর কম্পাঙ্ক $n_A = 515$ Hz.

৬। দুটি সুর শলাকা একটি গ্যাসে 0·50 m এবং 0·505 m দৈর্ঘ্যের তরঙ্গ উৎপন্ন করে। যদি প্রতি সেকেন্ডে 6টি বীট উৎপন্ন হয় তবে উক্ত গ্যাসে শব্দের বেগ নির্ণয় কর।

[রা. বো. ২০০৬; ঢা. বো. ২০০৫; য. বো. ২০০৪; কু. বো. ২০০৫; ব. বো. ২০০২]

মনে করি গ্যাসে শব্দের বেগ = v

আমরা জানি,

$\therefore \quad v = n_1\lambda_1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (i)

এবং

$v = n_2\lambda_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) হতে পাই

$n_1 = \dfrac{v}{\lambda_1} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (iii)

এবং $n_2 = \dfrac{v}{\lambda_2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (iv)

কিন্তু $N = n_1 - n_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (v) $[\because \lambda_1 < \lambda_2]$

এখন সমীকরণ (v) হতে পাই

$$N = \frac{v}{\lambda_1} - \frac{v}{\lambda_2}$$

বা, $$6 = v\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)$$

বা, $$6 = v\left(\frac{1}{0{\cdot}50} - \frac{1}{0{\cdot}505}\right)$$

বা, $$v = \frac{0{\cdot}50 \times 0{\cdot}505 \times 6}{0{\cdot}005} = 303 \text{ ms}^{-1}$$

এখানে,
N = 6
λ_2 = 0·50 m
λ_2 = 0·505 m

৭। দুটি সুর শলাকা A এবং B-কে একসঙ্গে কম্পিত করলে 6টি বীট উৎপন্ন হয়। A শলাকাটি একমুখ খোলা নলের 35·5 cm দীর্ঘ বায়ুস্তম্ভের সাথে অনুনাদ সৃষ্টি করে। B শলাকাটি ওই নলের 36·5 cm দীর্ঘ বায়ুস্তম্ভের সাথে অনুনাদ সৃষ্টি করে। শলাকা দুটির কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

ধরা যাক, A ও B সুর শলাকা দুটির কম্পাঙ্ক যথাক্রমে n_1 ও n_2।

$\therefore \quad n_1 \sim n_2 = 6$ অথবা $n_2 - n_1 = 6$

বায়ুতে শব্দের বেগ v হলে নলে উৎপন্ন মূল সুরের ক্ষেত্রে,

$$n_1 = \frac{v}{4l_1} = \frac{4}{4 \times 35·5} \text{ এবং } n_2 = \frac{4}{4 \times 36·5}$$

সুতরাং, এটি স্পষ্ট যে, $n_1 > n_2$। অর্থাৎ $n_1 - n_2 = 6$

এখন, $\frac{n_1}{n_2} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{36·5}{35·5}$

বা, $\frac{n_1 - n_2}{n_2} = \frac{1}{35·5} \quad \therefore \quad \frac{6}{n_2} = \frac{1}{35·5}$

বা, $n_2 = 6 \times 35·5 = 213 \text{ Hz}$

$\therefore \quad n_1 = n_2 + 6 = 213 + 6 = 219 \text{ Hz}$

উত্তর : শলাকা দুটির কম্পাঙ্ক যথাক্রমে 213 Hz ও 219 Hz

৯·১৪ স্বরগ্রাম ও হারমোনিক্স
Musical scale and harmonics

৯·১৪·১ স্বরগ্রাম
Musical scale

আমরা জানি একটি সুরের মধ্যে নিম্ন ও উচ্চ কম্পাঙ্ক বিদ্যমান থাকে। সর্বনিম্ন কম্পাঙ্কের সুর হলো সূচনা-সুর বা মূল সুর (key note)। উচ্চতর কম্পাঙ্কগুলোর মান সূচনা-সুরের সঙ্গে নির্দিষ্ট অনুপাতে থাকে। সর্বোচ্চ কম্পাঙ্কটি সূচনা-সুরের অষ্টক হয়। যদি একটি কম্পাঙ্ক ক্রমের কম্পাঙ্কগুলি পরপর ধ্বনিত হলে খুব শ্রুতিমধুর শব্দ শোনা যায় তখন আমরা বলে থাকি যে, স্বরগ্রাম সৃষ্টি হয়েছে। সবচেয়ে সরল স্বরগ্রাম হলো সপ্তসুর স্বরগ্রাম বা ডায়াটনিক স্বরগ্রাম (diatonic musical scale)। তাহলে স্বরগ্রাম বলতে আমরা কী বুঝি ?

স্বরগ্রাম বলতে নির্দিষ্ট কম্পাঙ্কের কতকগুলো সাজানো সুর বুঝায়। যে সব সুর আমাদের কানে সহজে সাড়া দেয় এবং কণ্ঠস্বরের উপযোগী হয় স্বরগ্রামে ওই সব সুরকে ঢেলে সাজানো হয়। পরীক্ষায় দেখা যায় যে, কোনো নির্দিষ্ট সুর ও তার দ্বিগুণ কম্পাঙ্কবিশিষ্ট অপর একটি সুরের মধ্যে প্রথম সুরের কম্পাঙ্ক অনুযায়ী, বিভিন্ন কম্পাঙ্কের কতকগুলো সুর সন্নিবেশ করলে সমসঙ্গতি বজায় থাকে। এরূপ সমসঙ্গতিপূর্ণ কতকগুলো সুরের সমষ্টিকে **স্বরগ্রাম** বলে। সর্বাপেক্ষা কম কম্পাঙ্কের সুরকে বলা হয় সূচনা সুর বা টোনিক (key tone or tonic) বলে। সর্বোচ্চ কম্পাঙ্কটি সূচনা সুরের অষ্টক।

হারমোনিয়াম ও পিয়ানোতে কতকগুলো চাবি এবং বাঁশিতে কতকগুলো ছিদ্র আছে। এ চাবি বা ছিদ্রগুলো একটি নির্দিষ্ট স্বরগ্রামে সাজানো থাকে। বেহালায় হাতের কায়দায় তারের বিভিন্ন স্থানে আঙ্গুল চেপে সুরযুক্ত শব্দ সৃষ্টি করা হয়। সেতার ও এস্রাজে কতকগুলো ঘাট থাকে যাদের সাহায্যে ইচ্ছেমতো স্বরগ্রামের সুরগুলোর সুরবিভেদ পরিবর্তন করা যায়।

সবচেয়ে সরল স্বরগ্রাম হলো সপ্তসুর স্বরগ্রাম (diatomic scale)। এই স্বরগ্রামে আটটি সুর থাকে। যথা—সা–রে–গা–মা–পা–ধা–নি–সা। প্রথম 'সা' হচ্ছে সূচনা সুর যার কম্পাঙ্ক 2^8 বা 256 Hz। আর শেষ সা'-এর কম্পাঙ্ক হচ্ছে 512 Hz। এই কম্পাঙ্ক সূচনা সুরের দ্বিগুণ অর্থাৎ সূচনা সুরের অষ্টক। এই স্বরগ্রামের বিভিন্ন কম্পাঙ্কগুলি ৯.২ সারণিতে তাদের নামসহ (বাংলাদেশী ও পাশ্চাত্য) দেখানো হলো।

সারণি ৯.২

প্রতীক	বাংলাদেশী নাম	পাশ্চাত্য নাম	কম্পাঙ্ক	কম্পাঙ্কের অনুপাত (সূচনা-সুরের)
C	সা	Do	256	1
D	রে	Re	288	9/8
E	গা	Mi	320	5/4
F	মা	Fa	$341\frac{1}{3}$	4/3
G	পা	Sol	384	3/2
A	ধা	La	$426\frac{2}{3}$	5/3
B	নি	Ti	480	15/8
C	সা'	do	512	2

৯·১৪·২ হারমোনিক্‌স বা সমমেল
Harmonics

আমরা জানি স্বরের মধ্যে বিদ্যমান সবচেয়ে নিম্ন কম্পাঙ্কের সুরকে মূল সুর বলে। কোনো স্বরে যেসব বিভিন্ন সুর থাকে, তাদের মধ্যে যে সুরের কম্পাঙ্ক সবচেয়ে কম, তাকে মূল সুর (fundamental tone) বলে। অন্যান্য সুর, যাদের কম্পাঙ্ক মূল সুরের কম্পাঙ্কের চেয়ে বেশি, তাদের উপসুর (overtones) বলে। আবার উপসুরগুলোর কম্পাঙ্ক যদি মূল সুরের কম্পাঙ্কের সরল গুণিতক হয়, তাহলে সেই সকল উপসুরকে সমমেল বা হারমোনিক (harmonics) বলে। উপসুরের কম্পাঙ্ক মূল সুরের কম্পাঙ্কের দ্বিগুণ হলে, তাকে দ্বিতীয় সমমেল বা অষ্টক (second harmonics or octave) বলে। তিনগুণ হলে তৃতীয় সমমেল (third harmonics) এবং চারগুণ হলে চতুর্থ সমমেল (fourth harmonics) বলে। মূলসুরকে প্রথম সমমেলও (first harmonics) বলা হয়। যেমন কোনো মাউথ অর্গান থেকে নিঃসৃত নিচের কম্পাঙ্কগুলো হলো :

256, 268, 502, 512, 620, 768, 1020, 1280 Hz.

এখানে 256 Hz মূলসুর। 512 Hz হচ্ছে মূলসুরের অষ্টক বা দ্বিতীয় হারমোনিক এবং 768 Hz ও 1280 Hz হচ্ছে যথাক্রমে তৃতীয় ও পঞ্চম হারমোনিক। 256 Hz ছাড়া অন্যান্য কম্পাঙ্কের সুর হচ্ছে উপসুর। বেহালার ছড় টেনে কোনো শব্দ উৎপন্ন করলে তাকে স্বর বলে। কারণ এতে একাধিক কম্পাঙ্কের শব্দ মিশ্রিত থাকে। স্বরগ্রামের প্রথম সা'র কম্পাঙ্কের চেয়ে শেষ সা'র কম্পাঙ্ক দ্বিগুণ হওয়ায় শেষ সা-কে প্রথম সা'র অষ্টক বলে।

উপরোক্ত আলোচনা থেকে আমরা বলতে পারি, একাধিক কম্পাঙ্কবিশিষ্ট সুরের সমন্বয়ে স্বর সৃষ্টি হয়। স্বরের মধ্যে উপস্থিত কম্পাঙ্কগুলোর মধ্যে যেটি সর্বনিম্ন সেই কম্পাঙ্কের সুরকে মূলসুর বলে। বাকি সব কম্পাঙ্ক হলো উপসুর। উপসুরগুলোর মধ্যে যাদের কম্পাঙ্ক মূলসুরের সরল গুণিতক তাদের সমমেল বা harmonic বলে। সুতরাং সমমেলগুলো উপসুরেরই অংশ। সেজন্য বলা হয়, সব সমমেল উপসুর কিন্তু সব উপসুর সমমেল নয় (all harmonics are overtones, but all overtones are not harmonics)।

আমরা অর্থবহ যেসব শব্দ শুনি তার বেশির ভাগ অনেকগুলো কম্পাঙ্কের সমন্বয়ে সৃষ্টি। এই কম্পাঙ্কগুলো পরস্পরের সরল গুণিতক হওয়ার জন্য এদের দ্বারা সৃষ্ট শব্দ আমাদের কাছে সঙ্গীত গুণসম্পন্ন মনে হয়। কোনো স্বরের বেশির ভাগ শক্তি মূল সুরে বর্তমান থাকে বাকি শক্তি উপসুরগুলোর মধ্যে থাকে। শক্তির এই বণ্টনের উপর স্বরের বৈশিষ্ট্য নির্ভর করে। কোনো স্বরে সমমেল উপসুরের সংখ্যা যত বেশি হবে এবং অসমমেল উপসুরের সংখ্যা যত কম হবে, শব্দ তত শ্রুতিমধুর হবে।

দুটি সুরের কম্পাঙ্কের অনুপাত একটি পূর্ণসংখ্যা হলে এদের মিলিত প্রভাবে শ্রুতিমধুর শব্দের উৎপত্তি হয় এবং এদের তীক্ষ্ণতার পার্থক্য ভালোভাবে বুঝা যায়। এই কারণে দুটি সুরের কম্পাঙ্কের অনুপাতকে সুরবিরাম বা সুরানুপাত বলে। দুটি শব্দের সুর বিরাম এদের মধ্যবর্তী সুর বিরামগুলোর গুণফলের সমান। নিচে কয়েকটি সুরবিরাম নামের তালিকা দেওয়া হলো :

সুরবিরাম	নাম	সুরবিরাম	নাম
1:1	সমায়ন (Unison)	3:2	গুরুপঞ্চম (Major fifth)
2:1	অষ্টক (Octave)	5:3	গুরু ষষ্ঠক (Major sixth)
3:1	পঞ্চম (Fifth)	8:5	লঘু ষষ্ঠক (Minor sixth)
4:1	গুরু ত্রিস্রক (Major third)	8:9	গুরু সুর (Major tone)
5:4	লঘু ত্রিস্রক (Minor third)	10:9	লঘু সুর (Minor tone)
6:5		16:15	অর্ধসুর (Semi tone)

৯·১৪·৩ সঙ্গীতে বহুল প্রচলিত শব্দসমূহ
Terms mostly used in music

সঙ্গীতে নিম্নলিখিত শব্দগুলোর বহুল প্রচলন দেখা যায় :

(১) সুরযুক্ত শব্দ (Musical sound) : স্বনকের নিয়মিত পর্যাবৃত্ত কম্পনের ফলে সৃষ্ট শব্দকে সুরযুক্ত শব্দ বলে। উদাহরণ : সেতার বাজানোর সময় সেতারের তারগুলো বা গান গাওয়ার সময় মানুষের কণ্ঠনালী নিয়মিত পর্যাবৃত্ত গতিতে কম্পিত হয়। বৃষ্টির দিনে টিনের চালে একটানা বৃষ্টির শব্দ সুরযুক্ত শব্দ।

(২) সুরবর্জিত শব্দ (Noise) : স্বনকের অনিয়মিত বা ক্ষণস্থায়ী স্পন্দনের ফলে উৎপন্ন শব্দকে সুরবর্জিত শব্দ বলে। উদাহরণ : হাট বাজারে লোকজনের কোলাহল সুরবর্জিত শব্দের উদাহরণ।

(৩) সুর (Tone) : যে সুরযুক্ত শব্দে একটি মাত্র কম্পাঙ্ক উপস্থিত থাকে তাকে সুর বলে। উদাহরণ : সুর শলাকার বাহু দুটি সরল দোল গতিতে কম্পিত হয়, তাই এ থেকে একটি মাত্র কম্পাঙ্কের শব্দ বেরোয়।

(৪) স্বর (Note) : যে সুরযুক্ত শব্দে একাধিক কম্পাঙ্কবিশিষ্ট শব্দ থাকে তাকে স্বর বলে। সুতরাং স্বর হলো একাধিক সুরের সংমিশ্রণ। উদাহরণ : বিভিন্ন বাদ্যযন্ত্র থেকে যে শব্দ বেরিয়ে আসে তাতে একাধিক কম্পাঙ্কবিশিষ্ট সুর থাকে, তাই ওই শব্দকে স্বর বলে।

একটি স্বরের মধ্যে উপস্থিত বিভিন্ন সুরকে কম্পাঙ্কের আলোকে বিভিন্ন নামে অভিহিত করা হয়। যেমন :

(৫) মূল সুর (Fundamental tone) : একটি স্বরের মধ্যে সর্বনিম্ন কম্পাঙ্কবিশিষ্ট সুরকে মূল সুর বলে।

(৬) উপসুর (Overtones) : একটি স্বরে মূলসুর ছাড়া উপস্থিত অন্যান্য সুরকে উপসুর বলে।

(৭) সমমেল (Harmonics) : একটি স্বরের মধ্যে উপস্থিত যে সকল সুরের কম্পাঙ্ক মূলসুরের কম্পাঙ্কের সরল গুণিতক, সেগুলোকে বলা হয় সমমেল। মূলসুরটিও একটি সমমেল।

(৮) অষ্টক (Octave) : স্বরের মধ্যে উপস্থিত কোনো সুরের কম্পাঙ্ক মূলসুরের দ্বিগুণ হলে তাকে মুল সুরের অষ্টক বলে।

উদাহরণ : ধরা যাক, 250 Hz, 350 Hz, 450 Hz, 550 Hz, 650 Hz, 750 Hz—এই ছয়টি সুরের সমন্বয়ে একটি সুরযুক্ত শব্দ উৎপন্ন হয়েছে।

(i) উপরোল্লিখিত শব্দের প্রত্যেকটি এক একটি সুর।

(ii) এখানে ছয়টি সুরের সংমিশ্রণে একটি স্বর উৎপন্ন হয়েছে।

(iii) এখানে 250 Hz সুরটি হলো মূলসুর।

(iv) 350 Hz, 450 Hz, 550 Hz, 650 Hz, 750 Hz—এই সুরগুলোর প্রত্যেকটি হলো এক একটি উপসুর।

(v) 500 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট সুরটি মূল সুরের অষ্টক।

(vi) 500 Hz, 750 Hz কম্পাঙ্কযুক্ত সুর দুটির প্রতিটি এক একটি সমমেল। কেননা, এই সুর দুটি মূলসুরের (250 Hz) এর 2 এবং 3 গুণ।

(৯) ত্রয়ী (Triad) : তিনটি শব্দের কম্পাঙ্কের অনুপাত 4 : 5 : 6 হলে তাদের সমন্বয়ে যে সুরযুক্ত শব্দের উৎপত্তি হয় তাকে ত্রয়ী বলে। সা : গা : পা = 256 : 320 : 384 = 4 : 5 : 6 এবং মা : ধা : র্সা = 341·33 : 426·66 : 512 = 4 : 5 : 6 ; কাজেই 256, 320 ও 384 কম্পাঙ্ক এবং 341·33, 426·66 ও 512 কম্পাঙ্কবিশিষ্ট সুরের সমন্বয়ে উৎপন্ন শব্দ ত্রয়ী।

(১০) স্বর-সঙ্গতি (Chord) : চারটি শব্দের কম্পাঙ্কের অনুপাত 4 : 5 : 6 : 8 হলে তাদের সমন্বয়ে এক প্রকার শ্রুতিমধুর শব্দের উৎপত্তি হয়। এরূপ সমন্বয়কে স্বর-সঙ্গতি বা সমসঙ্গতি বলে। সুতরাং ত্রয়ী ও ত্রয়ীর নিম্নতম কম্পাঙ্কের দ্বিগুণ কম্পাঙ্কবিশিষ্ট শব্দের সমন্বয় স্বর-সঙ্গতি। কিন্তু সমন্বয় যদি শ্রুতিমধুর না হয় অর্থাৎ শ্রুতিকটু হয় তবে ওই সমন্বয়কে বিষম সঙ্গতি বলে।

(১১) সমতান বা হারমোনি (Harmony) : একই সময় কতকগুলো শব্দ উৎপন্ন হলে যদি তাদের মধ্যে একটি ঐকতানের সৃষ্টি হয় তবে তাকে সমতান বলে।

(১২) স্বরমাধুর্য বা মেলডি (Melody) : কতকগুলো শব্দ একের পর এক উৎপন্ন হয়ে যদি একটি সুরযুক্ত শব্দের সৃষ্টি করে তবে তাকে স্বরমাধুর্য বা মেলডি বলে।

(১৩) সলো (Solo) : একটি মাত্র বাদ্যযন্ত্র হতে যে স্বর সৃষ্টি হয় তাকে সলো বা একক সঙ্গীত বলে। একটি বেহালা বা পিয়ানো হতে উৎপন্ন স্বরই সলো।

(১৪) অর্কেস্ট্রা (Orchestra) : যখন একাধিক বাদ্যযন্ত্র একত্রে বাজিয়ে একটি সমতান অথবা মেলডি অথবা সমতান মেলডি উভয়ই উৎপন্ন করে তখন তাকে অর্কেস্ট্রা বলে।

(১৫) টনিক (Tonic) : সর্বাপেক্ষা কম কম্পাঙ্কের সূচনা সুরকে টনিক বলে।

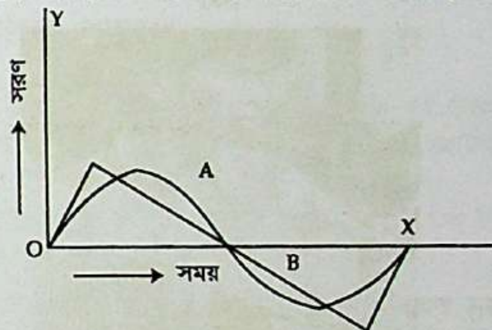
অনুধাবনমূলক কাজ : "সকল হারমোনিক উপসুর কিন্তু সকল উপসুর হারমোনিক নয়।"—ব্যাখ্যা কর।

একটি স্বরের মধ্যে যে বিভিন্ন কম্পাঙ্কের সুর থাকে তার মধ্যে সর্বাপেক্ষা কম কম্পাঙ্কের সুরকে মূল সুর বলে এবং বাকি সুরগুলোকে উপসুর বলে। উপসুরগুলোর মধ্যে যেগুলোর কম্পাঙ্ক মূল সুরের সরল গুণিতক সেগুলোকে হারমোনিক বলে। কিন্তু সকল উপসুরের কম্পাঙ্ক মূল সুরের কম্পাঙ্কের সরল গুণিতক নয়। তাই সকল হারমোনিক উপসুর হলেও সকল উপসুর হারমোনিক নয়।

৯·১৫ সঙ্গীত গুণ বিশ্লেষণে পদার্থবিজ্ঞানের অবদান

Contribution of Physics in the analysis of musical sound

পদার্থবিজ্ঞানের শব্দ অধ্যায়ে আমরা শব্দের উৎপত্তি, মাধ্যমে শব্দ সঞ্চালন, বীট সৃষ্টি, শব্দের তীব্রতা, তীক্ষ্ণতা এবং এই সকল শব্দের গুণ বা জাতিসহ কোনটি সঙ্গীত গুণসম্পন্ন কোনটি নয়েজ (noise) যুক্ত শব্দ ইত্যাদি বিষয়ে আলোচনা করে থাকি। সকল বাদ্যযন্ত্র পদার্থবিজ্ঞানের কোনো না কোনো বিষয়ের ওপর ভিত্তি করে তৈরি করা হয়েছে। সকল বাদ্যযন্ত্রে কম্পনের মাধ্যমে সুর সৃষ্টি করা হয়। এমনকি পানিতে কম্পন সৃষ্টি করে জলতরঙ্গের সুর তোলা যায়। সকল যন্ত্র দ্বারা সৃষ্ট শব্দই পদার্থবিজ্ঞানের তত্ত্ব দ্বারা বিশ্লেষণ করা যায়। আমরা জানি যে সকল বৈশিষ্ট্য দ্বারা দুটি উৎস হতে নির্গত শব্দের তীব্রতা ও তীক্ষ্ণতা এক হলেও তাদের একটিকে অন্যটি হতে পৃথক করা যায় তাই জাতি বা গুণ (quality)। এই বৈশিষ্ট্য দ্বারা একই গান বাঁশি ও সেতার হতে বাজালে ওই গানের শব্দগুলো বাঁশির না সেতারের তা শোনামাত্র বুঝা যায়। একটি সংযুক্ত বা সঙ্গীত গুণসম্পন্ন শব্দ যেসব সুরের মিশ্রণে সৃষ্টি হয় তাদের মধ্যে সুরের কম্পাঙ্ক দ্বারা তার তীব্রতার পরিচয় পাওয়া যায়। কোনো একটি সুরযুক্ত শব্দে উপস্থিত উপসুরের প্রভাবে শব্দতরঙ্গের সরণ-সময় রেখার আকার ও সাথে সাথে জাতি বদলায়। ৯·২৬ চিত্রে জাতি ভিন্ন অন্য কোনো প্রভেদ নেই এরূপ দুটি সুরযুক্ত শব্দতরঙ্গের সময়-সরণ রেখা AB দেখানো হয়েছে।



চিত্র ৯·২৬

আবার কোনো সুরযুক্ত শব্দের বা সঙ্গীত গুণসম্পন্ন (musical sound) শব্দের জাতি ওই শব্দে উপস্থিত উপসুরের সংখ্যার ওপর এবং উপসুরগুলির বিস্তারের আপেক্ষিক মানের ওপর নির্ভর করে। একটি কম্পনরত বস্তু থেকে নির্গত শব্দে কোন কোন উপসুর উপস্থিত থাকে তা তারটিকে কোনো বিন্দুতে উদ্দীপিত করা হচ্ছে তার ওপর নির্ভর করে। যেমন একটি তারকে মধ্যবিন্দুতে টেনে ছেড়ে দিলে (plucking) এই বিন্দুটি নিস্পন্দ বিন্দু হতে পারে না। কাজেই তারের মধ্যবিন্দুতে দ্বিতীয়, চতুর্থ ইত্যাদি যেসব সমমেলের নিস্পন্দ বিন্দু থাকে তারা উপস্থিত থাকে না। বস্তুত সব যুগ্ম সমমেলই অনুপস্থিত থাকে। সুতরাং সাধারণভাবে বলা যায় যে, তারের উদ্দীপক বিন্দুতে (point of excitation) যেসব উপসুরের একটি নিস্পন্দ বিন্দু থাকে তা তার থেকে নিঃসৃত শব্দে উপস্থিত থাকে না। বেহালা ও এই জাতীয় অন্যান্য বাদ্যযন্ত্রে যন্ত্রীরা এই নীতিকে কাজে লাগিয়ে নিঃসৃত স্বরের জাতি নিয়ন্ত্রণ করে, ফলে এই সুর সঙ্গীত গুণ সমৃদ্ধ হয়।

কম্পনরত তারের কোনো বিন্দুকে আলতোভাবে ছুঁলে ওই বিন্দুতে একটি নিস্পন্দ বিন্দুর সৃষ্টি হয়। ফলে সেসব উপসুরের এই বিন্দুতে নিস্পন্দ বিন্দু আছে সেগুলি ছাড়া অন্য উপসুরগুলি অবদমিত (suppressed) হয়ে যায়। যেমন একটি কম্পনরত তারকে দৈর্ঘ্যের এক-তৃতীয়াংশ দূরত্বে স্পর্শ করলে তৃতীয়, ষষ্ঠ, নবম, দ্বাদশ, পঞ্চদশ ইত্যাদি যেসব সমমেল ওই বিন্দুতে নিস্পন্দ বিন্দু আছে সেগুলি ছাড়া অন্যসব সমমেল অবদমিত হয়ে যায়। তারের যন্ত্র বাজাবার সময় যন্ত্রীরা তারের বিশেষ বিশেষ জায়গায় আঙুল ছোঁয়ান, ফলে অবাঞ্ছিত সমমেলগুলি অবদমিত হয়ে নিঃসৃত স্বরের জাতি পাল্টে দেয়। সুতরাং দেখা যায় যে, সঙ্গীত গুণ, জাতি, সমমেল উপসুর সবকিছুর ধারণা ও জ্ঞান আমরা পদার্থবিজ্ঞানের শব্দ অধ্যায় থেকে নিতে পারি। আর এই লব্ধজ্ঞান দ্বারা সঙ্গীত গুণ যাচাই ও সঙ্গীত গুণের তীব্রতা, তীক্ষ্ণতা এবং মানসহ নানাবিধ বিষয়ের ব্যাখ্যা ও বিশ্লেষণ করতে পারি।

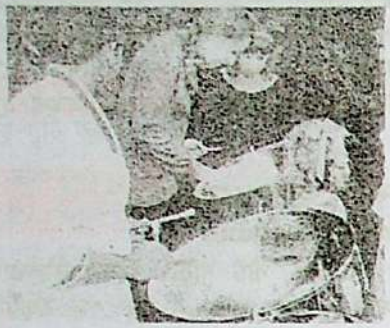
সাধারণত বাদ্যযন্ত্রে উৎপন্ন শব্দ বিশুদ্ধ সুর হয় না, বিভিন্ন সুরের মিশ্রণে গঠিত স্বর হয়। মূলসুরের তীব্রতা অপেক্ষাকৃত বেশি থাকে এবং এর কম্পন দিয়ে স্বরের তীক্ষ্ণতা নির্ধারিত হয়। উপসুরগুলির উপস্থিতির ওপর এদের জাতি নির্ভর করে। এই জাতি সম্বন্ধে জানতে হলে অবশ্যই পদার্থবিজ্ঞানের শব্দবিজ্ঞান বিষয়ে অধ্যায়ের প্রয়োজন। আর এই জ্ঞানই সঙ্গীত গুণকে সমৃদ্ধ করে। দুটি স্বরের জাতির পার্থক্য নির্ভর করে :

(i) ওদের মূল সুরের সঙ্গে উপস্থিত উপসুরের সংখ্যার ওপর

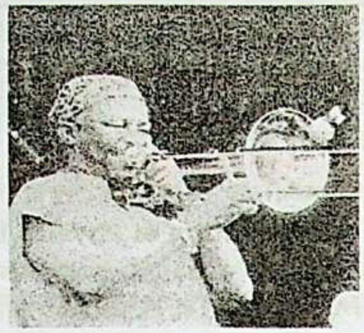
(ii) উপসুরগুলির কম্পাঙ্কের বিভিন্নতার ওপর এবং

(iii) উপসুরগুলির বিস্তারের আপেক্ষিক মানের ওপর।

কয়েকটি বাদ্যযন্ত্র ও কয়েকজন বাদ্যবাদকের চিত্র



(ক)

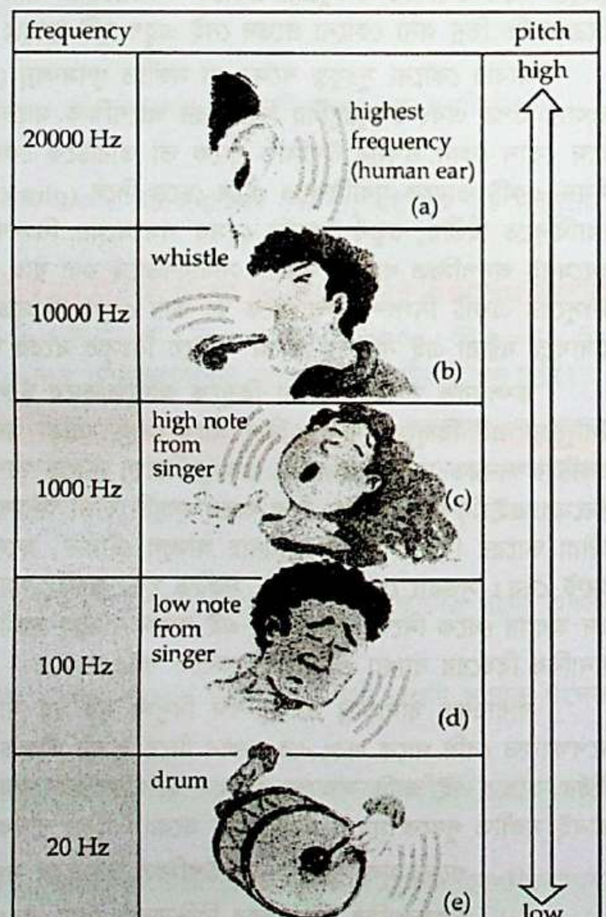


(খ)

(গ)

(ঘ)

(ঙ)



(চ)

শব্দের প্রাবল্য তরঙ্গের বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক বলে সমান তরঙ্গদৈর্ঘ্য ও বিস্তারবিশিষ্ট বিভিন্ন বাদ্যযন্ত্র দ্বারা উৎপন্ন শব্দের প্রাবল্য সমান হয়। এই বিষয়গুলি পদার্থবিদ্যার অবদান। আবার তীক্ষ্ণতা তরঙ্গ দৈর্ঘ্য দিয়ে নির্ধারিত হয় বলে শব্দের তীক্ষ্ণতাও সমান হবে। ধরা যাক, তিনটি যন্ত্রে উৎপন্ন তিনটি স্বরের প্রাবল্য ও তীক্ষ্ণতা সমান। কিন্তু তরঙ্গরূপ এক নয়। তাই এদের জাতি ভিন্ন। এ সকল বিষয়ে জ্ঞানলাভ অতীব জরুরি যা শব্দবিজ্ঞান অধ্যয়নের মাধ্যমে জানা সম্ভব। সুতরাং উপরিউক্ত বিষয়ের আলোকে আমরা বলতে পারি সঙ্গীত গুণ বিশ্লেষণে পদার্থবিজ্ঞানের অবদান প্রত্যক্ষ ও পরোক্ষভাবে জড়িত।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : দুটি বাদ্যযন্ত্রের সুর কীভাবে সামঞ্জস্যপূর্ণ করা হয় ? ব্যাখ্যা কর।

দুটি বাদ্যযন্ত্রকে একসঙ্গে কম্পিত করলে স্বরকম্পের সৃষ্টি হয়। এখন কোনো একটির কম্পাঙ্ক স্থির রেখে অপর বাদ্যযন্ত্রের কম্পাঙ্ক কম-বেশি করে স্বরকম্পের সংখ্যা শূন্য করলে ওই বাদ্যযন্ত্র দুটি সামঞ্জস্যপূর্ণ হয়।

৯·১৬ সোরগোল ও সঙ্গীতগুণ এবং এদের প্রভাব
Noise and musical sound and their effect

আমাদের চারপাশে আমরা নানারকম শব্দ শুনি। যেমন বৃষ্টির রিমঝিম শব্দ, বেহালার সুর, গিটারের সুর ইত্যাদি শব্দ আমাদের শুনতে ভালো লাগে; আবার চিৎকার, হৈ চৈ, গাড়ির শব্দ আমাদের পীড়া দেয়। এসব শব্দকে মোটামুটি দুই ভাগে ভাগ করতে পারি— সুরসমৃদ্ধ শব্দ ও সুরবর্জিত শব্দ।

যে সকল শব্দ শ্রুতিমধুর তাদের সুরযুক্ত শব্দ বা সঙ্গীত গুণসম্পন্ন বা সুশ্রাব্য বলা হয়।

আর যেসব শব্দ শ্রুতিকটু তাদের সোরগোল বা সুরবর্জিত শব্দ বা অপসুর বলা হয়।

এই শ্রেণিবিভাগ অনুভূতির ভিত্তিতে করা হয়েছে। কিন্তু অনুভূতির ভিত্তিতে শ্রেণিবিভাগ ঠিক বিজ্ঞানসম্মত নয়। এইজন্য এই শ্রেণিবিভাগ ভৌত ধর্মের ভিত্তিতেও করা হয়। একজনের কাছে যে শব্দ সুরযুক্ত মনে হবে অপরের নিকট তা সুরবর্জিতও মনে হতে পারে। শ্রোতার মানসিকতা, পরিবেশ ইত্যাদি অনেক কিছুর মিলিত প্রভাবই সুরযুক্ত বা সঙ্গীত গুণবিশিষ্ট শব্দকে সোরগোল বা সুরবর্জিত আবার সুরবর্জিত শব্দকে শ্রুতিমধুর মনে হতে পারে। অন্যভাবে বলা যায় সুশ্রাব্য বা সঙ্গীত গুণসম্পন্ন শব্দ ও সোরগোল বা অপসুর শব্দের মধ্যে কোনো সুস্পষ্ট বিভেদ রেখা টানা যায় না। শ্রোতার আপেক্ষিক পছন্দের দ্বারা সাধারণত এই দুই প্রকার শব্দের বিভেদ করা যায়। যেমন একজনের কাজে রবীন্দ্র সঙ্গীত ভালো লাগে কিন্তু ব্যান্ড সঙ্গীত ভালো লাগে না কিন্তু অপর একজনের নিকট ব্যান্ড সঙ্গীত ভালো লাগে কিন্তু রবীন্দ্র সঙ্গীত ভালো লাগে না।


চিত্র ৯.২৭ : হারমোনিয়ামের শব্দ।

কম্পন নিয়মিত বা পর্যায়বৃত্ত হলে যে শব্দ সৃষ্টি হয় এবং যা আমাদের শ্রুতিমধুর লাগে তাই **সঙ্গীত গুণবিশিষ্ট** শব্দ। আবার স্বনকের উৎসের কম্পন অনিয়মিত বা অপর্যাবৃত্ত হলে যে শব্দ সৃষ্টি হয় এবং যা আমাদের শ্রুতিকটু লাগে তা সোরগোল শব্দ। তাহলে দেখা যায় হারমোনিয়াম [চিত্র ৯·২৭], গীটার, সেতার, বাঁশির শব্দে সঙ্গীত গুণ বিদ্যমান, অপরদিকে পটকার আওয়াজ, বাজারের কোলাহল, হাতুড়ি দ্বারা পেরেক পোতার শব্দে সোরগোল বা নয়েজ বিদ্যমান। বলা যায় শব্দে উপস্থিত উপসুরের সংখ্যার ওপর এবং উপসুরগুলোর বিস্তারের আপেক্ষিক মানের ওপর সঙ্গীত গুণ নির্ভর করে। সোরগোলে এই আপেক্ষিক মান কোনো গাণিতিক নিয়ম মানে না।

কোলাহল বা সোরগোল সুরবর্জিত শব্দ; কিন্তু অনেক সময় দূর থেকে ওই শব্দের গুণগুণ ধ্বনি শুনতে ভালোই লাগে। আবার অনেক সুরযুক্ত বা সঙ্গীত গুণসম্পন্ন শব্দের সঙ্গে সুর বর্জিত শব্দও মিশে থাকে। যেমন হাতুড়ি দিয়ে ঘণ্টায় আঘাত করলে সোরগোল ও সঙ্গীত গুণ উভয় প্রকার শব্দের সৃষ্টি হয়। এই দুই ধরনের শব্দের মধ্যে পার্থক্য অনেকটা ব্যক্তিনির্ভর। অবস্থাবিশেষে একই শব্দ একই লোকের কাছে কখনও শ্রুতিমধুর অথবা কখনও শ্রুতিকটু বলে মনে হয়।

৯·১৬·১ সুরযুক্ত শব্দের বৈশিষ্ট্য
Characteristics of a musical sound

সুরযুক্ত শব্দের তিনটি মৌলিক বৈশিষ্ট্য রয়েছে। যথা—

(ক) শব্দোচ্চতা, (খ) তীক্ষ্ণতা এবং (গ) গুণ বা জাতি

(ক) শব্দোচ্চতা : শব্দোচ্চতা বলতে শব্দ কতটা জোরে বা আস্তে হচ্ছে তা বোঝায়। যদি অতি অল্প সময়ে খুব বেশি পরিমাণ শক্তি শব্দ তরঙ্গ আমাদের কানে পৌঁছায় তবে শব্দ খুব জোরে হচ্ছে বলা হয়। এক্ষেত্রে শব্দোচ্চতা অনেক বেশি। শব্দোচ্চতা তীব্রতা দিয়ে নির্ধারণ করা হয়। তীব্রতা বাড়লে শব্দোচ্চতা বাড়ে। আবার তীব্রতা কমলে শব্দোচ্চতা কমে। সুতরাং বলা যায় তীব্রতা কারণ এবং শব্দোচ্চতা তার ফল।

তীব্রতা (Intensity) : শব্দ বিস্তারের অভিমুখে অভিলম্বভাবে রাখা একক ক্ষেত্রফলের ভেতর দিয়ে প্রতি সেকেন্ডে যে পরিমাণ শব্দশক্তি প্রবাহিত হয় তাকে ওই শব্দের তীব্রতা বলে। S. I. পদ্ধতিতে তীব্রতার একক ওয়াট মিটার$^{-2}$ (watt metre^{-2})।

শব্দের তীব্রতা একটি পরিমাপযোগ্য ভৌতশক্তি। কিন্তু প্রাবল্য ব্যক্তিনির্ভর। প্রাবল্য হলো অনুভূতি যা সকলের কাছে এক নয়। একই শব্দ একজনের কাছে জোরালো হলেও আরেক জনের ততটা জোরালো নাও হতে পারে। একই তীব্রতার বিভিন্ন কম্পাঙ্কের শব্দ শ্রোতার কাছে বিভিন্ন শব্দোচ্চতার মনে হতে পারে। তাই, শব্দোচ্চতা কম্পাঙ্কের ওপরও নির্ভরশীল।

(খ) তীক্ষ্ণতা বা পীচ (Pitch) : সুরযুক্ত শব্দের যে বৈশিষ্ট্য দ্বারা কোন সুর চড়া ও কোন সুর মোটা বা খাদের তা বোঝায় তাকে তীক্ষ্ণতা বা পীচ বলে। চড়া সুরের কম্পাঙ্ক বেশি, তাই এর তীক্ষ্ণতাও বেশি। তেমনি মোটা বা খাদের সুরের কম্পাঙ্ক কম, তাই এর তীক্ষ্ণতা কম।

কোনো স্বরের তীক্ষ্ণতা বলতে ওই স্বরের অন্তর্গত মূলসুরের তীক্ষ্ণতা বোঝায়। একটি হারমোনিয়ামের রিডগুলি বাদিক থেকে ডানদিকে টিপে গেলে কম তীক্ষ্ণতাবিশিষ্ট শব্দ থেকে ক্রমশ বেশি তীক্ষ্ণতাবিশিষ্ট শব্দ শোনা যায়। সুতরাং, 'সা' থেকে 'রে' সুরের তীক্ষ্ণতা বেশি, তেমনি 'রে' এর থেকে 'গা' সুরের তীক্ষ্ণতা বেশি, 'গা' থেকে 'মা' সুরের তীক্ষ্ণতা আরো বেশি ইত্যাদি।

(গ) গুণ বা জাতি (Quality or timbre) : শব্দের যে বৈশিষ্ট্য দ্বারা বিভিন্ন বাদ্যযন্ত্র থেকে নির্গত একই প্রাবল্য ও তীক্ষ্ণতাযুক্ত স্বরগুলির মধ্যে পার্থক্য করা যায়, তাকে সুরযুক্ত শব্দের গুণ বা জাতি বলে।

এই বৈশিষ্ট্যের জন্য বিভিন্ন বাদ্যযন্ত্র (যেমন হারমোনিয়াম, সেতার, গীটার, বেহালা, বাঁশি ইত্যাদি) থেকে একই সুর একই তীব্রতার সঙ্গে বাজলেও প্রতিটি যন্ত্রের আওয়াজ আলাদাভাবে চেনা যায়।

সাধারণত বাদ্যযন্ত্র বিভিন্ন সুরের সংমিশ্রণে স্বর গঠিত হয়। এই সুরগুলোর মধ্যে মূলসুরের তীব্রতা সবচেয়ে বেশি থাকে, এর কম্পাঙ্ক দিয়ে স্বরের তীক্ষ্ণতা নির্দিষ্ট হয় এবং স্বরে উপস্থিত উপসুরগুলো দিয়ে স্বরের জাতি নির্ধারিত হয়।

সোরগোলযুক্ত শব্দের বৈশিষ্ট্য

(১) কোলাহল বা সোরগোলযুক্ত শব্দ শ্রুতিকটু ও বিরক্তিকর।
(২) এটি শব্দ উৎসের অনিয়মিত কম্পাঙ্কের ফলে সৃষ্টি হয়।
(৩) কোনো নির্দিষ্ট মূলসুর বা উপসুর থাকে না।
(৪) সুরবর্জিত শব্দের কোনো জাতি থাকে না।

অনুধাবনমূলক কাজ : শব্দ কখন নয়েজ বা গোলমাল মনে হয় ?

আমরা যে অর্থবহ শব্দ শুনি তার বেশির ভাগ অনকগুলো বাদ্যযন্ত্রের সমন্বয়ে সৃষ্টি। এই কম্পাঙ্কগুলো যদি পরস্পরের সরল গুণিতক হয় তাহলে এদের দ্বারা সৃষ্ট শব্দ আমাদের কাছে সঙ্গীত গুণসম্পন্ন মনে হয়। আর যদি পরস্পরের সাথে সম্পর্কহীন অনেকগুলো কম্পাঙ্কের সমন্বয়ে শব্দ সৃষ্টি হয় তাহলে সে শব্দ আমাদের কাছে নয়েজ বা গোলমাল মনে হয়।

৯·১৭ টানা তারে আড় কম্পনের সূত্রাবলি
Laws of transverse vibration of a stretched string

আমরা জানি আড় তরঙ্গ প্রবাহের ক্ষেত্রে,

$$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}} = \frac{1}{2lr}\sqrt{\frac{T}{\pi\rho}} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (9.32)$$

ওপরের সমীকরণগুলো হতে দেখা যাচ্ছে যে, তারের আড় কম্পনের কম্পাঙ্ক n মূলত তারের দৈর্ঘ্য l, টান T এবং প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর m-এর ওপর নির্ভর করে। অতএব টানা তারের আড় কম্পনের তিনটি সূত্র পাওয়া যায়।

সূত্রগুলো নিম্নে বর্ণিত হলো :

(১) দৈর্ঘ্যের সূত্র : T ও m স্থির থাকলে টানা তারে আড় তরঙ্গের কম্পাঙ্ক তার দৈর্ঘ্যের ব্যস্তানুপাতিক।
কম্পাঙ্ক n এবং দৈর্ঘ্য l হলে, $n \propto \frac{1}{l}$; যখন T ও m স্থির থাকে।

(২) টানের সূত্র : l ও m স্থির থাকলে টানা তারে আড় তরঙ্গের কম্পাঙ্ক তার টানের বর্গমূলের সমানুপাতিক।
কম্পাঙ্ক n এবং টান T হলে, $n \propto \sqrt{T}$; যখন l ও m স্থির থাকে।

(৩) ভরের সূত্র : T ও l স্থির থাকলে টানা তারে আড় তরঙ্গের কম্পাঙ্ক তারের একক দৈর্ঘ্যের ভরের বর্গমূলের ব্যস্তানুপাতিক।

কম্পাঙ্ক n এবং তারের একক দৈর্ঘ্যের ভর m হলে, $n \propto \frac{1}{\sqrt{m}}$; যখন T ও l স্থির থাকে।

উপরোক্ত সূত্রগুলিকে একত্রে লেখা যায়—

$$n \propto \sqrt{\frac{T}{m}}$$

বা, $$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

কাজ : সেতার বা অনুরূপ অন্যান্য যন্ত্রে বিভিন্ন উপাদান ও প্রস্থচ্ছেদের টান করা তার ব্যবহার করা হয় কেন—ব্যাখ্যা কর।

কম্পনশীল তারের কম্পাঙ্ক, $n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{m}}$ (এখানে t = তারের দৈর্ঘ্য, T = তারের টান এবং m = তারের একক দৈর্ঘ্যের ভর।)

এখন বিভিন্ন উপাদান ও প্রস্থচ্ছেদের তারের m-এর মান ভিন্ন ভিন্ন হয়। ফলে তারগুলোর কম্পাঙ্কও ভিন্নতর হয়। তাই একটি যন্ত্রে একসঙ্গে অনেকগুলি কম্পাঙ্কের শব্দ উৎপন্ন করা সম্ভব।

৯·১৮ বায়ুস্তম্ভের কম্পন
Vibration of air column

মোটামুটি চওড়া চোঙ্গাকৃতি নলে আবদ্ধ বায়ু মাধ্যমকে বায়ুস্তম্ভ বলা হয়। এই বায়ুস্তম্ভের কম্পনের ফলে সুরের সৃষ্টি হয়। বাঁশের বাশি, মাউথ অর্গান প্রভৃতি নলাকৃতি বাদ্যযন্ত্রে ফুঁ দিয়ে শ্রুতিমধুর শব্দ উৎপন্ন করা যায়। এটি হতে প্রমাণিত হয় যে, নলের মধ্যে আলোড়ন সৃষ্টি করলে, নলের আবদ্ধ বায়ুস্তম্ভ সুর সৃষ্টি করে থাকে। নলের বায়ুস্তম্ভের কম্পনকে কাজে লাগিয়ে যে সব সুরযন্ত্র সৃষ্টি হয়েছে তাদেরকে দুই শ্রেণিতে বিভক্ত করা যায় ; যথা—একমুখ বন্ধ নল ও দুই মুখ খোলা নল। সংক্ষেপে একমুখ বন্ধ নলকে 'বন্ধ নল' এবং দুইমুখ খোলা নলকে 'খোলা নল' বলে।

৯·১৯ একমুখ বন্ধ (বা বন্ধ) নলে বায়ুস্তম্ভের কম্পন
Vibration of air column in a pipe closed at one end

এরূপ একটি নলের একমুখ খোলা ও অপর মুখ বন্ধ থাকে। এই নলের খোলা মুখে ফুঁ দিলে (অথবা একটি কম্পনরত সুর শলাকা ধরলে) নলের ভিতরের বায়ুস্তম্ভের মধ্য দিয়ে শব্দ লম্বিক তরঙ্গাকারে বন্ধ মুখের দিকে সঞ্চালিত হবে এবং বন্ধ মুখ হতে (সঙ্কোচন স্পন্দন সঙ্কোচন স্পন্দনরূপে, প্রসারণ স্পন্দন প্রসারণ স্পন্দনরূপেই) প্রতিফলিত হয়ে খোলা মুখের দিকে অগ্রসর হবে। এই প্রতিফলিত তরঙ্গ ফুঁ (বা সুর শলাকা) হতে সৃষ্ট আর একটি তরঙ্গের সাথে সুরের উৎপত্তি হবে। ফুঁ (বা সুর শলাকা)-এর মূল স্পন্দন ও বায়ুস্তম্ভের কম্পনের মধ্যে অনুনাদ হলে বায়ুস্তম্ভ সর্বাপেক্ষা বেশি আলোড়িত হবে এবং সুর জোরালো হবে।

নলের খোলা মুখের বায়ুকণাগুলো মুক্তভাবে নড়াচড়া করতে পারে। এজন্যে খোলা মুখে সর্বদাই একটি সুস্পন্দ বিন্দুর (A) সৃষ্টি হবে [চিত্র ৯·২৮]। পক্ষান্তরে নলের বন্ধ মুখ সংলগ্ন বায়ুকণার বিচলনের সুবিধা খুবই কম হেতু ওই স্থানে একটি নিস্পন্দ বিন্দুর (N) উৎপত্তি হবে। বায়ুস্তম্ভের কম্পনভেদে নলের ভিতর কতকগুলো সুস্পন্দ ও নিস্পন্দ বিন্দুর (A ও N) সৃষ্টি হতে পারে।

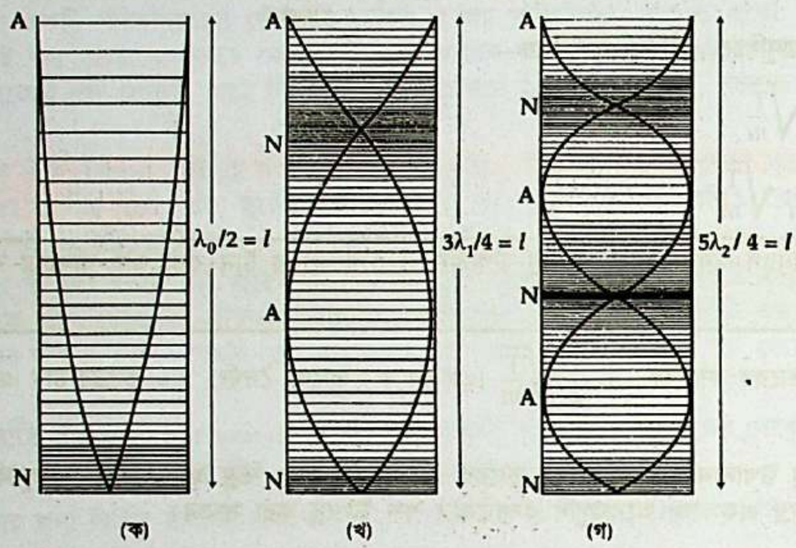
বায়ুস্তম্ভের সহজতর কম্পনে [চিত্র ৯·২৮ (ক)] বা ন্যূনতম কম্পাঙ্কের সুরে শুধুমাত্র বন্ধ মুখে একটি নিস্পন্দ বিন্দু এবং খোলা মুখে একটি সুস্পন্দ বিন্দু উৎপত্তি হবে। কিন্তু পরস্পর সংলগ্ন একটি নিস্পন্দ ও একটি সুস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব তরঙ্গদৈর্ঘ্যের এক-চতুর্থাংশের সমান। সুতরাং নলের দৈর্ঘ্য l এবং এই কম্পনে সৃষ্ট শব্দের তরঙ্গদৈর্ঘ্য λ_0 ও কম্পাঙ্ক N_0 হলে, $\frac{\lambda_0}{4} = l$

$$\therefore \quad \lambda_0 = 4l \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9.33)$$

$$\text{এবং } N_0 = \frac{v}{\lambda_0} = \frac{v}{4l} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9.34)$$

এখানে, v = শব্দের বেগ ও $v = n\lambda$ ।

নলের এই সুরই মূল সুর বা প্রথম হারমোনিক। এই কম্পাঙ্ককে মূল সুরের কম্পাঙ্ক বা প্রথম সমমেলের কম্পাঙ্ক বলে। সমীকরণ (9.34) থেকে স্পষ্ট যে নলের দৈর্ঘ্য যত ছোট হবে মূল সুরের কম্পাঙ্ক তত বেশি হবে।



চিত্র ৯·২৮

এই নলে পরবর্তী হারমোনিকের সুর উৎপন্নে বা আরও জোরে ফুঁ দিলে নলের বায়ুস্তম্ভে সৃষ্ট লম্বিক তরঙ্গের দৈর্ঘ্য হ্রাস পাবে এবং বায়ুস্তম্ভের কম্পাঙ্ক বৃদ্ধি পাবে অর্থাৎ চড়া সুর উৎপন্ন হবে। বায়ুস্তম্ভের পরবর্তী উচ্চ কম্পাঙ্কের সুরে বা দ্বিতীয় সম্ভাব্য কম্পনে [চিত্র ৯·২৮(খ)] খোলা মুখের সুস্পন্দ বিন্দু ও বন্ধ মুখের নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যে একটি সুস্পন্দ বিন্দু ও একটি নিস্পন্দ বিন্দু উৎপন্ন হবে। ধরা যাক বায়ুস্তম্ভের এই কম্পনে সৃষ্ট সুরের তরঙ্গদৈর্ঘ্য $= \lambda_1$ এবং কম্পাঙ্ক N_1।

তা হলে, $\frac{3\lambda_1}{4} = l$

$$\therefore \quad \lambda_1 = \frac{4l}{3} = \frac{\lambda_0}{3} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (9.35)$$

$$\text{এবং} \quad N_1 = \frac{v}{\lambda_1} = 3\left(\frac{v}{4l}\right) = 3N_0 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (9.36)$$

এই সুরকে প্রথম উপসুর বলে। এই সুরের কম্পাঙ্ক মূল সুরের কম্পাঙ্কের তিন গুণ বলে একে তৃতীয় হারমোনিক বলা হয়।

নলের তৃতীয় সম্ভাব্য কম্পনে [চিত্র ৯·২৮ (গ)] বা পরবর্তী হারমোনিকে বন্ধ প্রান্তের নিস্পন্দ বিন্দু এবং খোলা প্রান্তের সুস্পন্দ বিন্দুর মধ্যে দুটি সুস্পন্দ বিন্দু ও দুটি নিস্পন্দ বিন্দুর উৎপত্তি হবে। কাজে কাজেই এই কম্পনে সৃষ্ট সুরের তরঙ্গদৈর্ঘ্য $= \lambda_2$ এবং কম্পাঙ্ক $= N_2$ হলে, $\frac{5\lambda_2}{4} = l$

$$\therefore \quad \lambda_2 = \frac{4l}{5} = \frac{\lambda_0}{5} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (9.37)$$

$$\text{এবং} \quad N_2 = \frac{v}{\lambda_2} = 5 \times \frac{v}{4l} = 5N_0 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (9.38)$$

এই সুরকে দ্বিতীয় উপসুর বা পঞ্চম হারমোনিক বলে।

উপরের সমীকরণগুলো লক্ষ করে সাধারণভাবে বলা যায় যে, একমুখ বন্ধ নলে যে সব সুর সৃষ্টি হতে পারে তাদের তরঙ্গদৈর্ঘ্য,

$$\lambda_n = \frac{4l}{(2n+1)} = \frac{\lambda_0}{(2n+1)} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (9.39)$$

$$\text{এবং কম্পাঙ্ক,} \quad N_n = \frac{v}{\lambda_n} = (2n+1)\frac{v}{4l} = (2n+1)N_0 \qquad \ldots \quad \ldots \qquad (9.40)$$

এখানে, $n = 0, 1, 2, 3$ ইত্যাদি যে কোনো একটি পূর্ণ সংখ্যা।

এই সমীকরণগুলো হতে সিদ্ধান্ত গ্রহণ করা যায় যে, একমুখ বন্ধ নলে শুধুমাত্র অযুগ্ম হারমোনিকগুলো উৎপন্ন হতে পারে অর্থাৎ দ্বিতীয়, চতুর্থ, ষষ্ঠ ইত্যাদি হারমোনিকগুলো অনুপস্থিত থাকে। অবশ্য নলের ব্যাসার্ধ r হলে র‍্যালের প্রান্ত সংশোধন অনুসারে একমুখ বন্ধ নলের সুরগুলোর প্রকৃত তরঙ্গদৈর্ঘ্য,

$$\lambda_n = \frac{4(l + 0{\cdot}6r)}{(2n+1)} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9.41)$$

এবং কম্পাঙ্ক, $$N_n = (2n+1)\frac{v}{4(l + 0{\cdot}6r)} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9.42)$$

যে যে কারণে শব্দের বেগ পরিবর্তিত হবে সে সব কারণে মূল সুর এবং সাথে সাথে উপসুরগুলোর কম্পাঙ্ক পরিবর্তিত হবে। আবার নলের দৈর্ঘ্য যত ছোট হবে মূল সুর এবং সাথে সাথে উপসুরগুলোর কম্পাঙ্কও তত বৃদ্ধি পাবে।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : একটি খালি বালতিতে পানি ঢালতে শুরু করলে বালতিটি থেকে উৎপন্ন শব্দের তীক্ষ্ণতা (Pitch) পরিবর্তিত হয় কেন ?

বালতিটির একমুখ বন্ধ থাকায় এটি বন্ধ নলের ন্যায় আচরণ করে। এর মূল সুরের কম্পাঙ্ক, $n = \frac{v}{4l}$ [v = শব্দের বেগ, l = বন্ধ নলে বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য]

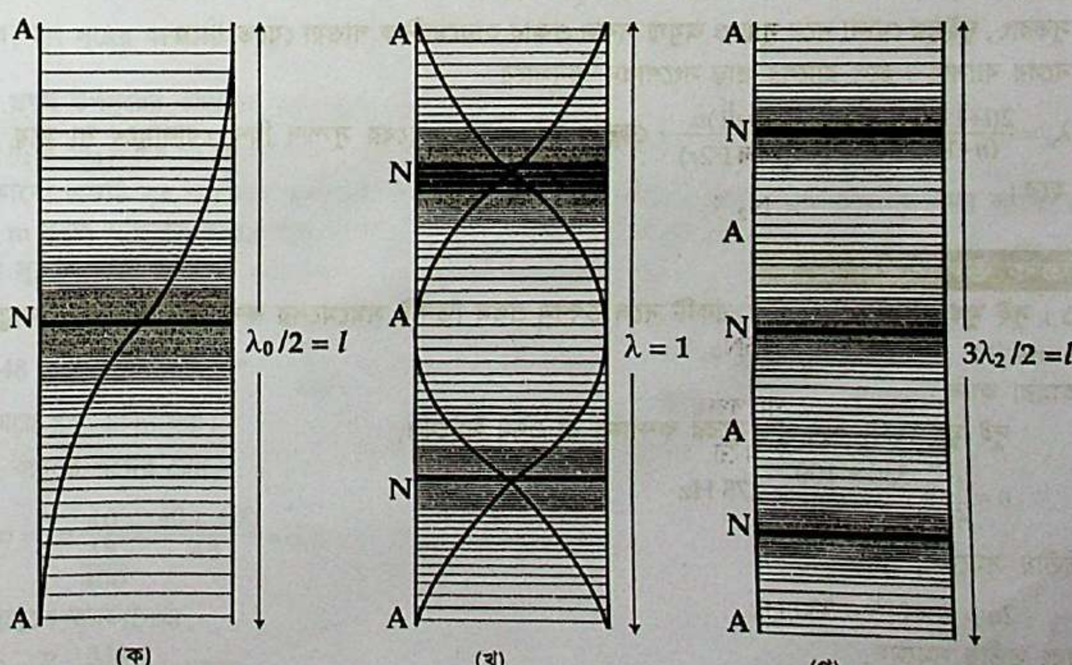
এখন বালতিটিতে পানি ভরা শুরু করলে বন্ধ নলে বায়ু স্তম্ভের দৈর্ঘ্য কমতে শুরু করে। অর্থাৎ মূল সুরের কম্পাঙ্ক পরিবর্তিত হয়। ফলে শব্দের তীক্ষ্ণতাও পরিবর্তিত হয়।

৯·২০ দুই মুখ খোলা (বা খোলা) নলে বায়ুস্তম্ভের কম্পন
Vibrations of air column in a pipe opened at both ends

এরূপ একটি নলের দুইমুখ খোলা থাকে। এই নলের একমুখে ফুঁ দিলে (অথবা একটি কম্পনরত সুর শলাকা ধরলে) নলের ভিতরের বায়ুস্তম্ভের মধ্য দিয়ে একটি লম্বিক তরঙ্গ নলের অপর প্রান্তের দিকে সঞ্চালিত হবে। নলের ভিতরের বায়ু অপেক্ষা বাইরের বায়ুর বিচলনের সুবিধা বেশি থাকায় মূল তরঙ্গের কিছু অংশ নলের অপর প্রান্ত হতে ফিরে আসবে। ফলে মূল তরঙ্গ ও প্রতিফলিত তরঙ্গ মিলে নলের বায়ুতে স্থির তরঙ্গ সৃষ্টি করবে এবং সুরের উৎপত্তি হবে। বায়ুস্তম্ভের কম্পাঙ্ক ফুঁ-এর (বা সুর শলাকার) কম্পাঙ্কের সমান হলে বায়ুস্তম্ভের কম্পনে অনুনাদ হবে।

নলের দুই মুখ খোলা থাকায় ওই দুই স্থানের বায়ুকণাগুলো সবচাইতে বেশি নড়াচড়া করার সুবিধা পায়। এই কারণে নলের দুই প্রান্তে সর্বদাই দুটি সুস্পন্দ বিন্দু (A , A) সৃষ্টি হবে [চিত্র ৯·২৯]। বায়ুস্তম্ভের কম্পনভেদে নলে এক বা একাধিক নিস্পন্দ বিন্দু (N) সৃষ্টি হতে পারে।

বায়ুস্তম্ভের সহজতম কম্পনে [চিত্র ৯·২৯ (ক)] বা ন্যূনতম কম্পাঙ্কে কম্পনের ক্ষেত্রে নলের দুই মুখের দুটি সুস্পন্দ বিন্দুর (A , A) মাঝে একটি নিস্পন্দ বিন্দু (N) থাকবে। কাজেই নলের দৈর্ঘ্য l হলে এই দৈর্ঘ্য সৃষ্ট শব্দের



চিত্র ৯·২৯

তরঙ্গদৈর্ঘ্যের অর্ধেকের সমান হবে। সৃষ্ট শব্দের তরঙ্গদৈর্ঘ্য λ_0 এবং কম্পাঙ্ক N_0 হলে, $\frac{\lambda_0}{2} = l$

$$\therefore \quad \lambda_0 = 2l \qquad \ldots \qquad (9.43)$$

$$\text{এবং } N_0 = \frac{v}{\lambda_0} = \frac{v}{2l} \qquad \ldots \qquad (9.44)$$

নলে উৎপন্ন এই সুর মূল সুর বা প্রথম হারমোনিক।

দ্বিতীয় সম্ভাব্য কম্পনে অর্থাৎ ফুঁ পূর্বাপেক্ষা সুবিধামত জোরালো বা তীক্ষ্ণতাসম্পন্ন হলে মোট তিনটি সুস্পন্দ বিন্দু এবং দুটি নিস্পন্দ বিন্দু দেখা দিবে [চিত্র ৯·২৯ (খ)]। এ স্থলে সৃষ্ট তরঙ্গদৈর্ঘ্য λ_1 এবং কম্পাঙ্ক N_1 হলে,

$$\lambda_1 = l = \frac{1}{2}(2l) = \frac{\lambda_0}{2} \qquad \ldots \qquad (9.45)$$

$$\text{এবং } N_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{l} = 2\left(\frac{v}{2l}\right) = 2N_0 \qquad \ldots \qquad (9.46)$$

এই সুর দ্বিতীয় হারমোনিক বা প্রথম উপসুর।

তৃতীয় সম্ভাব্য কম্পনে [চিত্র ৯·২৯ (গ)] বা পরবর্তী হারমোনিককে নলে মোট চারটি সুস্পন্দ বিন্দু এবং তিনটি [illegible]কবে। এক্ষেত্রে বায়ুস্তম্ভ হতে নিঃসৃত সুরের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য λ_2 এবং কম্পাঙ্ক N_2 হলে, $3\frac{\lambda_2}{2} = l$

$$= \frac{\lambda_0}{3} \qquad \ldots \qquad (9.47)$$

$$= 3\left(\frac{v}{2l}\right) = 3N_0 \qquad \ldots \qquad (9.48)$$

[illegible] হারমোনিক বা দ্বিতীয় উপসুর।

উল্লেখ করা যায় যে, দুইমুখ খোলা নলে যে সব সুর উৎপন্ন হতে পারে তাদের তরঙ্গদৈর্ঘ্য,

$$[illegible]1) = \frac{\lambda_0}{(n+1)} \qquad \ldots \qquad (9.49)$$

[illegible] কম্পাঙ্ক, $N_n = \frac{v}{\lambda_n} = (n+1)\frac{v}{2l} = (n+1)N_0 \qquad \ldots \qquad (9.50)$

$n = 0, 1, 2, 3$ ইত্যাদি যে কোনো একটি পূর্ণ সংখ্যা।

সুতরাং, দুইমুখ খোলা নলে যুগ্ম ও অযুগ্ম সকল প্রকার হারমোনিক পাওয়া যেতে পারে।

নলের ব্যাসার্ধ r হলে র‍্যালের প্রান্ত সংশোধন অনুসারে

$\lambda_n = \frac{2(l+1\cdot 2r)}{(n+1)}$ এবং $N_n = \frac{(n+1)v}{2(l+1\cdot 2r)}$, কেননা নলের উভয় মুখের সুস্পন্দ বিন্দু খোলামুখে না হয়ে $0\cdot 6r$ দূরত্ব বাইরে হবে।

গাণিতিক উদাহরণ ৯.৮

১। দুই মুখ খোলা 60 cm দীর্ঘ একটি নলে উৎপন্ন প্রথম তিনটি সমমেলের কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর (বায়ুতে শব্দের বেগ 330 ms^{-1})।

আমরা জানি,

দুই মুখ খোলা নলে মূল সুরের কম্পাঙ্ক বা প্রথম সমমেল,

$$n = \frac{v}{2l} = \frac{330 \times 100}{2 \times 60} = 275 \text{ Hz}$$

দ্বিতীয় সমমেল,

$$2n = 2 \times 275 = 550 \text{ Hz}$$

এবং তৃতীয় সমমেল,

$$3n = 3 \times 275 = 825 \text{ Hz}$$

২। 550 Hz কম্পাঙ্কের একটি সুর শলাকা একমুখ খোলা নলের বায়ুস্তম্ভের 12·5 cm এবং 42·5 cm দৈর্ঘ্যের সঙ্গে যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় অনুনাদ সৃষ্টি করে। বায়ুতে শব্দের বেগ নির্ণয় কর। (প্রান্তীয় সংশোধন উপেক্ষা করা যেতে পারে)

আমরা জানি,

একমুখ খোলা নলে প্রথম অনুনাদের বা মূল সুরের জন্য তরঙ্গদৈর্ঘ্য,

$$\lambda = 4l \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

এবং দ্বিতীয় অনুনাদের জন্য তরঙ্গদৈর্ঘ্য,

$$\frac{3\lambda}{4} = l_1 \qquad \text{বা, } 3\lambda = 4l_1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$$

সমীকরণ (i) ও (ii) থেকে পাই,

$3\lambda - \lambda = 4l_1 - 4l$

বা, $2\lambda = 4(l_1 - l)$

বা, $\frac{\lambda}{2} = (l_1 - l)$

বা, $\lambda = 2(l_1 - l)$

$\therefore \quad \lambda = 2 \times (42·5 - 12·5) = 60 \text{ cm} = 0·60 \text{ m}$

এখানে,
$l = 12·5$ cm
$l_1 = 42·5$ cm

আবার,

$v = n\lambda$

$\therefore \quad v = 550 \times 0·6 = 330 \text{ ms}^{-1}$

৩। 1·50 m দীর্ঘ একটি একমুখ বন্ধ অর্গান নল থেকে প্রথম উপসুরটির কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর। (বায়ুতে শব্দের বেগ 330 ms⁻¹)

একমুখ বন্ধ অর্গান নলে মূল সুরের ক্ষেত্রে সুস্পন্দ বিন্দু তৈরি হয় খোলা মুখে। এর পরবর্তী নিস্পন্দ বিন্দু তৈরি হয় বন্ধ প্রান্তে।

এখানে,
$l = 1·50$ m
$v = 330 \text{ ms}^{-1}$

শব্দের তরঙ্গদৈর্ঘ্য λ হলে, এই দুই বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব,

$= \frac{\lambda}{4} = l =$ নলটির দৈর্ঘ্য

$\therefore$ তরঙ্গদৈর্ঘ্য, $\lambda = 4l = 4 \times 1·50 \text{ m} = 6·0 \text{ m}$

অতএব, মূল সুরের কম্পাঙ্ক, $n_0 = \frac{v}{\lambda} = \frac{330}{6} = 55 \text{ Hz}$

এখন, প্রথম উপসুরের কম্পাঙ্ক মূল সুরের তিনগুণ,

অর্থাৎ, $n_1 = 3n_0 = 3 \times 55 = 165 \text{ Hz}$

৪। কোনো একটি সুর শলাকার কম্পাঙ্ক 400 Hz। এই সুর শলাকার 48 বার কম্পনে যে সময় লাগে, সেই সময়ে শব্দ 40 m দূরত্ব অতিক্রম করে। বায়ুতে শব্দের বেগ ও তরঙ্গদৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

এখানে সুর শলাকার কম্পাঙ্ক 400 Hz

অর্থাৎ, 400 কম্পনে সময় লাগে 1 সেকেন্ড।

$\therefore$ 48 " " " $\frac{48}{400}$ সেকেন্ড

এই সময়ে শব্দ 40 m যায়।

এখানে,
$n = 400$ Hz
কম্পন সংখ্যা, $\upsilon = 48$
দূরত্ব, $s = 40$ m

সুতরাং বায়ুতে শব্দের বেগ,

$$v = \frac{s}{t} = \frac{40}{\frac{48}{400}} = \frac{40 \times 400}{48} = 333 \text{ ms}^{-1}$$

এবং বায়ুতে তরঙ্গদৈর্ঘ্য,

$$\lambda = \frac{v}{n} = \frac{333}{400} \text{ m} = 0·833 \text{ m}$$

৫। 100 cm দৈর্ঘ্যের একটি খাড়া নলকে পানিপূর্ণ করে 512 Hz কম্পাঙ্কের একটি সুর শলাকা ওই পানিপূর্ণ নলের ওপরের খোলামুখের কাছে ধরা হলো এবং নিচের মুখ দিয়ে পানি ধীরে ধীরে নির্গত হচ্ছে। প্রান্তীয় ত্রুটি উপেক্ষা করে প্রথম ও দ্বিতীয় অনুনাদের সময় পানি তলের অবস্থান নির্ণয় কর। বায়ুতে বাতাসের বেগ 330 ms^{-1}।

আমরা জানি, প্রথম ও দ্বিতীয় অনুনাদের সময় বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য হয় যথাক্রমে,

$$l_1 = \frac{\lambda}{4} \text{ এবং } l_2 = \frac{3\lambda}{4}$$

এখানে, λ = শব্দের তরঙ্গদৈর্ঘ্য $= \frac{v}{n} = \frac{330}{512}$ m

$$\therefore \quad l_1 = \frac{\lambda}{4} = \frac{330}{4 \times 512} = 0.16 \text{ m} = 16 \text{ cm}$$

$$\text{এবং } l_2 = \frac{3\lambda}{4} = 3 \times 16 = 48 \text{ cm}$$

সুতরাং, ১ম ও ২য় অনুনাদের সময় পানি তলের উচ্চতা হবে, যথাক্রমে $(100 - 16)$ cm = 84 cm এবং $(100 - 48)$ cm = 52 cm

৬। একটি সুরশলাকা 80 cm দীর্ঘ টান দেওয়া একটি তারের সাথে সমসুর। যদি তারের দৈর্ঘ্য 5 cm কমানো হয় তবে তারের কম্পাঙ্ক 8 Hz বৃদ্ধি পায়। সুর শলাকার কম্পাঙ্ক কত ?

ধরি সুর শলাকার কম্পাঙ্ক n Hz

সুতরাং, 80 cm তারের কম্পাঙ্কও n হবে।

আমরা জানি,

$$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

$$\therefore \quad n = \frac{1}{2 \times 80}\sqrt{\frac{T}{m}} = \frac{1}{160}\sqrt{\frac{T}{m}} \quad \dots \quad \dots \quad (i)$$

তারের দৈর্ঘ্য 5 cm কমলে সেকেন্ডে ৪টি কম্পাঙ্ক বৃদ্ধি পায়,

$$\therefore \quad n + 8 = \frac{1}{2 \times 75}\sqrt{\frac{T}{m}} = \frac{1}{150}\sqrt{\frac{T}{m}} \quad \dots \quad \dots \quad (ii)$$

সমীকরণ (i) কে (ii) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{n}{n+8} = \frac{150}{160}$$

বা, $160\,n = 150\,n + 150 \times 8$

বা, $10\,n = 150 \times 8$

$$\therefore \quad n = \frac{150 \times 8}{10} = 120 \text{ Hz}$$

৭। দুটি সুর শলাকা A এবং B-কে একসঙ্গে কম্পিত করলে 6টি বীট স্বরকম্প সৃষ্টি হয়। A শলাকাটি একটি খোলা নলের 35.5 cm দীর্ঘ বায়ুস্তম্ভের সাথে অনুনাদ সৃষ্টি করে। B শলাকাটি ওই নলের 36.5 cm বায়ুস্তম্ভের সাথে অনুনাদী হয়। শলাকা দুটির কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

মনে করি শলাকা দুটির কম্পাঙ্ক যথাক্রমে n_1 ও n_2

প্রশ্নানুসারে, $n_1 \sim n_2 = 6$ অথবা $n_2 - n_1 = 6$

বায়ুতে শব্দের বেগ v হলে নলে উৎপন্ন মূলসুরের ক্ষেত্রে,

$$n_1 = \frac{v}{4l_1} = \frac{v}{4 \times 35.5} \text{ এবং } n_2 = \frac{v}{4 \times 36.5}$$

সুতরাং, দেখা যাচ্ছে, $n_1 > n_2$। অর্থাৎ $n_1 - n_2 = 6$

এখন, $\frac{n_1}{n_2} = \frac{36.5}{35.5}$

বা, $\frac{n_1 - n_2}{n_2} = \frac{1}{35.5}$

$\therefore \quad \frac{6}{n_2} = \frac{1}{35.5}$

বা, $n_2 = 6 \times 35.5 = 213$ Hz

$\therefore \quad n_1 = 213 + 6 = 219$ Hz

৮। একটি খোলা নলের একমুখ হঠাৎ বন্ধ করা হলো। এতে দেখা গেল যে বন্ধ নলের তৃতীয় সমমেলের কম্পাঙ্ক খোলা নলের মূলসুরের কম্পাঙ্কের চেয়ে 80 Hz বেশি। খোলা নলে মূলসুরের কম্পাঙ্ক কত ?

ধরা যাক নলটির দৈর্ঘ্য, l

আমরা জানি, খোলা অবস্থায় মূলসুরের কম্পাঙ্ক, $n_1 = \frac{v}{2l}$

এবং একমুখ বন্ধ অবস্থায় মূলসুরের কম্পাঙ্ক, $n_2 = \frac{v}{4l}$

∴ বন্ধ অবস্থায় তৃতীয় সমমেলের কম্পাঙ্ক,

$$n_2' = 3n_2 = \frac{3v}{4l}$$

প্রশ্নানুসারে,

$$\frac{3v}{4l} = \frac{v}{2l} + 80$$

বা, $\frac{3}{2} \times \frac{v}{2l} = \frac{v}{2l} + 80$ বা, $\frac{3}{2} n_1 = n_1 + 80$

বা, $\frac{3}{2} n_1 - n_1 = 80$ বা, $n_1 \left(\frac{3}{2} - 1\right) = 80$

বা, $\frac{1}{2} n_1 = 80$ বা, $n_1 = 80 \times 2 = 160$ Hz

৯। একটি খোলা নলের দৈর্ঘ্য 46 cm এবং ব্যাস নির্দিষ্ট। এর মূলসুরের কম্পাঙ্ক 320 Hz। বাতাসে শব্দের বেগ 320 ms^{-1}। নলের একটা মুখ বন্ধ করা হলে মূলসুরের কম্পাঙ্ক কত হবে ?

প্রথম ক্ষেত্রে :

খোলা নলের ক্ষেত্রে মূলসুরের কম্পাঙ্ক, $n = \frac{v}{2(l + 0\cdot6\,D)}$

∴ $320 = \frac{320 \times 100}{2(46 + 0\cdot6\,D)}$ বা, $44 + 0\cdot6\,D = 50$

∴ $D = \frac{50 - 46}{0\cdot6} = \frac{4}{0\cdot6} = 6\cdot67$ cm

এখানে,
$n = 320$ Hz
$v = 320$ ms^{-1} $= 320 \times 100$ cms^{-1}
$l = 46$ cm
D = ব্যাস

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে :

একমুখ বন্ধ নলের মূলসুরের কম্পাঙ্ক,

$$n_1 = \frac{v}{4(l + 0\cdot3\,D)}$$

$$\therefore\ n_1 = \frac{320 \times 100}{4(46 + 0\cdot3 \times 6\cdot67)}$$

$$= \frac{320 \times 100}{184 + 1\cdot2 \times 6\cdot67} = \frac{320 \times 100}{184 + 8}$$

$$= \frac{320 \times 100}{192} = 166\cdot67 \text{ Hz}$$

অনুধাবনমূলক কাজ : বন্ধ নল থেকে নিঃসৃত শব্দ অপেক্ষা খোলা নল থেকে নিঃসৃত শব্দ বেশি শ্রুতিমধুর কেন? ব্যাখ্যা কর।

কোনো স্বরের জাতি (quality) নির্ভর করে স্বরে উপস্থিত উপসুরের সংখ্যার ওপর। স্বরে উপসুরের সংখ্যা যত বেশি হয় স্বর তত বেশি শ্রুতিমধুর হয়। একমুখ বন্ধ নল থেকে মূলসুর ও তার শুধুমাত্র অযুগ্ম সমমেলগুলো নিঃসৃত হতে পারে। পক্ষান্তরে, দুইমুখ খোলা নল থেকে মূলসুর ও তার যুগ্ম এবং অযুগ্ম উভয় ধরনের সমমেল পাওয়া যায়। অতএব খোলা নল থেকে নিঃসৃত শব্দে উপসুরের সংখ্যা বেশি থাকায় স্বরটি বেশি শ্রুতিমধুর হয়।

৯·২০·১ একটি বন্ধ নল এবং খোলা নলের বায়ুস্তম্ভের কম্পনের তুলনা
Comparison of vibration of air columns in a closed pipe and an open pipe

এখানে বন্ধ নল ও খোলা নলের একই দৈর্ঘ্য বিবেচনা করা হবে।

বন্ধ নল	খোলা নল
১। নলের খোলা মুখে সুস্পন্দ বিন্দু এবং বন্ধ মুখে নিস্পন্দ বিন্দু অবস্থান করে।	১। নলের খোলা মুখ দুটিতে সুস্পন্দ বিন্দু অবস্থান করে।
২। নলে সৃষ্ট সুরের তরঙ্গদৈর্ঘ্য $\lambda_n = \frac{4l}{(2n+1)} = \frac{\lambda_0}{(2n+1)}$, $n = 0, 1, 2, 3 ......$ ইত্যাদি	২। নলে সৃষ্ট সুরের তরঙ্গদৈর্ঘ্য $\lambda_n = \frac{2l}{(n+1)} = \frac{\lambda_0}{(n+1)}$, $n = 0, 1, 2, 3 ......$ ইত্যাদি
৩। মূল সুরের ক্ষেত্রে $n = 0$, $l_0 = 4l$ এবং কম্পাঙ্ক $N_0 = \frac{v}{4l}$	৩। মূল সুরের ক্ষেত্রে $n = 1$, $\lambda_0 = 2l$ এবং কম্পাঙ্ক $N_0 = \frac{v}{2l}$
৪। মূল সুর এবং উপসুরগুলির অনুপাত $1:3:5:7$ ইত্যাদি। অর্থাৎ শুধুমাত্র অযুগ্ম হারমোনিকগুলিই উপস্থিত থাকে।	৪। মূল সুর এবং উপসুরগুলির কম্পাঙ্কের অনুপাত, $1:2:3:4$ ইত্যাদি। অর্থাৎ যুগ্ম ও অযুগ্ম সকল প্রকার হারমোনিক উপস্থিত থাকে।
৫। নিঃসৃত সুর খুব বেশি শ্রুতিমধুর নয়।	৫। নিঃসৃত সুর খুব বেশি শ্রুতিমধুর।
৬। সম্ভাব্য তরঙ্গদৈর্ঘ্যগুলি $\lambda_n = \frac{4l}{(2n+1)} = \frac{\lambda_0}{(2n+1)}$	৬। সম্ভাব্য তরঙ্গদৈর্ঘ্যগুলি, $\lambda_n = \frac{2l}{(n+1)} = \frac{\lambda_0}{(n+1)}$

গাণিতিক উদাহরণ ৯.৯

১। দুটি সুরশলাকাকে একই সময়ে কম্পিত করলে প্রতি সেকেন্ডে 5টি বীট সৃষ্টি হয়। একটি শলাকা কোনো টানা তারের 1·18 m দৈর্ঘ্যের সাথে এবং অপরটি ওই তারের 1·20 m দৈর্ঘ্যের সাথে ঐক্যতান হয়। সুরশলাকা দুটির কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন) ; ব. বো. ২০০৩]

এখানে,
$l_1 = 1{\cdot}18$ m
$l_2 = 1{\cdot}20$ m
$N = n_1 - n_2 = 5$
$n_1 = ?$
$n_2 = ?$

আমরা জানি,

$$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

$$\therefore \quad n_1 = \frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{T}{m}} = \frac{1}{2\times 1{\cdot}18}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

এবং $$n_2 = \frac{1}{2\times 1{\cdot}20}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

$$\therefore \quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{1{\cdot}20}{1{\cdot}18}$$

পুনঃ $n_1 - n_2 = 5$

উভয়পক্ষ n_2 দিয়ে ভাগ করে পাই,

$$\frac{n_1}{n_2} - 1 = \frac{5}{n_2}$$

বা, $$\frac{1{\cdot}20}{1{\cdot}18} - 1 = \frac{5}{n_2}$$

বা, $$\frac{1{\cdot}20 - 1{\cdot}18}{1{\cdot}18} = \frac{5}{n_2}$$

বা, $$n_2 = \frac{5\times 1{\cdot}18}{0{\cdot}02} = 295 \text{ Hz}$$

$$\therefore \quad n_1 = \frac{1{\cdot}20}{1{\cdot}18}\times 295 = 300 \text{ Hz}$$

২। একটি টানা তারের ভর 50 g এবং দৈর্ঘ্য 2 m। এর সাথে 5 kg ভরের বস্তু ঝুলালে মূল সুরের কম্পাঙ্ক কত? [BUET Admission Test, 2015-16]

আমরা জানি,

$$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{Mg}{\frac{m}{L}}}$$

$$= \frac{1}{2 \times 2}\sqrt{\frac{5 \times 9.8}{\frac{50 \times 10^{-3}}{2}}} = 11.07\ \text{Hz}$$

এখানে,

$m = 50\ \text{g} = 50 \times 10^{-3}\ \text{kg}$

$M = 5\ \text{kg}$

$L = 2\ \text{m}$

৩। 15N বলে টানা একটি তারের কম্পাঙ্ক 160 Hz। তারের টান কত হলে কম্পাঙ্ক 400 Hz হবে? [রা. বো. ২০০৮]

আমরা পাই, $n \propto \sqrt{T}$

$\therefore \quad n = ধ্রুব \times \sqrt{T}$

কাজেই, T_1 ও T_2 টানে কম্পাঙ্ক যথাক্রমে n_1 ও n_2 হলে,

$$\frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

ধরি নির্ণেয় টান $= T_2$

প্রশ্নানুযায়ী, $n_1 = 160\ \text{Hz}, T_1 = 15\ \text{N}$ ও

$n_2 = 400\ \text{Hz}$

$$\therefore \quad T_2 = \frac{n_2^2}{n_1^2} \times T_1 = \frac{(400)^2}{(160)^2} \times 15\ \text{N} = 93.75\ \text{N}$$

৪। 60 cm দীর্ঘ একটি টানা তার একটি সুরেলী কাঁটার সাথে ঐক্যতানে আছে। টান অর্ধেক করে ঐক্যতানে আনতে কত দৈর্ঘ্যের প্রয়োজন? [রা. বো. ২০০৫]

যেহেতু সুরেলী কাঁটা টানা তারের সাথে ঐক্যতানে আছে, সুতরাং উভয়ের কম্পাঙ্ক একই।

ধরি, কম্পাঙ্ক $= n$

$\therefore$ আমরা পাই, $n = \frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{T_1}{m}}$

বা, $n = \frac{1}{2 \times 0.6}\sqrt{\frac{T_1}{m}}$ ... ... (i)

এখানে,

$l_1 = 60\ \text{cm} = 0.6\ \text{m}$

প্রাথমিক টান $= T_1$

$\therefore$ চূড়ান্ত টান, $T_2 = \frac{T_1}{2}$

$l_2 = ?$

আবার, $n = \frac{1}{2l_2}\sqrt{\frac{T_2}{m}}$

বা, $n = \frac{1}{2l_2}\sqrt{\frac{T_1}{2m}}$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) থেকে পাই, $\frac{1}{2 \times 0.6}\sqrt{\frac{T_1}{m}} = \frac{1}{2l_2}\sqrt{\frac{T_1}{2m}}$

বা, $\frac{1}{2 \times 0.6}\sqrt{\frac{T_1}{m}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\,l_2}\sqrt{\frac{T_1}{m}}$

বা, $2\sqrt{2}\,l_2 = 2 \times 0.6$

বা, $l_2 = \frac{2 \times 0.6}{2\sqrt{2}} = \frac{0.6}{\sqrt{2}}$

$\therefore \quad l_2 = 0.42\ \text{m}$

৫। 50 cm দৈর্ঘ্যের একটি টানা তার একটি সুরেলী কাঁটার সাথে ঐক্যতানে আছে। টান চারগুণ করলে ঐক্যতানে আনতে তারটির দৈর্ঘ্য কত করতে হবে ? [ব. বো. ২০০৯ (মান ভিন্ন); য. বো. ২০০৩]

আমরা জানি,

$$n_1 = \frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{T}{m}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

আবার, $$n_2 = \frac{1}{2l_2}\sqrt{\frac{4T}{m}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

প্রশ্নমতে, $n_1 = n_2$

$$\therefore \frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{T}{m}} = \frac{1}{2l_2}\sqrt{\frac{4T}{m}}$$

বা, $\sqrt{\frac{T}{m}} = \frac{l_1}{l_2}\sqrt{\frac{4T}{m}}$ বা, $\frac{T}{m} = \frac{l_1^2}{l_2^2}\frac{4T}{m}$

বা, $1 = \frac{l_1^2}{l_2^2} \times 4$ বা, $\frac{l_2^2}{l_1^2} = 4$

বা, $\frac{l_2}{l_1} = 2$ বা, $l_2 = 2 \times l_1$

$\therefore \quad l_2 = 2 \times 0{\cdot}50\text{ m} = 1\text{ m}$

এখানে,
$l_1 = 50\text{ cm}$
$= 0{\cdot}50\text{ m}$
$l_2 = ?$

৬। 40 cm দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি টানা তার কোনো একটি সুর শলাকার সাথে ঐক্যতানে আছে। টান দ্বিগুণ করলে ঐক্যতানে আনতে কত দৈর্ঘ্যের প্রয়োজন হবে ? [রা. বো. ২০০৭; ব. বো. ২০০৭; চ. বো. ২০০৬ ; সি. বো. ২০০৪]

আমরা জানি,

$$n_1 = \frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{T}{m}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

$$n_2 = \frac{1}{2l_2}\sqrt{\frac{2T}{m}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

প্রশ্নমতে, $n_1 = n_2$

$$\therefore \quad \frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{T}{m}} = \frac{1}{2l_2}\sqrt{\frac{2T}{m}} = \frac{\sqrt{2}}{2l_2}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

বা, $\frac{1}{2 \times 0{\cdot}4} = \frac{\sqrt{2}}{2l_2} = \frac{1}{\sqrt{2}\,l_2}$

$\therefore \quad l_2 = \frac{2 \times 0{\cdot}4}{\sqrt{2}} = 0{\cdot}57\text{ m}$

এখানে,
$l_1 = 40\text{ cm} = 0{\cdot}40\text{ m}$
$l_2 = ?$

৭। একটি সনোমিটারের তার 200 কম্পাঙ্কযুক্ত একটি টিউনিং ফর্কের সাথে ঐক্যতানে থাকে। তারের টান ঠিক রেখে সনোমিটার তারের দৈর্ঘ্য 1% বৃদ্ধি করলে প্রতি সেকেন্ডে কয়টি বীট শোনা যাবে ?
[চ. বো. ২০১০ (মান ভিন্ন); য. বো. ২০০৬ ; কু. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন) ; সি. বো. ২০০৩]

আমরা জানি,

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{l_2}{l_1}$$

বা, $\frac{200}{n_2} = \frac{1{\cdot}01 l}{l}$

বা, $\frac{200}{n_2} = 1{\cdot}01$

বা, $n_2 = \frac{200}{1{\cdot}01} = 198\text{ Hz}$

এখানে,
$n_1 = 200\text{ Hz}$
$T = T_1 = T_2$
$l_1 = l$
$l_2 = l + \frac{l}{100} = l\left(1 + \frac{1}{100}\right)$
$= l\,(1 + 0{\cdot}01) = 1{\cdot}01\,l$
$n_2 = ?$
$n_1 \sim n_2 = ?$

$\therefore$ প্রতি সেকেন্ডে বিটের সংখ্যা $= n_1 - n_2 = 200 - 198 = 2$

৮। একটি সনোমিটার তারের দৈর্ঘ্য পরিবর্তন না করে এর ওপর প্রযুক্ত টান 4 গুণ বাড়িয়ে দেয়া হলো। তারের কম্পাঙ্কের কত পরিবর্তন হবে ? [সি. বো. ২০০৯; ঢা. বো. ২০০৮; রা. বো. ২০০২]

আমরা জানি, $n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$

মনে করি, ১ম ও ২য় ক্ষেত্রে তারটির কম্পাঙ্ক যথাক্রমে n_1 ও n_2

$\therefore\ n_1 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T_1}{m}}$ ... ... (i)

এবং $n_2 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T_2}{m}}$ ... ... (ii)

এখন সমীকরণ (i)-কে (ii) দিয়ে ভাগ করে পাই,

$$\frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = \sqrt{\frac{T_1}{4T_1}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \quad [\because T_2 = 4T_1]$$

$\therefore\ n_2 = 2n_1$ এবং $n_2 - n_1 = n_1$

সুতরাং পরের কম্পাঙ্ক পূর্বের কম্পাঙ্কের দ্বিগুণ হবে এবং কম্পাঙ্কের পরিবর্তন প্রাথমিক কম্পাঙ্কের সমান হবে।

৯। একটি সনোমিটারের তার কোনো একটি বল দ্বারা টানা আছে। যদি টানা বল 4 গুণ বাড়ানো হয় এবং একই সাথে তারের দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ করা হয় তবে পূর্বের ও পরের কম্পাঙ্কের অনুপাত কত হবে ? [দি. বো. ২০১০; চ. বো. ২০০২]

মনে করি কম্পাঙ্ক n_1 ও n_2, টান T_1 ও T_2 এবং দৈর্ঘ্য l_1 ও l_2

তা হলে তারের প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর m হলে,

$n_1 = \frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{T_1}{m}}$ ... ... (i)

এবং $n_2 = \frac{1}{2l_2}\sqrt{\frac{T_2}{m}}$ ... ... (ii)

এখন (i)-কে (ii) দিয়ে ভাগ করে পাই,

$\frac{n_1}{n_2} = \frac{l_2}{l_1}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$ ... ... (iii)

শর্তানুসারে $l_2 = 2l_1$ এবং $T_2 = 4T_1$

$\therefore$ (iii) হতে পাই, $\frac{n_1}{n_2} = \frac{2l_1}{l_1}\sqrt{\frac{T_1}{4T_1}}$

বা, $\frac{n_1}{n_2} = 2 \times \sqrt{\frac{1}{4}} = 1$

বা, $\frac{n_1}{n_2} = 1$

$\therefore\ n_1 : n_2 = 1 : 1$

প্রয়োজনীয় গাণিতিক সূত্রাবলি

$v = n\lambda$ ... ... (1)

$T = \frac{1}{n}$ ... ... (2)

$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, একই সুর শলাকার ক্ষেত্রে ... ... (3)

$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1}$, একই মাধ্যমের ক্ষেত্রে ... ... (4)

$y = A\sin\omega t = A\sin\frac{2\pi}{T}t$ ... ... (5)

$s = vt$ ... ... (6)

$s = N\lambda$ ... ... (7)

দশা পার্থক্য, $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \times$ পথ পার্থক্য ... ... (8)

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n = \frac{2\pi N}{t}$ ... ... (9)

মোট শক্তি, $E = 2\pi^2 \rho n^2 a^2$ ... ... (10)

$I = 2\pi^2 n^2 a^2 \rho v$ ... ... (11)

$I = \frac{P}{4\pi r^2}$ ... ... (12)

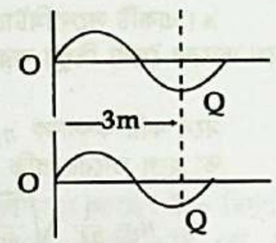
$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$ ... ... (13)

$N = n_1 \sim n_2$ ... ... (14)

$y = A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$ ... ... (15)

উচ্চতর দক্ষতাভিত্তিক নমুনার গাণিতিক উদাহরণ

১। কামাল বায়ুতে 400 Hz ও 500 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট দুটি সুরশলাকা হতে সৃষ্ট তরঙ্গদ্বয়ের তরঙ্গদৈর্ঘ্যের পার্থক্য 0·165 m দেখতে পেল। সে পরবর্তীতে পানিতে একই বিন্দু O থেকে উৎসদ্বয় আলাদাভাবে কম্পিত করল। (পানিতে শব্দের বেগ = 1600 ms⁻¹)



(ক) উদ্দীপক অনুসারে বায়ুতে শব্দের বেগ কত?

(খ) Q বিন্দুতে তরঙ্গদ্বয়ের কোনো দশা পার্থক্য থাকবে কী ? উত্তরটি গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

(ক) বায়ু মাধ্যমে

$\lambda_1 \sim \lambda_2 = 0·165$ ... ... (i)

এখানে,
$n_1 = 400$ Hz
$n_2 = 500$ Hz

যেহেতু $n_2 > n_1$, কাজেই $\lambda_1 >> \lambda_2$

$\therefore \quad \lambda_1 - \lambda_2 = 0·165$

বা, $\frac{v_a}{n_1} - \frac{v_a}{n_2} = 0·165$

বা, $\frac{v_a}{400} - \frac{v_a}{500} = 0·165$

বা, $v_a = 0·165 \times 2000$

$\therefore \quad v_a = 330$ ms^{-1}

(খ) Q বিন্দুতে তরঙ্গদ্বয়ের দশা পার্থক্য থাকবে।

এখানে,
পানিতে শব্দের বেগ, $v' = 1600$ ms^{-1}
১ম তরঙ্গের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য $= \lambda_1'$
২য় তরঙ্গের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য $= \lambda_2'$
O থেকে Q এর দূরত্ব, $x = 3$m

আমরা পাই, $\lambda_1' = \frac{v'}{n_1} = \frac{1600}{400} \quad \therefore \lambda_1' = 4$ m

এবং $\lambda_2' = \frac{v'}{n_2} = \frac{1600}{500} \quad \therefore \lambda_2' = 3·2$ m

১ম তরঙ্গের জন্য Q বিন্দুর দশা কোণ δ_1 হলে,

$$\delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1'} \times x = \frac{2\pi}{4} \times 3 \quad \therefore \delta_1 = \frac{3\pi}{2}$$

২য় তরঙ্গের জন্য Q বিন্দুর দশা কোণ δ_2 হলে

$$\delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2'} \times x = \frac{2\pi}{3·2} \times 3 = \frac{6\pi}{3·2}$$

দশা পার্থক্য $= \delta_1 - \delta_2 = \frac{3\pi}{2} - \frac{6\pi}{3·2} = \frac{3·2 \times 3\pi - 2 \times 6\pi}{2 \times 3·2}$

$$= \frac{9·6\pi - 12\pi}{6·4} = -\frac{2·4}{6·4}\pi$$

২। আবার গতিপথের সর্বোচ্চ অবস্থানে অর্থাৎ $x = A$ অবস্থানে শক্তির নিত্যতা যাচাই কর। সর্বোচ্চ অবস্থানে অর্থাৎ $x = A$ অবস্থানে গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - A^2) = 0$

$\therefore$ মোট যান্ত্রিক শক্তি,

E = স্থিতিশক্তি + গতিশক্তি

$= \frac{1}{2}m\omega^2A^2 + 0$

$\therefore \quad E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$

সুতরাং উপরোক্ত দুই অবস্থানে মোট শক্তি একই থাকে। অর্থাৎ মোট শক্তি তার সরণের ওপর নির্ভর করে না, গতিপথের সর্বত্র তার মান স্থির থাকে। এটা **শক্তির নিত্যতার সূত্র বা মোট শক্তির সংরক্ষণশীলতার সূত্র।**

৮.১১ সরল দোলন গতি এবং বৃত্তাকার গতির মধ্যে সম্পর্ক
Relation between simple harmonic motion and circular motion

বৃত্তাকার গতি এক ধরনের সরল দোলন গতি। অর্থাৎ বৃত্তাকার গতি সরল দোলন গতির বৈশিষ্ট্যগুলি মেনে চলে। এখন সরল দোলন গতি এবং বৃত্তাকার গতির মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করতে গিয়ে চিত্র ৮.১৫ লক্ষ কর।

মনে করি একটি বস্তুকণা A বিন্দু হতে যাত্রা শুরু করে ABCD বৃত্তাকার পথে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে সমকৌণিক বেগ ω-এ ঘুরছে [চিত্র ৮.১৫(ক)]। ধরি O বৃত্তের কেন্দ্র এবং A বৃত্তের ব্যাসার্ধ। মনে করি t সময় পর বস্তুকণাটি P অবস্থানে আসল। এখন P বিন্দু হতে বৃত্তের BOD ব্যাসের উপর PN লম্ব অঙ্কন করি। N হবে লম্বটির পাদবিন্দু।

মনে করি $ON = y$। চিত্রে OPN ত্রিভুজ থেকে পাওয়া যায়,

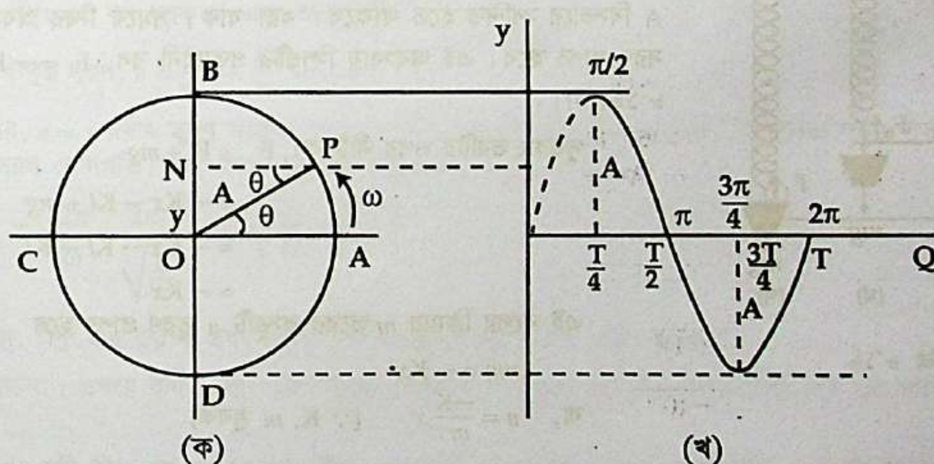
$y = OP \sin\theta = A \sin\theta$

যেহেতু কণাটি সমকৌণিক বেগে ঘুরছে, সুতরাং $\angle POA = \theta = \omega t$ ... ... (8.28)

θ-কে কণাটির দশা কোণ (phase angle) বা সংক্ষেপে দশা বলে।

এখন $y = A \sin\theta = A \sin\omega t$ ... ... (8.29)

P কণাটি যখন বৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকে তখন ব্যাস BOD-এর উপর কণার পাদবিন্দু N ব্যাস BOD বরাবর স্পন্দিত হতে থাকে।



চিত্র ৮.১৫

সুতরাং কণাটির বেগ,

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(A \sin\omega t) = A\,\omega \cos\omega t$$

এবং ত্বরণ, $$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -A\omega^2 \sin\omega t$$

$$= -\omega^2 y \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.30)$$

৪। প্রমা ও তমা পদার্থবিজ্ঞান ল্যাবরেটরিতে দুটি সুর শলাকা নিয়ে দুটি অগ্রগামী তরঙ্গ সৃষ্টি করল যাদের সমীকরণ যথাক্রমে $y_1 = 0.6 \sin 2\pi\left(34\,t - \frac{x}{10}\right)$ এবং $y_2 = 0.5 \sin 2\pi\left(32\,t - \frac{8x}{85}\right)$; এখানে প্রতিটি রাশি এস. আই. এককে প্রকাশিত। প্রমা বলল তরঙ্গ দুটি দ্বারা 2 সেকেন্ডে 4টি বীট গঠন করা সম্ভব।

(ক) প্রমার সুর শলাকায় সৃষ্ট শব্দের বেগের মান কত?

(খ) উভয়ের মিলিত তরঙ্গে বীট গঠন সম্ভব কী? প্রমার বক্তব্যের যথার্থতা প্রমাণ কর।

(ক) এখানে, $y_1 = 0.6 \sin 2\pi\left(34\,t - \frac{x}{10}\right)$ ... ... (i)

আমরা জানি, অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ $y = A \sin\left(2\pi\,nt - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ ... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) তুলনা করে পাই,

$2\pi n = 2\pi \times 34$

বা, $n = 34$ Hz

আবার, $\frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{x}{10}$

বা, $\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{10}$

$\therefore$ $\lambda = 2\pi \times 10 = 62.832$ m

বেগ, $v = n\lambda = 34 \times 62.832 = 2136.3\ \text{ms}^{-1}$

(খ) উদ্দীপক অনুযায়ী, $y_2 = 0.5 \sin 2\pi\left(32\,t - \frac{8x}{85}\right)$

$= 0.5 \sin\left(2\pi \times 32t - \frac{2\pi \times 8x}{85}\right)$ ... ... (i)

আমরা জানি, $y = A \sin\left(2\pi n't - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) তুলনা করে পাই,

$2\pi n' = 2\pi \times 32$

$\therefore$ $n' = 32$ Hz

(ক) থেকে প্রাপ্ত $n = 34$ Hz

$\therefore$ শলাকাদ্বয়ের কম্পাঙ্কের পার্থক্য $= (34 - 32)$ Hz $= 2$ Hz

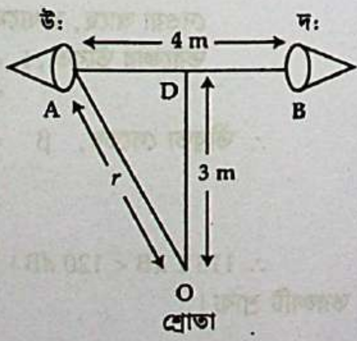
দেখা যাচ্ছে যে, সুর শলাকাদ্বয়ের কম্পাঙ্কের পার্থক্য 2 Hz, যা প্রতি সেকেন্ডে উৎপন্ন বীট সংখ্যা 2-এর সমান। তাই প্রমার বক্তব্য সঠিক।

৫। একটি থিয়েটার হলে স্টেজের দৈর্ঘ্য 4 m। স্টেজের উত্তর প্রান্তে 1×10^{-3} W ক্ষমতার একটি লাউড স্পিকার স্থাপন করা হলো। স্টেজের ঠিক মধ্যবিন্দু হতে পশ্চিমে 3 m দূরে শ্রোতার নিকট উক্ত তীব্রতা কম হওয়ায় স্টেজের দক্ষিণ প্রান্তে একই ক্ষমতার আর একটি লাউড স্পিকার স্থাপন করা হলো।

(ক) প্রথম স্পিকারের জন্য স্টেজের পশ্চিম পাশে শ্রোতার নিকট শব্দের তীব্রতা কত হবে?

(খ) দুটি স্পিকার একসাথে অন করলে স্টেজের পশ্চিম পাশে দণ্ডায়মান শ্রোতার নিকট শব্দের তীব্রতা প্রথম তীব্রতার দ্বিগুণ হবে কী? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

(ক) প্রথম স্পিকারের জন্য পশ্চিম পাশে অর্থাৎ O বিন্দুতে শব্দের তীব্রতা,



$I_1 = \frac{P}{4\pi r^2}$ ... ... (i)

$r = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$

$\therefore$ O বিন্দুতে তীব্রতা,

$I_1 = \frac{1 \times 10^{-3}}{4 \times 3.14 \times (\sqrt{13})^2}$

$= 6.12 \times 10^{-6}\ \text{Wm}^{-2}$

(খ) 'ক' থেকে প্রাপ্ত শব্দের তীব্রতা, $I_1 = 6.12 \times 10^{-6}\ Wm^{-2}$
এক্ষেত্রে শব্দের তীব্রতা লেভেল,

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} = 10 \log_{10} \frac{6.12 \times 10^{-6}}{10^{-12}}\ dB = 67.87\ dB$$

যেহেতু দক্ষিণ পাশে B বিন্দুতে স্থাপিত স্পিকারের তীব্রতা সমান কাজেই, $I_2 = 6.12 \times 10^{-6}\ Wm^{-2}$
মোট তীব্রতা, $I = I_1 + I_2 = 2 \times 6.12 \times 10^{-6}\ Wm^{-2} = 12.24 \times 10^{-6}\ Wm^{-2}$

এখন উভয় স্পিকারের জন্য তীব্রতা লেভেল, $\beta_1 = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} = 10 \log_{10} \frac{12.24 \times 10^{-6}}{10^{-12}}\ dB$
$= 70.88\ dB$

পূর্বের তীব্রতা লেভেলের দ্বিগুণ, $\beta_2 = 67.87\ dB \times 2 = 135.72\ dB$
এখানে, $\beta_1 \neq \beta_2$
তাই দুটি স্পিকার একসাথে অন করলে শ্রোতার নিকট তীব্রতা লেভেল পূর্বাপেক্ষা দ্বিগুণ হবে না।

৬। বায়ু মাধ্যমে C সুরশলাকাটি A ও B দুটি সুরশলাকার সাথে 5টি করে বীট উৎপন্ন করে। A সুরশলাকার কম্পাঙ্ক 385 Hz। B সুরশালাকা হতে বায়ু মাধ্যমে নির্গত তরঙ্গের সমীকরণ হলো : $y = 0.9 \sin 10\pi \left(\frac{30t}{0.4} - \frac{x}{4.8}\right)$

(ক) B সুরশলাকা হতে নির্গত তরঙ্গের তরঙ্গদৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
(খ) C সুরশালাকার কম্পাঙ্ক কীভাবে নিশ্চিত হওয়া যায় তা গাণিতিক যুক্তিসহ ব্যাখ্যা কর। [ঢা. বো. ২০১৭]

(ক) দেওয়া আছে, B সুরশলাকা থেকে বায়ু মাধ্যমে নির্গত তরঙ্গের সমীকরণ

$$y = 0.9 \sin 10\pi . \left(\frac{30t}{0.4} - \frac{x}{4.8}\right) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (i)$$

আমরা জানি, অগ্রগামী তরঙ্গের সাধারণ সমীকরণ,

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (ii)$$

সমীকরণ (i) ও (ii) তুলনা করে পাই,

$$\frac{10\pi}{4.8} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\therefore \quad \lambda = \frac{4.8}{5} = 0.98\ m$$

(খ) উদ্দীপক হতে পাই, B সুরশলাকা হতে বায়ু মাধ্যমে নির্গত তরঙ্গের সমীকরণ,

$$y = 0.9 \sin 10\pi \left(\frac{30t}{0.4} - \frac{x}{4.8}\right)$$ এবং

অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ $y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$ তুলনা করে পাই,

$$\frac{2\pi}{\lambda} v = \frac{300\pi}{0.4}$$

বা, $\frac{v}{\lambda} = \frac{150}{0.4}$ বা, $n = \frac{150}{0.4}$ $\quad [\because \frac{v}{\lambda} = n]$

$\therefore \quad n = 375\ Hz$

মনে করি, A সুরশলাকার কম্পাঙ্ক, $n_A = 385\ Hz$
C সুরশলাকাটি A এর সাথে 5টি বীট সৃষ্টি করে, সুতরাং C এর সম্ভাব্য কম্পাঙ্ক
$n_C = n_A \pm 5 = 385 \pm 5 = 390\ Hz$ বা $380\ Hz$
আবার C সুরশলাকাটি B এর সাথে 5টি বীট সৃষ্টি করে, সুতরাং C এর সম্ভাব্য কম্পাঙ্ক,
$n_C = n_B \pm 5 = 375 \pm 5 = 380\ Hz$ বা $370\ Hz$
$\therefore$ C সুরশলাকাটির কম্পাঙ্ক কেবল 380 Hz হলেই A ও B উভয়ের সাথে 5টি বীট উৎপন্ন করে।
$\therefore \quad n_C = 380\ Hz$

৭। একটি সনোমিটারে সদৃশ ও সমদৈর্ঘ্যের তিনটি তার A, B, C এ যথাক্রমে 200, 225, 250 N বল ঝুলিয়ে টানটান করা হলো। A তারটিকে শব্দায়িত করায় 100 Hz কম্পাঙ্কের শব্দ উৎপন্ন করে। দুটি করে তার একসাথে শব্দায়িত করলে বীট উৎপন্ন হয় কি-না পরীক্ষা করা হলো।

(ক) উদ্দীপকের দ্বিতীয় তারটির কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

(খ) বীট উৎপন্নের পরীক্ষার ফলাফল গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক আলোচনা কর। [চ. বো. ২০১৭]

(ক) যেহেতু তারদ্বয় সদৃশ ও সমদৈর্ঘ্যের সেহেতু টানা তারের সূত্রানুসারে

$$\frac{n_B}{n_A} = \sqrt{\frac{T_B}{T_A}}$$

বা, $n_B = n_A \sqrt{\frac{T_B}{T_A}} = 100 \times \sqrt{\frac{225}{200}} = 106.06$ Hz বা, 106 Hz

অতএব দ্বিতীয় তারটির কম্পাঙ্ক, 106 Hz

এখানে,
A তারের টান, $T_A = 200$ N
B তারের টান, $T_B = 225$ N
A তারের কম্পাঙ্ক, $n_A = 100$ Hz
B তারের কম্পাঙ্ক, $n_B = ?$

(খ) আমরা জানি,
টানা তারের সূত্রানুসারে,

$$\frac{n_C}{n_A} = \sqrt{\frac{T_C}{T_A}}$$

$$\therefore \; n_C = n_A \sqrt{\frac{T_C}{T_A}} = 100 \times \sqrt{\frac{250}{200}}$$

$$= 111.80 \text{ Hz}$$

এখানে,
A তারের টান, $T_A = 200$ N
C তারের টান, $T_C = 250$ N
A তারের কম্পাঙ্ক, $n_A = 100$ Hz
আমরা (ক) হতে পাই,
B তারের কম্পাঙ্ক, $n_B = 106$ Hz
C তারের কম্পাঙ্ক, $n_C = ?$

A ও B তার একসাথে শব্দায়িত করলে উৎপন্ন বীট

$$N_1 = n_B - n_A = 106 - 100 = 6 \text{ s}^{-1}$$

A ও C তার একসাথে শব্দায়িত করলে উৎপন্ন বীট

$$N_2 = n_C - n_A = 111.80 - 100 = 11.80 \text{ s}^{-1}$$

B ও C তার একসাথে শব্দায়িত করলে উৎপন্ন বীট

$$N_3 = n_C - n_B = 111.80 - 106 = 5.8 \text{ s}^{-1}$$

গাণিতিক বিশ্লেষণ থেকে দেখা যায়, $N_1 < 10$, $N_2 > 10$ এবং $N_3 < 10$

আমরা জানি, মানব কর্ণ প্রতি সেকেন্ডে 10টির বেশি বীট সনাক্ত করতে পারে না। তাই A ও B তার এবং B ও C তার একসাথে শব্দায়িত করলে বীট শোনা যাবে। কিন্তু A ও C তার একসাথে শব্দায়িত করলে কোনো বীট শোনা যাবে না।

৮। একটি সুতায় দুটি তরঙ্গের মিলনের ফলে যে স্থির তরঙ্গের সৃষ্টি হয় তার সমীকরণ হচ্ছে $y = 5 \sin \frac{\pi x}{3} \cos 40\pi t$, যেখানে x ও y হলো সেমি-এ এবং t হলো সেকেন্ডে।

(ক) তরঙ্গ দুটির প্রত্যেকটির বিস্তার ও বেগ কত ?

(খ) দুটি পরপর নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব কত ? [BUET Admission Test, 2016-17]

$$y = 5 \sin \frac{\pi x}{3} \cos 40\pi t = A \cos 40\pi t$$

আবার, $y = 5 \sin \frac{2\pi}{\lambda} \times \cos \omega t$

(ক) প্রত্যেকটি তরঙ্গের বিস্তার $\frac{5}{2}$ $\quad \because \frac{2\pi}{\lambda} x = \frac{\pi x}{3}$

প্রত্যেকটি তরঙ্গের বেগ $= \frac{\lambda}{2\pi} \times 40\pi$

$$= \lambda \times 20 = 6 \times 20 = 120 \text{ cms}^{-1}$$

(খ) দুটি নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \frac{\lambda}{2} = 3$ cm

সার-সংক্ষেপ

তরঙ্গ : কোনো স্থিতিস্থাপক মাধ্যমের কণাগুলোর স্থানান্তর ছাড়া যে পর্যাবৃত্ত আন্দোলনের দ্বারা এক স্থান হতে অন্য স্থানে শক্তি সঞ্চালিত হয় তাকে তরঙ্গ বলে।

সরল দোল তরঙ্গ বা সাইন তরঙ্গ : মাধ্যমের কণাগুলো সরল দোল গতিতে কম্পিত হলে যে তরঙ্গের সৃষ্টি হয় তাকে সরল দোল তরঙ্গ বা সাইন তরঙ্গ বলে।

আড় তরঙ্গ বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গ : মাধ্যমের কণাগুলো তরঙ্গ গতির অভিমুখের সমকোণে কম্পিত হতে থাকলে সেই তরঙ্গাকে আড় তরঙ্গ বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গ বলে।

লম্বিক তরঙ্গ বা অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ : মাধ্যমের কণাগুলো তরঙ্গের গতির অভিমুখের সমান্তরালে কম্পিত হতে থাকলে, সেই তরঙ্গাকে লম্বিক তরঙ্গ বা অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ বলে।

তীক্ষ্নতা বা পীচ : শব্দের যে বৈশিষ্ট্য দ্বারা কোন সুর সরু ও কোন সুর মোটা তা বোঝা যায় তাকে তীক্ষ্নতা বা পীচ বলে।

শব্দ : শব্দ এক প্রকার শক্তি যা একটি স্থিতিস্থাপক নিরবচ্ছিন্ন মাধ্যমের মধ্য দিয়ে আমাদের কানে পৌঁছে শ্রুতির অনুভূতি জন্মায় বা জন্মাতে চেষ্টা করে।

শব্দের উৎপত্তি : কোনো বস্তুর কম্পনের দরুন শব্দ উৎপন্ন হয়। সর্ব প্রকার শব্দ উৎপত্তির মূল উৎস বস্তুর কম্পন।

পূর্ণ কম্পন : তরঙ্গস্থিত কোনো একটি কম্পমান বস্তু একটি বিন্দু হতে যাত্রা শুরু করে আবার একই দিক হতে সেই বিন্দুতে ফিরে এলে তাকে পূর্ণ কম্পন বলে।

তরঙ্গ বেগ : কোনো একটি তরঙ্গ কোনো মাধ্যমে এক সেকেন্ডে যতটুকু দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে তরঙ্গ বেগ বলে।

তরঙ্গদৈর্ঘ্য : কোনো মাধ্যমে কোনো একটি কম্পমান বস্তু একটি পূর্ণ কম্পনে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে ওই তরঙ্গের তরঙ্গদৈর্ঘ্য বলে। একে λ দিয়ে সূচিত করা হয়।

কম্পাঙ্ক বা স্পন্দন সংখ্যা : কোনো একটি কম্পমান বস্তু এক সেকেন্ডে যত সংখ্যক পূর্ণ দোলন সম্পন্ন করে, তাকে উক্ত বস্তুর কম্পাঙ্ক বলে। একে n দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

দোলনকাল বা পর্যায়কাল : কোনো একটি কম্পমান বস্তুর একটি পূর্ণ দোলন সম্পন্ন করতে যে সময় লাগে তাকে ওই বস্তুর দোলনকাল বা পর্যায়কাল বলে। একে T দিয়ে সূচিত করা হয়।

বিস্তার : কোনো একটি কম্পমান বস্তু তার সাম্যাবস্থান থেকে ডানে বা বামে যে সর্বাধিক দূরত্ব অতিক্রম করে, তাকে ওই বস্তুর বিস্তার বলে।

দশা : দশা কোনো একটি কম্পমান বস্তুর কোনো মুহূর্তের দোলনের অবস্থা প্রকাশ করে।

আদি দশা : কোনো একটি কম্পমান বস্তু যে দশা নিয়ে কম্পন শুরু করে, তাকে আদি দশা বলে।

তরঙ্গ মুখ : কোনো একটি তরঙ্গের উপরিস্থিত সমদশাসম্পন্ন সকল বিন্দুর মধ্য দিয়ে অংকিত তলকে তরঙ্গ মুখ বলে।

তরঙ্গ শীর্ষ : আড় তরঙ্গের ক্ষেত্রে এর ধনদিকে এক তরঙ্গ দৈর্ঘ্যে সর্বাধিক সরণের বিন্দুকে তরঙ্গ শীর্ষ বলে।

তরঙ্গ পাদ : আড় তরঙ্গের ক্ষেত্রে এর ঋণদিকে এক তরঙ্গ দৈর্ঘ্যে সর্বাধিক সরণের বিন্দুকে তরঙ্গ পাদ বলে।

তরঙ্গ রেখা : কোনো এক মুহূর্তে মাধ্যমের কণাগুলো তরঙ্গের উপর যে রেখায় আপনা-আপনি অবস্থান করে সে রেখাকে তরঙ্গ রেখা বলে।

অগ্রগামী তরঙ্গ : কোনো তরঙ্গ যদি কোনো বিস্তৃত মাধ্যমের এক স্তর হতে অন্য স্তরে সঞ্চালিত হয়ে সামনের দিকে অগ্রসর হতে থাকে, তবে তাকে অগ্রগামী তরঙ্গ বলে।

তরঙ্গের উপরিপাতন : দুটি শব্দ তরঙ্গ একই সঙ্গে কোনো মাধ্যমের একটি কণাকে অতিক্রম করলে ওই কণা তরঙ্গ দুটির সম্মিলিত প্রভাবে আলোড়িত হবে। কোনো মুহূর্তে কণাটির লব্ধি সরণ প্রত্যেকটি তরঙ্গ পৃথকভাবে ওই বিন্দুতে যে সরণ সৃষ্টি করে তাদের ভেক্টর যোগফলের সমান। এর নাম তরঙ্গের উপরিপাতন।

স্থির তরঙ্গ : কোনো মাধ্যমের একটি সীমিত অংশে পরস্পর বিপরীতমুখি সমান বিস্তার ও তরঙ্গদৈর্ঘ্যের দুটি অগ্রগামী তরঙ্গ একে অপরের উপর আপতিত হলে যে নতুন তরঙ্গ সৃষ্টি হয় তাকে স্থির তরঙ্গ বলে।

সুস্পন্দ বিন্দু : স্থির তরঙ্গের ক্ষেত্রে কোনো কোনো বিন্দুতে বস্তুকণার বিস্তার শূন্য এবং কোনো কোনো বিন্দুতে বিস্তার সর্বাধিক। যে বিন্দুগুলোতে বিস্তার সর্বাধিক তাদেরকে সুস্পন্দ বিন্দু বলে।

নিস্পন্দ বিন্দু : যে সকল বিন্দুতে বিস্তার শূন্য তাদেরকে নিস্পন্দ বিন্দু বলে।

শব্দোচ্চতা : যে বৈশিষ্ট্য দ্বারা একটি শব্দ অন্য একটি শব্দ হতে যত বেশি জোরালো তা বুঝা যায় তাকে শব্দোচ্চতা বলে।

তীব্রতা : শব্দ সঞ্চালনের অভিমুখের সাথে লম্বভাবে স্থাপিত একক ক্ষেত্রফলের মধ্য দিয়ে যে পরিমাণ শক্তি প্রতি সেকেন্ডে প্রবাহিত হয় তাকে তীব্রতা বলে।

প্রমাণ তীব্রতা : 1000 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট শব্দের শ্রাব্যতার সীমা 10^{-12} Wm^{-2} তীব্রতার সমান ধরা হয় এবং একেই প্রমাণ বা আদর্শ তীব্রতা বলে।

তীব্রতা লেভেল : যে-কোনো শব্দের তীব্রতা এবং আদর্শ বা প্রমাণ তীব্রতার শব্দের শব্দোচ্চতার পার্থক্যকে তীব্রতা লেভেল বলে।

বেল : শব্দের তীব্রতা যখন 10 গুণ বৃদ্ধি পায় তখন শব্দোচ্চতা যে পরিমাণ বাড়ে তাকে 1 বেল বলে।

ডেসিবেল : শব্দের তীব্রতা যখন $10^{0.1}$ গুণ বৃদ্ধি পায় তখন শব্দোচ্চতা যতটুকু বাড়ে তাকে 1 ডেসিবেল বলে।

বীট বা স্বরকম্প : সমান বা প্রায় সমান তীব্রতা এবং প্রায় সমান কম্পাঙ্কবিশিষ্ট একইদিকে অগ্রগামী দুটি শব্দতরঙ্গের উপরিপাতনের ফলে শব্দের লব্ধি প্রাবল্যের হ্রাস-বৃদ্ধির ঘটনাকে বীট বা স্বরকম্প বলে।

জাতি বা গুণ (Quality) : যে বৈশিষ্ট্য দ্বারা দুটি ভিন্ন উৎস থেকে নির্গত শব্দের তীব্রতা ও তীক্ষ্নতা এক হলেও তাদের একটিকে অপরটি থেকে পৃথক করা যায়, তাকে তার জাতি বা গুণ বলে।

দশা পার্থক্য : অগ্রগামী তরঙ্গের যে কোনো দুটি অবস্থানে অবস্থিত দুটি কণার দশা পার্থক্য বলতে একই সময়ে ওই দুটি অবস্থানের দশা কোণের পার্থক্যকে বোঝায়।

মুক্ত কম্পন বা স্বাভাবিক কম্পন : স্পন্দনক্ষম যে কোনো বস্তুকে আন্দোলিত করলে বস্তুটি একটি নির্দিষ্ট কম্পাঙ্ক ও পর্যায়কালে স্পন্দিত হয়। এই স্পন্দনকে মুক্ত কম্পন বা স্বাভাবিক কম্পন বলে।

পরবশ কম্পন : স্পন্দনক্ষম বস্তুর ওপর আরোপিত পর্যাবৃত্ত স্পন্দনের জন্য বস্তুটি তার স্বাভাবিক কম্পাঙ্কে কম্পিত হওয়ার পরিবর্তে যখন আরোপিত কম্পনের কম্পাঙ্কে স্পন্দিত হতে থাকে তখন এ কম্পনকে আরোপিত বা পরবশ কম্পন বলে।

অনুনাদ : কোনো বস্তুর ওপর প্রযুক্ত বলের কম্পাঙ্ক বস্তুটির স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের সমান হলে বস্তুটি সর্বোচ্চ বিস্তারে কম্পিত হয়। এ ধরনের কম্পনকে অনুনাদ বলে।

সুশ্রাব্য বা সংগীত গুণসম্পন্ন শব্দ : যে সকল শব্দ শ্রুতিমধুর তাদের সুরযুক্ত শব্দ বা সংগীত গুণসম্পন্ন বা সুশ্রাব্য শব্দ বলে।

সোরগোল বা সুরবর্জিত শব্দ বা অপসুর : যে সকল শব্দ শ্রুতিকটু তাদের সোরগোল বা সুরবর্জিত শব্দ বা অপসুর বলে।

স্বরগ্রাম : সমসঙ্গতিপূর্ণ কতগুলো সুরের সমষ্টিকে স্বরগ্রাম বলে।

মূল সুর : কোনো স্বরের মধ্যে যে সুরের কম্পাঙ্ক সবচেয়ে কম, তাকে মূল সুর বলে।

উপসুর : অন্যান্য সুর, যাদের কম্পাঙ্ক মূল সুরের কম্পাঙ্কের চেয়ে বেশি, তাদের উপসুর বলে।

অষ্টক : উপসুরের কম্পাঙ্ক মূল সুরের কম্পাঙ্কের দ্বিগুণ হলে, তাকে অষ্টক বা দ্বিতীয় সমমেল বলে।

সমমেল : উপসুরগুলোর কম্পাঙ্ক যদি মূল সুরের কম্পাঙ্কের সরল গুণিতক হয়, তাহলে সেই সকল উপসুরকে সমমেল বা হারমোনিক বলে।

সুর বিরাম বা সুরানুপাত	:	দুটি সুরের কম্পাঙ্কের অনুপাতকে সুর বিরাম বা সুরানুপাত বলে।
ত্রয়ী	:	তিনটি শব্দের কম্পাঙ্কের অনুপাত $4:5:6$ হলে তাদের সমন্বয়ে যে সুরযুক্ত শব্দের উৎপত্তি হয় তাকে ত্রয়ী বলে।
স্বর-সঙ্গতি	:	চারটি শব্দের কম্পাঙ্কের অনুপাত $4:5:6:8$ হলে তাদের সমন্বয়ে এক প্রকার শ্রুতিমধুর শব্দের উৎপত্তি হয়। এরূপ সমন্বয়কে স্বর-সঙ্গতি বা সমসঙ্গতি বলে।
সমতান বা হারমনি	:	একই সময় কতগুলো শব্দ উৎপন্ন হলে যদি তাদের মধ্যে একটি ঐক্যতানের সৃষ্টি হয় তবে তাকে সমতান বা হারমনি বলে।
মেলডি বা স্বর মাধুর্য	:	কতগুলো শব্দ একের পর এক উৎপন্ন হয়ে যদি একটি সুরযুক্ত শব্দের সৃষ্টি করে তবে তাকে স্বর মাধুর্য বা মেলডি বলে।
সলো	:	একটিমাত্র বাদ্যযন্ত্র হতে যে স্বর সৃষ্টি হয় তাকে সলো বা একক সঙ্গীত বলে।
অর্কেস্ট্রা	:	যখন একাধিক বাদ্যযন্ত্র একত্রে বাজিয়ে একটি সমতান বা মেলডি বা সমতান মেলডি উভয়ই উৎপন্ন করে তখন তাকে অর্কেস্ট্রা বলে।

বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তরের জন্য প্রয়োজনীয় বিষয়াবলির সার-সংক্ষেপ

১। একটি কণার পূর্ণ কম্পনে দশা পার্থক্য 2π। শব্দের তীব্রতার একক Wm^{-2}।

২। $1\ GHz = 10^9\ Hz$, $1\ MHz = 10^6\ Hz$, কানের শ্রুতি শুরু হয় $0\ dB$ থেকে। পুরুষের কণ্ঠস্বর অপেক্ষা মহিলাদের কণ্ঠস্বরের তীক্ষ্ণতা বেশি। $200\ Hz$ মূল সুরের কম্পাঙ্ক হলে $400\ Hz$ মূল সুরের অষ্টক।

৩। অষ্টক হচ্ছে সেই উপসুর যার কম্পাঙ্ক মূল সুরের কম্পাঙ্কের দ্বিগুণ।

৪। সুরযুক্ত শব্দের বৈশিষ্ট্য হলো শব্দোচ্চতা। কোনো শব্দের তীব্রতা সূচন তীব্রতার 26% বৃদ্ধি করলে তীব্রতা লেভেল $1\ dB$ বৃদ্ধি পাবে।

৫। ভূমিকম্পের ফলে উৎপন্ন তরঙ্গের কম্পাঙ্ক $f < 20\ Hz$।

৬। কোনো গ্যাসে $0.50\ m$ এবং $0.505\ m$ তরঙ্গদৈর্ঘ্যবিশিষ্ট দুটি তরঙ্গ প্রতি সেকেন্ডে 6টি বীট উৎপন্ন করে; শব্দের বেগ হবে $303\ ms^{-1}$। স্থির তরঙ্গ সৃষ্টিকারী তরঙ্গগুলির বিস্তার A হলে সুস্পন্দ বিন্দুগুলির বিস্তার $\pm 2A$।

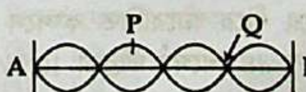
৭। 256 Hz কম্পাঙ্ক যদি মূল সুর হয় তাহলে 512 Hz কম্পাঙ্ক দ্বিতীয় সমমেল হবে।

৮। শব্দ যখন বায়ু হতে পানিতে প্রবেশ করে তখন বদলে যায়— বেগ, তরঙ্গদৈর্ঘ্য।

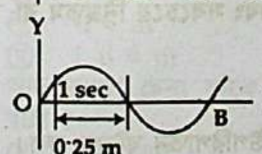
৯। ফন হলো শব্দোচ্চতার একক। আড় তরঙ্গ চেনা যাবে সমবর্তন বৈশিষ্ট্যের দ্বারা।

১০। দুইটি তরঙ্গ একই দশায় মিলিত হলে তীব্রতা বেড়ে যায়।

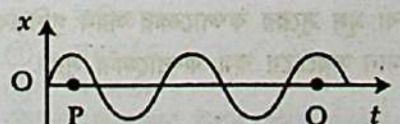
১১। শ্রোতার শ্রাব্যতার সীমর $40\ dB$ এর উর্ধ্বে 1000 Hz কম্পাঙ্কের একটি বিশুদ্ধ সুর যে প্রাবল্য সৃষ্টি করে তাকে সোন বলে।



$n = 120\ Hz$, P ও Q এর মধ্যে দূরত্ব $= \frac{3\lambda}{4}$।

১২। 

O এবং B বিন্দুতে অবস্থিত কণাদ্বয়ের দশা পার্থক্য 2π।



$OQ = \frac{9\lambda}{4}$।

১৩। তরঙ্গের কণাসমূহের গতি হলো পর্যায়বৃত্ত গতি এবং সরল ছন্দিত গতি।

১৪। অগ্রগামী তরঙ্গের ক্ষেত্রে (ক) তরঙ্গ প্রবাহের অভিমুখ মাধ্যমের কণাগুলোর কোনো স্থানান্তর ঘটে না। (খ) মাধ্যমের স্থানান্তর ছাড়াই শক্তি স্থানান্তরিত হয়।

১৫। তরঙ্গের মাধ্যমে শক্তি স্থানান্তরিত হয়। স্থিতিস্থাপক তরঙ্গের উদাহরণ হলো শব্দতরঙ্গ।

১৬। স্থিতিস্থাপক মাধ্যমে সৃষ্ট তরঙ্গের নাম যান্ত্রিক তরঙ্গ। তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গ মাধ্যম ছাড়া চলাচল করতে পারে। আলো এক প্রকার তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গ। $\frac{4d^2x}{dt^2} + 100x = 0$ সমীকরণে কণার কৌণিক কম্পাঙ্ক 5 rad s^{-1}।

১৭। পানিতে সৃষ্ট তরঙ্গ, টান করা তারে সৃষ্ট তরঙ্গ আড় তরঙ্গ বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গ। অন্যদিকে শব্দ একটি অনুদৈর্ঘ্য বা লম্বিক তরঙ্গ। স্প্রিংকে খাড়াভাবে ঝুলিয়ে নিচে টান দিয়ে ছেড়ে দিলে লম্বিক তরঙ্গের সৃষ্টি হয়।

১৮। $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}x$ অগ্রগামী তরঙ্গের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য। এই তরঙ্গের জন্য মাধ্যমের কণাগুলোর দশা এক কণা হতে অন্য কণায় সঞ্চালিত হয়। তরঙ্গের দুটি বিন্দুর মধ্যে দশা পার্থক্য 2π হলে পথ পার্থক্য λ।

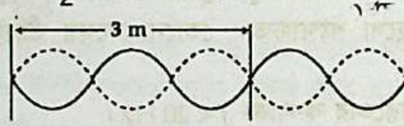
১৯। সমদশাসম্পন্ন পর পর দুইটি কণার মধ্যবর্তী দূরত্বকে তরঙ্গদৈর্ঘ্য বলে।

২০। স্থির তরঙ্গের নিস্পন্দ বিন্দুতে কণার বেগ শূন্য হয় এবং সুস্পন্দ বিন্দুতে বেগ সর্বাধিক হয়।

২১। স্থির তরঙ্গে পর পর দুইটি নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব বা পরপর দুইটি সুস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $\frac{\lambda}{2}$ হয়। আর একটি সুস্পন্দ ও একটি নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $\frac{\lambda}{4}$ হয়। সরল ছন্দিত স্পন্দনে কম্পিত বস্তুর দোলনকাল বল ধ্রুবকের বর্গমূলের ব্যস্তানুপাতিক।

২২। তরঙ্গের তীব্রতা বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক অর্থাৎ $I = 2\pi^2 n^2 a^2 \rho v$। এই তীব্রতা বিস্তারের বর্গের কম্পাঙ্কের বর্গের, ঘনত্বের এবং বেগের সমানুপাতিক।

২৩। গঠনমূলক ব্যতিচারের ক্ষেত্রে পথ পার্থক্য $\frac{\lambda}{2}$ এর জোড় গুণিতক হয় এবং ধ্বংসাত্মক ব্যতিচারের ক্ষেত্রে পথ পার্থক্য $\frac{\lambda}{2}$ এর বেজোড় গুণিতক হয়।



তরঙ্গটির তরঙ্গ দৈর্ঘ্য 2 m।

২৪। সুস্পন্দ বিন্দু সৃষ্টির জন্য পথ পার্থক্য $\frac{\lambda}{4}$ এর বেজোড় গুণিতক এবং নিস্পন্দ বিন্দুর জন্য $\frac{\lambda}{4}$ এর জোড় গুণিতক হয়।

২৫। শব্দের তীব্রতা ঘনত্বের সমানুপাতিক এবং কম্পাঙ্কের বর্গের সমানুপাতিক হয়। স্বরের মধ্যে বিদ্যমান সবচেয়ে নিম্ন কম্পাঙ্ক হবে মূল সুর।

২৬। মূল তরঙ্গ এবং প্রতিফলিত তরঙ্গের মধ্যে দশা পার্থক্য 2π হয়।

২৭। সৈন্যদল ব্রিজের উপর দিয়ে মার্চ করে যাওয়ার সময় বুটের কম্পাঙ্ক ব্রীজের কম্পাঙ্কের সমান হলে—
(ক) অনুনাদ সৃষ্টি হয় (খ) ব্রীজটি অধিক বিস্তারে কাঁপতে থাকে (গ) ব্রীজটি ভেঙ্গে যাওয়ার সম্ভাবনা থাকে।

২৮। পরবশ কম্পনের ক্ষেত্রে— (ক) প্রথম বস্তুর কম্পাঙ্ককে আরোপিত কম্পাঙ্ক বলে (খ) দ্বিতীয় বস্তুটি প্রথমে তার নিজস্ব স্বাভাবিক কম্পাঙ্কে কম্পিত হয় (গ) দ্বিতীয় বস্তুটি পরবর্তীতে ধীরে ধীরে আরোপিত কম্পনে কম্পিত হয়। শব্দের তীব্রতা তিনগুণ বৃদ্ধি করলে নতুন তীব্রতা লেভেল হবে 44·77 dB [শব্দের তীব্রতা 10^{-8} Wm^{-2}]

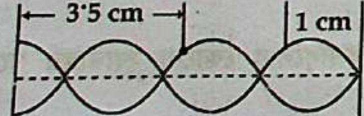
২৯। মানব কর্ণে সহনীয় সবচেয়ে জোরালো তীব্রতার শব্দতরঙ্গের বিস্তার 10^{-12} m এবং সবচেয়ে নিম্নতম বা ক্ষীণতম যে তরঙ্গ অনুভব করে তার বিস্তার 10^{-10} m।

৩০। মানুষের শ্রবণ সীমার দুই প্রান্তের তীব্রতার অনুপাত 10^{12}।

৩১। অজানা সুর কম্পাঙ্ক নির্ণয়ের ক্ষেত্রে $N = n_1 \sim n_2$ সূত্র ব্যবহার করা হয়। বীট উপরিপাতন ঘটনার ফল।

৩২। হারমোনিক বা সমমেল হচ্ছে সেই উপসুরের কম্পাঙ্ক যা মৌলিক বা মূল সুরের কম্পাঙ্কের সরল গুণিতক। আর মূল সুর হচ্ছে কোনো স্বরের মধ্যে বিদ্যমান সুরগুলোর মধ্যে বিদ্যমান সবচেয়ে কম কম্পাঙ্কের সুর।

৩৩। উৎসের কম্পাঙ্কের সাথে তীব্রতার সম্পর্ক হলো $I \propto n^2$।

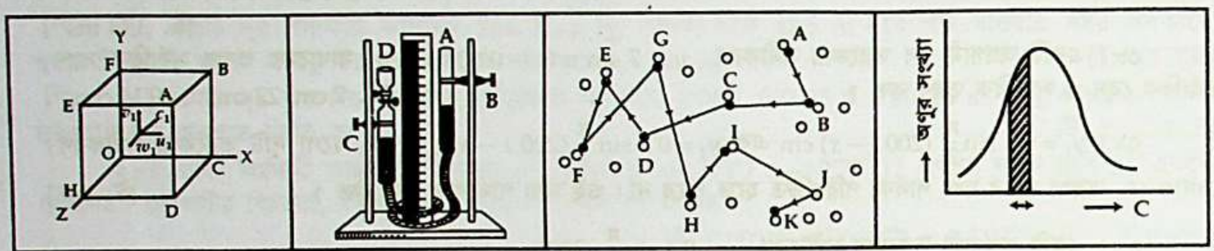
৩৪। 

পর পর তিনটি সুস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব 4 cm।

১০

প্রধান শব্দ (Key Words) : তাপ, গ্যাসের সূত্রাবলি, আদর্শ গ্যাস, পরম শূন্য তাপমাত্রা, সর্বজনীন গ্যাস ধ্রুবক, গড় বর্গ বেগ, গড় বর্গ বেগের বর্গমূল বা মূল গড় বর্গবেগ, শক্তির সমবিভাজন নীতি, সম্পৃক্ত বাষ্পচাপ, অসম্পৃক্ত বাষ্পচাপ, আপেক্ষিক আর্দ্রতা।

আদর্শ গ্যাস ও গ্যাসের গতিতত্ত্ব
IDEAL GAS AND KINETICS OF GASES



ভূমিকা
Introduction

আমরা জানি যে কঠিন, তরল বা গ্যাসীয় সব পদার্থই অসংখ্য অতি ক্ষুদ্র কণা দিয়ে গঠিত। এই কণাকে পদার্থের অণু বলা হয়। একই পদার্থের অণুগুলির ধর্ম অভিন্ন, কিন্তু বিভিন্ন পদার্থের অণুগুলির ধর্ম বিভিন্ন হয়। কঠিন ও তরল পদার্থের ক্ষেত্রে চাপের প্রভাব খুবই নগণ্য। কিন্তু গ্যাসের ক্ষেত্রে চাপের প্রভাব খুবই প্রবল। তাই গ্যাসের প্রসারণ আলোচনায় চাপের উল্লেখ করা হয়। তরল অবস্থায় পদার্থের অণুগুলির মধ্যে ব্যবধান কঠিন অবস্থা অপেক্ষা বেশি থাকে। যেকোনো তরলকে বিভিন্ন অংশে বিভক্ত করতে খুব কম বলের প্রয়োজন হয়। অতএব তরলের ক্ষেত্রে আন্তঃআণবিক আকর্ষণ বল থাকে না বললেই চলে।

এই অধ্যায় পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা—

- গ্যাসের গতিতত্ত্ব ব্যবহার করে আদর্শ গ্যাসের সূত্র ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- বয়েল ও চার্লসের সূত্র জানতে পারবে।
  ব্যবহারিক : বয়েলের সূত্র যাচাই।
- গ্যাসের অণুর মৌলিক স্বীকার্য বর্ণনা করতে পারবে।
- গ্যাসের গতিতত্ত্বের আলোকে আদর্শ গ্যাসের সূত্র ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- শক্তির সমবিভাজন নীতি জানতে পারবে।
- জলীয় বাষ্প ও বায়ুর চাপের মধ্যে সম্পর্ক বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- শিশিরাংক, আপেক্ষিক আর্দ্রতা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
  ব্যবহারিক : নিউটনের শীতলীকরণ সূত্রের সাহায্যে তরলের আপেক্ষিক তাপ নির্ণয়।

১০.১ আদর্শ গ্যাস
Ideal gas

এই অধ্যায়ে আমরা আদর্শ গ্যাসের গতিতত্ত্ব এবং মৌলিক স্বীকার্য সম্বন্ধে বিস্তারিত জানব। তাহলে প্রথমে জানা দরকার, আদর্শ গ্যাস কী ?

যে সকল গ্যাস গ্যাসের গতিতত্ত্বের মৌলিক স্বীকার্যসমূহ মেনে চলে এবং সকল তাপমাত্রায় ও চাপে বয়েল ও চার্লসের সূত্র যুগ্মভাবে মেনে চলে তাদেরকে আদর্শ গ্যাস (Ideal gas) বলে। এই স্বীকার্যগুলো যে সব সময় সঠিকভাবে মেনে চলে এরকম কোনো গ্যাসের অস্তিত্ব বাস্তবে নেই। তাই বাস্তব গ্যাসের (Real gas) ধর্ম আদর্শ গ্যাসের ধর্ম থেকে কিছুটা ভিন্নতর লক্ষ করা যায়। কেবল নিম্নচাপ ও উচ্চ তাপমাত্রায় গ্যাস এই সমীকরণ মেনে চলে। বাস্তবে আমাদের পরিচিত কোনো গ্যাসই আদর্শ গ্যাসের সমীকরণ সঠিকভাবে মেনে চলে না। আদর্শ গ্যাস একটি কাল্পনিক ধারণা মাত্র।

১০.১.১ আদর্শ গ্যাসের বৈশিষ্ট্যসূচক মানদণ্ড

(১) আদর্শ গ্যাস সকল তাপমাত্রায় ও চাপে $PV = nRT$ সমীকরণ মেনে চলে।

(২) স্থির তাপমাত্রায় আদর্শ গ্যাসের অভ্যন্তরীণ শক্তি এর আয়তনের ওপর নির্ভরশীল নয়।

অর্থাৎ $\left(\frac{du}{dV}\right)_T = 0$; এখানে, u = গ্যাসের অভ্যন্তরীণ শক্তি, V = গ্যাসের আয়তন, T = তাপমাত্রা।

(৩) আদর্শ গ্যাসের অণুসমূহের মধ্যে কোনো আকর্ষণ নেই বা কোনো বিকর্ষণও নেই।

(৪) আদর্শ গ্যাসের অণুসমূহের মোট আয়তন গ্যাস দ্বারা দখলকৃত আয়তনের তুলনায় নগণ্য।

আমরা জানি তাপ প্রয়োগে সাধারণত পদার্থের প্রসারণ ঘটে এবং তাপ অপসারণে এর সংকোচন ঘটে। কোনো পদার্থের অবস্থা তিনটি রাশি, যথা—চাপ, আয়তন ও তাপমাত্রা দ্বারা নির্দিষ্ট করা যায়।

গ্যাসের চাপ, আয়তন এবং তাপমাত্রা এই তিনটিকে গ্যাসের **চল রাশি** (Variable) বলে। এদের যে কোনো দুটির মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করতে হলে অপর একটিকে অপরিবর্তিত রাখতে হবে। এ অনুযায়ী হিসাব করলে আমরা তিনটি সম্পর্ক পাই। তিনটি সূত্র দ্বারা এই তিনটি সম্পর্ক নিয়ন্ত্রিত হয়। এই তিনটি সূত্রকে **গ্যাসীয় সূত্র** (Gas laws) বলা হয়। গ্যাসীয় সূত্র আলোচনার পূর্বে গ্যাস কী জানা দরকার। গ্যাসের নিম্নলিখিত যেকোনো একটি সংজ্ঞা দেওয়া যেতে পারে—

সংজ্ঞা : (i) সাধারণ তাপমাত্রা ও চাপে যে সব পদার্থ বায়বীয় অবস্থায় থাকে, তাদেরকে গ্যাস বলে। যেমন হাইড্রোজেন, অক্সিজেন, নাইট্রোজেন ইত্যাদি গ্যাস।

(ii) বর্তমান প্রচলিত মত অনুসারে সংকট তাপমাত্রার ওপরে কোনো পদার্থের বায়বীয় অবস্থার নাম গ্যাস।

১০·২ গ্যাসের সূত্রাবলি
Gas laws

গ্যাসের মোল সংখ্যা, চাপ, আয়তন ও তাপমাত্রা প্রভৃতির ওপর মাত্রিকভাবে পরীক্ষা-নিরীক্ষা করে বিজ্ঞানিগণ গ্যাসের মৌল ধর্মভিত্তিক বিভিন্ন সূত্র আবিষ্কার করেন। এই সূত্রসমূহ গ্যাস সূত্র নামে পরিচিত। সূত্রগুলো হলো—

(১) বয়েলের সূত্র

(২) চার্লসের সূত্র

(৩) চাপীয় সূত্র

(৪) অ্যাভোগাড্রোর সূত্র।

নিম্নে গ্যাসের তিনটি সূত্র বর্ণনা করা হলো—

১০·২·১ বয়েল-এর সূত্র
Boyle's law

1662 খ্রিস্টাব্দে রবার্ট বয়েল নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় কোনো গ্যাসের চাপ ও আয়তনের মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করে একটি সূত্র আবিষ্কার করেন। এর নাম **বয়েল-এর সূত্র**। সূত্রটি নিম্নে বিবৃত হলো :

'তাপমাত্রা স্থির থাকলে, কোনো নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের আয়তন তার চাপের ব্যস্তানুপাতিক।'

মনে করি স্থির তাপমাত্রায় কোনো নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের চাপ এবং আয়তন যথাক্রমে P এবং V।

অতএব আমরা পাই, $V \propto \frac{1}{P}$

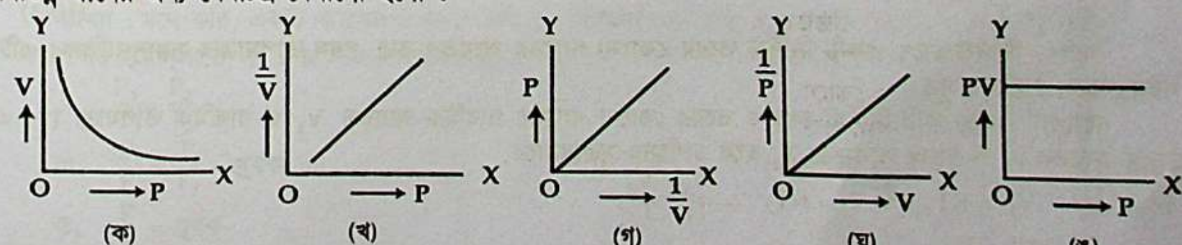
বা, $V = \text{ধ্রুবক} \times \frac{1}{P}$ বা, $PV = \text{ধ্রুবক} = K$

বা, $PV = K$ ... ... (10.1)

এই সমীকরণকে **সমোষ্ণ সমীকরণ** (Isothermal equation) বলে।

যদি স্থির তাপমাত্রায় কোনো নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের P_1, P_2, P_3, ... ও P_n চাপে আয়তন যথাক্রমে V_1, V_2, V_3, ... ও V_n হয়, তবে আমরা পাই, $P_1V_1 = P_2V_2 = P_3V_3 = ... = P_nV_n = \text{ধ্রুবক}$।

এ থেকে দেখা যায় তাপমাত্রা স্থির থাকলে চাপ ও আয়তন পরস্পর ব্যস্তানুপাতিক। নিম্নে চাপের ও আয়তনের বিভিন্ন মানের জন্য লেখচিত্র দেখানো হলো :



চিত্র ১০·১

স্থির তাপমাত্রায় নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের আয়তন (V) ও চাপ (P) এর লেখচিত্র একটি আয়তাকার পরাবৃত্ত (rectangular hyperbola) হয় [চিত্র ১০·১(ক)]। চিত্র ১০·১(খ), ১০·১(গ), ১০·১(ঘ) ও ১০·১(ঙ) দ্বারা যথাক্রমে $\frac{1}{V}$ বনাম P, P বনাম $\frac{1}{V}$, $\frac{1}{P}$ বনাম V ও PV বনাম P এর লেখচিত্র দেখানো হয়েছে।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : বাস্তব গ্যাস বয়েলের সূত্র মেনে চলে না কেন ?

আদর্শ গ্যাস বয়েলের সূত্র মেনে চলে; কিন্তু বাস্তব গ্যাস বয়েলের সূত্র মেনে চলে না। এর কারণ হলো, আদর্শ গ্যাসে বিন্দু ভর বিবেচনা করা হয় এবং ওই গ্যাস অণুগুলোর মধ্যকার আকর্ষণ বল বিবেচনা করা হয় না। কিন্তু বাস্তব গ্যাসের অণুগুলির আকার সীমিত এবং এদের মধ্যে আন্তঃআণবিক বল থাকায় বাস্তব গ্যাস বয়েলের সূত্র মেনে চলে না।

জেনে রাখ : বয়েলের সূত্র উচ্চ তাপমাত্রায় ও কম চাপে বিশেষভাবে প্রযোজ্য, কিন্তু নিম্ন তাপমাত্রায় ও উচ্চ চাপে এই সূত্রের বিচ্যুতি দেখা যায়।

নিজে কর : বেলুনে ফুঁ দিলে আয়তন বাড়ে এবং চাপও বাড়ে। এখানে বয়েলের সূত্র কি লঙ্ঘিত হয় ?

একটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় বেলুনে ফুঁ দিয়ে বাতাস ভরলে বেলুনের আয়তন বাড়ে এবং সাথে সাথে ভেতরের বায়ুর চাপও বাড়ে। সুতরাং আপাতভাবে মনে হয় যে, এই ঘটনায় বয়েলের সূত্র লঙ্ঘিত হচ্ছে। কিন্তু মনে রাখা দরকার যে বয়েলের সূত্র নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য। ফুঁ দিলে বেলুনের মধ্যে আরো বায়ু প্রবেশ করে অর্থাৎ বেলুনের মধ্যে বায়ুর ভর নির্দিষ্ট না থেকে বেড়ে যায়। ফলে বায়ুর আয়তন ও চাপ দুইই বেড়ে যায়। তাই বেলুনে ফুঁ দিয়ে বেলুন ফোলানোর ঘটনায় বয়েলের সূত্র প্রয়োগ করা হয় না।

১০.২.২ চার্লস-এর সূত্র
Charles's law

1787 খ্রিস্টাব্দে ফরাসি বিজ্ঞানী **চার্লস** এই সূত্র আবিষ্কার করেন। তাঁর নামানুসারে **এই সূত্রকে চার্লস-এর সূত্র** বলে। এটি নির্দিষ্ট চাপে তাপমাত্রা এবং আয়তনের সম্পর্ক নির্দেশ করে। এই সূত্র অনুসারে **স্থির চাপে কোনো নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের আয়তন 0°C হতে প্রতি ডিগ্রি সেলসিয়াস তাপমাত্রা পরিবর্তনের জন্য 0°C-এর আয়তনের নির্দিষ্ট ভগ্নাংশ $\frac{1}{273}$ বা 0.00366 অংশ পরিবর্তিত হয়।**

মনে করি 0°C তাপমাত্রায় কোনো নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের আয়তন $= V_0$

∴ চার্লস-এর সূত্রানুযায়ী স্থির চাপে,

1°C তাপমাত্রায় ওই গ্যাসের আয়তন $= V_0 + \frac{V_0}{273}$

θ°C তাপমাত্রায় ওই গ্যাসের আয়তন $= V_0 + \frac{V_0 \times \theta}{273}$

মনে করি স্থির চাপে ওই গ্যাসের θ°C তাপমাত্রায় আয়তন = V

∴ আমরা পাই, $V = V_0 + \frac{V_0\theta}{273} = V_0\left(1 + \frac{\theta}{273}\right)$ ... ... (10.2)

পরম স্কেলে চার্লস-এর সূত্র

সমীকরণ (10.2) অনুসারে, $V = V_0\left(\frac{273+\theta}{273}\right) = \frac{V_0 T}{273}$

এখানে T হচ্ছে পরম স্কেলে তাপমাত্রা এবং $T = \theta + 273$

ধরা যাক, $\frac{V_0}{273} = K =$ ধ্রুবক; অতএব, $V = KT$

বা, $V \propto T$ ... ... (10.3)

অর্থাৎ, **নির্দিষ্ট চাপে একটি নির্দিষ্ট ভরের কোনো গ্যাসের আয়তন তার পরম তাপমাত্রার সমানুপাতিক। এটিই পরম স্কেলে চার্লসের সূত্র।**

ব্যাখ্যা : মনে করি নির্দিষ্ট চাপ ও ভরের কোনো গ্যাসের প্রাথমিক আয়তন V_1 ও প্রাথমিক তাপমাত্রা T_1। এর চূড়ান্ত আয়তন V_2 ও চূড়ান্ত তাপমাত্রা T_2 হলে চার্লসের সূত্রানুসারে,

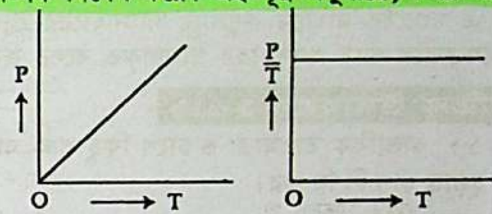
$V_1 = KT_1$ এবং $V_2 = KT_2$ ∴ $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$

বা, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$ ... ... (10.4)

যাচাই কর : একটি বেলুনে গ্যাস ভরে তা রোদে কিছুক্ষণ রেখে দাও। তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে আয়তনের পরিবর্তন ব্যাখ্যা কর।

১০·২·৩ চাপীয় সূত্র
Law of pressure

1842 খ্রিস্টাব্দে বিখ্যাত বিজ্ঞানী রেনো (Regnault) এই সূত্র আবিষ্কার করেন। এজন্য এই সূত্রকে রেনোর চাপীয় সূত্র বলা হয়। এটি স্থির আয়তনে চাপ এবং তাপমাত্রার মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করে। এই সূত্র অনুসারে, স্থির আয়তনে কোনো নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের চাপ 0°C হতে প্রতি ডিগ্রি সেলসিয়াস তাপমাত্রা পরিবর্তনের জন্য তার 0°C-এর চাপের একটি নির্দিষ্ট ভগ্নাংশ $\frac{1}{273}$ বা, 0·00366 অংশ পরিবর্তিত হয়। স্থির আয়তনে চাপ ও তাপমাত্রার পরিবর্তন ১০·২ চিত্রে দেখানো হলো।



চিত্র ১০·২

যাচাই কর : স্থির চাপে নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের ক্ষেত্রে কেন V—T লেখচিত্র মূল বিন্দুগামী সরলরেখা হয় এবং $\frac{P}{T}$— T লেখচিত্র X-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা হয় ?

মনে করি 0°C তাপমাত্রায় নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের চাপ $= P_0$

∴ রেনোর চাপীয় সূত্রানুযায়ী স্থির আয়তনে,

1°C তাপমাত্রায় ওই গ্যাসের চাপ $= P_0 + \frac{P_0}{273}$

0°C তাপমাত্রায় ওই গ্যাসের চাপ $= P_0 + \frac{P_0 \times \theta}{273}$

মনে করি স্থির আয়তনে θ°C তাপমাত্রায় ওই গ্যাসের চাপ = P

∴ আমরা পাই, $P = P_0 + \frac{P_0 \times \theta}{273}$

$$= P_0\left(1 + \frac{\theta}{273}\right) = P_0\left(\frac{273 + \theta}{273}\right) \quad \ldots \quad \ldots \quad (10.5)$$

পরম স্কেলে চাপের সূত্র :

সমীকরণ (10.5) অনুসারে,

$$P = P_0\left(\frac{273 + \theta}{273}\right) = \frac{P_0 T}{273}$$

এখানে T হচ্ছে পরম স্কেলে তাপমাত্রা এবং $T = \theta + 273$

ধরা যাক, $\frac{P_0}{273} = K =$ ধ্রুবক; অতএব, $P = KT$

বা, $P \propto T$ ... ... (10.6)

অর্থাৎ, নির্দিষ্ট আয়তনে একটি নির্দিষ্ট ভরের কোনো গ্যাসের চাপ তার পরম তাপমাত্রার সমানুপাতিক। এটিই পরম স্কেলে চাপের সূত্র।

ব্যাখ্যা : মনে করি, একটি গ্যাসের প্রাথমিক চাপ P_1, প্রাথমিক তাপমাত্রা T_1, চূড়ান্ত চাপ P_2 ও চূড়ান্ত তাপমাত্রা T_2।

চাপীয় সূত্রানুসারে, $P_1 = KT_1$ এবং $P_2 = KT_2$

∴ $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$

বা, $\frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2} =$ ধ্রুবক ... ... (10.7)

বা, $\frac{P}{T} =$ ধ্রুবক

বা, $P \propto T$, যখন V ধ্রুবক।

∴ নির্দিষ্ট আয়তনে একটি নির্দিষ্ট ভরের কোনো গ্যাসের চাপ তার পরম তাপমাত্রার সমানুপাতিক। এটিই পরম স্কেলে চাপের সূত্র।

সমীকরণ (10.7) থেকে বলা যায় তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে চাপ বৃদ্ধি পাবে এবং তাপমাত্রা হ্রাস পেলে চাপ হ্রাস পাবে।

নিজে কর : একটি বেলুনে কিছু গ্যাস ভর। এরপর মুখটি ভালো করে বন্ধ কর। এরপর বেলুনের ওপর হাতের চাপ দাও। ওপর থেকে বাইরের দিকে চাপ অনুভূত হবে।

যেকোনো গ্যাস অসংখ্য ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র অণু দ্বারা গঠিত। অণুসমূহ সব সময় অতি দ্রুত গতিতে ইতস্তত ভ্রমণ করে। ফলে পরস্পরের সাথে এবং গ্যাসাধারের ভেতরের দেওয়ালের সাথে তাদের অবিরাম স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ চলতে থাকে। এ সংঘর্ষের মাধ্যমে অণুসমূহ গ্যাসাধারের দেওয়ালের ওপর বল প্রয়োগ করে। গ্যাসাধারের দেওয়ালে প্রতি একক ক্ষেত্রফলে গ্যাস অণুসমূহের প্রয়োগকৃত বলের জন্য গ্যাসে চাপের সৃষ্টি হয়।

গাণিতিক উদাহরণ ১০.১

১। স্বাভাবিক তাপমাত্রা ও চাপে কিছু শুষ্ক বায়ু সংনমিত প্রক্রিয়ায় সংনমিত করে এর আয়তন অর্ধেক করা হলো। চূড়ান্ত চাপ নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০৯; কু. বো. ২০০১]

এখানে,
প্রাথমিক চাপ, $P_1 = 1.013 \times 10^5\ Nm^{-2}$
প্রাথমিক আয়তন $= V_1$
চূড়ান্ত আয়তন, $V_2 = \frac{V_1}{2}$
চূড়ান্ত চাপ, $P_2 = ?$

আমরা জানি,
$$P_1V_1 = P_2V_2$$
বা, $P_2V_2 = P_1V_1$
বা, $P_2 = \frac{V_1}{V_2}P_1 = \frac{2V_2}{V_2}P_1$
$$= 2P_1 = 2 \times 1.013 \times 10^5\ Nm^{-2}$$
$$= 2.026 \times 10^5\ Nm^{-2}$$

২। কোনো হ্রদের তলদেশ থেকে পানির উপরিতলে আসায় একটি বায়ু বুদবুদের ব্যাস দ্বিগুণ হয়। হ্রদের পৃষ্ঠে বায়ুমণ্ডলের চাপ স্বাভাবিক বায়ুমণ্ডলীয় চাপের সমান এবং হ্রদের তাপমাত্রা ধ্রুবক হলে হ্রদের গভীরতা কত ?
[ঢা. বো. ২০১৮, ২০০৫; রা. বো. ২০১৮, ২০১১, ২০০৭; য. বো. ২০১৮, ২০০৯; সি. বো. ২০১৮; দি. বো. ২০১৮, ২০০৯; চ. বো. ২০০৮; Admission Test : KUET 2004-05; RUET 2009-10; CUET 2013-14]

এখানে,
হ্রদের তলদেশে বুদবুদের আয়তন, V_1
পানির উপরিতলে বুদবুদের আয়তন, V_2
পানির ঘনত্ব, $\rho = 1 \times 10^3\ kgm^{-3}$
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8\ ms^{-2}$
হ্রদের গভীরতা, $h = ?$
বায়ুমণ্ডলের স্বাভাবিক চাপ, $P_2 = 1.013 \times 10^5\ Nm^{-2}$

আমরা জানি,
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{4\pi}{6}d^3 = Kd^3$$
$\therefore\ V_1 = Kd_1^3$
এবং $V_2 = Kd_2^3 = K(2d_1)^3 \quad \because d_2 = 2d_1$
$$= 8Kd_1^3 = 8V$$
সুতরাং ব্যাস দ্বিগুণ হলে আয়তন ৪ গুণ হবে।

মনে করি, হ্রদের তলদেশে চাপ $= P_1$ এবং হ্রদের পৃষ্ঠে চাপ $= P_2 \quad \therefore P_1 = P_2 + h\rho g$
আমরা জানি, $P_1V_1 = P_2V_2$
বা, $(P_2 + h\rho g)V = P_2V_2 = P_2 \times 8V$
বা, $h\rho g = 8P_2 - P_2 = 7P_2$
$$\therefore\ h = \frac{7P_2}{\rho g} = \frac{7 \times 1.013 \times 10^5}{1 \times 10^3 \times 9.8} = 72.36\ m$$

৩। 0.64m পারদ স্তম্ভ চাপে এবং 39°C তাপমাত্রায় কোনো গ্যাসের আয়তন $5.7 \times 10^{-4}\ m^3$; প্রমাণ চাপ ও তাপমাত্রায় গ্যাসের আয়তন কত?

এখানে,
$P_1 = 0.64\ m$
$V_1 = 5.7 \times 10^{-4}\ m^3$
$T_1 = 39°C = (39 + 273)\ K = 312\ K$
প্রমাণ চাপ ও তাপমাত্রা,
$P_2 = 0.76\ m$
$T_2 = 273\ K$
$V_2 = ?$

আমরা পাই,
$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$$
বা, $\frac{0.64 \times 5.7 \times 10^{-4}}{312} = \frac{0.76 \times V_2}{273}$
বা, $V_2 = \frac{0.64 \times 5.7 \times 10^{-4} \times 273}{312 \times 0.76}$
$$\therefore\ V_2 = 4.2 \times 10^{-4}\ m^3$$

৪। 1·2 atm চাপ এবং 310 K তাপমাত্রায় কোনো গ্যাসের আয়তন 4·3 L। রুদ্ধতাপীয় প্রক্রিয়ায় গ্যাসকে সঙ্কুচিত করে আয়তন 0·76 L করা হয়। গ্যাসটির (ক) চূড়ান্ত চাপ এবং (খ) চূড়ান্ত তাপমাত্রা নির্ণয় কর। [গ্যাসটিকে আদর্শ গ্যাস হিসেবে বিবেচনা করা যায় $\gamma = 1{\cdot}4$] [BUET Admission Test, 2015-16]

এখানে,

$P_1 = 1{\cdot}2$ atm
$V_1 = 4{\cdot}3$ L
$V_2 = 0{\cdot}76$ L
$T_1 = 310$ K
$P_2 = ?$
$T_2 = ?$

(ক) আমরা জানি,

$$P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma}$$

বা, $P_2 = \dfrac{P_1V_1^{\gamma}}{V_2^{\gamma}}$

$$\therefore \quad P_2 = \frac{1{\cdot}2 \times (4{\cdot}3)^{1{\cdot}4}}{(0{\cdot}76)^{1{\cdot}4}} = 13{\cdot}58 \text{ atm}$$

আবার,

(খ) $T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$ বা, $T_2 = \dfrac{T_1V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}}$

$$\therefore \quad T_2 = \frac{310 \times (4{\cdot}3)^{1{\cdot}4-1}}{(0{\cdot}76)^{1{\cdot}4-1}} = 620 \text{ K}$$

৫। একটি ট্যাঙ্কে 27°C তাপমাত্রায় ও 2 বায়ুমণ্ডলীয় চাপে 1660 লিটার অক্সিজেন আছে। ট্যাঙ্কে অক্সিজেনের ভর নির্ণয় কর।

[অক্সিজেনের আণবিক ভর = 32 kg k mol^{-1}, বায়ুমণ্ডলীয় চাপ = $1{\cdot}013 \times 10^5$ Pa ও R = 8314 Jk mol^{-1} K^{-1}]

এখানে,

$T = (273 + 27)\text{K} = 300$ K
$M = 32$ kg kmol^{-1}
$R = 8314$ Jkmol^{-1} K^{-1}
$P = 2 \times 1{\cdot}013 \times 10^5$ Pa
$V = 1660$ লিটার $= 1660 \times 10^{-3}$ m^3

ধরি, অক্সিজেনের ভর = m

আমরা পাই, $m = M\left(\dfrac{PV}{RT}\right)$

$$\therefore \quad m = \frac{32 \times (2 \times 1{\cdot}013 \times 10^5 \times 1660 \times 10^{-3})}{8314 \times 300} = 4{\cdot}3 \text{ kg}$$

৬। একটি সিলিন্ডারে রক্ষিত অক্সিজেন গ্যাসের আয়তন 1×10^{-2} m^3 ও তাপমাত্রা 300 K এবং চাপ $2{\cdot}5 \times 10^5$ Nm^{-2}। তাপমাত্রা স্থির রেখে কিছু অক্সিজেন বের করে নেয়া হলো। ফলে চাপ কমে $1{\cdot}3 \times 10^5$ Nm^{-2} হলো। ব্যবহৃত অক্সিজেনের ভর নির্ণয় কর। [CUET Admission Test, 2007-08]

এখানে,

$V_1 = 1 \times 10^{-2}$ m^3
$P_1 = 2{\cdot}5 \times 10^5$ Nm^{-2}
$P_2 = 1{\cdot}3 \times 10^5$ Nm^{-2}
অক্সিজেনের আণবিক ভর, $M = 32$ kg Kmole^{-1}

আমরা জানি,

$$V_2 = \frac{P_1V_1}{P_2} = \frac{2{\cdot}5 \times 10^5 \times 1 \times 10^{-2}}{1{\cdot}3 \times 10^5} = 1{\cdot}923 \times 10^{-2} \text{ m}^3$$

আবার,

$$\Delta V = V_2 - V_1 = 1{\cdot}923 \times 10^{-2} - 1 \times 10^{-2} = 0{\cdot}923 \times 10^{-2} = 9{\cdot}23 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

এবং $m = \dfrac{MP\Delta V}{RT} = \dfrac{32 \times 2{\cdot}5 \times 10^5 \times 9{\cdot}23 \times 10^{-3}}{8{\cdot}31 \times 300} = 29{\cdot}6$ kg

৭। কোনো হ্রদের তলদেশ থেকে পানির উপরিতলে আসায় একটি বায়ু বুদবুদের আয়তন 5 গুণ হয়। বায়ুমন্ডলের চাপ 10^5 Nm^{-2} হলে হ্রদের গভীরতা কত?

ধরি, হ্রদের তলদেশে মোট চাপ $= P_1$

পানির ঘনত্ব $= \rho$

পানির উপরিতলে বায়ুর চাপ $= P_2$

হ্রদের তলদেশে বুদবুদের আয়তন $= V_1 = V$

পানির উপরিতলে বুদবুদের আয়তন $= V_2 = 5V$

এখানে, $P_1 = P_2 + h\rho g$

আমরা জানি,

$$P_1V_1 = P_2V_2$$

বা, $(P_2 + h\rho g)\,V = P_2 \times 5V$

বা, $4P_2 = h\rho g$

বা, $h\rho g = 4P_2$

$$\therefore \quad h = \frac{4 \times 10^5}{1000 \times 9{\cdot}8} = 40{\cdot}81 \text{ m}$$

এখানে,
$P_2 = 10^5\ Nm^{-2}$
$g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$
$\rho = 1000\ kgm^{-3}$

৮। কোন হ্রদের তলদেশ থেকে পানির উপরিতলে আসায় একটি বায়ু বুদবুদের ব্যাস দ্বিগুণ হয়। হ্রদের পৃষ্ঠে বায়ুমন্ডলের চাপ স্বাভাবিক বায়ুমন্ডলীয় চাপের সমান হলে এবং হ্রদের পানির উষ্ণতা ধ্রুবক হলে হ্রদের গভীরতা নির্ণয় কর। [Admission Test : CUET 2013-14; RUET 2015-16]

আমরা জানি,

$$P_1V_1 = P_2V_2$$

$$(P_2 + h\rho g)V_1 = P_2 \times 8V_1$$

$$h\rho g = 7P_2$$

$$\therefore \quad h = \frac{7 \times 1{\cdot}013 \times 10^5}{9{\cdot}8 \times 10^3} = 72{\cdot}36 \text{ m}$$

১০·৩ আদর্শ গ্যাসের সমীকরণ
Ideal gas equation

মনে করি নির্দিষ্ট ভরের কোনো গ্যাসের চাপ, আয়তন ও পরম তাপমাত্রা যথাক্রমে P, V, T।

বয়েলের সূত্রানুসারে, $V \propto \frac{1}{P}$, (যখন তাপমাত্রা T ধ্রুব থাকে)

এবং চার্লসের সূত্রানুসারে, $V \propto T$ (যখন চাপ P ধ্রুব থাকে)

এই দুটি সূত্রকে একত্রে লেখা যায়,

$V \propto \frac{T}{P}$, যখন T ও P উভয়ই ধ্রুবক

বা, $V = K\frac{T}{P}$ বা, $\frac{PV}{T} = K$

বা, $PV = KT$ ... ... (10.8)

এখানে K একটি ধ্রুব সংখ্যা, এর মান গ্যাসের ভর এবং এককের পদ্ধতির ওপর নির্ভর করে। এখন $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n$ পরম তাপমাত্রায় এবং $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ চাপে কোনো নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের আয়তন যথাক্রমে $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$ হলে, উপরোক্ত সমীকরণ অনুসারে,

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} = \frac{P_3V_3}{T_3} = \ldots = \frac{P_nV_n}{T_n} = K = \text{ধ্রুবক}$$

এখন অ্যাভোগ্যাড্রোর প্রকল্প অনুসারে এক মৌল বা এক গ্রাম অণু ভরের সকল গ্যাসের আয়তন, একই চাপ ও তাপমাত্রায় সমান এবং স্বাভাবিক চাপ ও তাপমাত্রায় এই আয়তন 22·4 লিটার। সুতরাং V যদি এক মোল গ্যাসের আয়তন হয়, $\frac{PV}{T}$ অনুপাতটি সকল গ্যাসের জন্য অভিন্ন হবে। অর্থাৎ K-এর মান এক গ্রাম অণু ভরের সকল গ্যাসের ক্ষেত্রে

অভিন্ন হয়। এক্ষেত্রে K এর পরিবর্তে R লেখা হয় এবং R-কে সর্বজনীন গ্যাস ধ্রুবক (universal gas constant) বা মোলার গ্যাস ধ্রুবক (molar gas constant) বলা হয়। এই R এর মান, $R = 8{\cdot}31\ JK^{-1}\ mole^{-1}$।

এখন যদি 1 মোল গ্যাস বা এক গ্রাম অণু ভরের যেকোনো গ্যাস বিবেচনা করা হয় তাহলে যেকোনো গ্যাসের ক্ষেত্রে সমীকরণ (10.8) থেকে লেখা যায়

$$PV = RT \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (10.9)$$

এখন যদি এক মোল বা এক গ্রাম অণু গ্যাস না নিয়ে m ভরের গ্যাস নেয়া হয় যার আয়তন V এবং ওই গ্যাসের আণবিক ভর যদি M হয়, তবে এক মোল বা এক গ্রাম অণু গ্যাসের আয়তন হবে $\frac{M}{m}V$। সুতরাং সমীকরণ (10.9)-এ V এর পরিবর্তে $\frac{M}{m}V$ বসিয়ে পাই,

$$P \times \frac{M}{m} V = RT$$

$$\text{বা, } PV = \frac{m}{M} RT \quad \left(\frac{m}{M} = n = \text{ মোল সংখ্যা}\right)$$

$$\text{বা, } PV = nRT \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (10.10)$$

এটিই আদর্শ গ্যাস সমীকরণ বা গ্যাসের অবস্থার সমীকরণ।

হিসাব : আদর্শ তাপমাত্রা ও চাপে 1 মোল গ্যাস যে আয়তন দখল করে তার আয়তন এবং একক আয়তনে অণুর সংখ্যা বের কর।

আমরা জানি, $PV = nRT \therefore V = \frac{nRT}{P} = \frac{1 \times 8{\cdot}31 \times 273}{1{\cdot}013 \times 10^5} = 2{\cdot}25 \times 10^{-2}\ m^3$

আবার, একক আয়তনে অণুর সংখ্যা,

$$\frac{N}{V} = \frac{6{\cdot}02 \times 10^{23}}{2{\cdot}25 \times 10^{-2}} = 2{\cdot}68 \times 10^{25}\ m^{-3}$$

অনুসন্ধানমূলক কাজ : প্রমাণ তাপমাত্রা ও প্রমাণ চাপে 1 cm^3 হিলিয়াম ও 1 cm^3 অক্সিজেন গ্যাস আছে। কোন গ্যাসের অণুর সংখ্যা বেশি?

অ্যাভোগ্যাড্রোর সূত্র অনুযায়ী আমরা জানি একই তাপমাত্রা ও চাপে সকল গ্যাসের সমান আয়তনে সমান সংখ্যক অণু থাকে। সুতরাং প্রমাণ তাপমাত্রা ও চাপে 1 cm^3 হিলিয়াম ও 1 cm^3 অক্সিজেন গ্যাসে সমান সংখ্যক অণু থাকে। কাজেই কোনো গ্যাসের অণুর সংখ্যা বেশি নয়।

১০·৪ গ্যাসের ঘনত্বের সমীকরণ
Equation of density of a gas

ধরা যাক T_1K পরম তাপমাত্রায় m ভরের কোনো গ্যাসের আয়তন V_1, চাপ P_1 ও ঘনত্ব ρ_1 এবং T_2K পরম তাপমাত্রায় তার আয়তন V_2, চাপ P_2 ও ঘনত্ব ρ_2। গ্যাসটি তার অবস্থার সমীকরণ মেনে চললে,

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$$

$$\text{অর্থাৎ, } \frac{P_1}{T_1} \cdot \frac{m}{\rho_1} = \frac{P_2}{T_2} \cdot \frac{m}{\rho_2} \quad \left[\because \rho_1 = \frac{m}{V_1} \text{ এবং } \rho_2 = \frac{m}{V_2}\right]$$

$$\therefore \frac{P_1}{\rho_1T_1} = \frac{P_2}{\rho_2T_2} = \text{ একটি ধ্রুবক} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (10.11)$$

এটিও (আদর্শ) গ্যাসের অবস্থার সমীকরণ নির্দেশ করে। এ সমীকরণ অনুসারে,

(ক) $P_1 = P_2$ হলে, $\rho_1T_1 = \rho_2T_2$

$$\therefore \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{T_2}{T_1} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (10.12)$$

সুতরাং স্থির চাপে একটি নির্দিষ্ট ভরের কোনো গ্যাসের ঘনত্ব তার পরম তাপমাত্রার ব্যস্তানুপাতিক।

(খ) $T_1 = T_2$ হলে, $\frac{P_1}{\rho_1} = \frac{P_2}{\rho_2}$

$$\therefore \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (10.13)$$

কাজেই, স্থির তাপমাত্রায় একটি নির্দিষ্ট ভরের কোনো গ্যাসের চাপ তার ঘনত্বের সমানুপাতিক।

১০.৫ সর্বজনীন গ্যাস ধ্রুবক
Universal gas constant

যে কোনো গ্যাসের ভর এক গ্রাম মোল হলে, সকল গ্যাসের ক্ষেত্রে K-এর মান সমান হয় এবং ধ্রুবক K-কে R দ্বারা প্রকাশ করা হয়। সেজন্য R-কে সর্বজনীন গ্যাস ধ্রুবক বলা হয়।

R-এর অর্থ : n মোল গ্যাসের ক্ষেত্রে আমরা পাই,

$$PV = nRT$$

$$\therefore \quad R = \frac{PV}{nT} = \frac{\text{কাজ বা শক্তি}}{\text{মোল সংখ্যা} \times \text{কেলভিন}} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (10.14)$$

উক্ত সমীকরণ হতে R-এর নিম্নলিখিত সংজ্ঞা দেয়া যায়—

সংজ্ঞা : এক মোল আদর্শ গ্যাসের তাপমাত্রা এক ডিগ্রি বাড়ালে তা যে পরিমাণ কাজ সম্পন্ন করে তাকে সর্বজনীন গ্যাস ধ্রুবক বলে। এটিই হলো R-এর অর্থ বা তাৎপর্য।

R-এর একক : এস. আই. পদ্ধতিতে R-এর একক হলো জুল কেলভিন$^{-1}$ মোল$^{-1}$ ($JK^{-1}\ mol^{-1}$)।

R-এর মান : এস. আই. পদ্ধতিতে স্বাভাবিক তাপমাত্রা এবং চাপে (N. T. P) এর মান $8.314\ JK^{-1}\ mol^{-1}$ (জুল কেলভিন$^{-1}$ মোল$^{-1}$)

১০.৬ প্রমাণ তাপমাত্রা ও চাপ
Standard temperature and pressure (STP)

প্রমাণ তাপমাত্রা :

যে তাপমাত্রায় ও প্রমাণ চাপে বরফ গলে পানিতে পরিণত হয় বা পানি জমে বরফে পরিণত হয় সেই তাপমাত্রাকে প্রমাণ তাপমাত্রা বলে। সেলসিয়াস স্কেলে এটি 0°C এবং কেলভিন স্কেলে 273 K। অর্থাৎ STP তে তাপমাত্রা 273 K।

প্রমাণ চাপ :

45° অক্ষাংশে 273 K তাপমাত্রায় উল্লম্বভাবে অবস্থিত 760 mm উচ্চতাবিশিষ্ট শুষ্ক ও বিশুদ্ধ পারদ স্তম্ভ যে চাপ দেয় তাকে প্রমাণ চাপ বলে।

অতএব, প্রমাণ চাপ $= 760$ mm পারদ স্তম্ভ চাপ

$$= 0.76\ m \times 13596\ kgm^{-3} \times 9.806\ ms^{-2}$$

$$= 1.013 \times 10^5\ Nm^{-2} = 1.013 \times 10^5\ Pa$$

জানার বিষয় : STP তে বায়ুর ঘনত্ব $1.293\ kg\ m^{-3}$

STP তে বায়ুর চাপ $1.013 \times 10^5\ Nm^{-2}$.

১০.৭ পরম শূন্য তাপমাত্রা বা পরম শীতলতা
Absolute zero temperature

চার্লসের সূত্র হতে আমরা দেখতে পাই যে, স্থির চাপে যদি 0°C তাপমাত্রায় কোনো নির্দিষ্ট ভরের একটি গ্যাসের আয়তন V_0 হয় এবং θ°C তাপমাত্রায় তার আয়তন V হয়, তবে

$$V = V_0\left(1 + \frac{\theta}{273}\right)$$

− 273°C তাপমাত্রায় উক্ত গ্যাসের আয়তন, $V_{-273} = V_0\left(1 - \frac{273}{273}\right) = 0$

অর্থাৎ স্থির চাপে গ্যাসকে ঠান্ডা করে তার তাপমাত্রা $-273°C$ করলে আয়তন শূন্য হবে। তাপমাত্রা আরও কমালে গ্যাসের আয়তন ঋণাত্মক হবে। কিন্তু ঋণাত্মক আয়তন অর্থহীন। অতএব সর্বনিম্ন তাপমাত্রা $-273°C$। প্রকৃতপক্ষে এই তাপমাত্রা $-273.16°C$। কোনো কিছুরই তাপমাত্রা এর অপেক্ষা কম হতে পারে না। শুধু পৃথিবীতে নয়, সৌরজগৎ তথা মহাবিশ্বে এর কম তাপমাত্রা কোথাও থাকতে পারে না। এজন্য $-273°C$ তাপমাত্রাকে সর্বনিম্ন তাপমাত্রা বা চরম শীতলতা বা চরম বা পরম শূন্য তাপমাত্রা (Absolute zero temperature) বলা হয়। কাজেই, স্থির চাপে একটি নির্দিষ্ট ভরের কোনো গ্যাসের তাপমাত্রা ক্রমশ কমাতে থাকলে, চার্লসের সূত্রানুযায়ী যে তাপমাত্রায় পৌঁছে তার আয়তন শূন্য হয় ও গ্যাসের গতিশক্তি সম্পূর্ণরূপে লোপ পায় তাকে পরম শূন্য তাপমাত্রা বলে। 0K বা $-273°C$ কে পরম শূন্য তাপমাত্রা ধরা হয়।

সংজ্ঞা : যে তাপমাত্রায় স্থির চাপে কোনো নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের আয়তন শূন্য হয় এবং গতিশক্তি লোপ পায় তাকে পরম শূন্য তাপমাত্রা বলে।

গাণিতিক উদাহরণ ১০.২

১। যদি $R = 8.31\ JK^{-1}\ mol^{-1}$ হয় তবে 72 cm পারদ চাপে এবং 27°C তাপমাত্রায় 20 g অক্সিজেনের আয়তন নির্ণয় কর।

আমরা জানি, $PV = nRT$

বা, $PV = \frac{m}{M}RT$

বা, $V = \frac{mRT}{PM}$

$= \frac{20 \times 10^{-3} \times 8.31 \times 300}{72 \times 10^{-2} \times 13.6 \times 10^{3} \times 9.8 \times 32 \times 10^{-3}}$

$= 0.0162369$

$= 16.24 \times 10^{-3} m^3$

এখানে,
$m = 20\ g = 20 \times 10^{-3} kg$
$M = 32 \times 10^{-3} kg\ mol^{-1}$
$R = 8.31\ JK^{-1} mol^{-1}$
$T = (27 + 273) = 300\ K$
$h = 72\ cm = 72 \times 10^{-2} m$
$P = h\rho g$
$= 72 \times 10^{-2} \times 13.6 \times 10^{3} \times 9.8\ Nm^{-2}$
$V = ?$

২। 100°C তাপমাত্রায় 20 g অক্সিজেন একটি 20 cm দৈর্ঘ্যের ঘনককে পূর্ণ করে। এক মোল অক্সিজেনের ভর 32 g। ঘনকের অভ্যন্তরে অক্সিজেনের চাপ কত ? [ঢা. বো. ২০১৫]

আমরা জানি,

$PV = nRT$

$\therefore P = \frac{nRT}{V} = \frac{mRT}{MV}$

$= \frac{20 \times 8.31 \times 373}{32 \times (0.2)^3}$

$= 242.16\ Pa$

$= 242.16\ Nm^{-2}$

এখানে,
অক্সিজেনের ভর, $m = 20\ g$
অক্সিজেনের আণবিক ভর, $M = 32\ gmol^{-1}$
$R = 8.31\ J\ mol^{-1}K^{-1}$
$V = (20\ cm)^3 = (.02\ m)^3$
$T = 100 + 273 = 373\ K$
চাপ, $P = ?$

৩। 18 g হিলিয়াম গ্যাসপূর্ণ একটি বেলুনের আয়তন $0.10\ m^3$। বেলুনের ভেতরে গ্যাসের চাপ $1.2 \times 10^5\ Nm^{-2}$। বেলুনের মধ্যবর্তী গ্যাসের তাপমাত্রা কত ?

আমরা জানি,

$PV = nRT$

$\therefore T = \frac{PV}{nR}$

$= \frac{1.2 \times 10^5 \times 0.10}{4.5 \times 8.31}$

$= 320.9\ K$

এখানে,
$M = 4\ g$
$m = 18\ g$
$n = \frac{m}{M} = \frac{18}{4} = 4.5$
$P = 1.2 \times 10^5\ Nm^{-2}$
$R = 8.31\ JK^{-1}\ mol^{-1}$
$T = ?$

১০.৮ ব্যবহারিক
Experimental

পরীক্ষণের নাম :	বয়েলের সূত্র যাচাই
পিরিয়ড : ২	Verification of Boyle's law

মূলতত্ত্ব (Theory) : তাপমাত্রা স্থির থাকলে কোনো নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের আয়তন তার ওপর প্রযুক্ত চাপের ব্যস্তানুপাতিক।

যদি কোনো নির্দিষ্ট ভর গ্যাসের আয়তন, V এবং চাপ, P হয় তবে বয়েলের সূত্রানুসারে

$$V \propto \frac{1}{P}$$

বা, $PV =$ ধ্রুবক। ... ... (i)

অনুরূপভাবে যদি কোনো নির্দিষ্ট ভর গ্যাসের P_1, P_2, P_3 ইত্যাদি চাপে তার আয়তন যথাক্রমে V_1, V_2, V_3 হয় তবে বয়েলের সূত্রানুসারে আমরা পাই, $P_1V_1 = P_2V_2 = P_3V_3 =$ ধ্রুবক $= K$।

যন্ত্রপাতি (Apparatus) : (১) বয়েলের যন্ত্র, (২) ব্যারোমিটার এবং (৩) তাপমান যন্ত্র।

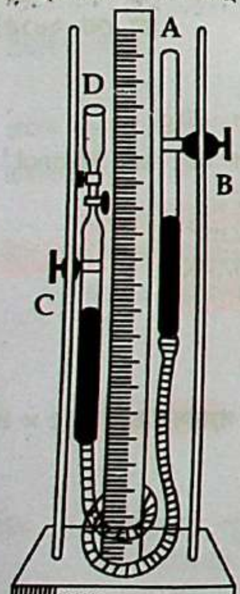
কার্যপদ্ধতি বা কাজের ধারা (Working procedure) : উক্ত পরীক্ষা তিনটি ধাপে সম্পন্ন করা হয়, যথা—(A) বায়ুমণ্ডলীয় চাপে, (B) বায়ুমণ্ডলীয় চাপ অপেক্ষা অধিক চাপে এবং (C) বায়ুমণ্ডলীয় চাপ অপেক্ষা কম চাপে।

(১) পরীক্ষার শুরুতেই ব্যারোমিটারের সাহায্যে বায়ুমণ্ডলের চাপ নির্ণয় করা হয়। মনে করি এটি P_1।

(A) বায়ুমণ্ডলীয় চাপে :

(২) CD নলটিকে উঠা-নামা করিয়ে তাকে এমন উচ্চতায় রাখা হয় যাতে উভয় নলের পারদ স্তম্ভ এক সমতলে থাকে। এ অবস্থায় AB নলে আবদ্ধ বায়ুর চাপ বায়ুমণ্ডলের চাপের সমান হবে।

(৩) স্কেল হতে AB নলের বন্ধমুখ এবং AB নলের পারদ তলের পাঠ নেয়া হয়। এ দুই পাঠের পার্থক্য হতে আবদ্ধ বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করা হয়। AB নল সমব্যাসযুক্ত হওয়ায় আবদ্ধ বায়ুর দৈর্ঘ্য তার আয়তনের আনুপাতিক হবে। বায়ুমণ্ডলের চাপ এবং বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্যের গুণফল বের করা হয়।



চিত্র ১০.৩

(B) বায়ুমণ্ডলীয় চাপ অপেক্ষা অধিক চাপে :

(৪) এবার CD নলকে আস্তে আস্তে ওপরে তোলা হয়। এই অবস্থায় CD নলের পারদ স্তম্ভ AB নলের স্তম্ভ হতে উঁচুতে থাকবে এবং AB নলের আবদ্ধ বায়ুর চাপ বায়ুমণ্ডলের চাপ অপেক্ষা বেশি হবে। উভয় নলের পারদ স্তম্ভের পাঠ নেয়া হয় এবং তাদের পার্থক্য নির্ণয় করা হয়। বায়ুমণ্ডলের চাপের সাথে উক্ত পার্থক্য যোগ করে AB নলে আবদ্ধ বায়ুর চাপ বের করা হয়। P_1 বায়ুমণ্ডলের চাপ হলে এবং h পারদ স্তম্ভদ্বয়ের পার্থক্য হলে আবদ্ধ বায়ুর চাপ $P = P_1 + h$। AB নলের পারদতল এবং বন্ধ প্রান্তের পাঠ হতে আবদ্ধ বায়ুর আয়তন নির্ণয় করা হয়। CD নল ক্রমাগত ওপরে উঠিয়ে ৫–৬ বার পাঠ নেয়া হয় এবং প্রতিবারই আবদ্ধ বায়ুর চাপ এবং আয়তনের গুণফল বের করা হয়।

(C) বায়ুমণ্ডলীয় চাপ অপেক্ষা কম চাপে :

(৫) এখন CD নলকে নিচে নামানো হয় এবং এমন জায়গায় রাখা হয় যাতে AB নলের পারদ স্তম্ভ CD নলের পারদ স্তম্ভ হতে উঁচুতে থাকে। এ অবস্থায় AB নলের আবদ্ধ চাপ বায়ুমণ্ডলের চাপ অপেক্ষা কম হবে। উভয় নলের পারদ স্তম্ভের পাঠ নেয়া হয় এবং তাদের পার্থক্য নির্ণয় করা হয়। বায়ুমণ্ডলের চাপ হতে উক্ত পার্থক্য বিয়োগ করে AB নলের আবদ্ধ বায়ুর চাপ বের করা হয়। P_1 বায়ুমণ্ডলের চাপ হলে এবং h পারদ স্তম্ভদ্বয়ের পার্থক্য হলে আবদ্ধ বায়ুর চাপ $P = P_1 - h$। AB নলের পারদতল এবং বন্ধ প্রান্তের পাঠ হতে আবদ্ধ বায়ুর আয়তন নির্ণয় করা হয়। CD নল ক্রমাগত নিচে নামিয়ে ৫–৬ বার পাঠ নেয়া হয় এবং প্রতিবারই চাপ এবং আয়তনের গুণফল বের করা হয়।

(৬) পরীক্ষার শুরুতে এবং শেষে ব্যারোমিটারের সাহায্যে বায়ুমণ্ডলের চাপ পরিমাপ করা হয় এবং গড় মান নেয়া হয়। মনে করি, তা P_1।

পর্যবেক্ষণ ও সন্নিবেশন (Observation and manipulation) :

ছক (Table)

চাপ	পর্যবেক্ষণ সংখ্যা	ব্যারো-মিটারের পাঠ = B সেমি	পরীক্ষা-গারের তাপমাত্রা $= t°C$	আবদ্ধ নল AB-এর ওপর প্রান্তের পাঠ = a সেমি	আবদ্ধ নল AB-এর পারদ স্তম্ভের পাঠ=b সেমি	খোলা নল CD-এর পারদ স্তম্ভের পাঠ=c সেমি	আবদ্ধ বায়ুর আয়তন V = $(a-b)$ ঘন সেমি	পারদ স্তম্ভের উচ্চতার পার্থক্য $h=(b-c)$ সেমি	আবদ্ধ বায়ুর মোট চাপ P = $(B \pm h)$ সেমি	$K = P \times V$	মন্তব্য
বায়ুমণ্ডলীয় চাপে											
বায়ুমণ্ডলীয় চাপ অপেক্ষা অধিক চাপে											ধ্রুবক
বায়ুমণ্ডলীয় চাপ অপেক্ষা কম চাপে											

হিসাব বা গণনা (Calculation) :

(১) $P \times V$ = ...

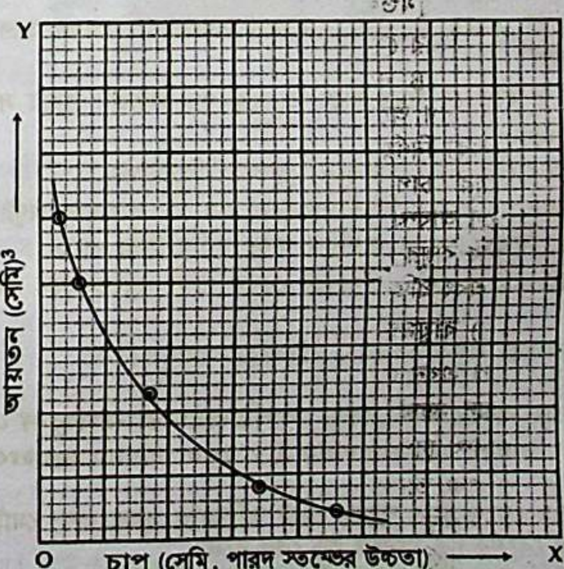
(২) $P \times V$ = ...

(৩) $P \times V$ = ...

(৪) $P \times V$ = ...

[অনুরূপভাবে সকল গণনা করা যায়]

ফলাফল (Result) : যেহেতু $P \times V$ = ধ্রুবক, সেহেতু P এবং V-এর সম্পর্কটিকে একটি লেখ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। P-কে X-অক্ষে এবং V-কে Y-অক্ষে স্থাপন করে লেখ অঙ্কন করলে তা একটি আয়তাকার পরাবৃত্ত হবে এবং প্রমাণ



চিত্র ১০.৪

করবে যে, $P \times V$ = ধ্রুবক। কিন্তু P বনাম $\frac{1}{V}$ লেখ অঙ্কন করলে তা একটি সরলরেখা হবে। এটিও প্রমাণ করবে যে $P \times V$ = ধ্রুবক।

∴ বয়েলের সূত্র প্রমাণিত হলো।

সতর্কতা (Precautions) :

(১) নল দুটি পুরাপুরি খাড়া হওয়া উচিত।

(২) দৃষ্টিভ্রম এড়িয়ে পাঠ নেয়া উচিত।

(৩) তাপমাত্রা স্থির রাখার জন্য CD নলকে ধীরে ধীরে উঠা-নামা করা প্রয়োজন।

(৪) প্রতিবার পাঠ নেবার পর কিছু সময় অপেক্ষা করা উচিত।

আলোচনা (Discussion) : বন্ধ নল ও খোলা নল অসম প্রস্থচ্ছেদের হলে প্রাপ্ত ফলাফলে ত্রুটি পরিলক্ষিত হয়।

১০.৯ গ্যাসের অণুর মৌলিক স্বীকার্য
Fundamental postulates of gas molecules

গ্যাসের অণুর গতিশীলতার জন্য তাপ উৎপন্ন হয়। এটি হলো গ্যাসের অণুর গতিতত্ত্ব। গ্যাসের গতিতত্ত্ব হতে গ্যাসের গতির প্রকৃতি এবং উদ্ভূত তাপের মধ্যে সম্পর্ক জানা যায়। গ্যাসের অণুর গতিতত্ত্ব সুপ্রতিষ্ঠিত করার জন্য কতকগুলো পূর্বশর্ত প্রয়োজন। এগুলোকে গ্যাসের **মৌলিক স্বীকার্য** বলা হয়। গ্যাসের অণুর মৌলিক স্বীকার্যসমূহ নিম্নে উল্লেখ করা হলো :

১। প্রত্যেক গ্যাসই সমান ভরের অসংখ্য ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র কণার সমন্বয়ে গঠিত। এদের নাম অণু। অণুগুলো নিউটনের গতিসূত্র মেনে চলে।

২। কোনো একটি গ্যাসের অণুগুলো সদৃশ। কিন্তু বিভিন্ন গ্যাসের অণুগুলো ভিন্ন ভিন্ন। উদাহরণস্বরূপ বলা যায়— হাইড্রোজেন গ্যাসের সকল অণু সদৃশ, অক্সিজেন গ্যাসের সকল অণু সদৃশ। কিন্তু হাইড্রোজেন গ্যাসের অণু এবং অক্সিজেন গ্যাসের অণু সদৃশ নয়।

৩। গ্যাসের অণুগুলো বিন্দু ভর আদর্শ স্থিতিস্থাপক গোলক।

৪। অণুগুলোর মধ্যবর্তী দূরত্বের তুলনায় এদের আয়তন উপেক্ষণীয়।

৫। আধারের আয়তনের তুলনায় এর মধ্যস্থিত গ্যাসের অণুগুলোর আয়তন নগণ্য।

৬। অণুগুলোর পরস্পরের মধ্যে কোনো আকর্ষণ বা বিকর্ষণ বল নেই, কিংবা আবদ্ধ পাত্রের দেয়ালের ওপর কোনো বল প্রয়োগ করে না। অর্থাৎ গ্যাসের শক্তি গতিশক্তি।

৭। অণুগুলো সতত সঞ্চরণশীল। তাদের গতিবেগ শূন্য হতে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হতে পারে।

৮। অণুগুলো প্রতিনিয়ত অতি দ্রুতবেগে বিক্ষিপ্তভাবে ছুটাছুটি করছে এবং পরস্পরের সাথে ও আধারের দেয়ালের সাথে ধাক্কা খাচ্ছে। আধারের দেয়ালের সাথে অণুগুলোর ধাক্কার দরুনই গ্যাসে চাপের সৃষ্টি হয়।

৯। তাপমাত্রা বৃদ্ধির সংগে অণুগুলোর বেগ বৃদ্ধি পায়।

১০। দুটি ধাক্কার মধ্যবর্তী সময়ে অণুগুলো সমবেগে সরলরেখা বরাবর চলে। পরপর দুটি ধাক্কার মধ্যবর্তী দূরত্বকে মুক্ত পথ (free path) বলে।

১১। একটি ধাক্কা সংঘটিত হতে যে সময় লাগে তা মুক্ত পথ অতিক্রম করার সময়ের তুলনায় অতি নগণ্য, তাই ধাক্কাগুলো তাৎক্ষণিক (instantaneous)।

১২। গ্যাসের অণুগুলো আধারের সমগ্র আয়তনে মুক্তভাবে বিচরণক্ষম।

১৩। গ্যাসের অণুগুলো অনবরত ধাক্কায় লিপ্ত থাকলেও এক ঘন আয়তনে অণুর সংখ্যা অপরিবর্তিত থাকে। এটি হতে সিদ্ধান্ত গ্রহণ করা যায় যে, আদর্শ গ্যাসের আণবিক ঘনত্ব সর্বদা স্থির থাকে।

এখানে উল্লেখ থাকে যে, গ্যাসের মৌলিক স্বীকার্য যেসব গ্যাস সর্বতোভাবে মেনে চলে তাদেরকে **আদর্শ গ্যাস** বলে।

১৪। গ্যাসের পরম তাপমাত্রা অণুগুলোর মোট গতিশক্তির সমানুপাতিক।

১০.১০ গড় বেগ, গড় বর্গবেগ, গড় বর্গবেগের বর্গমূল এবং গড় মুক্ত পথ
Mean velocity, mean square velocity, root mean square velocity and mean free path

কোনো একটি বস্তু অসম বেগে গমন করলে মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব এবং মোট সময়ের ভাগফলকে গড় বেগ বলে। আবার, দুই বা ততোধিক বেগের গড় মানকে গড় বেগ বলে।

কিন্তু দুই বা ততোধিক বেগের বর্গের গড় মানকে গড় বর্গবেগ বলে। মনে করি গ্যাসের n সংখ্যক অণুর বেগ যথাক্রমে $c_1, c_2, \ldots \ldots c_3, \ldots \ldots c_n$। অতএব তাদের

গড় বেগ, $$c_a = \frac{c_1 + c_2 + c_3 + \ldots \ldots + c_n}{n} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (10.15)$$

গড় বর্গবেগ, $$c_a^2 = \frac{c_1^2 + c_2^2 + \ldots \ldots + c_n^2}{n} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (10.16)$$

পুনঃ দুই বা ততোধিক বেগের বর্গের গড় মানের বর্গমূলকে গড় বর্গবেগের বর্গমূল বা মূল গড় বর্গবেগ বলে।
অতএব গড় বর্গবেগের বর্গমূল বা মূল গড় বর্গবেগ

$$c = \sqrt{c_n^2} = \sqrt{\frac{c_1^2 + c_2^2 + \dots\dots + c_n^2}{n}} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (10.17)$$

সাধারণত মূল গড় বর্গবেগ গড় বেগ অপেক্ষা বেশি মানের হয়।

আবার কোনো গ্যাসের $n_1, n_2, n_3 \dots$ সংখ্যক অণু যথাক্রমে $c_1, c_2, c_3 \dots$ বেগ নিয়ে চললে ওই গ্যাসের অণুর গড় বর্গবেগের বর্গমূলের মান (rms) হবে,

$$c = \sqrt{\frac{n_1c_1^2 + n_2c_2^2 + n_3c^3 + \dots\dots}{n_1 + n_2 + n_3}} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (10.18)$$

নিচের উদাহরণ থেকে বিষয়টি স্পষ্ট হবে।

ব্যাখ্যা : ধরা যাক কোনো নির্দিষ্ট আয়তনের গ্যাসের মধ্যে c_1 বেগসম্পন্ন n_2 সংখ্যক অণু, c_2 বেগসম্পন্ন n_2 সংখ্যক অণু, c_3 বেগসম্পন্ন n_3 সংখ্যক অণু ইত্যাদি রয়েছে। সুতরাং মোট অণু, $n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots\dots$

অতএব, গড় বেগ, $\bar{c} = \dfrac{n_1c_1 + n_2c_2 + n_3c_3 + \dots\dots\dots}{n}$

গড় বর্গ বেগ, $\bar{c}^2 = \dfrac{n_1c_1^2 + n_2c_2^2 + n_3c_3^2 + \dots\dots\dots}{n}$

এবং গড় বর্গবেগের বর্গমূল বা মূল গড় বর্গবেগ, $c = \sqrt{\bar{c^2}}$

ধরা যাক চারটি অণুর বেগ যথাক্রমে 3, 4, 5 এবং 6 একক।

সুতরাং, এদের গড় বেগ, $\bar{c} = \dfrac{3+4+5+6}{4} = 4{\cdot}5$

এবং মূল গড় বর্গবেগ, $c = \sqrt{\bar{c^2}} = \sqrt{\dfrac{3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2}{4}} = 4{\cdot}64$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে, c এবং $\bar{c}$ সমান নয়। সাধারণত *rms* গতিবেগ গড় গতিবেগ অপেক্ষা সামান্য বেশি হয়। গতীয় তত্ত্বের আলোচনায় *rms* গতিবেগ বেশি প্রয়োজনীয় ও গুরুত্বপূর্ণ।

অনুধাবনমূলক কাজ : গ্যাসের ক্ষেত্রে মূল গড় বর্গবেগ নেওয়া হয় কেন ?

সাধারণত গড় বেগ মূল গড় বর্গবেগ অপেক্ষা কিছু কম হয়। তাছাড়া গতি তত্ত্বে গড় বেগের ব্যবহার নেই। শুধুমাত্র মূল গড় বর্গবেগ অণুর বিভিন্ন গতিবেগের প্রতিনিধিত্বকারী গড় হিসেবে ব্যবহৃত হয়। এজন্য গ্যাসের ক্ষেত্রে মূল গড় বর্গবেগ নেওয়া হয়।

১০.১১ গ্যাসের আণবিক গতিতত্ত্ব
Molecular kinetic theory of gases

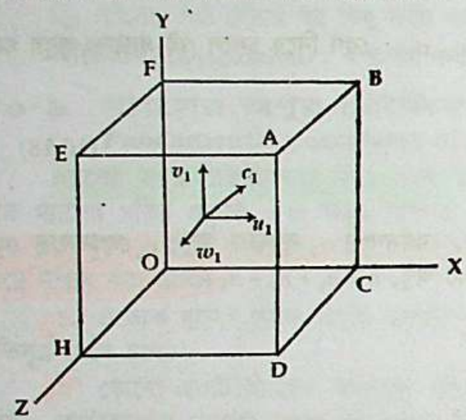
সকল গ্যাসই মোটামুটি বয়েল, চার্লস এবং চাপের সূত্র মেনে চলে। এজন্য সকল গ্যাসের একটি সাধারণ গঠন আছে বলে ধরে নেয়া যায়। সকল গ্যাসই তথা সকল বস্তুই অসংখ্য অণুর সমষ্টি। এ অণুগুলো অবিরাম গতিশীল অবস্থায় থাকে। তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে তাদের গতিশক্তি বৃদ্ধি পায়। কঠিন পদার্থের অণুগুলো খুবই ঘন সন্নিবিষ্ট থাকায় সংসক্তি বল অধিক। এর ফলে কঠিন পদার্থের নির্দিষ্ট আকার ও আয়তন থাকে। তরল পদার্থের অণুগুলোর পারস্পরিক সংসক্তি বল অপেক্ষাকৃত কম। ফলে এদের নির্দিষ্ট আকার থাকে না, কিন্তু আয়তন থাকে। গ্যাসের অণুগুলোর মধ্যে সংসক্তি বল একেবারে নেই বললেই চলে। ফলে গ্যাসের অণুগুলো স্বাধীনভাবে চলাচল করতে পারে। তাই গ্যাসীয় পদার্থের নির্দিষ্ট কোনো আকার বা আয়তন নেই।

ডেভী, জুল, রামফোর্ড প্রমুখ বিজ্ঞানী বিভিন্ন পরীক্ষা দ্বারা প্রমাণ করেছেন যে, তাপ এক প্রকার শক্তি এবং পদার্থ কণার গতির ফলেই তাপ সৃষ্টি হয়। তা হলে দেখা যাচ্ছে, তাপ হলো গতির একটি বিশেষ রূপ। অতএব গ্যাসের গতিশীলতার জন্য তাপ উৎপন্ন হয়। এটি হলো গ্যাসের গতিতত্ত্ব। গ্যাসের গতিতত্ত্ব হতে গ্যাসের গতির প্রকৃতি এবং উদ্ভূত তাপের মধ্যে সম্পর্ক জানা যায়।

1730 খ্রিস্টাব্দে বিজ্ঞানী বার্নৌলি (Bernoulli) সর্বপ্রথম গ্যাসের গতিতত্ত্বের সাহায্যে গ্যাসের সূত্রাবলি ব্যাখ্যা করেন। এ কারণে বিজ্ঞানী বার্নৌলিকে গ্যাসের গতিতত্ত্বের জনক বলা হয়। কিন্তু পরবর্তীতে ক্লসিয়াস, ম্যাক্সওয়েল, বোল্জম্যান, জিন, ভ্যান ডার ওয়াল্‌স প্রমুখ বিজ্ঞানী গ্যাসের গতিতত্ত্বের প্রভূত উন্নতি সাধন করেন এবং এই তত্ত্বের সাহায্যে গ্যাসের নানারূপ আচরণের সন্তোষজনক ব্যাখ্যা প্রদান করেন।

১০·১২ গতিতত্ত্ব অনুসারে আদর্শ গ্যাসের চাপের সমীকরণ
Equation of pressure of an ideal gas according to the kinetic theory

ছয় তলবিশিষ্ট আদর্শ স্থিতিস্থাপক পদার্থের একটি ঘনাকৃতি ফাঁপা পাত্র লই। মনে করি এটি ABCDEFOH [চিত্র ১০·৫]। পাত্রটির প্রত্যেকটি বাহুর দৈর্ঘ্য l । অতএব এর আয়তন $V = l^3$।



চিত্র : ১০·৫

ধরি পাত্রটি M ভরের একটি আদর্শ গ্যাস দ্বারা পূর্ণ এবং গ্যাসের ঘনত্ব ρ। মনে করি গ্যাসের অণুর সংখ্যা n এবং প্রত্যেকটি অণুর ভর m। উক্ত অণুগুলোর মধ্য হতে একটি অণু বিবেচনা করি যার বেগ c_1 [চিত্র ১০·৫]। এই বেগকে OX, OY এবং OZ অক্ষ বরাবর যথাক্রমে u_1, v_1 এবং w_1 উপাংশে বিভাজন করি। অতএব আমরা লিখতে পারি,

$$c_1^2 = u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (10.19)$$

মনে করি অণুটি OX বরাবর u_1 বেগে গিয়ে ABCD তলকে আঘাত করল। অণুর ভর m হলে OX অক্ষ বরাবর তার ভরবেগ $= mu_1$। দেয়ালটির সাথে অণুর স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ ঘটে। ফলে অণুটি একই বেগে পশ্চাৎদিকে প্রতিক্ষিপ্ত (rebound) হয় বা ফেরত আসে। অতএব সংঘর্ষের পর এর ভরবেগ $= -mu_1$

অতএব অণুটির বেগের u_1 উপাংশের দরুন ভরবেগের পরিবর্তন $= mu_1 - (-mu_1) = mu_1 + mu_1 = 2mu_1$

আবার ABCD তলে একবার ধাক্কা খাবার পর EFOH তলে আর একবার ধাক্কা খাবে। OX অক্ষ বরাবর অণুটির বেগ u_1 হওয়ায় ABCD তল হতে EFOH তলে আসতে এর সময় লাগে $\frac{l}{u_1}$ অর্থাৎ $\frac{l}{u_1}$ সময় পর অণুটির বেগের u_1 উপাংশের দরুন ভরবেগের পরিবর্তন $= 2mu_1$

∴ অণুটির বেগের u_1 উপাংশের জন্য ভরবেগের পরিবর্তনের হার $= \dfrac{\text{ভরবেগের পরিবর্তন}}{\text{সময়}}$

$$= \frac{2mu_1}{l/u_1} = \frac{2mu_1^2}{l}$$

অনুরূপভাবে গ্যাস অণুটির বেগের v_1 উপাংশের জন্য ভরবেগের পরিবর্তনের হার $= \frac{2m\,v_1^2}{l}$ এবং বেগের w_1 উপাংশের জন্য ভরবেগের পরিবর্তনের হার $= \frac{2mw_1^2}{l}$

∴ ঐ অণুর মোট ভরবেগের পরিবর্তনের হার

$$= \frac{2mu_1^2}{l} + \frac{2mv_1^2}{l} + \frac{2mw_1^2}{l} = \frac{2m}{l}(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) = \frac{2mc_1^2}{l}$$ [সমীকরণ 10.18 ব্যবহার করে]

দ্বিতীয় অণুর বেগ c_2 হলে একইভাবে দেখানো যায় যে, তার মোট ভরবেগের পরিবর্তনের হার $= \frac{2mc_2^2}{l}$

∴ n-তম অণুর বেগ c_n হলে, এর মোট ভরবেগের পরিবর্তনের হার $= \frac{2mc_n^2}{l}$

∴ পাত্রস্থিত n সংখ্যক অণুর মোট ভরবেগের পরিবর্তনের হার

$$= \frac{2m}{l}(c_1^2 + c_2^2 + \ldots\ldots + c_n^2) = \frac{2mn}{l}\left(\frac{c_1^2 + c_2^2 + \ldots\ldots + c_n^2}{n}\right)$$

$$= \frac{2mn}{l}c^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (10.20)$$

[এখানে $c =$ গড় বর্গবেগের বর্গমূল $= \sqrt{\frac{c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2}{n}}$]

কিন্তু নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রানুযায়ী এই ভরবেগের পরিবর্তনের হার অণুগুলোর ওপর বিভিন্ন দেয়াল কর্তৃক প্রযুক্ত বলের সমান। এখন ঘনকটির দেয়ালের ওপর ধাক্কাজনিত চাপ P হলে ঘনকের ছয়টি দেয়ালের ওপর মোট বল

$$= \text{ক্ষেত্রফল} \times \text{চাপ} = 6l^2 \times P \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (10.21)$$

$\therefore$ সমীকরণ (10.20) এবং সমীকরণ (10.21) হতে পাই,

$$6l^2 \times P = \frac{2mnc^2}{l}$$

বা, $P = \frac{2mnc^2}{6l^2 \times l} = \frac{mnc^2}{3l^3} = \frac{1}{3}\frac{mnc^2}{l^3}$ ... ... (10.22)

বা, $P = \frac{1}{3}\frac{mnc^2}{V}$ বা, $PV = \frac{1}{3}mnc^2 = \frac{1}{3}Mc^2$ ... ... (10.23)

বা, $PV = \frac{1}{3}Mc^2$ $[\because M = mn]$

$\therefore$ $P = \frac{1}{3}\frac{M}{V}c^2 = \frac{1}{3}\rho c^2$ $[\because \rho = \frac{M}{V}]$

১০·১৩ গ্যাসের গতিতত্ত্বের প্রয়োগ
Application of kinetic theory of gases

আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য বয়েলের সূত্র, চার্লসের সূত্র, রেনোর সূত্র, আদর্শ গ্যাসের সমীকরণ ইত্যাদির প্রতিটি পরীক্ষালব্ধ সূত্র। গ্যাসের গতিতত্ত্বের বৈশিষ্ট্যসমূহের আলোচনায় এই সূত্রগুলো ব্যবহার করা হয় না; কিন্তু গতিতত্ত্বের স্বীকার্যগুলো ব্যবহার করে সম্পূর্ণ তাত্ত্বিকভাবে ওই সূত্রগুলো প্রতিষ্ঠা করা যায়। এখানেই গ্যাসের গতিতত্ত্বের সার্থকতা। নিম্নে গ্যাসের গতিতত্ত্বের কয়েকটি প্রয়োগ আলোচনা করা হলো।

১। **বয়েল-এর সূত্র (Boyle's law) :** গ্যাসের গতিতত্ত্বের সাহায্যে বয়েল-এর সূত্র প্রতিপাদন করা যায়। **বয়েল-এর সূত্র অনুযায়ী সুষম তাপমাত্রায় একটি নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের আয়তন এর চাপের ব্যস্তানুপাতিক।**

মনে করি T পরম তাপমাত্রায় একটি নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের আয়তন V এবং চাপ P

$\therefore$ বয়েল-এর সূত্র হতে পাই,

$P \propto \frac{1}{V}$, যখন T স্থির থাকে

বা, $P =$ ধ্রুব সংখ্যা $\times \frac{1}{V}$

বা, $PV =$ ধ্রুব সংখ্যা

পুনরায় গতিতত্ত্ব অনুসারে গ্যাসের চাপ,

$P = \frac{1}{3}\frac{mnc^2}{V}$ [সমীকরণ 10.23 দ্রষ্টব্য]

বা, $PV = \frac{1}{3}mnc^2 = \frac{1}{3}M.c^2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}Mc^2 = \frac{2}{3}E$ ... ... (10.24)

$\therefore$ $P = \frac{2}{3}\frac{E}{V}$

এখানে, $E =$ গ্যাস অণুসমূহের মোট গতিশক্তি। সুতরাং গ্যাসের চাপ একক আয়তনের গতিশক্তির দুই-তৃতীয়াংশ।

অণুসমূহের গতিশীলতার দরুন কোনো বস্তু তাপ প্রাপ্ত হয় অর্থাৎ তাপ গতিরই একটি ভিন্ন রূপ। তাপমাত্রা স্থির থাকলে নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের তাপের পরিমাণ স্থির থাকে। ফলে মোট গতিশক্তিও স্থির থাকে। অতএব স্থির তাপমাত্রায় মোট গতিশক্তি K. E. $= \frac{1}{2}mnc^2 =$ ধ্রুব সংখ্যা।

পুনঃ, তাপমাত্রা স্থির থাকলে $PV =$ ধ্রুব সংখ্যা। এটিই হলো বয়েল-এর সূত্র। গ্যাসের গতিতত্ত্ব হতে এটি প্রমাণিত হলো।

২। **চার্লস-এর সূত্র (Charles's law) :**

আদর্শ গ্যাসের সমীকরণ হতে পাই,

$PV = RT$ ... ... (i)

আবার, আদর্শ গ্যাসের সমীকরণ (10.22) হতে আমরা জানি,

$PV = \frac{1}{3}Nmc^2$ ... ... (ii)

এখানে N = এক গ্রাম অণু গ্যাসের অণুর সংখ্যা। একে অ্যাভোগ্যাড্রোর সংখ্যা বলে।

∴ সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$\frac{1}{3}Nmc^2 = RT$, বা, $Nmc^2 = 3RT$

বা, $\frac{1}{2}Nmc^2 = \frac{3}{2}RT$

∴ গতিশক্তি, $E = \frac{1}{2}mc^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{R}{N}\right)T = \frac{3}{2}KT$

বা, $mc^2 = 3\ KT$

সমীকরণ (ii)-এ মান বসিয়ে পাই,

$$PV = \frac{1}{3}N \times 3\,KT = 3NKT \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (iii)$$

এখন চাপ স্থির থাকলে,

$V \propto T$ ($\because$ N ও K ধ্রুবক)

অর্থাৎ চাপ স্থির থাকলে নির্দিষ্ট পরিমাণ গ্যাসের আয়তন এর পরম তাপমাত্রার সমানুপাতিক। এটিই চার্লস-এর সূত্র। অতএব গ্যাসের গতিতত্ত্ব হতে চার্লস-এর সূত্র প্রমাণিত হলো।

৩। চাপের সূত্র (Law of pressure) : আদর্শ গ্যাসের সমীকরণ হতে আমরা পাই,

$PV = RT$

আমরা আরও জানি,

$PV = \frac{1}{3}Nmc^2$, এখানে N = এক গ্রাম-অণু গ্যাসের অণুর সংখ্যা যাকে অ্যাভোগ্যাড্রো সংখ্যা বলে।

$N = 6.0222 \times 10^{26}$ অণু/কিলোমোল। m = একটি অণুর ভর $= \frac{M}{N}$

∴ $\frac{1}{3}Nmc^2 = RT$

বা, $mc^2 = 3\frac{R}{N}T = 3KT$, এখানে K = বোল্‌জম্যান ধ্রুবক $= 1.381 \times 10^{-23}\ J\ K^{-1}$

বর্ণনা অনুযায়ী 2 kg হাইড্রোজেনে, 32 kg অক্সিজেনে, 28 kg নাইট্রোজেন, 12 kg কার্বনে প্রত্যেক ক্ষেত্রে 6.0222×10^{26} অণু থাকবে।

∴ $PV = \frac{1}{3}Nmc^2$ সমীকরণ হতে পাই

$$PV = \frac{1}{3}N \times 3KT = NKT \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (10.25)$$

উপরের সমীকরণে N ও K ধ্রুব সংখ্যা। অতএব স্থির আয়তনে, $P \propto T$.

∴ **আয়তন স্থির থাকলে নির্দিষ্ট পরিমাণ গ্যাসের চাপ পরম তাপমাত্রার সমানুপাতিক। এটিই হলো চাপের সূত্র।** অতএব গতিতত্ত্ব হতে চাপের সূত্র প্রমাণিত হলো।

নিজে কর : পরম শূন্য তাপমাত্রায় গ্যাস অণুর বেগ শূন্য। কারণ কী?

গ্যাস অণুগুলোর মধ্যে পারস্পরিক আকর্ষণ বল না থাকায় এদের স্থিতিশক্তি শূন্য। আমরা জানি, একটি অণুর মোট শক্তি = এর গতিশক্তি $= \frac{3}{2}KT$। পরম শূন্য তাপমাত্রায় অর্থাৎ T = 0 হলে গ্যাস অণুর মোট শক্তি শূন্য। সুতরাং অণুটির গতিশক্তি বা গতিবেগও শূন্য।

৪। আদর্শ গ্যাসের সমীকরণ (Ideal gas equation) : গ্যাসের গতিতত্ত্ব হতে আদর্শ গ্যাস সমীকরণ প্রতিপাদন করা যায়।

গ্যাসের গতিতত্ত্ব অনুযায়ী, কোনো গ্যাসের তাপশক্তি তার অণুগুলোর গতিশক্তির ফলশ্রুতি। পরম শূন্য তাপমাত্রায় কোনো গ্যাসের অণুগুলোর তাপশক্তি শূন্য হয়। ফলে গ্যাসের অণুগুলোর গতিশক্তি এবং গড় বর্গবেগের বর্গমূল-এর মানও শূন্য হয়। কোনো গ্যাসে তাপ প্রয়োগ করলে, এটি গ্যাসের অণুসমূহের গতিশক্তি হিসেবে প্রকাশ পায়।

$$\therefore \quad K.E. = \frac{1}{2}mnc^2 = \frac{1}{2}Mc^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (10.26)$$

এখানে, m = প্রতিটি অণুর ভর, n = অণুর সংখ্যা, c = গড় বর্গবেগের বর্গমূল এবং $M = mn$ = গ্যাসের ভর।

আমরা পূর্বেই দেখেছি যে, কোনো গ্যাসের ক্ষেত্রে অণুর গড় গতিশক্তি পরম তাপমাত্রার সমানুপাতিক।

∴ আমরা পাই,

$$\frac{1}{2}mnc^2 \propto T$$

বা, $\frac{1}{2}Mc^2 \propto T$

বা, $\frac{1}{2}Mc^2 = KT$

এখানে K = সমানুপাতিক ধ্রুবক।

কিন্তু গ্যাসের চাপের রাশিমালা হতে আমরা পাই,

$$P = \frac{1}{3}\frac{mnc^2}{V} = \frac{1}{3}\frac{Mc^2}{V}$$

বা, $PV = \frac{1}{3}Mc^2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}Mc^2 = \frac{2}{3}KT$

বা, $PV = RT$ ... ... (10.27)

এখানে, $R = \frac{2}{3}K$ = একটি ধ্রুব সংখ্যা।

∴ PV = RT সমীকরণকে আদর্শ গ্যাসের সমীকরণ বলে।

এখানে উল্লেখ থাকে যে, V = এক গ্রাম অণু গ্যাসের আয়তন। যদি n গ্রাম অণু গ্যাস বিবেচনা করা হয়, তবে আদর্শ গ্যাস সমীকরণ হয় $PV = nRT$। গ্যাসের গতিতত্ত্ব হতে এটি প্রমাণিত হলো।

বাস্তব গ্যাস আদর্শ গ্যাসের অবস্থার সমীকরণ, PV = RT সর্বদা মেনে চলে না। শুধুমাত্র উচ্চ তাপমাত্রা এবং নিম্ন চাপে বাস্তব গ্যাস আদর্শ গ্যাস সমীকরণ অনুসরণ করে।

স্বাভাবিক তাপমাত্রা ও চাপে বাস্তব গ্যাস আদর্শ গ্যাস সমীকরণ অনুসরণ না করার মূল কারণ নিম্নরূপ :

গতিতত্ত্ব থেকে আদর্শ গ্যাস সমীকরণ প্রতিপাদন করার সময় গ্যাস অণুগুলিকে শুধুমাত্র বিন্দু ভর (point mass) ধরা হয়। অর্থাৎ অণুগুলোর আয়তন বিবেচনা করা হয়নি। এছাড়া গ্যাস অণুগুলোর মধ্যকার আকর্ষণ বল বিবেচনা করা হয়নি। বিখ্যাত ওলন্দাজ পদার্থবিদ ভ্যান ডার ওয়ালস (Van der Waals) গ্যাস অণুগুলোর সীমিত আকার এবং এদের মধ্যকার আন্তঃআণবিক বল বিবেচনা করে আদর্শ গ্যাস সমীকরণটি নিম্নরূপ সংশোধন করেন :

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (10.28)$$

এখানে a ও b রাশিদ্বয় যে কোনো নির্দিষ্ট গ্যাসের জন্য ধ্রুব, তবে সব গ্যাসের জন্য একই মানের নয়।

নিজে কর : বাস্তব গ্যাসের জন্য ভ্যান ডার ওয়ালস-এর অবস্থার সমীকরণ গঠনে কোন দুটি বিষয় বিবেচনা করা হয়?

(i) বাস্তব গ্যাসের অণুগুলোর নির্দিষ্ট আকার আছে অর্থাৎ তাদের আয়তন নগণ্য নয়।

(ii) অণুগুলির মধ্যে আকর্ষণ বল সম্পূর্ণ উপেক্ষণীয় নয়। এই দুটি বিষয় গণ্য করা হয়।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : নিম্নচাপে বাস্তব গ্যাস আদর্শ গ্যাসের ন্যায় আচরণ করে কেন—ব্যাখ্যা কর।

কোনো একটি আবদ্ধ পাত্রে নিম্নচাপে গ্যাস রাখার অর্থ হলো যে গ্যাস অণুর সংখ্যা খুব কম এবং গ্যাস অণুগুলোর মধ্যে আন্তঃআণবিক দূরত্ব অনেক বেশি থাকে। গ্যাস অণুর সংখ্যা কম হওয়ায় অণুগুলোর মোট আয়তন পাত্রের আয়তনের তুলনায় নগণ্য হয়। আবার আন্তঃআণবিক দূরত্ব বেশি হওয়ায় এদের মধ্যে আন্তঃআণবিক বল অত্যন্ত কম হয়। ফলে নিম্নচাপে বাস্তব গ্যাস আদর্শ গ্যাসের ন্যায় আচরণ করে।

যাচাই কর : স্বাভাবিক তাপমাত্রা ও চাপে বাস্তব গ্যাস আদর্শ গ্যাস সমীকরণ অনুসরণ করে না কেন ?

১০.১৪ গতিসূত্র প্রয়োগ করে পারস্পরিক সম্পর্ক প্রতিপাদন
Derivation of mutual relations applying kinetic theory

(i) চাপ ও আয়তনের সাথে ঘনত্বের সম্পর্ক

আদর্শ গ্যাসের গতীয় সমীকরণ থেকে জানি $PV = \frac{1}{3}mnc^2$ বা, $PV = \frac{1}{3}Mc^2$

বা, $P = \frac{1}{3}\frac{M}{V}c^2 = \frac{1}{3}\rho c^2$ [∵ ঘনত্ব, $\rho = \frac{M}{V}$]

বা, $c = \sqrt{\frac{3P}{\rho}}$

(ii) গ্যাসের চাপ একক আয়তনের গতিশক্তির দুই তৃতীয়াংশ

যেহেতু $PV = \frac{1}{3}Mc^2$

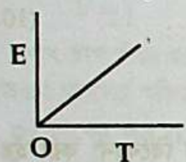
বা, $P = \frac{1}{3}\frac{M}{V}c^2 = \frac{2}{3} \times \frac{\frac{1}{2}Mc^2}{V} = \frac{2}{3} \times \frac{E}{V}$

$\therefore$ চাপ $= \frac{2}{3} \times \frac{\text{গতিশক্তি}}{\text{আয়তন}}$

অর্থাৎ একক আয়তনের গতিশক্তি চাপের $\frac{2}{3}$ অংশ। ... ... (10.29)

(iii) $E = \frac{3}{2}RT$

যেহেতু $PV = \frac{1}{3}Mc^2$ আবার এক মোল গ্যাসের জন্য আদর্শ গ্যাস সূত্র $PV = RT$,



লেখচিত্র (ক)

$\therefore \frac{1}{3}Mc^2 = RT$

বা, $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}Mc^2 = \frac{1}{2}RT$

বা, $\frac{1}{2}Mc^2 = \frac{3}{2}RT$

বা, $E = \frac{3}{2}RT$, লেখচিত্র (ক) এ E ও T এর পরিবর্তন দেখানো হলো।

$\therefore$ 1 গ্রাম অণু গ্যাসের গতিশক্তি $= \frac{3}{2}RT$. ... ... (10.30)

অর্থাৎ, $E \propto T$। তাই $T = 0$ হলে $E = 0$ হয়। এ থেকে পরম শূন্য তাপমাত্রার সংজ্ঞা নিম্নরূপ :

যে তাপমাত্রায় গ্যাসের শক্তি শূন্য হয়, অর্থাৎ অণুগুলি গতিহীন হয় তাকে পরম শূন্য তাপমাত্রা বলা হয়।

(iv) মূল গড় বর্গবেগ পরম তাপমাত্রার বর্গমূলের সমানুপাতিক

আমরা জানি $PV = \frac{1}{3}Mc^2$

আবার আদর্শ গ্যাস সূত্র থেকে 1 মোল গ্যাসের জন্য $PV = RT$

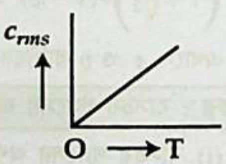
$\therefore \frac{1}{3}Mc^2 = RT$ বা, $c^2 = 3\frac{R}{M}T$

বা, $\sqrt{c^2} = c_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$

এখানে $\frac{R}{M} =$ ধ্রুবক

$\therefore c^2 =$ ধ্রুবক $\times T$

$\sqrt{c^2} =$ ধ্রুবক $\sqrt{T}$ বা $c_{rms} \propto \sqrt{T}$ ... ... (10.31)



লেখচিত্র (খ)

লেখচিত্র (খ) এ c_{rms} এবং তাপমাত্রার পরিবর্তন দেখানো হলো।

$\therefore$ মূল গড় বর্গবেগ পরম তাপমাত্রার বর্গমূলের সমানুপাতিক।

(v) $E' = \frac{3}{2}KT$

এখানে একটি অণুর গতি $= E'$

আমরা জানি, $\frac{1}{2}Mc^2 = \frac{3}{2}RT \quad \therefore \frac{1}{2}\frac{M}{N}c^2 = \frac{3}{2}\frac{R}{N}T$

N = অ্যাভোগ্যাড্রো সংখ্যা = এক গ্রাম অণু গ্যাসে অণুর সংখ্যা বুঝায়।

$\frac{1}{2}mc^2 = \frac{3}{2}KT$

আবার $E' = \frac{3}{2}KT$, এখানে E' একটি অণুর গতিশক্তি

$\therefore$ একটি অণুর গতিশক্তি $= \frac{3}{2} \times$ বোল্‌জম্যান ধ্রুবক $\times$ পরম তাপমাত্রা ... ... (10.32)

K = বোল্‌জম্যান ধ্রুবক $= 1.38 \times 10^{-23}\ JK^{-1}$

আবার n সংখ্যক অণুর গড় গতিশক্তি, $E = \frac{3}{2}nKT$।

সুতরাং কোনো নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের ক্ষেত্রে একটি অণুর গতিশক্তি পরম তাপমাত্রার সমানুপাতিক অর্থাৎ গ্যাসের সুষম তাপমাত্রার মূল কারণ এর অণুগুলোর মধ্যে গতিশক্তির সুষম বণ্টন। গড় গতিশক্তি বৃদ্ধি পেলে তাপমাত্রা বৃদ্ধি পাবে। আবার গড় গতিশক্তি হ্রাস পেলে তাপমাত্রা হ্রাস পাবে। অতএব পরম শূন্য তাপমাত্রায় অণুর গতিশক্তি শূন্য হবে। এটিই হলো গতিতত্ত্ব অনুযায়ী তাপমাত্রার ব্যাখ্যা।

গাণিতিক উদাহরণ ১০.৩

১। স্বাভাবিক তাপমাত্রা ও চাপে নাইট্রোজেনের ঘনত্ব $1.25\ kgm^{-3}$।

(i) অণুগুলোর গড় বর্গবেগের বর্গমূল বের কর। [ঢা. বো. ২০১১, ২০০৮; চ. বো. ২০০৩]

(ii) 100°C তাপমাত্রায় নাইট্রোজেন অণুর গড় বর্গবেগের বর্গমূল নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০০৮; য. বো. ২০০৭; ঢা. বো. ২০০২]

এখানে,
স্বাভাবিক চাপ, $P = 1.013 \times 10^5\ Nm^{-2}$
স্বাভাবিক তাপমাত্রা, $T = 273K$
ঘনত্ব, $\rho = 1.25\ kgm^{-3}$
(i) স্বাভাবিক তাপমাত্রায়, $c_{rms} = ?$
(ii) তাপমাত্রা, $T_1 = 100°C = (100 + 273)\ K = 373K$
$c_{1\,rms} = ?$

(i) আমরা জানি,

$$c_{rms} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}} = \sqrt{\frac{3 \times 1.013 \times 10^5}{1.25}} = 493.07\ ms^{-1}$$

(ii) আবার, $c_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$

এবং $c_{1\,rms} = \sqrt{\frac{3RT_1}{M}}$ $\therefore \frac{c_{1\,rms}}{c_{rms}} = \sqrt{\frac{T_1}{T}}$

$$\therefore c_{1\,rms} = c_{rms}\sqrt{\frac{T_1}{T}} = 493.07 \times \sqrt{\frac{373}{273}} = 576.34\ ms^{-1}$$

২। স্থির চাপে কোন তাপমাত্রায় কোনো গ্যাসের অণুর মূল গড় বর্গবেগ প্রমাণ চাপ ও তাপমাত্রার মূল গড় বর্গবেগের অর্ধেক হবে? [সি. বো. ২০১১; য. বো. ২০০৩]

এখানে,
$c_{2\,rms} = \frac{1}{2} c_{1\,rms}$
প্রমাণ তাপমাত্রা, $T_1 = 273\ K$
নির্ণেয় তাপমাত্রা, $T_2 = ?$

আমরা জানি,

$$c = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

$$\therefore c_{1\,rms} = \sqrt{\frac{3RT_1}{M}}$$

এবং $c_{2\,rms} = \sqrt{\frac{3RT_2}{M}}$

অতএব, $\frac{c_{2\,rms}}{c_{1\,rms}} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$

বা, $\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$

বা, $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$$\therefore T_2 = \frac{1}{4} \times T_1 = \frac{1}{4} \times 273 = 68.25\ K$$

৩। কত ডিগ্রি সেলসিয়াস তাপমাত্রায় অক্সিজেন অণুর মূল গড় বর্গবেগ $-100°C$ তাপমাত্রায় হাইড্রোজেন অণুর মূল গড় বর্গবেগের সমান হবে ? [BUET Admission Test, 2017-18]

আমরা জানি,

$$c_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

প্রশ্নানুসারে,

$$\sqrt{\frac{3RT_{O_2}}{M_{O_2}}} = \sqrt{\frac{3R_{H_2}}{M_{H_2}}}$$

$$\therefore T_{O_2} = \frac{T_{H_2}M_{O_2}}{M_{H_2}} = \frac{173 \times 32}{2} = 2768 \text{ K}$$

এখানে,
$T = -100°C = 273 - 100$
$= 173$ K
$M_{O_2} = 32$ kg/K mole

৪। 29°C তাপমাত্রায় 3g নাইট্রোজেন গ্যাসের মোট গতিশক্তি নির্ণয় কর। [নাইট্রোজেনের গ্রাম আণবিক ভর 28 g] [কু. বো. ২০০৩]

আমরা জানি, n মোল গ্যাসের গতিশক্তি,

$$K.E. = \frac{3}{2}nRT = \frac{3}{2}\frac{m}{M}RT$$

$$\therefore K.E. = \frac{3}{2} \times \frac{3}{28} \times 8.31 \times 302 = 403 \text{ J}$$

এখানে, $m = 3$ g
$M = 28$ g
$R = 8.31$ J K^{-1} mol^{-1}
$T = (273 + 29)$ K $= 302$ K
K.E. = ?

৫। 27°C তাপমাত্রায় প্রতি গ্রাম অণু হিলিয়াম গ্যাসের গতিশক্তি নির্ণয় কর। [$R = 8.3$ JK^{-1} mol^{-1}]
[ব. বো. ২০১১; কু. বো. ২০১০; চ. বো. ২০০৭; ঢা. বো. ২০০৩]

আমরা জানি,

একটি পরমাণুর গতিশক্তি $= \frac{3}{2}RT$
$= \frac{3}{2} \times 8.3 \times 300$
$= 3735$ J mol^{-1}

এখানে,
$R = 8.3$ JK^{-1} mol^{-1}
$T = (273 + 27)$ K $= 300$ K

৬। 27°C তাপমাত্রায় দুটি হিলিয়াম পরমাণুর গতিশক্তি বের কর। [$K = 1.38 \times 10^{-23}$ JK^{-1}]

আমরা জানি,

একটি পরমাণুর গতিশক্তি, $E = \frac{3}{2}KT$

দুটি পরমাণুর গতিশক্তি, $E = 2 \times \frac{3}{2}KT$
$= 2 \times \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300$
$= 12.42 \times 10^{-21}$ J
$= 1.242 \times 10^{-20}$ J

এখানে,
$T = (27 + 273)$ K $= 300$ K
বোল্টজম্যান ধ্রুবক,
$K = 1.38 \times 10^{-23}$ JK^{-1}

৭। 27°C তাপমাত্রার গ্যাসকে কত তাপমাত্রায় নেওয়া হলে গড় বেগ দ্বিগুণ হবে ?

আমরা জানি,

$$\frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \sqrt{\frac{T_2}{300}}$$

বা, $\frac{2c_1}{c_1} = \sqrt{\frac{T_2}{300}}$ বা, $2 = \sqrt{\frac{T_2}{300}}$

বা, $4 = \frac{T_2}{300}$

$\therefore T_2 = 4 \times 300 = 1200$ K

এখানে,
$T_1 = 27°$ C $= 27 + 273$
$= 300$ K
প্রাথমিক গড় বেগ $= c_1$
চূড়ান্ত গড় বেগ, $c_2 = 2c_1$

৮। কোন উষ্ণতায় একটি গ্যাস অণুর গড় রৈখিক গতিশক্তি, একটি ইলেকট্রন 8 V বিভব পার্থক্যের মধ্য দিয়ে গেলে যে গতিশক্তি অর্জন করে তার সমান হয় ? [$K = 1.38 \times 10^{-23}$ JK^{-1}, 1 eV = 1.6×10^{-19} J]

একটি ইলেকট্রন 8 V বিভব পার্থক্যের মধ্য দিয়ে গেলে তার

গতিশক্তি, $E_e = 8\,eV = 8 \times 1.6 \times 10^{-19}\,J = 12.8 \times 10^{-19}\,J$

আবার, গ্যাসের এক অণুর গতিশক্তি, $E_a = \frac{3}{2}KT = \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23}\,T\,J$

প্রশ্নানুসারে,

$$\frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times T = 12.8 \times 10^{-19}$$

বা, $$T = \frac{12.8 \times 2 \times 10^{-19}}{3 \times 1.38 \times 10^{-23}}$$

$$= 61.83 \times 10^3\,K$$

৯। 30° C তাপমাত্রায় একটি অক্সিজেন অণুর রৈখিক গতিশক্তি এবং ওই একই তাপমাত্রায় একটি অক্সিজেন অণুর মোট গতিশক্তি নির্ণয় কর। এক মোল অক্সিজেনের মোট গতিশক্তি কত ?

[$N_A = 6.023 \times 10^{23}$ এবং $K = 1.38 \times 10^{-23}$ JK^{-1}]

একটি অক্সিজেন অণুর রৈখিক গতিশক্তি,

$$E = \frac{3}{2}KT$$

$$= \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 303\,J$$

বা, $E = 6.27 \times 10^{-21}\,J$

এখানে,
$T = 30°C = (30 + 273) = 303\,K$
$N_A = 6.023 \times 10^{23}$
$K = 1.38 \times 10^{-23}\,JK^{-1}$

ওই তাপমাত্রায় অক্সিজেন অণুর মোট গতিশক্তি,

$$E' = \frac{5}{2}KT \quad (\because O_2 \text{ দ্বিপারমাণবিক গ্যাস})$$

$$= \frac{5}{2} \times 1.38 \times 10^{23} \times 303$$

$$= 10.45 \times 10^{-21}\,J$$

এক মোল অক্সিজেনের মোট গতিশক্তি,

$$E'' = N_A E' = 6.023 \times 10^{23} \times 10.45 \times 10^{-21}$$

$$= 6294\,J\,mole^{-1}$$

১০। একটি গ্রহের তাপমাত্রা 527° C এবং ঘনত্ব 5.5×10^3 kgm^{-3}। যদি ওই গ্রহ তার বায়ুমণ্ডলে অক্সিজেন গ্যাস ধরে রাখতে সক্ষম হয় তাহলে এর ন্যূনতম ব্যাসার্ধ কত হবে ? [দেওয়া আছে, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}, গ্যাস ধ্রুবক $R = 8.31$ J mol^{-1}K^{-1}]

M ভরের এবং r ব্যাসার্ধের কোনো গ্রহের পৃষ্ঠে বস্তুর মুক্তিবেগ,

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2G}{r}}\sqrt{\frac{4}{3}}\pi r^3 \rho \quad [\because \rho = \text{গ্রহের ঘনত্ব}]$$

$$\therefore \quad v_e = 2\sqrt{\frac{2}{3}G\pi r^2 \rho} \quad \dots \quad \dots \quad (i)$$

এখানে,
$T = 527°\,C = 527 + 273 = 800\,K$
ঘনত্ব, $\rho = 5.5 \times 10^3\,kgm^{-3}$
$G = 6.67 \times 10^{-11}\,Nm^2\,kg^{-2}$
$R = 8.31\,J\,mol^{-1}K^{-1}$

এখন কোনো গ্যাসের rms বেগের রাশিমালা,

$$c = \sqrt{\frac{3RT}{M_1}} \quad \dots \quad \dots \quad (ii)$$

[এখানে, M_1 = অক্সিজেন গ্যাসের আণবিক ভর = 32×10^{-3} kg এবং T = গ্যাসের পরম তাপমাত্রা]

প্রশ্নানুসারে,

$$v_e = c$$

$$\therefore \quad 2\sqrt{\frac{2}{3}G\pi r^2\rho} = \sqrt{\frac{3RT}{M_1}}$$

$$\therefore \quad r^2 = \frac{9\,RT}{8\,G\pi\rho M_1}$$

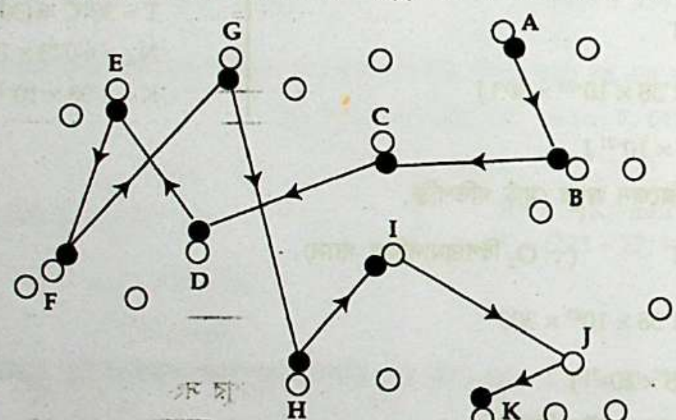
বা, $$r = \sqrt{\frac{9\,RT}{8\,G\pi\rho M_1}}$$

$$\therefore \quad r = \sqrt{\frac{9 \times 8.31 \times 800}{8 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 3.14 \times 5.5 \times 10^3 \times 32 \times 10^{-3}}}\ \text{m}$$

$$= 4.51 \times 10^5\ \text{m} = 450\ \text{km}$$

১০.১৫ গড় মুক্ত পথ
Mean free path

গ্যাসের গতিতত্ত্ব হতে আমরা জানি যে, গ্যাসের অণুগুলো অবিরত বিক্ষিপ্ত গতিতে চারদিকে ছুটাছুটি করছে এবং পরস্পরের সাথে ও আধারে দেয়ালের সাথে ধাক্কা খাচ্ছে। অণুগুলোর পরস্পরের মধ্যে কোনো আকর্ষণ বল নেই। তাই



চিত্র ১০.৬

তাদের বেগ অপরিবর্তিত থাকে। পর পর দুটি ধাক্কার ভিতর অণুগুলো সরলরেখায় যতটুকু পথ গমন করে তাকে মুক্ত পথ (free path) বলে। চিত্রে A একটি অণু। এটি অপর একটি অণু B-কে ধাক্কা দিয়ে BC পথে চলে গেল এবং C স্থানে গিয়ে অপর একটি অণুর সাথে ধাক্কা খেল। অণুটি যদি D স্থানে গিয়ে অপর একটি অণুর সাথে, E স্থানে গিয়ে আর একটি অণুর সাথে ধাক্কা খায় ইত্যাদি [চিত্র ১০.৬] তাহলে BC, CD, DE হলো এক একটি মুক্ত পথ। এই মুক্ত পথের দৈর্ঘ্য সব সময় সমান হয় না। সেজন্য গড় মুক্ত পথ নেয়া হয়। পর পর ধাক্কাগুলোর ভিতর একটি অণু যে গড় দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে গড় মুক্ত পথ বলে।

ধরি, A হতে B-এর দূরত্ব $= S_1$

B হতে C-এর দূরত্ব $= S_2$

C হতে D-এর দূরত্ব $= S_3$

যদি মোট S দূরত্ব অতিক্রান্তে N সংখ্যক ধাক্কা সংঘটিত হয়, তবে ওই গ্যাস অণুর গড় মুক্ত পথ,

$$\lambda = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + \dots\dots + S_n}{N} = \frac{S}{N} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (10.33)$$

$$= \frac{\text{মোট অতিক্রান্ত পথ}}{\text{ধাক্কার সংখ্যা}}$$

বিজ্ঞানী ক্লসিয়াস (Clausius) গড় মুক্ত পথের গাণিতিক রাশিমালা বের করেন। উক্ত রাশিমালা নির্ণয় করতে গিয়ে তিনি এই স্বীকার্য গ্রহণ করেন যে, একটি মাত্র অণু ছুটছে এবং বাকি অণুসমূহ স্থিরাবস্থায় আছে।

জানার বিষয় : ব্রাউনীয় গতিসূত্রের আবিষ্কারক আইনস্টাইন।

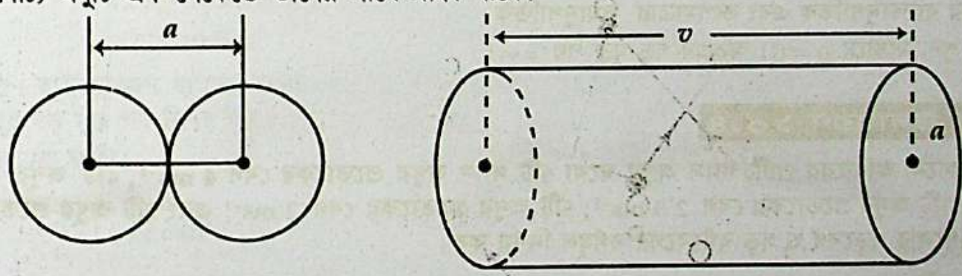
১০.১৬ অণুর ব্যাস এবং গড় মুক্ত পথের মধ্যে সম্পর্ক
Relation between the diameter of a molecule and mean free path

গ্যাসের গতিতত্ত্ব হতে আমরা জানি যে, গ্যাসের অণুগুলো সর্বদা পরস্পরের সাথে এবং আধারের দেয়ালের সাথে ধাক্কা খায়। অণুগুলোর পরস্পরের মধ্যে আকর্ষণ বল না থাকায়, তাদের বেগের কোনো পরিবর্তন ঘটে না। সংঘর্ষের ফলে অণুগুলো সমবেগে সরলরেখায় গমন করে। পর পর ধাক্কাগুলোর ভিতর অণু যে গড় দূরত্ব অতিক্রম করে, তাকে গড় মুক্ত পথ বলে। যদি কোনো গ্যাস অণু N সংখ্যক ধাক্কার পর S দূরত্ব অতিক্রম করে, তবে তার গড় মুক্ত পথ

$$\lambda = \frac{\text{মোট দূরত্ব}}{\text{মোট ধাক্কার সংখ্যা}} = \frac{S}{N}$$

গ্যাস অণুর সংখ্যা এবং অণুগুলোর ব্যাসের সাপেক্ষে গড় মুক্ত পথের রাশিমালা বের করা যায়। বিজ্ঞানী ক্লসিয়াস গড় মুক্ত পথের গাণিতিক রাশিমালা প্রতিপাদন করেন। এই রাশিমালা প্রতিপাদন করতে গিয়ে তিনি একটি মাত্র অণুর গতি বিবেচনা করেন এবং অন্য অণুগুলোকে স্থির মনে করেন।

মনে করি প্রতি একক আয়তনে n সংখ্যক অণু আছে এবং প্রতিটি অণুর ব্যাস a। আরও মনে করি একটি অণু v বেগে ছুটছে। আলোচ্য অণুটির কেন্দ্রবিন্দুকে কেন্দ্র করে 'a' ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অংকন করি। এই বৃত্তের উপর v দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি চোঙ বিবেচনা করি [চিত্র ১০.৭]। চোঙটির আয়তন $= \pi a^2 v$। এই চোঙের মধ্যে যে সব অণুর কেন্দ্র থাকবে আলোচ্য অণুটি এক সেকেন্ডে তাদের সাথে ধাক্কা খাবে।



চিত্র ১০.৭

$\therefore$ প্রতি একক আয়তনে অণুর সংখ্যা n হলে চোঙটির মধ্যে অণুর সংখ্যা $= \pi a^2 v n$। আলোচ্য অণুটি যদি প্রতি সেকেন্ডে N সংখ্যক অণুর সাথে ধাক্কা খায়, তবে আমরা বলতে পারি প্রতি সেকেন্ডে অণুর ধাক্কার সংখ্যা = N

$\therefore$ দুটি ধাক্কার মধ্যে সময় $= \dfrac{1}{\pi a^2 v n}$ সেকেন্ড

সুতরাং দুটি ধাক্কার মধ্যবর্তী গড় দূরত্ব $= \dfrac{1}{\pi a^2 v n} \times v$

$$= \frac{1}{\pi a^2 n}$$

$\therefore$ গড় মুক্ত পথ, $\lambda = \dfrac{1}{\pi a^2 n}$ ... ... (10.34)

বিজ্ঞানী ক্লসিয়াস এই রাশিমালাটি প্রতিষ্ঠা করেন। উক্ত রাশিমালা হতে জানা যায় যে, গড় মুক্ত পথ একক আয়তনে অণুর সংখ্যার ব্যস্তানুপাতিক এবং আণবিক ব্যাসের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক।

সমীকরণ (10.34)-এর ডানপক্ষের হর ও লবকে m দ্বারা গুণ করে পাই,

$\lambda = \dfrac{m}{\pi a^2 m n} = \dfrac{m}{\pi a^2 \rho}$ [$\because mn$ = একক আয়তনের গ্যাস অণুগুলোর ভর = গ্যাসের ঘনত্ব $= \rho$]

m, π ও a ধ্রুব,

$\therefore \lambda \propto \dfrac{1}{\rho}$

অর্থাৎ, গড় মুক্ত পথ গ্যাসের ঘনত্বের ব্যস্তানুপাতিক।

পুনঃ গ্যাসের ঘনত্ব 'ρ' গ্যাসের চাপের সমানুপাতিক এবং তাপমাত্রার ব্যস্তানুপাতিক। যেহেতু $\lambda \propto \frac{1}{\rho}$, অতএব গড় মুক্ত পথ গ্যাসের চাপের ব্যস্তানুপাতিক এবং তাপমাত্রার সমানুপাতিক।

বিজ্ঞানী ক্লসিয়াস গড় মুক্ত পথের রাশিমালা প্রতিষ্ঠা করতে স্বীকার্য গ্রহণ করেন যে একটি মাত্র অণু গতিশীল এবং অন্য অণুগুলো স্থির। কিন্তু প্রকৃতপক্ষে সকল অণুই গতিশীল। পরে ম্যাক্সওয়েল তার বেগ বণ্টন সূত্র অবলম্বনে গড় মুক্ত পথের নিম্নোক্ত রাশিমালা নির্ণয় করেন,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi a^2 n} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (10.35)$$

গড় মুক্ত পথ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে সাধারণত সমীকরণ (10.35) ব্যবহার করা হয়।

১০.১৭ গড় মুক্ত পথের নির্ভরশীলতা
Dependence of mean free path

গড় মুক্ত পথের সমীকরণ, $\lambda = \frac{1}{\pi a^2 n}$ হতে দেখা যাচ্ছে—

(i) $\lambda \propto \frac{1}{n}$। অর্থাৎ গড় মুক্ত পথ একক আয়তনে অণুর সংখ্যার ব্যস্তানুপাতিক।

(ii) $\lambda \propto \frac{1}{a^2}$। অর্থাৎ গড় মুক্ত পথ অণুর ব্যাসের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক। গ্যাস অণুগুলির ব্যাস যত ছোট হবে, গড় মুক্ত পথ তত বেশি হবে। আবার, গ্যাসের ঘনত্ব ρ একক আয়তনে অণুর সংখ্যা n-এর সমানুপাতিক। কিন্তু গ্যাসের ঘনত্ব গ্যাসের চাপের সমানুপাতিক এবং তাপমাত্রার ব্যস্তানুপাতিক। যেহেতু মুক্ত গড় পথ, $\lambda \propto \frac{1}{n}$, অতএব মুক্ত গড় পথ গ্যাসের চাপের ব্যস্তানুপাতিক এবং তাপমাত্রার সমানুপাতিক।

(iii) শূন্য মাধ্যমে $\rho = 0$। অতএব গড় মুক্ত পথ $= \infty$।

গাণিতিক উদাহরণ ১০.৪

১। কোনো আধারের 20টি গ্যাস অণুর মধ্যে 6টি গ্যাস অণুর প্রত্যেকের বেগ 4 ms⁻¹, 4টি অণুর প্রত্যেকের বেগ 3 ms⁻¹, 3টি অণুর প্রত্যেকের বেগ 2.5 ms⁻¹, 5টি অণুর প্রত্যেকের বেগ 2 ms⁻¹ এবং 2টি অণুর প্রত্যেকের বেগ 1 ms⁻¹। অণুগুলোর গড়বেগ ও গড় বর্গবেগের বর্গমূল নির্ণয় কর।

প্রশ্নানুযায়ী,

$$\text{গড় বেগ, } \langle v \rangle = \frac{6\times4+4\times3+3\times2.5+5\times2+2\times1}{6+4+3+5+2} = 2.775 \text{ ms}^{-1}$$

$$\text{ও গড় বর্গবেগের বর্গমূল, } c = \sqrt{\frac{6\times4^2+4\times3^2+3\times2.5^2+5\times2^2+2\times1^2}{6+4+3+5+2}} = 2.939 \text{ ms}^{-1}$$

২। কোনো একটি গ্যাসের অণুগুলোর গড় মুক্তপথ 6×10^{-8} m ও অণুর ব্যাস 2.5×10^{-10} m। প্রতি ঘনমিটারে অণুর সংখ্যা নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi a^2 n}$$

$$\text{বা, } n = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi a^2 \lambda}$$

$$\therefore n = \frac{1}{\sqrt{2}\times3.14\times(2.5\times10^{-10})^2\times6\times10^{-8}} = \frac{1000\times10^{25}}{\sqrt{2}\times3.14\times2.5\times2.5\times6} = 6\times10^{25}\text{ m}^{-3}$$

এখানে,

অণুর গড় মুক্ত পথ, $\lambda = 6\times10^{-8}$ m

অণুর ব্যাস, $a = 2.5\times10^{-10}$ m

একক আয়তনে অণুর সংখ্যা, $n = ?$

৩। কোনো গ্যাস অণুর ব্যাস 3×10^{-10} m এবং প্রতি ঘন সেন্টিমিটারে অণুর সংখ্যা 6×10^{20} হলে অণুর গড় মুক্ত পথ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০১১, ২০০৭, ২০০৫; ঢা. বো. ২০১০ (মান ভিন্ন); চ. বো. ২০০৮ (মান ভিন্ন); ব. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন) ; সি. বো. ২০০৮; কু. বো. ২০০১]

মনে করি, গড় মুক্ত পথ = λ

আমরা পাই, $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi a^2 n}$ ... ... (i)

সমীকরণ (i) হতে পাই,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi \times (3 \times 10^{-10})^2 \times 6 \times 10^{26}}$$
$$= 4.17 \times 10^{-9}\ \text{m}$$

এখানে,
$n = 6 \times 10^{20}\ \text{mol/cm}^3$
$= 6 \times 10^{26}\ \text{mol/m}^3$
$a = 3 \times 10^{-10}\text{m}$

৪। প্রতি cm^3 এ অণুর সংখ্যা 1.5×10^{19} টি এবং অণুর পারমাণবিক ব্যাসার্ধ $= 2 \times 10^{-8}$ m হলে, গড় মুক্ত পথ নির্ণয় কর। [BUET Admission Test, 2015-16]

আমরা জানি,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\, \pi a^2 n}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}\, \pi \times (2 \times 10^{-8})^2 \times 1.5 \times 10^{25}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2} \times 3.14 \times 4 \times 10^{-16} \times 1.5 \times 10^{25}}$$
$$= 3.75 \times 10^{-11}\ \text{m}$$

এখানে,
$n = 1.5 \times 10^{19}\ /\text{cm}^3 = 1.5 \times 10^{25}\ /\text{m}^3$
$r = 2 \times 10^{-8}\ \text{m}$
$\lambda = ?$

৫। হাইড্রোজেন গ্যাসের অণুর ব্যাসার্ধ 3.9×10^{-10} m এবং প্রতি ঘন সেন্টিমিটারে অণুর সংখ্যা 2.69×10^{19} হলে অণুর গড় মুক্ত পথ নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\, n \pi \sigma^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2} \times 2.69 \times 10^{19} \times 3.14 \times (7.8 \times 10^{-8})^2}$$
$$= 1.38 \times 10^{-6}\ \text{cm} = 1.38 \times 10^{-8}\ \text{m}$$

এখানে,
অণুর ব্যাস, $\sigma = 2 \times 3.9 \times 10^{-10}$ m
$= 7.8 \times 10^{-8}$ cm
একক আয়তনে অণুর সংখ্যা,
$n = 2.69 \times 10^{19}$ cm
গড় মুক্ত পথ, $\lambda = ?$

১০·১৮ শক্তির সমবিভাজন নীতি
Law of equipartition of energy

শক্তির সমবিভাজন নীতি আলোচনার পূর্বে স্বাধীনতার মাত্রা কী জানা দরকার।

১০·১৮·১ স্বাধীনতার মাত্রা
Degrees of freedom

কোনো বস্তুর বা সিস্টেমের গতির অবস্থা সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করার জন্য যতগুলি নিরপেক্ষ স্থানাঙ্কের প্রয়োজন হয় সেই সংখ্যাকে ওই বস্তু বা সিস্টেমের স্বাধীনতার মাত্রা বলে।

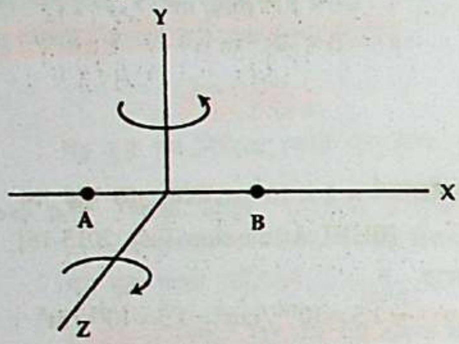
উদাহরণ : অভিকর্ষের প্রভাবে কোনো পতনশীল বস্তুর প্রারম্ভিক বিন্দুকে যদি মূল বিন্দু এবং নিম্ন অভিমুখকে Z-অক্ষ ধরা হয়, তবে কণাটির যে কোনো মুহূর্তের অবস্থান নির্দেশ করার জন্য শুধুমাত্র Z-স্থানাঙ্কটি উল্লেখ করলেই হয়। সুতরাং, কণাটির স্বাধীনতার মাত্রা 1। সোজা রাস্তা বরাবর গতিশীল একটি গাড়ির স্বাধীনতার মাত্রা 1।

আবার ভূ-পৃষ্ঠের কোনো বিন্দু থেকে প্রক্ষিপ্ত একটি কণা বা প্রাসের গতি একটি সমতলের ওপর সীমাবদ্ধ থাকে। প্রাসটির প্রক্ষেপ বিন্দুকে মূল বিন্দু এবং অনুভূমিক দিককে X-অক্ষ বরাবর এবং উল্লম্ব দিককে Z-অক্ষ বরাবর ধরা হলে কণা বা প্রাসটির যে কোনো মুহূর্তের অবস্থান নির্দেশ করতে শুধুমাত্র X ও Z স্থানাঙ্ক দুটি উল্লেখ করতে হয়। তাই, এক্ষেত্রে স্বাধীনতার মাত্রা 2।

গতিতত্ত্বের স্বীকার্য অনুসারে প্রতিটি অণুই বিন্দু ভর এবং সম্পূর্ণ এলোমেলোভাবে গতিশীল। এ ধরনের গতির জন্য অণুর যে কোনো সময়ের অবস্থান নির্দেশ করার জন্য তিনটি স্থানাঙ্কের প্রয়োজন হয়। সুতরাং, আদর্শ গ্যাসের প্রতিটি অণুর স্বাধীনতার মাত্রা 3। ঘরের মধ্যে একটি মশার গতির ক্ষেত্রে স্বাধীনতার মাত্রা 3।

লক্ষণীয় যে, উপরোল্লিখিত ক্ষেত্রগুলিতে কণাটির শুধুমাত্র রৈখিক গতি সম্ভব। এ ধরনের স্বাধীনতার মাত্রাকে **রৈখিক গতির স্বাধীনতার মাত্রা** (degrees of freedom of translational motion) বলে। সাধারণত একটি কণার রৈখিক ও ঘূর্ণন উভয় ধরনের গতি থাকে।

একটি দৃঢ়বস্তু বা গোলক তিনটি স্বতন্ত্র অক্ষের চতুর্দিকে ঘুরতে সক্ষম। তাই ওই বস্তুর রৈখিক গতির জন্য তিনটি এবং ঘূর্ণন গতির জন্য তিনটি—মোট ছয়টি স্বাধীনতার মাত্রা থাকবে।



চিত্র ১০.৮

পরস্পর থেকে নির্দিষ্ট দূরত্বে অবস্থিত দুটি কণা নিয়ে গঠিত কোনো সিস্টেম শুধুমাত্র দুটি অক্ষের চতুর্দিকে ঘুরতে পারে [চিত্র ১০.৮]। তাই ঘূর্ণন গতির জন্য ওই সিস্টেমের স্বাধীনতার মাত্রা সংখ্যা দুটি এবং রৈখিক গতির জন্য ওই সংখ্যা তিনটি। তাই সিস্টেমটির মোট স্বাধীনতার মাত্রা পাঁচটি।

চিত্র ১০.৮ এ দুটি কণা A ও B পরস্পরের সাথে দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ। তাই এদের মধ্যে দূরত্ব স্থির। X, Y এবং Z অক্ষ বরাবর গতির জন্য সিস্টেম বা সংস্থাটির রৈখিক গতির স্বাধীনতার মাত্রা তিনটি। কিন্তু কণা দুটি কেবলমাত্র X এবং Y অক্ষের চতুর্দিকে ঘুরতে পারে। তাই ঘূর্ণন গতির জন্য স্বাধীনতার মাত্রা দুটি। সুতরাং ওদের মোট স্বাধীনতার মাত্রা পাঁচটি। লক্ষণীয় যে এখানে গতির ওপর শর্ত বা বাধা হলো কণা দুটির মধ্যে দূরত্বের স্থিরতা।

সাধারণভাবে বলা যায় যে, যদি কোনো গতীয় সংস্থা বা সিস্টেম x-সংখ্যক কণা দ্বারা গঠিত এবং ওই x-সংখ্যক কণা পরস্পরের সাথে y-সংখ্যক নিরপেক্ষ শর্ত বা বাধা দ্বারা সম্পর্কযুক্ত হয়, তাহলে ওই সংস্থা সিস্টেমটির স্বাধীনতার মাত্রার মোট সংখ্যা হবে, $f = (3x - y)$। যদি সিস্টেমের কণাগুলি সম্পূর্ণ স্বাধীনভাবে চলতে পারে, তবে $y = 0$ এবং সেক্ষেত্রে স্বাধীনতার মাত্রার মোট সংখ্যা হবে $3x$।

যেমন এক পরমাণুবিশিষ্ট গ্যাসের ক্ষেত্রে $x = 1$, তাই এর স্বাধীনতার মাত্রা 3। দ্বিপরমাণু গ্যাসের ক্ষেত্রে $x = 2$। এক্ষেত্রে পরমাণু দুটি পরস্পর থেকে নির্দিষ্ট দূরত্বে আবদ্ধ। তাই এদের স্বাধীনতার মাত্রা সংখ্যা $f = 3 \times 2 - 1 = 5$। আদর্শ গ্যাসের প্রতিটি অণুর স্বাধীনতার মাত্রা 3। দ্বিপারমাণবিক গ্যাস অণুর যেমন—অক্সিজেন (O_2), নাইট্রোজেন (N_2), হাইড্রোজেন (H_2) স্বাধীনতার মাত্রা 5।

১০.১৮.২ স্বাধীনতার মাত্রা ও গ্যাসের দুই আপেক্ষিক তাপের অনুপাতের মধ্যে সম্পর্ক

Relation between degrees of freedom and ratio of two specific heats of a gas

মনে করি, একটি গ্যাসের প্রতিটি অণুর স্বাধীনতার মাত্রা f।

সুতরাং, এক গ্রাম অণু গ্যাসের মোট স্বাধীনতার মাত্রা $= N_A f$। এখানে, N_A হলো অ্যাভোগ্যাড্রো সংখ্যা (Avogadro number).

এখন, যেহেতু প্রতি স্বাধীনতা মাত্রায় শক্তির পরিমাণ $\frac{1}{2}$ KT, তাই এক গ্রাম অণুর গ্যাসের মোট শক্তি,

$$E = \frac{1}{2} KT N_A f = \frac{1}{2} fRT \qquad [\because KN_A = R]$$

আমরা জানি, স্থির আয়তনে এক গ্রাম-অণু গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ,

$$c_V = \left(\frac{dE}{dT}\right)_V = \frac{1}{2} fR$$

আবার,

$$c_P - c_V = R$$

বা, $$c_P = c_V + R = \frac{1}{2} fR + R = R\left(\frac{1}{2}f + 1\right)$$

$$\therefore \quad \gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{\left(\frac{1}{2}f + 1\right)R}{\left(\frac{1}{2}f\right)R} = \frac{\frac{1}{2}f + 1}{\frac{1}{2}f} = 1 + \frac{2}{f} \qquad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

এটিই হলো স্বাধীনতার মাত্রা ও গ্যাসের দুই আপেক্ষিক তাপের অনুপাতের মধ্যে সম্পর্ক।

বি.দ্র. (i) এক পারমাণবিক গ্যাসের ক্ষেত্রে, $f=3$

$\therefore \quad \gamma = 1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}=1{\cdot}67$

(ii) দ্বি–পারমাণবিক গ্যাসের ক্ষেত্রে, $f=5$

$\therefore \quad \gamma = 1+\frac{2}{5}=\frac{7}{5}=1{\cdot}40$

(iii) ত্রি–পারমাণবিক গ্যাসের ক্ষেত্রে, $f=6$

$\therefore \quad \gamma = 1+\frac{2}{6}=\frac{8}{6}=1{\cdot}33$

১০·১৮·৩ শক্তির সমবিভাজন নীতির আলোচনা
Discussion on law of equipartition of energy

কোনো পদার্থের অণুগুলোর গড় গতিশক্তি প্রতিটি স্বাধীনতার মাত্রার মধ্যে সমভাবে বণ্টিত হয় এবং যেকোনো একটি অণুর প্রতিটি স্বাধীনতার মাত্রার সাথে সংশ্লিষ্ট গতিশক্তির মান $=\frac{1}{2}$KT। এটিই শক্তির সমবিভাজন নীতি।

এখন আমরা এই সূত্রটিকে গ্যাস অণুর ক্ষেত্রে প্রয়োগ করব। আমরা জানি, এক পারমাণবিক গ্যাসের একটি অণুর স্বাধীনতার মাত্রা 3। অতএব এই সূত্র অনুযায়ী একটি অণুর গড়শক্তি $=\frac{3}{2}$KT। দ্বিপারমাণবিক গ্যাসের একটি অণুর স্বাধীনতার মাত্রা 5, অতএব প্রতিটি অণুর গড়শক্তি $=\frac{5}{2}$KT। যেহেতু পরমাণু যুগ্মের রৈখিক গতিশক্তি ও ঘূর্ণন গতিশক্তি বর্তমান থাকে এবং যদি কোনো পরমাণু যুগ্মের কম্পন শক্তিও বর্তমান থাকে, তবে স্বাধীনতার মাত্রা হবে 7 এবং সেক্ষেত্রে অণুটির মোট শক্তি হবে $\frac{7}{2}$KT.

প্রমাণ : গ্যাসের গতিতত্ত্ব থেকে আমরা জানি, তাপীয় সাম্যাবস্থায় তিনটি অক্ষ X, Y ও Z বরাবর কোনো গ্যাস অণুর বেগ c-এর উপাংশগুলির গড় বর্গমান পরস্পর সমান অর্থাৎ, $u^2=v^2=w^2$। এখানে X, Y ও Z অক্ষ বরাবর অণুটির উপাংশ বেগগুলির গড়মান যথাক্রমে u, v ও w। কাজেই উপাংশ বেগগুলির আনুষঙ্গিক মান সমান হবে।

$\therefore \quad \frac{1}{2}mu^2=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mw^2$

কিন্তু, $c^2=u^2+v^2+w^2$ এবং $u^2=v^2=w^2$

$\therefore \quad \frac{1}{2}mu^2=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mw^2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}mc^2$

আবার, আমরা জানি, প্রতিটি অণুর গড় গতিশক্তি

$\frac{1}{2}mc^2=\frac{3}{2}\text{KT}$

$\therefore \quad \frac{1}{2}mu^2=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mw^2=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\text{KT}=\frac{1}{2}\text{KT}$

অতএব, প্রত্যেক অণুর স্বাধীনতার মাত্রার গড় শক্তির পরিমাণ $=\frac{1}{2}$KT.

আবার কম্পনরত কণার ক্ষেত্রে, অর্ধেক হলো গতিশক্তি এবং অর্ধেক হলো স্থিতিশক্তি। কাজেই স্বাধীনতার মাত্রা পিছু মোট শক্তি = গতিশক্তি + স্থিতিশক্তি $=\frac{1}{2}\text{KT}+\frac{1}{2}\text{KT}=\text{KT}$.

তাহলে আমরা দেখতে পাই যে, বেগের প্রতিটি উপাংশের সাথে সংশ্লিষ্ট অপসরণ (Translational) গতিশক্তি মোট গতিশক্তির এক-তৃতীয়াংশ। প্রাপ্তব্য মোট শক্তি অণুর শক্তি শোষণের বিভিন্ন নিরপেক্ষ উপায় সমানে শোষিত অংশের সমষ্টি। অন্য কথায় প্রাপ্তব্য মোট শক্তি বিভিন্ন নিরপেক্ষ শক্তি হিসেবে সমভাবে বিভাজিত হয়।

আবার অণুগুলি সসীম আকৃতিবিশিষ্ট, জ্যামিতিক বিন্দু নয়। কাজেই অণুসমূহের জড়তার ভ্রামক ও ভর রয়েছে। তাই অপসরণ গতির সাথে এদের ঘূর্ণন গতিও রয়েছে। অণুগুলোর আকৃতি পরিপূর্ণভাবে দৃঢ় নয় এবং অন্যান্য অণুর সাথে সংঘর্ষের কারণে এদের মধ্যে স্পন্দন আশা করা যেতে পারে। ফলে এদের স্বাধীনতার মাত্রা আরও বেশি হতে পারে। ম্যাক্সওয়েল-বোলজম্যান-এর সংখ্যায়নিক বলবিদ্যার সাহায্যে দেখানো যায় যে, কোনো স্বাধীনতা মাত্রার সাথে সংশ্লিষ্ট শক্তি যদি স্বাধীনতা মাত্রা নির্দিষ্টকারী চলরাশির দ্বিঘাত অপেক্ষক হয়, তাহলে সংশ্লিষ্ট শক্তির গড় মান $\frac{1}{2}$KT এর সমান হবে। মোট শক্তি যদি সকল স্বাধীনতার মাত্রার মধ্যে সমভাবে বিভক্ত হয়, তাহলে f স্বাধীনতার মাত্রাসম্পন্ন কোনো অণুর মোট জড়শক্তি $=f\times\frac{1}{2}\text{KT}=\frac{f}{2}\text{KT}$.

১০·১৯ জলীয় বাষ্প ও বায়ু চাপ
Water vapour and air pressure

বায়ুমণ্ডলে সর্বদা কিছু না কিছু জলীয় বাষ্প বিদ্যমান থাকে। বাষ্পায়ন প্রক্রিয়ায় খাল-বিল, পুকুর, নদী, সমুদ্র প্রভৃতি হতে প্রতিনিয়ত প্রচুর পরিমাণে পানি বাষ্প হয়ে বায়ুমণ্ডলে মিশে যাচ্ছে। মেঘ, বৃষ্টি, কুয়াশা, শিশির প্রভৃতি নৈসর্গিক ঘটনা হতে প্রমাণিত হয় যে, বায়ুতে প্রচুর পরিমাণ জলীয় বাষ্প আছে।

বিভিন্ন স্থানে বায়ুমণ্ডলের জলীয় বাষ্পের পরিমাণ বিভিন্ন। আবার কোনো কোনো দিন বায়ুতে জলীয় বাষ্প বেশি থাকে এবং কোনো কোনো দিন বায়ুতে জলীয় বাষ্প কম থাকে। তাহলে প্রশ্ন জাগে কী কী বিষয়ের ওপর জলীয় বাষ্প নির্ভর করে ? এর জবাবে নিশ্চয় আমরা বলব—

কোনো কোনো স্থানে পানির উৎসের উপস্থিতি, অক্ষাংশ, সমুদ্র পৃষ্ঠ হতে তার অবস্থান প্রভৃতির ওপর বায়ুমণ্ডলের জলীয় বাষ্পের পরিমাণ নির্ভর করে।

কোনো স্থানের আবহাওয়ার ওপর বায়ুমণ্ডলের জলীয় বাষ্পের গুরুত্ব অপরিসীম। কোনো কোনো দ্রব্যের সুষ্ঠু উৎপাদন ও গুদামজাতকরণে বায়ুমণ্ডলের জলীয় বাষ্পের পরিমাণ ও তাপমাত্রা একটি নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে থাকা প্রয়োজন। এই কারণে বায়ুমণ্ডলের জলীয় বাষ্পের পরিমাণ নির্ণয়ের গুরুত্বও অনেক। কোনো স্থানের জলীয় বাষ্পের চাপ ওই স্থানের জলীয় বাষ্পের পরিমাণের ওপর নির্ভর করে। **জলীয় বাষ্পের পরিমাণ যত বেশি হবে তার চাপও তত বেশি হবে।**

সকল উষ্ণতায় তরল বাষ্পীভূত হয়। তরল থেকে নির্গত বাষ্পও সাধারণ গ্যাসের মতো আধারের গায়ে চাপ প্রয়োগ করে। এই চাপকে তরলের বাষ্প চাপ বলে। এই বাষ্প চাপ ও জলীয় বাষ্প আমাদের দৈনন্দিন জীবন প্রভাবিত করে।

বায়ুতে অণুসমূহ অবিরত ইতস্তত ছুটাছুটি করার ফলে পাত্রের একক ক্ষেত্রফলের ওপর বায়ুর অণুসমূহ যে বল প্রয়োগ করে তাকে বায়ুর চাপ বলে। বহুকাল থেকে গ্যাসের চাপের একক বায়ুচাপ বা বায়ুমণ্ডল বা অ্যাটমস্‌ফিয়ার (atmosphere) সংক্ষেপে atm ব্যবহৃত হয়ে আসছে।

0°C তাপমাত্রায় 45° অক্ষাংশে সমুদ্র সমতলে যে পরিমাণ বায়ুচাপ 760 mm পারদস্তম্ভের চাপের সমান হয়, তাকে এক বায়ুমণ্ডলীয় চাপ বা এক বায়ুচাপ (1 atm) বলে। মিমি পারদ বা mm Hg এককেও চাপ প্রকাশ করা হয়।

এস. আই. এককে গ্যাসের চাপকে নিউটন/মিটার^2 (Nm^{-2}) বা প্যাসকেল (Pa) এককে প্রকাশ করা হয়। প্রতি বর্গমিটারে এক নিউটন বলকে 1 প্যাসকেল (Pascal) বলে।

১০·১৯·১ সম্পৃক্ত ও অসম্পৃক্ত বাষ্প চাপ
Saturated and unsaturated vapour pressure

কোনো আবদ্ধ স্থানে তরলের উপরিস্থিত সংখ্যা বাষ্পকে ওই তাপমাত্রার সম্পৃক্ত বাষ্প বলে। সম্পৃক্ত বাষ্পচাপ সর্বোচ্চ চাপ প্রয়োগ করে। কোনো স্থানে তাপমাত্রা কমবেশি হলে ওই স্থানের বাষ্পকণার ধারণ ক্ষমতাও কমবেশি হয়। **তবে নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় একটি আবদ্ধ স্থানের বাষ্পধারণ ক্ষমতা নির্দিষ্ট থাকে; অতিরিক্ত বাষ্প ধারণ করতে পারে না। এই অবস্থায় বাষ্প যে চাপ দেয় তাকে সম্পৃক্ত বাষ্প চাপ বলে।** সম্পৃক্ত বাষ্প বয়েল ও চার্লস এর সূত্র মানে না। তাপমাত্রা হ্রাস করে অসম্পৃক্ত বাষ্পকে সম্পৃক্ত বাষ্পে পরিণত করা যায়।

আবার একটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় কোনো স্থানে বাষ্পের পরিমাণ যদি এমন হয় যে, তা আরও অতিরিক্ত বাষ্প ধারণ করতে পারে, তবে ওই বাষ্পকে **অসম্পৃক্ত বাষ্প** বলে। **এই অবস্থায় বাষ্প যে চাপ দেয় তাকে অসম্পৃক্ত বাষ্পচাপ বলে।** অসম্পৃক্ত বাষ্প বয়েল ও চার্লসের সূত্র মানে। তাপমাত্রা বৃদ্ধি করে নির্দিষ্ট পরিমাণ সম্পৃক্ত বাষ্পকে অসম্পৃক্ত বাষ্পে পরিণত করা যায়।

"কোনো স্থানের সম্পৃক্ত বাষ্প চাপ 1·336 mm পারদ"—এই উক্তি দ্বারা বুঝি সংশ্লিষ্ট স্থানে বাষ্প সর্বাধিক 1·336 mm পারদ চাপ প্রয়োগ করবে।

ক্রিয়াকর্ম : বাড়ির বারান্দায় একটি রশির ওপর শীতের দিনে ভেজা কাপড় নেড়ে দাও। আবার ওই একই স্থানে বর্ষার দিনে ওই কাপড়টি শুকাতে দাও। দেখা যাবে শীতকালে কাপড় দ্রুত শুকায়। কাপড় দ্রুত শুকাবার কারণ কী ?

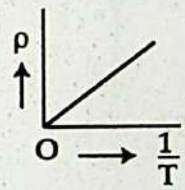
শীতকালের চেয়ে যদিও বর্ষাকালে বায়ুমণ্ডলের তাপমাত্রা বেশি থাকে তবু কাপড় শীতকালেই দ্রুত শুকায়। এর কারণ হলো বর্ষাকালে বায়ুতে জলীয় বাষ্পের পরিমাণ বেশি থাকে ফলে বাষ্পায়ন কম হয়। আর শীতকালে বায়ুতে জলীয় বাষ্পের পরিমাণ কম থাকায় ভেজা কাপড়ের পানির বাষ্পায়ন দ্রুত হয় এবং কাপড় দ্রুত শুকায়।

১০.১৯.২ জলীয় বাষ্পের সাথে বায়ুর চাপের সম্পর্ক
Relation between water vapour and air pressure

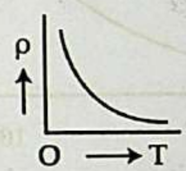
আমরা জানি বায়ুতে জলীয় বাষ্প থাকলে বা বায়ু আর্দ্র থাকলে এর ঘনত্বেরও পরিবর্তন হয়। আর্দ্র বায়ু বা জলীয় বাষ্পপূর্ণ বায়ুর ঘনত্ব শুষ্ক বায়ুর ঘনত্বের তুলনায় কম অর্থাৎ বায়ুতে জলীয় বাষ্প যত বেড়ে যায় এর ঘনত্বও তত কমে যায়।

মনে করি m ভরবিশিষ্ট কোনো বায়ুর P_1 চাপে এবং T_1K তাপমাত্রায় যদি আয়তন V_1 এবং ঘনত্ব ρ_1 হয় এবং ওই গ্যাসের P_2 চাপে এবং T_2K তাপমাত্রায় আয়তন V_2 এবং ঘনত্ব ρ_2 হয় তা হলে,

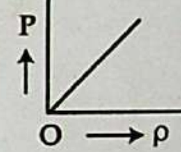
$$\rho_1 = \frac{m}{V_1} \quad \text{বা,} \quad V_1 = \frac{m}{\rho_1} \quad \text{এবং} \quad \rho_2 = \frac{m}{V_2} \quad \text{বা,} \quad V_2 = \frac{m}{\rho_2}$$



চিত্র ১০.৯(ক)



চিত্র ১০.৯(খ)



চিত্র ১০.৯(গ)

এখন $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$ সম্পর্কে V_1 এবং V_2 এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{P_1 m}{\rho_1 T_1} = \frac{P_2 m}{\rho_2 T_2} = \text{ধ্রুবক} \quad \text{বা,} \quad \frac{P_1}{\rho_1 T_1} = \frac{P_2}{\rho_2 T_2} = \text{ধ্রুবক}$$

$$\text{বা,} \quad \frac{\rho_1 T_1}{P_1} = \frac{\rho_2 T_2}{P_2} = \text{ধ্রুবক} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (10.36)$$

অর্থাৎ চাপ ধ্রুব থাকলে $P_1 = P_2$ হয়, সেক্ষেত্রে $\rho_1 T_1 = \rho_2 T_2 =$ ধ্রুবক হয়।

বা, $\rho T =$ ধ্রুবক বা $\rho \propto \frac{1}{T}$ হয়। এই সম্পর্ক T তাপমাত্রায় বায়ুর চাপ ও জলীয় বাষ্পের ঘনত্বের মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করে। উপরের ১০.৯(ক) ও ১০.৯(খ) লেখচিত্রে ρ—T এর পরিবর্তন দেখানো হলো। যদি তাপমাত্রা স্থির থাকে অর্থাৎ

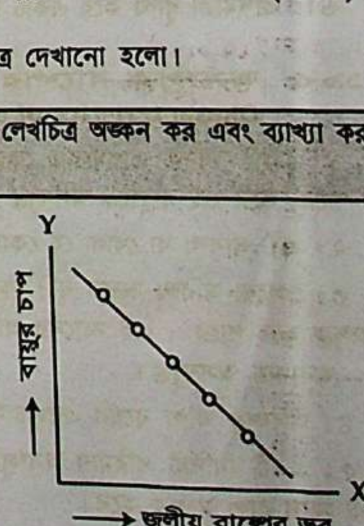
$T_1 = T_2$ হয় তবে (10.36) নং সমীকরণ থেকে পাই, $\frac{\rho_1}{P_1} = \frac{\rho_2}{P_2} =$ ধ্রুবক

$$\text{বা,} \quad \frac{\rho}{P} = \text{ধ্রুবক} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (10.37)$$

$\therefore$ $\boxed{\rho \propto P}$ ঘনত্বের সাথে তাপমাত্রা ও চাপের সম্পর্ক ১০.৯(গ) লেখচিত্রে দেখানো হলো।

নিজে কর : একটি গ্রাফ কাগজে জলীয় বাষ্প বৃদ্ধি ও হ্রাসের সাথে বায়ুর চাপের লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং ব্যাখ্যা কর। লেখচিত্রটি চিত্র ১০.১০ এ দেখানো হলো।

সমীকরণ (10.37) অনুযায়ী স্থির তাপমাত্রায় বায়ুর ঘনত্ব তার চাপের সমানুপাতিক। অর্থাৎ বায়ুতে জলীয় বাষ্প বেড়ে গেলে বায়ুর ঘনত্ব কমে এবং বায়ুর চাপও কমে যায়। আবার বিপরীতক্রমে বলা যায় বায়ুতে জলীয় বাষ্প কমে গেলে বায়ুর ঘনত্ব বেড়ে যায় এবং বায়ুর চাপও বেড়ে যায়। বায়ুর চাপ বনাম জলীয় বাষ্পের ভর-এর সম্পর্ক লেখচিত্রে দেখানো হলো।



চিত্র ১০.১০

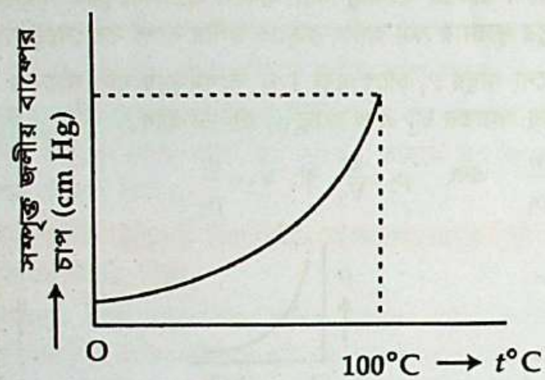
বায়ুতে কোনো নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় জলীয় বাষ্প ধারণ করতে পারা এবং না পারার উপর বাষ্পচাপের প্রকৃতি দুই ধরনের—

(১) সম্পৃক্ত বাষ্পচাপ ও

(২) অসম্পৃক্ত বাষ্পচাপ।

১০.১৯.৩ সম্পৃক্ত বাষ্পচাপ ও তাপমাত্রার সম্পর্ক

কোনো তরলের সম্পৃক্ত বাষ্পচাপ তাপমাত্রার ওপর নির্ভর করে। তাপমাত্রা বাড়লে সম্পৃক্ত বাষ্পচাপ বৃদ্ধি পায়। চিত্র ১০.১১ এ তাপমাত্রার সাথে জলীয় বাষ্পচাপ কীভাবে অপরিবর্তিত হয় তা দেখানো হয়েছে।



চিত্র ১০.১১

চিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে 0° C তাপমাত্রায় জলীয় সম্পৃক্ত বাষ্পচাপ শূন্য হয় না। এ চাপ প্রায় 0.40 cmHg। 100° C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পচাপ 76 cm পারদ স্তম্ভের সমান। অর্থাৎ প্রথম বায়ুমণ্ডলীয় চাপে বিশুদ্ধ পানি 100° C তাপমাত্রায় ফোটে। উল্লেখ্য যে, যে তাপমাত্রায় তরলের সম্পৃক্ত বাষ্পচাপ তরলের উপরিস্থিত চাপের সমান সেই তাপমাত্রাতেই তরলের স্ফুটন শুরু হয়।

১০.১৯.৪ সম্পৃক্ত বাষ্পের বৈশিষ্ট্য
Characteristics of saturated vapour

১। কোনো নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় কোনো আবদ্ধ স্থানে যখন সর্বাধিক পরিমাণ বাষ্প ধারণ করে তখন ওই বাষ্পকে সম্পৃক্ত বাষ্প বলে। সম্পৃক্ত বাষ্প সর্বাধিক চাপ প্রয়োগ করে।

২। এটি একটি আবদ্ধ স্থানে তৈরি করা যায়।

৩। যদি কোনো আবদ্ধ স্থানে তরল পদার্থের সংস্পর্শে কিছু বাষ্প থাকে তবে বুঝতে হবে যে, ওই বাষ্প সম্পৃক্ত বাষ্প।

৪। সম্পৃক্ত বাষ্প বয়েল এবং চার্লস-এর সূত্র মানে না।

৫। সম্পৃক্ত বাষ্পের সংস্পর্শে যথেষ্ট তরল পদার্থ না থাকলে স্থির তাপমাত্রায় ওই বাষ্পের আয়তন বৃদ্ধি করলে, তরল পদার্থ বাষ্পীভূত হবার পর ওই স্থান বাষ্প অসম্পৃক্ত হবে।

৬। তাপমাত্রা বৃদ্ধি করে একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ সম্পৃক্ত বাষ্পকে অসম্পৃক্ত বাষ্পে পরিণত করা যায়।

১০.১৯.৫ অসম্পৃক্ত বাষ্পের বৈশিষ্ট্য
Characteristics of unsaturated vapour

১। একটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় কোনো স্থানে বাষ্পের পরিমাণ যদি এমন হয় যে তা আরও অতিরিক্ত বাষ্প ধারণ করতে পারে, তবে ওই বাষ্পকে অসম্পৃক্ত বাষ্প বলে। এই চাপ সম্পৃক্ত চাপের চেয়ে কম হয়।

২। এটি আবদ্ধ বা খোলা যে কোনো স্থানে তৈরি হতে পারে।

৩। কোনো আবদ্ধ স্থানে যদি কিছু বাষ্প থাকে কিন্তু কোনো তরল পদার্থ না থাকে তবে ওই বাষ্প অসম্পৃক্ত বা সদ্য সম্পৃক্ত হতে পারে। এই স্থানের আয়তন সামান্য কমালে যদি কিছু বাষ্প তরলে পরিণত হয় তবে ওই বাষ্প সদ্য সম্পৃক্ত—অন্যথায় অসম্পৃক্ত।

৪। অসম্পৃক্ত বাষ্প বয়েল এবং চার্লস-এর সূত্র মেনে চলে।

৫। একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ অসম্পৃক্ত বাষ্পের তাপমাত্রা স্থির রেখে তার আয়তন ক্রমাগত কমাতে থাকলে এক সময় ওই স্থান বাষ্প সম্পৃক্ত হবে।

৬। তাপমাত্রা কমিয়ে একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ অসম্পৃক্ত বাষ্পকে সম্পৃক্ত বাষ্পে পরিণত করা যায়।

সারণি ১০.১ : তাপমাত্রার সাথে বাষ্পচাপের পরিবর্তন

তাপমাত্রা (°C)	চাপ (mm HgP)	তাপমাত্রা (°C)	চাপ (mm HgP)
0	4.58	28	28.35
2	5.29	30	31.83
4	6.10	32	35.66
6	7.01	34	39.90
8	8.05	36	44.42
10	9.21	38	49.58
12	10.52	40	55.32
14	11.99	50	92.51
16	13.63	60	149.38
18	15.48	70	233.70
20	17.54	80	355.10
22	19.83	90	525.75
24	22.38	100	760.00
26	25.21		

১০·২০ শিশিরাঙ্ক ও আপেক্ষিক আর্দ্রতা
Dew point and relative humidity

১০·২০·১ শিশিরাঙ্ক
Dew point

একটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় কোনো নির্দিষ্ট আয়তনের বায়ু একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ জলীয় বাষ্প ধারণ করতে পারে। বায়ুর জলীয় বাষ্প ধারণের ক্ষমতা তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে বেড়ে যায় এবং তাপমাত্রা হ্রাস পেলে কমে যায়। বায়ু যে পরিমাণ জলীয় বাষ্প ধরে রাখতে পারে সাধারণ বায়ুতে তার চেয়ে কম জলীয় বাষ্প থাকে বলে সাধারণ বায়ু জলীয় বাষ্পে অসম্পৃক্ত থাকে এবং অসম্পৃক্ত বায়ুর জলীয় বাষ্পের চাপ অপেক্ষা সম্পৃক্ত বায়ুর জলীয় বাষ্পের চাপ বেশি হয়। কিন্তু বায়ুর তাপমাত্রা যদি ক্রমশ কমতে থাকে তবে তার জলীয় বাষ্প ধারণের ক্ষমতা কমে যায় এবং একটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় বায়ুর মধ্যে যে পরিমাণ জলীয় বাষ্প থাকে তা দ্বারা উক্ত বায়ু সম্পৃক্ত অবস্থা ধারণ করে। এ অবস্থায় তাপমাত্রা আর একটু কমলে কিছু জলীয় বাষ্প ঘনীভূত হয়ে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র পানি বিন্দুতে পরিণত হয়। এই নির্দিষ্ট তাপমাত্রাকে শিশিরাঙ্ক বলে। এখন আমরা দেখব শিশিরাঙ্ক বলতে কী বুঝায় ?

যে তাপমাত্রায় একটি নির্দিষ্ট আয়তনের বায়ু তার ভেতরের জলীয় বাষ্প দ্বারা সম্পৃক্ত হয় তাকে ওই বায়ুর শিশিরাঙ্ক বলে। অথবা, **যে তাপমাত্রায় শিশির জমতে বা অদৃশ্য হতে শুরু করে তাকে শিশিরাঙ্ক বলে।**

"কোনো স্থানের বায়ুর শিশিরাঙ্ক 15°C"—এটি দ্বারা বুঝা যায় যে, 15°C তাপমাত্রায় ওই স্থানের বায়ু তার মধ্যস্থ জলীয় বাষ্প দ্বারা সম্পৃক্ত হবে। অথবা 15°C তাপমাত্রায় ওই স্থানে শিশির গঠিত বা অদৃশ্য হতে শুরু করবে।

বায়ুর তাপমাত্রায় কোনো একটি নির্দিষ্ট আয়তনের বায়ুতে যে পরিমাণ জলীয় বাষ্প উপস্থিত থাকে শিশিরাঙ্কে ওই একই পরিমাণ জলীয় বাষ্প সম্পৃক্ত অবস্থা ধারণ করে। ডালটন-এর সূত্র অনুসারে এই সম্পৃক্ত বাষ্পের চাপ বায়ুর ওপর নির্ভর করে না। সুতরাং **বায়ুর তাপমাত্রায় একটি নির্দিষ্ট আয়তনের অসম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ শিশিরাঙ্কে সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপের সমান হবে।**

পরীক্ষণ : শিশিরাঙ্কের মান নির্ণয় করার জন্য বায়ুর মধ্যে একটি উজ্জ্বল ধাতব পৃষ্ঠকে ধীরে ধীরে ঠান্ডা করা হয়। শিশির জমতে শুরু করার সঙ্গে সঙ্গে ধাতব পৃষ্ঠটির ঔজ্জ্বল্য নষ্ট হয়ে যায়। এই সময় এর উষ্ণতার পাঠ লিখে রাখ। এখন ধাতব পৃষ্ঠটিকে ধীরে ধীরে উত্তপ্ত করলে এর উপরের জমা শিশির এক সময় মিলিয়ে যাবে তখন আবার এর উষ্ণতার পাঠ লিখে রাখ।

দুটি পাঠের গড় নিলে শিশিরাঙ্কের মান পাওয়া যায়।

১০.২০.২ আর্দ্রতা কী
What is humidity

আর্দ্রতা কী সে সম্পর্কে আমাদের একটা স্পষ্ট ধারণা থাকা দরকার। বায়ু কতখানি শুষ্ক বা ভিজা তা নির্দেশ করতে 'আর্দ্রতা' শব্দটি ব্যবহৃত হয়। অনেক সময় শীতকালের বায়ু শুষ্ক ও গ্রীষ্মকালের বায়ু আর্দ্র বলা হয়। এটি দ্বারা শীতকালের তুলনায় গ্রীষ্মকালের বায়ুতে অধিক পরিমাণ জলীয় বাষ্প থাকে এটিই বুঝানো হয়। বায়ুর আর্দ্রতা দুভাবে প্রকাশ করা হয়। যথা—পরম আর্দ্রতা ও আপেক্ষিক আর্দ্রতা।

১০.২০.৩ পরম আর্দ্রতা
Absolute humidity

কোনো সময় কোনো স্থানের একক আয়তনের বায়ুতে যে পরিমাণ জলীয় বাষ্প থাকে তাকে ওই বায়ুর পরম আর্দ্রতা বলে। সাধারণত এক ঘন মিটার আয়তনের বায়ুতে যে পরিমাণ জলীয় বাষ্প থাকে তা বায়ুর পরম আর্দ্রতা নির্দেশ করে।

"বায়ুর পরম আর্দ্রতা 10^{-2} kg-m^{-3}"—এটি দ্বারা বুঝা যায় যে, এক ঘন মিটার আয়তনের বায়ুতে 10^{-2} kg জলীয় বাষ্প বিদ্যমান আছে।

১০.২০.৪ আপেক্ষিক আর্দ্রতা
Relative humidity

কোনো নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় একটি নির্দিষ্ট আয়তনের বায়ুতে যে পরিমাণ জলীয় বাষ্প থাকে ওই তাপমাত্রায় ওই আয়তনের বায়ুকে সম্পৃক্ত করতে যে পরিমাণ জলীয় বাষ্পের প্রয়োজন হয় তাদের অনুপাতকে আপেক্ষিক আর্দ্রতা বলে। এই অনুপাত দ্বারা বায়ু কতখানি ভিজা বা শুষ্ক তা নির্দেশ করা হয়। একে সাধারণত R দ্বারা ব্যক্ত করা হয়।

$\therefore$ আপেক্ষিক আর্দ্রতা,

$$R = \frac{\text{বায়ুর তাপমাত্রায় নির্দিষ্ট আয়তনের বায়ুতে উপস্থিত জলীয় বাষ্পের ভর}}{\text{ওই তাপমাত্রায় উক্ত আয়তনের ওই বায়ুকে সম্পৃক্ত করতে প্রয়োজনীয় জলীয় বাষ্পের ভর}}$$

তাপমাত্রা t°C এবং আয়তন V হলে,

$$\text{আপেক্ষিক আর্দ্রতা, } R = \frac{t\text{°C তাপমাত্রায় V আয়তনের বায়ুতে উপস্থিত জলীয় বাষ্পের ভর}}{t\text{°C তাপমাত্রায় V আয়তনের বায়ুকে সম্পৃক্ত করতে প্রয়োজনীয় জলীয় বাষ্পের ভর}}$$

কিন্তু স্থির তাপমাত্রায় একটি নির্দিষ্ট আয়তনের বায়ুতে উপস্থিত জলীয় বাষ্পের ভর তার বাষ্পচাপের সমানুপাতিক।

$$\therefore \text{ আপেক্ষিক আর্দ্রতা, } R = \frac{t\text{°C তাপমাত্রায় V আয়তনের বায়ুতে উপস্থিত জলীয় বাষ্পের চাপ}}{t\text{°C-এ V আয়তনের বায়ুকে সম্পৃক্ত করতে প্রয়োজনীয় জলীয় বাষ্পের চাপ}}$$

আবার যে কোনো তাপমাত্রায় একটি নির্দিষ্ট আয়তনের বায়ুতে উপস্থিত জলীয় বাষ্পের চাপ = শিশিরাঙ্কে উক্ত বায়ুর সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ।

$$\therefore \text{ আপেক্ষিক আর্দ্রতা, } R = \frac{\text{শিশিরাঙ্কে সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ}}{\text{বায়ুর তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ}}$$

সাধারণত আপেক্ষিক আর্দ্রতা শতকরা হিসেবে প্রকাশ করা হয়। সুতরাং আপেক্ষিক আর্দ্রতা R দ্বারা, শিশিরাঙ্কে সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ f দ্বারা এবং বায়ুর তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ F দ্বারা নির্দেশ করলে,

$$R = \frac{f}{F} \times 100\% \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (10.38)$$

"বায়ুর আপেক্ষিক আর্দ্রতা 60%"—এর দ্বারা বুঝা যায় যে,

(i) বায়ুর তাপমাত্রায় একটি নির্দিষ্ট আয়তনের ওই বায়ুকে সম্পৃক্ত করতে যে পরিমাণ জলীয় বাষ্পের প্রয়োজন তার শতকরা 60 ভাগ জলীয় বাষ্প বায়ুতে আছে।

(ii) বায়ুর তাপমাত্রায় ওই বায়ুতে উপস্থিত জলীয় বাষ্পের চাপ একই তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপের 100 ভাগের 60 ভাগ অর্থাৎ $\frac{3}{5}$ অংশ।

(iii) ওই বায়ুর শিশিরাঙ্কে সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ বায়ুর তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপের 100 ভাগের 60 ভাগ।

নিজে কর : কোনো ঘরের মধ্যে পানি ছিটাও তাতে জলীয় বাষ্পের পরিমাণ বেড়ে যাবে। কিন্তু দেখবে তাপমাত্রা একই থাকবে। আবার আপেক্ষিক আর্দ্রতা ও শিশিরাঙ্ক বেড়ে যাবে। এর কারণ কী ?

ঘরের ভেতর পানি ছিটালে ঘরের বায়ুতে জলীয় বাষ্পের পরিমাণ বেড়ে যায়। কিন্তু ঘরের তাপমাত্রা বা উষ্ণতা একই থাকে বলে ওই উষ্ণতায় ঘরের বায়ুকে সম্পৃক্ত করতে প্রয়োজনীয় জলীয় বাষ্পের ভর অপরিবর্তিত থাকে। আপেক্ষিক আর্দ্রতার সংজ্ঞায় অর্থাৎ সমীকরণ (10.38)-এর লব বাড়ে কিন্তু হর একই থাকে। ফলে আপেক্ষিক আর্দ্রতা বাড়ে। স্পষ্টত শিশিরাঙ্কও বাড়ে।

আমাদের দৈনন্দিন জীবনে আপেক্ষিক আর্দ্রতার প্রভাব লক্ষণীয় যা আমাদের শারীরিক, মানসিক অবস্থায় প্রভাব ফেলে। তাই আপেক্ষিক আর্দ্রতার গুরুত্ব জানা দরকার।

পর্যবেক্ষণ : কোনো একদিন গরমের দুপুর বেলা কিছুক্ষণ ঢাকাতে অবস্থান কর। তারপর প্লেনে করে ওই একই দিন চট্টগ্রামে পৌঁছাও। চট্টগ্রামে পৌঁছে কি অনুভব করবে ?

সমুদ্র থেকে ঢাকার অবস্থান অনেক দূরে; কিন্তু চট্টগ্রাম সমুদ্রের খুবই কাছে। ফলে ঢাকার তুলনায় চট্টগ্রামের বায়ুতে জলীয় বাষ্পের পরিমাণ অনেক বেশি থাকে, তাই সেখানকার আপেক্ষিক আর্দ্রতা বেশি থাকায় বেশি অস্বস্তি লাগবে।

আমরা জানি, শরীরের তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে শরীর থেকে ঘাম বের হয়। বায়ু শুষ্ক হলে অর্থাৎ আর্দ্রতা কম হলে ঘাম দ্রুত শুকায় এবং শরীর ঠান্ডা হয়। বায়ু আর্দ্র হলে ঘাম দ্রুত শুকায় না, ফলে শরীর ঠান্ডা হয় না, তাই অস্বস্তি বোধ হয়। চট্টগ্রামের বায়ুতে আর্দ্রতা বেশি থাকায় সেখানে ঘাম দ্রুত শুকায় না বলে শরীরে অস্বস্তি বোধ হবে।

১০.২০.৫ আপেক্ষিক আর্দ্রতা নির্ণয়ের গুরুত্ব
Importance of determination of relative humidity

(১) কোনো কোনো রোগের জীবাণু শুষ্ক আবহাওয়ায় এবং কোনো কোনো রোগের জীবাণু আর্দ্র আবহাওয়ায় বংশ বৃদ্ধি করে। এই কারণে জনস্বাস্থ্য বিভাগ আপেক্ষিক আর্দ্রতার হিসাব রাখে এবং কোনো কোনো রোগের প্রাদুর্ভাব দেখা দিলে বেতার ও সংবাদপত্রের মাধ্যমে তা ঘোষণা করে।

(২) মানুষের মেজাজ, স্বাস্থ্য, কর্মোদ্যম অনেকাংশে আপেক্ষিক আর্দ্রতার ওপর নির্ভরশীল। যে সব আবদ্ধ স্থানে অধিক লোক সমাগম হয় সেখানকার বায়ু কিছুক্ষণের মধ্যে দূষিত ও আর্দ্র হয়ে পড়ে। এজন্য আধুনিক সিনেমা হল, অডিটরিয়াম, বড় বড় অফিস ইত্যাদিতে শীতাতপ নিয়ন্ত্রণের প্রচলন দেখা যায়।

(৩) কোনো কোনো বস্তু যেমন আলু, তামাক, কাঠ, পেঁয়াজ, রসুন প্রভৃতি শুষ্ক আবহাওয়ায় ভালো থাকে। তাই আপেক্ষিক আর্দ্রতা জানা আবশ্যক।

(৪) আবার বৈদ্যুতিক, ইলেকট্রনিক প্রভৃতি যন্ত্রপাতির স্টোরে ও কারখানায় একটি নির্দিষ্ট আপেক্ষিক আর্দ্রতার প্রয়োজন হয়। এই কারণে এসব ক্ষেত্রে বায়ুর আপেক্ষিক আর্দ্রতা একটি নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে রাখা বিশেষভাবে প্রয়োজন। তাই আপেক্ষিক আর্দ্রতা জানা অপরিহার্য।

(৫) কোনো স্থানের আবহাওয়া বহুলাংশে আপেক্ষিক আর্দ্রতার পরিবর্তনে পরিবর্তিত হয়। তাই আবহাওয়া অফিস আপেক্ষিক আর্দ্রতার হিসাব রাখে এবং বেতার ও সংবাদপত্রে আবহাওয়ার পূর্বাভাস প্রদান করে।

(৬) সিগারেট, পশম, কার্পাস প্রভৃতি শিল্পের কতকগুলো বিশেষ রাসায়নিক প্রক্রিয়ার সহায়তার জন্য বায়ুর আপেক্ষিক আর্দ্রতা একটি নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে থাকা প্রয়োজন। এই কারণে এসব কল-কারখানা বিশেষ বিশেষ অঞ্চলে স্থাপিত হয়।

(৭) নিরাপদ বিমান চালনার জন্য বিমান চালককে আর্দ্র বায়ুর অঞ্চল এড়িয়ে যেতে হয়। এই কারণে তাকে আপেক্ষিক আর্দ্রতার হিসাব জানার প্রয়োজন হয়।

১০.২০.৬ আর্দ্রতামিতি সম্পর্কিত কয়েকটি বাস্তব ঘটনা
Some real events relating hygrometry

নিচে আদ্রতামিতি সম্পর্কিত কয়েকটি বাস্তব ঘটনা আলোচনা করা হলো যা আমাদেরকে প্রভাবিত করে।

ক. মেঘাচ্ছন্ন রাত্রি অপেক্ষা মেঘশূন্য রাত্রি শিশির জমার জন্যে সহায়ক।

আমরা জানি নদী-নালা, খালবিল, সাগর-সমুদ্র, জলাশয় ইত্যাদি হতে পানি সব সময় বাষ্পায়নের ফলে জলীয় বাষ্পে পরিণত হয় এবং বায়ুমণ্ডলে মিশে যায়। দিনের বেলায় সূর্যের তাপে ভূ-পৃষ্ঠ সংলগ্ন বাতাস গরম থাকে এবং জলীয়

বাষ্প দ্বারা অসম্পৃক্ত থাকে। মেঘহীন রাত্রিতে ভূ-পৃষ্ঠ তাপ বিকিরণ করে ঠাণ্ডা হতে থাকে এবং পরিশেষে এমন একটি তাপমাত্রায় উপনীত হয় যখন বাতাস জলীয় বাষ্প দ্বারা সম্পৃক্ত হয় এবং জলীয় বাষ্প ঘনীভূত হয়ে শিশির জমে।

কিন্তু আকাশ মেঘাচ্ছন্ন থাকলে ভূ-পৃষ্ঠ তাপ বিকিরণ করে ঠাণ্ডা হতে পারে না। কারণ মেঘ তাপরোধী পদার্থ বলে ভূ-পৃষ্ঠ হতে বিকিরণজনিত কারণে তাপ পরিবাহিত হতে পারে না। ফলে ভূ-পৃষ্ঠ ঠাণ্ডা হয় না এবং শিশির জমে না।

খ. বর্ষার দিন অপেক্ষা শীতকালে ভিজা কাপড় তাড়াতাড়ি শুকায়।

বর্ষার দিনে বায়ুমণ্ডল জলীয় বাষ্প দ্বারা সম্পৃক্ত থাকে। ফলে বাতাস অধিক পরিমাণে জলীয় বাষ্প ধারণ করতে পারে না। শীতকালের বাতাস শুকনা থাকে। শুকনা বাতাস জলীয় বাষ্পহীন। এই বাতাস ভিজা কাপড় থেকে দ্রুত জলীয় বাষ্প শোষণ করে নিয়ে সম্পৃক্ত হতে চায়। ফলে শীতের দিনে ভিজা কাপড় তাড়াতাড়ি শুকায়।

গ. গরমের দিনে কুকুর জিহ্বা বের করে দৌড়ায়।

গরমের দিনে কুকুরের শরীর উত্তপ্ত থাকে এবং কুকুর অস্বস্তিবোধ করে। কিন্তু কুকুরের জিহ্বার ওপর এক প্রকার লালা থাকে। সেই লালা কুকুরের শরীর থেকে বাষ্পীভবনের সুপ্ত তাপ শোষণ করে এবং কুকুরের শরীর ঠাণ্ডা হয়। কুকুর স্বস্তি অনুভব করে। সেজন্য কুকুর জিহ্বা বের করে দৌড়ায়।

ঘ. ঘর্মাক্ত দেহে পাখার বাতাস লাগলে আরাম অনুভূত হয়।

ঘর্মাক্ত দেহ খুবই অস্বস্তিকর। শরীরের ঘাম শরীর থেকে বাষ্পীভবনের সুপ্ত তাপ গ্রহণ করে বাষ্প হয়ে উবে যায়। পাখার বাতাস সেই গরম বাষ্পকে দূরীভূত করে। ফলে শরীর ঠাণ্ডা হয় এবং আরাম অনুভূত হয়।

ঙ. শীতকালে শরীরে ও ঠোঁটে-মুখে পমেট বা গ্লিসারিন লাগান হয়।

শীতকালে বাতাসে জলীয় বাষ্প থাকে না বললেই চলে। ফলে বাতাস জলীয় বাষ্প গ্রহণ করে সম্পৃক্ত হতে চায়। শরীরের ঠোঁট-মুখ অত্যন্ত নরম। বাতাস শরীরের সেই অনাবৃত নরম স্থান থেকে জলীয় বাষ্প শোষণ করে নেয়। ফলে ঠোঁট ও মুখের চামড়া শুকনা হয়ে চড়চড় করে এবং ফেটে যায়, সেজন্য পমেট বা গ্লিসারিন লাগিয়ে চামড়াকে ভেজা রাখা হয়।

১০.২০.৭ শিশিরাঙ্ক এবং আপেক্ষিক আর্দ্রতার সম্পর্ক
Relation between dew point and relative humidity

শিশিরাঙ্কের সংজ্ঞা থেকে আমরা আগেই জেনেছি যে তাপমাত্রায় কোনো নির্দিষ্ট আয়তনের বায়ুর মধ্যে অবস্থিত জলীয় বাষ্প দ্বারা সম্পৃক্ত হয়, সেই তাপমাত্রাই হলো শিশিরাঙ্ক। অর্থাৎ জলীয় বাষ্প দ্বারা শিশিরাঙ্কে ওই স্থানের বায়ু সম্পৃক্ত হয়।

অপরদিকে বায়ুমণ্ডলে উপস্থিত জলীয় বাষ্পের পরিমাণের চেয়ে বায়ুমণ্ডলের সম্পৃক্ততার মাত্রা (অর্থাৎ বায়ুমণ্ডল কতখানি শুষ্ক বা ভেজা) কতখানি তার দ্বারা আপেক্ষিক আর্দ্রতা পরিমাপ করা হয়।

গ্লেইসার-এর উপপাদ্যের সাহায্যে শিশিরাঙ্ক এবং আপেক্ষিক আর্দ্রতার মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারি। মনে করি কোনো স্থানের তাপমাত্রা θ_1 এবং ওই একই স্থানে থার্মোমিটারের বাল্ব সিক্তাবস্থায় তাপমাত্রা θ_2, এবং ওই সময়ের শিশিরাঙ্ক θ, তাহলে গ্লেসিয়ারের নিম্নোক্ত সূত্রানুসারে শিশিরাঙ্ক (θ) নির্ণয় করা যায়।

$$\theta_1 - \theta = G(\theta_1 - \theta_2) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (10.39)$$

বা, $-\theta = -\theta_1 + G(\theta_1 - \theta_2)$

বা, $$\theta = \theta_1 - G(\theta_1 - \theta_2) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (10.40)$$

এখানে $G = \theta_1$°C তাপমাত্রায় গ্লেসিয়ারের উৎপাদক বা ধ্রুবক (সারণি ১০.২)।

রেনোর তালিকা থেকে শিশিরাঙ্ক θ°C তাপমাত্রায় প্রাপ্ত সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্প চাপ $= f$ (সারণি ১০.৩)

আবার বায়ুর তাপমাত্রা θ_1°C তাপমাত্রায় প্রাপ্ত সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্প চাপ $= F$ (সারণি ১০.৩)

সংজ্ঞানুযায়ী আপেক্ষিক আর্দ্রতা, $R = \dfrac{\text{শিশিরাঙ্কে সম্পৃক্ত বাষ্প চাপ}}{\text{বায়ুর তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত বাষ্প চাপ}}$

$$\therefore \quad R = \frac{f}{F}$$

আপেক্ষিক আর্দ্রতাকে শতকরা হিসাবে প্রকাশ করলে

$$R = \frac{f}{F} \times 100\% \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (10.41)$$

ইহাই শিশিরাঙ্ক এবং আপেক্ষিক আর্দ্রতার মধ্যে সম্পর্ক।

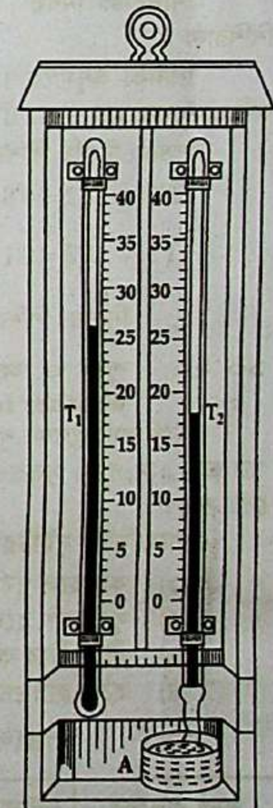
১০·২১ শিশিরাঙ্ক ও আপেক্ষিক আর্দ্রতা নির্ণয়
Determination of dewpoint and relative humidity

বায়ুর আপেক্ষিক আর্দ্রতা নির্ণয়ের জন্য যে যন্ত্র ব্যবহৃত হয় তাকে আর্দ্রতামান যন্ত্র বা হাইগ্রোমিটার (hygrometer) বলে। (hygros—আর্দ্র, metron—পরিমাপ)। আর্দ্রতামাপক যন্ত্রের কার্যপ্রণালি উপর ভিত্তি করে এদেরকে চারটি শ্রেণিতে ভাগ করা যায়। যথা—(১) সিক্ত ও শুষ্ক বলের আর্দ্রতামাপক যন্ত্র, (২) শিশিরাঙ্ক আর্দ্রতামাপক যন্ত্র, (৩) রাসায়নিক আর্দ্রতামাপক যন্ত্র, (৪) কেশ আর্দ্রতামাপক যন্ত্র।

এই অধ্যায়ে আমরা আর্দ্র বা সিক্ত ও শুষ্ক বাল্ব হাইগ্রোমিটার-এর গঠন ও কার্যপদ্ধতি আলোচনা করব।

আর্দ্র বা সিক্ত ও শুষ্ক বাল্ব হাইগ্রোমিটার : এটি সরল হাইগ্রোমিটার। সাধারণত আবহাওয়া অফিস ও শিল্প প্রতিষ্ঠানে এই প্রকার যন্ত্র ব্যবহৃত হয়। এর সাহায্যে বায়ুর আপেক্ষিক আর্দ্রতা সম্বন্ধে দ্রুত মোটামুটি ধারণা পাওয়া যায়। এছাড়া এই যন্ত্রে আপেক্ষিক আর্দ্রতা নির্ভুলভাবে পরিমাপও করা যায়।

পানির বাষ্পীভবনের হার বায়ুতে উপস্থিত জলীয় বাষ্পের ওপর নির্ভরশীল—এই তথ্যের ওপর এই হাইগ্রোমিটারের কার্যপ্রণালি প্রতিষ্ঠিত। ১০·১২নং চিত্রে একটি আর্দ্র ও শুষ্ক বাল্ব হাইগ্রোমিটারের প্রয়োজনীয় ব্যবস্থাপনা দেখানো হয়েছে।



চিত্র ১০·১২

যন্ত্রের বর্ণনা : এই যন্ত্রে দুটি একই প্রকার সাধারণ থার্মোমিটার T_1 ও T_2 একটি ফ্রেমে পাশাপাশি খাড়াভাবে আবদ্ধ থাকে। T_1 থার্মোমিটারের বাল্ব স্বাভাবিক অবস্থায় এবং T_2 থার্মোমিটারের বাল্ব এক টুকরা পরিষ্কার মসলিন কাপড়ে জড়িয়ে কাপড়ের অপর প্রান্ত সলিতার মত পাকানো অবস্থায় নিচের পাত্র A-এর পানিতে ডুবিয়ে রাখা হয়। কাপড় পাত্রের পানি শোষণ করে T_2 থার্মোমিটারের বালবকে সিক্ত রাখে। এই কারণে T_1 বাল্বকে শুষ্ক বাল্ব এবং T_2 বাল্বকে আর্দ্র বাল্ব বলা যায়।

ক্রিয়া : T_2 থার্মোমিটারের বাল্ব সিক্ত মসলিন কাপড়ে আবৃত থাকায় ওই বাল্ব হতে প্রয়োজনীয় তাপ সংগ্রহ করে পানি বাষ্পীভূত হবে এবং বাল্বের তাপমাত্রা ক্রমশ হ্রাস পাবে। ফলে বায়ুর তাপমাত্রা নির্দেশক T_1 থার্মোমিটারের পাঠ হতে T_2 থার্মোমিটারের পাঠের পার্থক্য ক্রমশ বৃদ্ধি পাবে। এক্ষেত্রে তিনটি ঘটনা লক্ষ করা যায়।

(১) বায়ু যত বেশি শুষ্ক হবে অর্থাৎ বায়ুর আপেক্ষিক আর্দ্রতা যত কম হবে বাষ্পায়ন তত দ্রুত হবে এবং T_1 ও T_2 থার্মোমিটারের পাঠের পার্থক্যও তত বেশি হবে।

(২) আবার বায়ুতে যত বেশি জলীয় বাষ্প থাকবে অর্থাৎ বায়ুর আপেক্ষিক আর্দ্রতা যত বেশি হবে, বাষ্পায়নের হার হ্রাস তত পাবে এবং সাথে সাথে T_1 ও T_2 থার্মোমিটারের পাঠের পার্থক্যও তত কম হবে।

(৩) বায়ুমণ্ডল জলীয় বাষ্প দ্বারা সম্পৃক্ত হলে আপেক্ষিক আর্দ্রতা সবচেয়ে বেশি হয়। ফলে বাষ্পায়ন হয় না। এই অবস্থায় T_1 ও T_2 থার্মোমিটারের পাঠ সমান হয়।

সুতরাং দুই থার্মোমিটারের পাঠের পার্থক্য হতে বায়ুর আপেক্ষিক আর্দ্রতা সম্বন্ধে একটি মোটামুটি ধারণা পাওয়া যাবে। কোনো সময় শুষ্ক বাল্বের তাপমাত্রা t_1°C ও আর্দ্র বাল্বের তাপমাত্রা t_2°C হলে নিম্নলিখিত উপায়ে ওই সময়ের বায়ুর শিশিরাঙ্ক ও আপেক্ষিক আর্দ্রতা নির্ণয় করা যাবে।

গ্লেইসার-এর সমীকরণের সাহায্যে

গ্লেইসার-এর সমীকরণ অনুসারে,

$$t_1 = t + G(t_1 - t_2) \quad \ldots \quad (10.42)$$

এখানে, G = শুষ্ক বাল্বের তাপমাত্রায় গ্লেইসার-এর রাশি এবং t°C = বায়ুর শিশিরাঙ্ক।

শিশিরাঙ্ক নির্ণয় : শুষ্ক বাল্বের তাপমাত্রায় গ্লেইসার-এর রাশি G-এর মান জেনে উপরের সমীকরণের সাহায্যে বায়ুর শিশিরাঙ্ক t°C জানা যাবে।

আপেক্ষিক আর্দ্রতা : ধরা যাক রেনোর বাষ্প চাপের তালিকায় t°C ও t_1°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ যথাক্রমে f ও F mm পারদ।

$$\therefore \text{ আপেক্ষিক আর্দ্রতা, } R = \frac{f}{F} \times 100\%$$

রেনোর সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্প চাপের তালিকাটি শুষ্ক বাল্বের তাপমাত্রা t_1°C এবং শুষ্ক এবং আর্দ্র বাল্বের তাপমাত্রার পার্থক্য $(t_1 - t_2)$°C-এর সাপেক্ষে সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্প চাপ নির্দেশ করে প্রস্তুত করা হয়েছে। তালিকার ব্যবহার বিধি নিম্নের উদাহরণ হতে পরিষ্কার বুঝা যাবে।

আপেক্ষিক আর্দ্রতা নির্ণয় : আপেক্ষিক আর্দ্রতার সংজ্ঞা ও ওপরের তালিকা অনুসারে,

$$\text{আপেক্ষিক আর্দ্রতা, } R = \frac{t_1°C\text{-এর একই সমতায় } (t_1 - t_2)°C \text{ চিহ্নিত সারিতে নির্দেশিত চাপ}}{t_1°C \text{ তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ}} \times 100\%$$

ধরা যাক কোনো এক সময় শুষ্ক ও আর্দ্র বাল্‌বের তাপমাত্রা যথাক্রমে 18°C ও 15°C; তালিকা অনুসারে 18°C তাপমাত্রায় একই সমতায় দ্বিতীয় সারিতে সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ = 15·5 মিমি. পারদ।

আবার দুই থার্মোমিটারের তাপমাত্রার পার্থক্য = (18 — 15)°C = 3°C

তালিকায় 18°C তাপমাত্রায় একই সমতায় 3°C পার্থক্য চিহ্নিত সারিতে চাপ = 11·3 মিমি. পারদ = শিশিরাঙ্কে সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ।

$\therefore$ আপেক্ষিক আর্দ্রতা, $R = \frac{11 \cdot 3}{15 \cdot 5} \times 100\% = 72 \cdot 9\%$

শিশিরাঙ্ক নির্ণয় : যে তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ = 11·3 মিমি. পারদ সেই তাপমাত্রাই নির্ণেয় শিশিরাঙ্ক।

তালিকা অনুসারে 13°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ = 11·2 মিমি. পারদ; 14°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ = 12·0 মিমি. পারদ।

সুতরাং নির্ণেয় শিশিরাঙ্ক 13°C ও 14°C-এর মাঝে হবে।

12·0 — 11·2 = 0·8 মিমি. পারদ চাপের পার্থক্যের জন্য তাপমাত্রা বৃদ্ধি = (14 — 13)°C = 1°C

11·3 — 11·2 = 0·1 মিমি. পারদ চাপের পার্থক্যের জন্য তাপমাত্রা বৃদ্ধি $= 1 \times \left(\frac{0 \cdot 1}{0 \cdot 8}\right)°C = 0 \cdot 125°C$

$\therefore$ নির্ণেয় শিশিরাঙ্ক, $t = 13°C + 0 \cdot 125°C = 13 \cdot 125°C$

১০.২২ শুষ্ক ও আর্দ্র বালব হাইগ্রোমিটারের সাহায্যে আবহাওয়ার পূর্বাভাস

Weather forecast by wet and dry bulb hygrometer

আর্দ্র বায়ু অপেক্ষা শুষ্ক বায়ুতে পানি দ্রুত বাষ্পীভূত হয়। আবার বাষ্পায়ন যত বেশি হয় আর্দ্র বাল্‌ব থার্মোমিটারের পাঠ তত হ্রাস পায়। সুতরাং আর্দ্র ও শুষ্ক বাল্‌ব থার্মোমিটারের পাঠের পার্থক্য লক্ষ করে আবহাওয়ার মোটামুটি পূর্বাভাস দেয়া যায়।

থার্মোমিটার দুইটির পাঠের পার্থক্য—

(১) কম হলে পূর্বাভাসে আর্দ্র আবহাওয়া উল্লেখ করা যায়।
(২) খুব বেশি হলে পূর্বাভাসে বলা যায় যে, আবহাওয়া শুষ্ক।
(৩) ধীরে ধীরে কমতে থাকলে বলা যায় যে, বৃষ্টি হওয়ার সম্ভাবনা রয়েছে।
(৪) হঠাৎ হ্রাস পেলে পূর্বাভাসে ঝড় হতে পারে উল্লেখ করা যায়।

সারণি ১০.২ : বিভিন্ন তাপমাত্রায় গ্লেইসার-এর রাশির মান

শুষ্ক বাল্‌বের তাপমাত্রা (°C)	গ্লেইসারের রাশি G	শুষ্ক বাল্‌বের তাপমাত্রা (°C)	গ্লেইসারের রাশি G	শুষ্ক বাল্‌বের তাপমাত্রা (°C)	গ্লেইসারের রাশি G
4	7·82	16	1·87	28	1·67
5	7·28	17	1·85	29	1·66
6	6·62	18	1·83	30	1·65
7	5·77	19	1·81	31	1·64
8	4·92	20	1·79	32	1·63
9	4·04	21	1·77	33	1·62
10	2·06	22	1·75	34	1·61
11	2·02	23	1·74	35	1·60
12	1·99	24	1·72	36	1·59
13	1·95	25	1·70	37	1·58
14	1·92	26	1·69		
15	1·90	27	1·68		

সারণি ১০.৩ : রেনোর সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্প চাপের তালিকা

t_1°C	(t_1-t_2)°C										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	4.6	3.7	2.9	2.1	1.3						
1	4.9	4.1	3.2	2.4	1.6	0.8					
2	5.3	4.4	3.6	2.7	1.9	1.1	0.3				
3	5.7	4.8	3.9	3.1	2.2	1.4	0.6				
4	6.1	5.2	4.3	3.4	2.6	1.7	0.9	0.1			
5	6.5	5.6	4.7	3.8	2.9	2.1	1.2	0.4			
6	7.0	6.0	5.1	4.2	3.3	2.4	1.6	0.7			
7	7.5	6.5	5.5	4.6	3.7	2.8	1.9	1.1	0.2		
8	8.1	7.0	6.0	5.0	4.1	3.2	2.3	1.4	0.6		
9	8.6	7.5	6.5	5.5	4.5	3.6	2.7	1.8	0.9	0.1	
10	9.2	8.1	7.0	6.0	5.0	4.0	3.1	2.2	1.3	0.4	
11	9.9	8.7	7.6	6.5	5.5	4.5	3.5	2.6	1.7	0.8	
12	10.5	9.3	8.2	7.1	6.0	5.0	4.0	3.0	2.1	1.2	0.3
13	11.2	10.0	8.8	7.7	6.6	5.5	4.5	3.5	2.5	1.6	0.7
14	12.0	10.7	9.5	8.3	7.2	6.1	5.0	4.0	3.0	2.0	1.1
15	12.8	11.5	10.2	9.0	7.8	6.7	5.6	4.5	3.5	2.5	1.5
16	13.6	12.3	11.0	9.7	8.5	7.3	6.2	5.1	4.0	3.0	2.0
17	14.5	13.1	11.8	10.5	9.2	8.0	6.8	5.7	4.6	3.5	2.5
18	15.5	14.0	12.6	11.3	10.0	8.7	7.5	6.3	5.2	4.1	3.0
19	16.5	15.0	13.5	12.1	10.8	9.4	8.2	7.0	5.8	4.6	3.5
20	17.7	16.0	14.5	13.0	11.6	10.2	8.9	7.7	6.5	5.3	4.1

গাণিতিক উদাহরণ ১০.৫

১। কোনো একটি আবদ্ধ স্থানের বায়ুর তাপমাত্রা 15°C ও শিশিরাঙ্ক 8°C। তাপমাত্রা কমে 10°C হলে পরিবর্তিত জলীয় বাষ্পের চাপ ও শিশিরাঙ্ক কত হবে ? [7°C ও 8°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ যথাক্রমে 7.5×10^{-3} m ও 8.1×10^{-3} m পারদ।]

মনে করি 10°C ও 15°C তাপমাত্রায় ওই স্থানের অসম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ যথাক্রমে P_1 ও P_2। তা হলে শিশিরাঙ্কের সংজ্ঞা অনুসারে, P_2 = 15°C তাপমাত্রায় অসম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ = 8°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ = 8.1×10^{-3} m পারদ।

আবার স্থানটি আবদ্ধ বলে বায়ুর আয়তন নির্দিষ্ট। কাজেই চাপের সূত্র অনুসারে আমরা পাই,

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{T_1}{T_2}=\frac{273+10}{273+15}=\frac{283}{288}$$

∴ পরিবর্তিত জলীয় বাষ্পের চাপ, $P_1=\frac{283}{288}\times P_2=\frac{283}{288}\times8.1\times10^{-3}$ m পারদ $=7.96\times10^{-3}$ m পারদ।

মনে করি পরিবর্তিত শিশিরাঙ্ক = t°C

∴ t°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত বাষ্পের চাপ $=7.96\times10^{-3}$ m পারদ।

এখন প্রদত্ত রাশিগুলো হতে দেখা যাচ্ছে যে, $(8.1-7.5)\times10^{-3}$ m পারদ $=6\times10^{-4}$ m পারদ চাপ বৃদ্ধির জন্য 7°C হতে তাপমাত্রা বৃদ্ধি $=(8-7)$°C = 1°C

$(7.96-7.5)\times10^{-3}$ m পারদ $=0.46\times10^{-3}$ m পারদ চাপ বৃদ্ধির জন্য 7°C হতে তাপমাত্রা বৃদ্ধি $=\frac{1}{0.6}\times0.46=$ 0.766°C

∴ পরিবর্তিত শিশিরাঙ্ক = (7 + 0.766)°C = 7.766°C

২। কোনো একদিন বায়ুর তাপমাত্রা 26°C এবং শিশিরাঙ্ক 20·4°C। আপেক্ষিক আর্দ্রতা নির্ণয় কর। 20°C, 22°C এবং 26°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ যথাক্রমে 17·54, 19·83 এবং 25·21 mm পারদ চাপ।

[ব. বো. ২০১০, ২০০৩; য. বো. ২০০৯; চ. বো. ২০০৬; সি. বো. ২০০৪; কু. বো. ২০০০]

$(22-20)^\circ C = 2^\circ C$-এর জন্য সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপের বৃদ্ধি $= (19{\cdot}83 - 17{\cdot}54)$ mmHg $= 2{\cdot}29$ mmHg

$\therefore$ $(20{\cdot}4-20)^\circ C = 0{\cdot}4^\circ C$-এর জন্য সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ বৃদ্ধি

$$= \frac{2{\cdot}29 \times 0{\cdot}4}{2} \text{ mmHg} = 0{\cdot}458 \text{ mmHg}$$

$\therefore$ শিশিরাঙ্ক $20{\cdot}4^\circ C$ তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ, $f = (17{\cdot}54 + 0{\cdot}458)$ mmHg $= 17{\cdot}998$ mm Hg

আবার, $26^\circ C$ তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ, $F = 25{\cdot}21$ mmHg

আমরা জানি, আপেক্ষিক আর্দ্রতা,

$$R = \frac{f}{F} \times 100\% = \frac{17{\cdot}998}{25{\cdot}21} \times 100\% = 71{\cdot}39\%$$

৩। কোনো একদিন সিক্ত ও শুষ্ক বাল্ব আর্দ্রতামাপক যন্ত্রের শুষ্ক বাল্বের পাঠ 30°C এবং সিক্ত বাল্বের পাঠ 28°C। আপেক্ষিক আর্দ্রতা নির্ণয় কর। 30°C-এ গ্লেইসারের উৎপাদক 1·65 এবং 26°C, 28°C এবং 30°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত বাষ্প চাপ যথাক্রমে $25{\cdot}25 \times 10^{-3}$ m, $28{\cdot}45 \times 10^{-3}$ m এবং $31{\cdot}85 \times 10^{-3}$ m পারদ চাপ।

[ঢা. বো. ২০১১; রা. বো. ২০০০]

আমরা জানি,

$$t_1 = t + G(t_1 - t_2)$$

বা, $t = t_1 - G(t_1 - t_2)$

$$= 30 - 1{\cdot}65(30-28) = 26{\cdot}7^\circ C$$

এখানে,
$t_1 = 30^\circ C$
$t_2 = 28^\circ C$
$G = 1{\cdot}65$

$\therefore$ আপেক্ষিক আর্দ্রতা,

$$R = \frac{26{\cdot}7^\circ C \text{ তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত বাষ্প চাপ}}{30^\circ C \text{ তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত বাষ্প চাপ}} \times 100\%$$

$$= \frac{f}{F} \times 100\%$$

$$= \frac{26{\cdot}37 \times 10^{-3}}{31{\cdot}85 \times 10^{-3}} \times 100\% = 82{\cdot}79\%$$

এখানে,
$f = 26{\cdot}37 \times 10^{-3}$ m পারদ চাপ

৪। কোন স্থানের বায়ুর তাপমাত্রা 26°C এবং আপেক্ষিক আদ্রতা 70%। যদি সে স্থানের তাপমাত্রা কমে 18°C হয়, তবে বায়ুস্থিত জলীয় বাষ্পের কত শতাংশ ঘনীভূত হয়ে তরল পানি হবে ? [26°C এবং 18°C–এ সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ যথাক্রমে 25·21 mm এবং 15·48 mm পারদ স্তম্ভের সমান।] [BUET Admission Test, 2017-18]

$$R = \frac{26^\circ C \text{ তাপমাত্রায় বায়ুতে বিদ্যমান জলীয় বাষ্পের চাপ}}{26^\circ C \text{ তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ}}$$

$$0{\cdot}7 = \frac{26^\circ C \text{ তাপমাত্রায় বায়ুতে বিদ্যমান জলীয় বাষ্পের চাপ}}{25{\cdot}21}$$

$\therefore$ $26^\circ C$ তাপমাত্রায় বায়ুতে বিদ্যমান জলীয় বাষ্পের চাপ $= 0{\cdot}7 \times 25{\cdot}21 = 17{\cdot}65$ mm Hg

আবার জলীয় বাষ্পের চাপ জলীয় বাষ্পের ভরের সমানুপাতিক।

$\therefore$ $26^\circ C$ তাপমাত্রায় উপস্থিত জলীয় বাষ্পের ভর $= 17{\cdot}65 \times$ Kgm

এখানে, K সমানুপাতিক ধ্রুবক।

তাপমাত্রা কমে $18^\circ C$ এ আসলে কিছু পরিমাণ জলীয় বাষ্প ঘনীভূত হবে এবং বায়ু অবশিষ্ট বাষ্প দিয়ে সম্পৃক্ত থাকবে।

$18^\circ C$ তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ $= 15{\cdot}48$ mm Hg

$18^\circ C$ তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের ভর $= 15{\cdot}48$ K gm

$\therefore$ ঘনীভূত জলীয় বাষ্পের পরিমাণ $= (17{\cdot}65 - 15{\cdot}48)$ K gm $= 2{\cdot}17$ Kgm

ঘনীভূত জলীয় বাষ্পের শতকরা পরিমাণ $\frac{2{\cdot}17 \text{ Kgm}}{17{\cdot}15 \text{ Kgm}} \times 100\% = 12{\cdot}29\%$

৫। একটি ঘরের পরিমাপ 20 m × 10 m × 4 m। 20° C তাপমাত্রায় আপেক্ষিক আর্দ্রতা 10% থেকে বাড়িয়ে 70% করতে কতটুকু পানি বাষ্পীভূত হওয়া প্রয়োজন ? 70° C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের ঘনত্ব = 17.3×10^{-6} gm/cc।

আমরা জানি, আপেক্ষিক আর্দ্রতা

$$R = \frac{t^\circ C \text{ তাপমাত্রায় নির্দিষ্ট আয়তনের বায়ুতে উপস্থিত জলীয় বাষ্পের ভর}}{t^\circ C \text{ তাপমাত্রায় ওই আয়তনের বায়ুকে সম্পৃক্ত করতে প্রয়োজনীয় জলীয় বাষ্পের ভর}}$$

বা, $$R = \frac{t^\circ C \text{ তাপমাত্রায় উপস্থিত জলীয় বাষ্পের ঘনত্ব}}{t^\circ C \text{ তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের ঘনত্ব}}$$

∴ 20° C তাপমাত্রায় বায়ুতে উপস্থিত জলীয় বাষ্পের ঘনত্ব,

$\rho_1 = R \times 20^\circ C$ তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের ঘনত্ব

$$= \frac{10}{100} \times 17.3 \times 10^{-6} = 1.73 \times 10^{-6} \text{ gm/cc}$$

∴ আপেক্ষিক আর্দ্রতা 70% হলে জলীয় বাষ্পের ঘনত্ব,

$$\rho_1 = \frac{70}{100} \times 17.3 \times 10^{-6} = 7 \times 1.73 \times 10^{-6} \text{ gm/cc}$$

সুতরাং, পানি বাষ্পীভূত হওয়ায় জলীয় বাষ্পের ঘনত্ব বৃদ্ধি $= \rho_2 - \rho_1$

$$= 7 \times 1.73 \times 10^{-6} - 1.73 \times 10^{-6} = 6 \times 1.73 \times 10^{-6} \text{ gm/cc}$$

এখন ঘরের আয়তন $= 20 \times 10 \times 4 = 800 \text{ m}^3 = 8 \times 10^8$ cc

∴ বাষ্পীভূত পানির ভর $= 8 \times 10^8 \times 6 \times 1.73 \times 10^{-6} = 8304 \text{ gm} = 8.304$ kg

৬। একটি এয়ার কন্ডিশনার (Air conditioner) 40° C তাপমাত্রা এবং 80% আপেক্ষিক আর্দ্রতাবিশিষ্ট বাইরের বায়ু ভেতরে টেনে 20° C তাপমাত্রা এবং 50% আপেক্ষিক আর্দ্রতার বাতাসে পরিণত করে। এক্ষেত্রে প্রতি ঘন মিটারে কতটা জলীয় বাষ্প ঘনীভূত হবে নির্ণয় কর। 40°C ও 20°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের ঘনত্ব যথাক্রমে 45 gm^{-3} এবং 17 gm^{-3}।

আমরা জানি,

আপেক্ষিক আর্দ্রতা, $$R = \frac{t^\circ C \text{ তাপমাত্রায় নির্দিষ্ট আয়তনের বায়ুতে জলীয় বাষ্পের ভর}}{t^\circ C \text{ তাপমাত্রায় ওই আয়তনের সম্পৃক্ত বায়ুতে উপস্থিত জলীয় বাষ্পের ভর}}$$

বা, $$\frac{80}{100} = \frac{t^\circ C \text{ তাপমাত্রায় } 1 \text{ m}^3 \text{ বায়ুতে জলীয় বাষ্পের ভর}}{40^\circ C \text{ তাপমাত্রায় } 1 \text{ m}^3 \text{ সম্পৃক্ত বায়ুতে উপস্থিত জলীয় বাষ্পের ভর}}$$

বা, $$0.8 = \frac{40^\circ C \text{ তাপমাত্রায় } 1 \text{ m}^3 \text{ বায়ুতে উপস্থিত জলীয় বাষ্পের ভর}}{45}$$

∴ 40° C তাপমাত্রায় 1 m^3 বায়ুতে উপস্থিত জলীয় বাষ্পের ভর $= 0.8 \times 45 = 36.0$ g

অনুরূপভাবে 20° C তাপমাত্রায় 50% আপেক্ষিক আর্দ্রতা বিশিষ্ট 1 m^3 বায়ুতে উপস্থিত জলীয় বাষ্পের ভর = $0.5 \times 17 = 8.5$ g

∴ 1 m^3 বায়ুতে উপস্থিত জলীয় বাষ্পের ভর $= 36.0 - 8.5 = 27.5$ g

৭। 20°C তাপমাত্রায় আপেক্ষিক আর্দ্রতা 50% হলে শিশিরাঙ্ক কত ? দেওয়া আছে, 20°C, 10°C এবং 9°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ যথাক্রমে 17.5 mm, 9.2 mm এবং 8.6 mm Hg।

20°C তাপমাত্রায় বাতাসে উপস্থিত জলীয় বাষ্পের চাপ,

$$P = \frac{50}{100} \times 17.5 = 8.75 \text{ mm Hg}$$

কাজেই যে তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত বাষ্পচাপ 8.75 mm Hg, সেই তাপমাত্রাই শিশিরাঙ্ক।

এখন, 9°C থেকে 10°C তাপমাত্রা পরিবর্তনে অর্থাৎ

1 °C তাপমাত্রা পরিবর্তনে সম্পৃক্ত বাষ্পচাপের পরিবর্তন $= 9.2 - 8.6 = 0.6$ mm

∴ 0.6 mm সম্পৃক্ত বাষ্পচাপের পরিবর্তনের জন্য তাপমাত্রা পার্থক্য = 1°C

0.45 mm সম্পৃক্ত বাষ্পচাপের পরিবর্তনের জন্য তাপমাত্রার পার্থক্য $= \frac{1 \times 0.45}{0.6} = 0.75$°C

∴ নির্ণেয় শিশিরাঙ্ক = 10°C − 0.75°C = 9.25°C

১০.২৩ ব্যবহারিক
Experimental

পরীক্ষণের নাম : পিরিয়ড : ২	নিউটনের শীতলীকরণ সূত্রের সাহায্যে তরলের আপেক্ষিক তাপ নির্ণয় **Determination of specific heat of a liquid by Newton's law of cooling**

মূলতত্ত্ব (Theory) : কোনো একটি পদার্থের একক ভরের তাপমাত্রা এক ডিগ্রি হ্রাস বা বৃদ্ধি করতে যে পরিমাণ তাপের প্রয়োজন হয়, তাকে ওই পদার্থের আপেক্ষিক তাপ বলে। একে S দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

একই পরিবেশে কোনো একটি পদার্থের তাপ হারাবার হার ওই পদার্থের তাপমাত্রা এবং তার পারিপার্শ্বিকের তাপমাত্রার পার্থক্যের সমানুপাতিক। এটিই হলো শীতলীকরণ পদ্ধতির মূলনীতি। পদার্থের তাপমাত্রা এবং পারিপার্শ্বিকের তাপমাত্রার পার্থক্য অবশ্যই কম হতে হবে।

মনে করি,

নাড়নীসহ ক্যালরিমিটারের পানি সম = W kg

ক্যালরিমিটারে পরীক্ষণীয় তরলের ভর = M kg

তরলের আপেক্ষিক তাপ = $S\ J\ kg^{-1}\ K^{-1}$

তরলের তাপমাত্রা $\theta_1°$ হতে $\theta_2°$ -তে শীতল হতে সময় = t_1 sec

তরলের সম-আয়তনের পানির ভর = m_1 kg

পানির আপেক্ষিক তাপ = $S_1\ Jkg^{-1}K^{-1}$

পানির তাপমাত্রা $\theta_1°$ হতে $\theta_2°$-তে শীতল হতে সময় = t_2 sec

অতএব, তরলের তাপ হারাবার হার $= \dfrac{(MS+W)(\theta_1-\theta_2)}{t_1}\ Js^{-1}$ ... ... (i)

এবং পানির তাপ হারাবার হার $= \dfrac{(m_1S_1+W)(\theta_1-\theta_2)}{t_2}\ Js^{-1}$ ... ... (ii)

নিউটনের শীতলীকরণ সূত্র অনুসারে এই দুই ক্ষেত্রের তাপ হারাবার হার সমান।

$$\therefore\ \frac{(MS+W)(\theta_1-\theta_2)}{t_1}Js^{-1} = \frac{(m_1S_1+W)(\theta_1-\theta_2)}{t_2}\ Js^{-1}$$

বা, $\dfrac{(MS+W)(\theta_1-\theta_2)}{t_1} = \dfrac{(m_1S_1+W)(\theta_1-\theta_2)}{t_2}$

বা, $S = \dfrac{1}{M}\left[\dfrac{(m_1S_1+W)t_1}{t_2} - W\right]$

বা, $S = \dfrac{1}{M}\left\{\dfrac{t_1}{t_2}(m_1S_1+W) - W\right\}\ J\,kg^{-1}K^{-1}$ ... ... (iii)

এখন M, m_1, S_1, W, t_1 এবং t_2-এর মান সমীকরণ (iii)-এ বসিয়ে S-এর মান বের করা যায়।

যন্ত্রপাতি (Apparatus) : (১) নাড়নীসহ ক্যালরিমিটার, (২) দুই দেয়ালবিশিষ্ট একটি প্রকোষ্ঠ, (৩) সুবেদী থার্মোমিটার, (৪) নিক্তি, (৫) বার্নার, (৬) স্টপ-ওয়াচ ইত্যাদি।

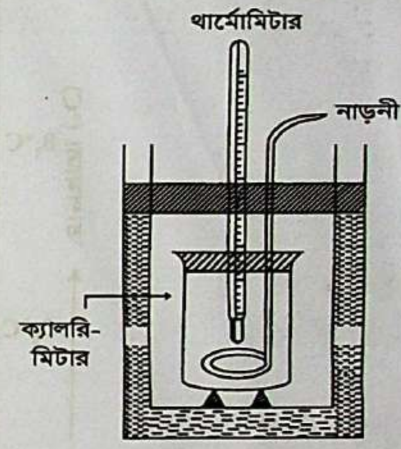
কার্যপদ্ধতি (Working procedure) :

(১) নাড়নীসহ একটি পরিষ্কার ও শুষ্ক ক্যালরিমিটার নিয়ে ওজন করা হয়। ক্যালরিমিটারের ভেতরের দেয়ালে এর তলদেশ হতে তিন-চতুর্থাংশ উপরে একটি দাগ দেয়া হয়।

(২) অতঃপর অন্য একটি পাত্রে 70°C থেকে 75°C তাপমাত্রায় পানি গরম করে ওই তাপমাত্রার পানি ক্যালরিমিটারের এই দাগ পর্যন্ত ঢালা হয় এবং গরম পানিসহ ক্যালরিমিটারটিকে দুই দেয়ালবিশিষ্ট প্রকোষ্ঠের মধ্যে স্থাপন করা হয়।

(৩) এরপর নাড়নী দ্বারা পানি আস্তে আস্তে নাড়া হয় এবং এক মিনিট পর পর থার্মোমিটারের সাহায্যে পানির তাপমাত্রা গ্রহণ করা হয়। পানির তাপমাত্রা কক্ষ তাপমাত্রা অপেক্ষা বেশি হওয়ায় তা ক্রমশ তাপ হারিয়ে শীতল হবে। এভাবে 20 থেকে 25টি পাঠ নিয়ে পানিসহ ক্যালরিমিটার ওজন করা হয়। এই দুই ওজনের পার্থক্য হতে পানির ভর নির্ণয় করা হয়।

(৪) এখন ক্যালরিমিটার হতে পানি ফেলে দেয়া হয় এবং একে পরিষ্কার ও শুষ্ক করে অন্য একটি পাত্রে 70°C থেকে 75°C তাপমাত্রায় গরম করা পরীক্ষাধীন তরল পদার্থ দিয়ে ক্যালরিমিটারের সেই দাগ পর্যন্ত ভর্তি করা হয় এবং তরলসহ ক্যালরিমিটারটিকে প্রকোষ্ঠের মধ্যে স্থাপন করা হয়।



চিত্র : ১০.১৩

(৫) এবার তরল পদার্থটিকে আস্তে আস্তে নাড়া হয় এবং পদ্ধতি (৩)-এর অনুরূপ এক মিনিট পরপর এর তাপমাত্রার পাঠ নেয়া হয়। এভাবে 20—25টি পাঠ নেয়ার পরে তরলসহ ক্যালরিমিটারের ওজন গ্রহণ করা হয়। তৃতীয় এবং প্রথম ওজনের পার্থক্য হতে তরলের ভর নির্ণয় করা হয়।

(৬) সময়কে X অক্ষে এবং তাপমাত্রাকে Y অক্ষে স্থাপন করে একটি ছক কাগজে দুটি সমতাপমাত্রা লেখচিত্র অঙ্কন করা হয়। প্রাপ্ত এই দুটি রেখাকে শীতলীকরণ রেখা বলা হয়। অঙ্কিত লেখচিত্র হতে তরল পদার্থ ও পানির কোনো একটি তাপমাত্রা θ_1°C হতে θ_2°C-এ শীতল হতে কত সময়ের প্রয়োজন হয় তা নির্ণয় করা হয়। লেখচিত্রের θ_1°C ও θ_2°C তাপমাত্রায় সময় অক্ষের সমান্তরালে দুটি সরলরেখা AB ও CD টানা হয় এবং θ_1°C হতে θ_2°C পর্যন্ত শীতল হতে পানির সময় t_1 ও তরলের সময় t_2 বের করা হয়।

পর্যবেক্ষণ ও সন্নিবেশন (Observation and Manipulation) :

পর্যবেক্ষণ ছক—1 (পানি ও তরলের ভর নির্ণয়ের জন্য)

পর্যবেক্ষণ সংখ্যা	ক্যালরিমিটারসহ নাড়নীর ভর = W_1 kg	(ক্যালরিমিটার + নাড়নী + পানি) এর ভর = W_2 kg	(ক্যালরিমিটার + নাড়নী + তরল) এর ভর = W_3 kg	পানির ভর $m_1 = (W_2 - W_1)$ kg	তরলের ভর $M = (W_3 - W_1)$ kg
1	... ...	... ...	... ...	... ...	... ...

ক্যালরিমিটারের উপাদানের আপেক্ষিক তাপ = S' $Jkg^{-1}K^{-1}$

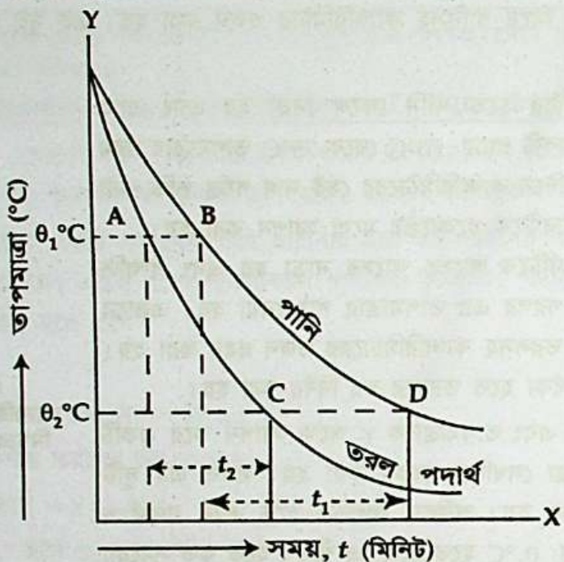
∴ ক্যালরিমিটারের পানিসম, $W = W_1 \times S'$ kg

পর্যবেক্ষণ ছক—2 (সময়-তাপমাত্রার পাঠ)

সময় মিনিট																					
পানির তাপমাত্রা (°C)																					
তরলের তাপমাত্রা (°C)																					

লেখচিত্র হতে : θ_1°C হতে θ_2°C-এ শীতল হতে প্রদত্ত তরলের প্রয়োজনীয় সময় = ... t_1 মিনিট

θ_1°C হতে θ_2°C-এ শীতল হতে পানির প্রয়োজনীয় সময় = ... t_2 মিনিট



চিত্র ১০.১৪

হিসাব বা গণনা (Calculation) : $S = \frac{1}{M}\left\{\frac{t_1}{t_2}(m_1S_1 + W) - W\right\}$

ফলাফল (Result) : প্রদত্ত তরলের নির্ণেয় আপেক্ষিক তাপ, S = ... J $kg^{-1}K^{-1}$

সতর্কতা (Precautions) :

(১) ক্যালরিমিটার পরিষ্কার ও শুষ্ক হওয়া উচিত।

(২) ওজন নির্ভুল হওয়া উচিত।

(৩) তাপমাত্রা সঠিকভাবে পরিমাপ করা উচিত।

(৪) সময়ের পাঠ নির্ভুল হওয়া উচিত।

আলোচনা (Discussions) :

(১) ক্যালরিমিটার পরিষ্কার ও শুষ্ক, ওজন নির্ভুল, তাপমাত্রার পাঠ সঠিক এবং সময়ের পাঠ নির্ভুল না হলে পরীক্ষার ফলাফল সঠিক হবে না।

(২) সম আয়তনের তরল পদার্থ ও পানি না নিলে ফলাফল ভুল হবে।

(৩) ক্যালরিমিটারের তলদেশ কালো করা হয়। ফলে এর তাপ বিকিরণ করার ক্ষমতা বেড়ে যায়।

(৪) কোনো উদ্বায়ী তরল নেয়া উচিত হবে না।

প্রয়োজনীয় গাণিতিক সূত্রাবলি

$PV =$ ধ্রুবক ... ... (1)

$P_1V_1 = P_2V_2$ ... ... (2)

$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$ ... ... (3)

$PV = nRT$ ... ... (4)

$n = \frac{m}{M}$ ... ... (5)

$PV = \frac{1}{3}mnc^2$ ... ... (6)

$P = \frac{1}{3}\rho c^2$ ... ... (7)

$$PV = \frac{1}{3} Mc^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (8)$$

$$P = \frac{2}{3}\frac{E}{V} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (9)$$

$$PV = \frac{2}{3} E \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (10)$$

$$c_{rms} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (11)$$

$$c_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (12)$$

$$E = \frac{3}{2} RT = \frac{3}{2} PV \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (13)$$

$$E' = \frac{3}{2} KT \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (14)$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\, n\pi\sigma^2} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (15)$$

$$R = \frac{f}{F} \times 100\% \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (16)$$

$$t_1 = t + G(t_1 - t_2) \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (17)$$

উচ্চতর দক্ষতাভিত্তিক নমুনার গাণিতিক উদাহরণ

১। এক বিকেলে অহনা ও তার বন্ধুরা একটি হ্রদের পাশে বসে গল্প করছিল। হঠাৎ অহনার নজরে পড়ল হ্রদের স্বচ্ছ পানির তলদেশ থেকে বায়ু বুদবুদ পানির উপরিতলে আসছে। পানির উপরিতলে এসে বুদবুদটি বড় আকার ধারণ করে। [পানির উপরিতলে বুদবুদটির আকার 5 গুণ এবং বায়ুমণ্ডলের চাপ ছিল 10^5 Nm^{-2}]। পানির ঘনত্ব, $\rho = 1000$ kgm^{-3}।

(ক) উদ্দীপকে প্রদত্ত তথ্যানুসারে অহনার দেখা হ্রদের গভীরতা নির্ণয় কর।

(খ) উল্লিখিত উদ্দীপকটি বয়েলের সূত্র মানে কি-না তা প্রমাণ করে দেখাও।

(ক) ধরি হ্রদের গভীরতা $= h$

আমরা জানি, $P_1V_1 = P_2V_2$

বা, $(P_2 + h\rho_1 g)\, V = P_2 \times 5V$

বা, $P_2 + h\rho_1 g = 5P_2$

বা, $4P_2 = h\rho_1 g$

$\therefore h = \frac{4P_2}{\rho_1 g} = \frac{4 \times 10^5}{1000 \times 9.8} = 40.82$ m

এখানে,
হ্রদের তলদেশে বুদবুদের আয়তন, $V_1 = V$
উপরিতলে, $V_2 = 5V$
পানির উপরিতলে বায়ুমণ্ডলের চাপ,
$P_2 = 10^5$ Nm^{-2}
পানির ঘনত্ব, $\rho_1 = 1000$ kgm^{-3}
হ্রদের তলদেশে পানির চাপ,
$P_1 = P_2 + h\rho_1 g$

(খ) $V_1 = V$

$V_2 = 5V$

$P_2 = 10^5$ N-m^{-2}

$P_1 = P_2 + h\rho_1 g$

$= 10^5 + 40.82 \times 1000 \times 9.8$

$= 5 \times 10^5$ Nm^{-2}

আমরা জানি, $P_1V_1 = P_2V_2$

আবার, $P_1V_1 = 5 \times 10^5$ V ... ... (i)

এবং $P_2V_2 = 5 \times 10^5$ V ... ... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) থেকে পাই,

$P_1V_1 = P_2V_2 = 5 \times 10^5 =$ ধ্রুবক।

অতএব, স্থির তাপমাত্রায় কোনো বস্তুর বিভিন্ন সময়ে চাপ ও আয়তনের গুণফল ধ্রুবক। এটিই বয়েলের সূত্রের প্রমাণ।

২। লিটন হিলিয়াম গ্যাসকে আদর্শ গ্যাস ধরে গড় গতিশক্তি নির্ণয় করল 1.6×10^{-20} J যেখানে বোলজ্‌ম্যান ধ্রুবক, $K = 1.38 \times 10^{-23}\ JK^{-1}$।

(ক) আদর্শ গ্যাসের তাপমাত্রা কত ?

(খ) হিলিয়াম গ্যাসের তাপমাত্রা দ্বিগুণ হলে অণুগুলোর গড় গতিশক্তি কি দ্বিগুণ হবে ? না হলে তা ব্যাখ্যা কর।

(ক) হিলিয়াম গ্যাসের গতিশক্তি

$$E = \frac{3}{2}KT$$

বা, $1.6 \times 10^{-20} = \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times T$

$$\therefore T = \frac{2}{3} \times \frac{1.6 \times 10^{-20}}{1.38 \times 10^{-23}} = 772.95\ K$$

$$\approx 500\ °C$$

এখানে,

K = বোলজ্‌ম্যান ধ্রুবক $= 1.38 \times 10^{-23}\ JK^{-1}$

T = পরম তাপমাত্রা = ?

E = গতিশক্তি $= 1.6 \times 10^{-20}$ J

(খ) হিলিয়াম গ্যাসের তাপমাত্রা দ্বিগুণ হলে অণুগুলোর গড় গতিশক্তিও দ্বিগুণ হবে। (ক) থেকে প্রাপ্ত হিলিয়াম গ্যাসের তাপমাত্রা 500°C। এই তাপমাত্রার জন্য এর অণুগুলোর গড় গতিশক্তি ছিল 1.6×10^{-20} J।

আবার, $E' = \frac{3}{2}KT'$

$$= \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 1273$$

$= 2.62 \times 10^{-20}$ J; অর্থাৎ $E' = 2 \times E$

এখানে

$T' = 500 \times 2 = 1000°\ C$

$= (1000 + 273)\ K = 1273\ K$

যেহেতু কোনো গ্যাসের অণুর গড় গতিশক্তি এর পরম তাপমাত্রার সমানুপাতিক; অর্থাৎ তাপমাত্রা বেড়ে গেলে গড় গতিশক্তিও বেড়ে যায়। আবার তাপমাত্রা হ্রাস পেলে গড় গতিশক্তিও হ্রাস পাবে। অতএব হিলিয়াম গ্যাসের তাপমাত্রা দ্বিগুণ হলে এর অণুগুলোর গতিশক্তিও দ্বিগুণ হবে।

৩। গ্যাস ভর্তি একটি বেলুনকে 40.81 m গভীরতায় পানির তলদেশে নিয়ে যাওয়ায় এর আয়তন 1 লিটার ধারণ করল। পানির তলদেশে ওই বেলুনে আরো 1 লিটার গ্যাস ভর্তি করে ছেড়ে দেওয়া হলো। বায়ুমণ্ডলের চাপ $10^5\ Nm^{-2}$, পানির ঘনত্ব $10^3\ kgm^{-3}$ এবং $g = 9.804\ ms^{-2}$।

(ক) পানিতে নিমজ্জনের পূর্বে উদ্দীপকের বেলুনের আয়তন কত ছিল ?

(খ) যদি বেলুনটির গ্যাস ধারণ ক্ষমতা 9 লিটার হয়, তা হলে পানির উপরিতলে বেলুনটি অক্ষত অবস্থায় পৌঁছাবে কি? বিশ্লেষণপূর্বক মতামত দাও।

(ক) মনে করি, h গভীরতায় চাপ P_1 এবং হ্রদের উপরিতলে আয়তন V_2

আমরা জানি, $P_1 = P_2 + h\rho g$

আবার,

$$P_1V_1 = P_2V_2$$

বা, $V_2 = \frac{P_1V_1}{P_2} = \frac{(P_2 + h\rho g)V_1}{P_2}$

$$= \frac{(P_2 + h\rho g) \times 1}{P_2}$$

$$= \frac{10^5 + 40.81 \times 10^3 \times 9.804}{10^5}$$

$$= \frac{10^5 + 4 \times 10^5}{10^5} = 5 \text{ লিটার}$$

এখানে,

$h = 40.81$ m

পানির তলদেশে, $V_1 = 1$ লিটার

উপরিতলে চাপ, $P_2 = 10^5\ Nm^{-2}$

ঘনত্ব, $\rho = 10^3\ kgm^{-3}$

$g = 9.804\ ms^{-2}$

নিমজ্জনের পূর্বে বেলুনের আয়তন, $V_2 = ?$

(খ) এখন, পানির তলদেশে আরও 1 লিটার বায়ু প্রবেশ করানোর ফলে পরিবর্তিত আয়তন $V_1' = 1 + 1 = 2$ লিটার

$$P_1V_1' = P_2V_2'$$

$$\therefore (P_2 + h\rho g) \times 2 = P_2V_2'$$

বা, $V_2' = \frac{2 \times (10^5 + 40.81 \times 10^3 \times 9.804)}{10^5} = 10$ লিটার

এই মান বেলুনের সর্বোচ্চ ধারণ ক্ষমতা 9 লিটার অপেক্ষা বেশি। সুতরাং, বেলুনটি ফেটে যাবে। অর্থাৎ বেলুনটি অক্ষত থাকবে না।

৪। আবির পদার্থবিজ্ঞান ল্যাবে 5.7×10^{-4} m^3 আয়তনের 3 g নাইট্রোজেন গ্যাসকে 0.64 m পারদ স্তম্ভ চাপ ও 39°C তাপমাত্রা থেকে প্রমাণ চাপ ও তাপমাত্রায় রূপান্তর করল। এতে গ্যাসের আয়তন ও গতিশক্তি উভয়ই পরিবর্তন হলো। নেহাল বলল গ্যাসের আয়তন ও গতিশক্তি উভয়ই হ্রাস পেয়েছে। নাইট্রোজেনের গ্রাম আণবিক ভর 28 g এবং $R = 8.31$ JK^{-1}mole^{-1}। [সি. বো. ২০১৫]

(ক) প্রমাণ চাপ ও তাপমাত্রায় গ্যাসটির আয়তন নির্ণয় কর।

(খ) নেহালের বক্তব্য কী সঠিক ছিল? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে মতামত দাও।

(ক) আমরা জানি,

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$$

$$\therefore \quad V_2 = \frac{P_1V_1T_2}{P_2T_1}$$

$$= \frac{0.64 \times 5.7 \times 10^{-4} \times 273}{0.76 \times 312}$$

$$= 4.2 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

দেওয়া আছে,

আদি আয়তন, $V_1 = 5.7 \times 10^{-4}$ m^3

আদি চাপ, $P_1 = 0.64$ mHgP

আদি তাপমাত্রা, $T_1 = 39°C = (39 + 273)$ K $= 312$ K

চূড়ান্ত চাপ, $P_2 = 0.76$ mHgP

চূড়ান্ত তাপমাত্রা, $T_2 = 273$ K

$V_2 = ?$

(খ) যেহেতু 4.2×10^{-4} m$^3 < 5.7 \times 10^{-4}$ m^3

সুতরাং গ্যাসটির আয়তন হ্রাস পেয়েছে।

T পরম তাপমাত্রায় n মোল গ্যাসের গতিশক্তি, $E = \frac{3}{2}nRT$

n (মোল সংখ্যা) অপরিবর্তিত থাকলে $E \propto T$.

উদ্দীপকের ঘটনায় গ্যাসের ভর তথা মোল সংখ্যা n অপরিবর্তিত।

সুতরাং পরম তাপমাত্রা হ্রাসে গতিশক্তিও হ্রাস পারে; অর্থাৎ নেহালের বক্তব্য সঠিক।

৫। একজন আবহাওয়াবিদ দৈনিক প্রতিবেদন তৈরির জন্য কোনো একদিন ঢাকা ও রাজশাহীতে স্থাপিত দুটি শুষ্ক ও সিক্ত (আর্দ্র) বালব আর্দ্রতামাপক যন্ত্রের মাধ্যমে নিচের উপাত্তগুলো সংগ্রহ করলেন।

স্থান	শুষ্ক বালব থার্মোমিটারের পাঠ	সিক্ত (আর্দ্র) বালব থার্মোমিটার পাঠ	বায়ুর তাপমাত্রায় গ্লেসিয়ারের উৎপাদন
ঢাকা	28.6°C	20°C	1.664
রাজশাহী	32.5°C	22°C	1.625

[14°C, 16°C, 28°C, 30°C, 32°C, 34°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পচাপ যথাক্রমে 11.99, 13.63, 28.35, 31.83, 35.66 এবং 39.90 mmHg]

(ক) ওই দিন ঢাকার শিশিরাঙ্ক কত ছিল?

(খ) উপরোক্ত তথ্য মতে কোনো ব্যক্তি কোথায় অধিকতর স্বস্তিবোধ করবেন? গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর।

(ক) আমরা জানি, শিশিরাঙ্ক θ হলে,

$$\theta = \theta_1 - G(\theta_1 - \theta_2)$$

$$= 28.6°C - 1.664\,(28.6 - 20)$$

$$= 14.29°C$$

$\therefore$ ওই দিন ঢাকার শিশিরাঙ্ক 14.29° C

দেওয়া আছে,

ঢাকায় শুষ্ক বাল্বের তাপমাত্রা, $\theta_1 = 28.6°C$

এবং আর্দ্র বাল্বের তাপমাত্রা, $\theta_2 = 20°C$

বায়ুর তাপমাত্রায় গ্লেসিয়ারের উৎপাদক, $G = 1.664$

(খ) ঢাকায় শিশিরাঙ্কে সম্পৃক্ত বাষ্পচাপ,

f = 14°C তাপমাত্রায় চাপ + 0.29°C তাপমাত্রায় চাপ

$$= 11.99 + \left(\frac{13.63 - 11.99}{2}\right) \times 0.29 = 12.228 \text{ mmHgP}$$

এবং বায়ুর তাপমাত্রায় 28.6°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত বাষ্পচাপ,

F = 28°C তাপমাত্রায় বাষ্পচাপ + 0.6°C তাপমাত্রায় বাষ্পচাপ

$$= 28.35 + \left(\frac{(31.83 - 28.35)}{2}\right) \times 0.6 = 29.394 \text{ mmHgP}$$

$\therefore$ ঢাকায় আপেক্ষিক আর্দ্রতা, $R = \frac{f}{R} = \frac{12.228}{29.394} \times 100\% = 41.6\%$

রাজশাহীতে শিশিরাঙ্ক, $\theta = \theta_1 - G(\theta_1 - \theta_2) = 32.5 - 1.625\,(32.5 - 22) = 15.44°C$

রাজশাহীতে শিশিরাঙ্কে বা 15.44°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত বাষ্পচাপ,

f' = 14°C তাপমাত্রায় বাষ্পচাপ + 1.4375°C তাপমাত্রায় বাষ্পচাপ

$$f' = 11.99 + \left(\frac{13.63 - 11.99}{2}\right) \times 1.4375$$

$$= 13.169 \text{ mmHgP}$$

এবং বায়ুর তাপমাত্রায় বা 32.5°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত বাষ্পচাপ,

$$F' = 35.66 + \frac{(39.90 - 35.66) \times 0.5}{2} = 36.72 \text{ mmHgP}$$

$\therefore$ আপেক্ষিক আর্দ্রতা, $R' = \frac{f'}{F'} \times 100\% = \frac{13.169}{36.72} \times 100\% = 35.86\%$

যেহেতু $35.86\% < 41.6\%$ কাজেই রাজশাহীতে আপেক্ষিক আর্দ্রতা কম হওয়ায় ওই ব্যক্তি রাজশাহীতে অধিকতর স্বস্তিবোধ করবেন।

৬। একটি গ্যাস সিলিন্ডারের আয়তন $1.5\ m^3$। সিলিন্ডারটিতে 27°C তাপমাত্রায় কোনো গ্যাসের 30×10^{25} টি অণু আবদ্ধ আছে। গ্যাস অণুর ব্যাস 25×10^{-10} m। পরবর্তীতে উক্ত গ্যাসপূর্ণ সিলিন্ডারটি সম আয়তনের অপর একটি খালি সিলিন্ডারের সাথে যুক্ত করা হলো।

(ক) সিলিন্ডারে আবদ্ধ গ্যাসের গতিশক্তি নির্ণয় কর।

(খ) খালি সিলিন্ডার যুক্ত করায় গ্যাসের অণুর গড় মুক্ত পথের পরিবর্তন হবে কি-না গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক মতামত দাও। [দি. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি,

$$E = N \times \frac{3}{2} KT$$

$$= 30 \times 10^{25} \times \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300$$

$$= 1.863 \times 10^{6}\ J$$

এখানে,
তাপমাত্রা, $T = 27°C = (27 + 273) = 300$ K
অণুর সংখ্যা, $N = 30 \times 10^{25}$
বোলজ্‌ম্যান ধ্রুবক, $K = 1.38 \times 10^{-23}\ JK^{-1}$
আবদ্ধ গ্যাসের গতিশক্তি, $E = ?$

(খ) আমরা জানি,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi\sigma^2 n}$$

অণুর ব্যাস ধ্রুব বলে, $\lambda \propto \frac{1}{n}$

$\therefore$ প্রথমে ও শেষে গড় মুক্ত পথ যথাক্রমে λ_1 ও λ_2 হলে,

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{N}{V_1} \times \frac{2V_1}{N} = 2$$

$\therefore \quad \lambda_2 = 2\lambda_1$

এখানে,
গ্যাসপূর্ণ সিলিন্ডারের আয়তন, $V_1 = 1.5\ m^3$
অণুর ব্যাস, $\sigma = 25 \times 10^{-10}$ m
খালি সিলিন্ডারের সাথে যুক্ত করার পর আয়তন, $V_2 = 2V_1$
প্রাথমিক অবস্থায় একক আয়তনে অণুর সংখ্যা, $n_1 = \frac{N}{V_1}$
শেষ অবস্থায় একক আয়তনে অণুর সংখ্যা, $n_2 = \frac{N}{V_2} = \frac{N}{2V_1}$

অতএব খালি সিলিন্ডার যুক্ত করায় গ্যাসের অণুর গড় মুক্ত পথ দ্বিগুণ হবে।

৭। একটি সিলিন্ডারে 127°C তাপমাত্রা ও 73 cm পারদ চাপে 3 g হিলিয়াম গ্যাস রাখা হলো। একই পরিমাণ হিলিয়াম গ্যাস অপর একটি সিলিন্ডারে STP-তে রাখা হলো।

(ক) প্রথম সিলিন্ডারে গ্যাসের আয়তন হিসাব কর।

(খ) সিলিন্ডার দুটিতে গ্যাসের গতিশক্তি নির্ণয়পূর্বক তাপমাত্রা তুলনা করে ফলাফল বিশ্লেষণ কর। [চ. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি,

$PV = nRT$

$\therefore V = \frac{nRT}{P} = \frac{0.75 \times 8.314 \times 400}{9.593 \times 10^4}$

$= 2.6 \times 10^{-2}\ m^3$

এখানে,

১ম সিলিন্ডারের ক্ষেত্রে,

চাপ, $P = 72$ cm পারদ $= 0.72 \times 13596 \times 9.8$ Pa $= 9.593 \times 10^4$ Pa

তাপমাত্রা, $T = 127°C = (127 + 273) = 400$ K

ভর, $m = 3$ g

হিলিয়ামের আণবিক ভর, $M = 4$ g/mole

$\therefore$ হিলিয়ামের মোল সংখ্যা,

$n = \frac{m}{M} = 0.75$ mole

$R = 8.314$

আয়তন, $V = ?$

(খ) আমরা জানি, উদ্দীপক অনুযায়ী,

১ম সিলিন্ডারে গ্যাসের গতিশক্তি,

$E_1 = \frac{3}{2} nRT_1$

$= 1.5 \times 0.75 \times 8.314 \times 400$

$= 3.74 \times 10^3$ J

এখানে,

১ম সিলিন্ডারে গ্যাসের তাপমাত্রা, $T_1 = 127°C = 400$ K

২য় সিলিন্ডারে গ্যাসের তাপমাত্রা, $T_2 = 273$ K

হিলিয়ামের মোল সংখ্যা, $n = 0.75$ mole

২য় সিলিন্ডারে গ্যাসের গতিশক্তি, $E_2 = \frac{3}{2} nRT_2$

$= 1.5 \times 0.75 \times 8.314 \times 273$

$= 2.55 \times 10^3$ J

$\therefore T_1 > T_2$ এবং $E_1 > E_2$

কাজেই ১ম সিলিন্ডারে গ্যাসের তাপমাত্রা ২য় সিলিন্ডারে গ্যাসের তাপমাত্রার চেয়ে বেশি হওয়ায় ১ম সিলিন্ডারে গ্যাসের গতিশক্তি ২য় সিলিন্ডারের গ্যাসের গতিশক্তি অপেক্ষা বেশি।

৮। কোনো ঘরের তাপমাত্রা 32°C, শিশিরাঙ্ক 14°C এবং আপেক্ষিক আর্দ্রতা 48%। ওই সময় ঘরের বাইরে তাপমাত্রা 11°C ও আপেক্ষিক আর্দ্রতা 70%। 32°C ও 11°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ যথাক্রমে 33.6 mmHg ও 9.8 mmHg। 32°C এ গ্লেইসারের ধ্রুবক 1.63।

(ক) ওই ঘরে ঝুলানো আর্দ্র ও শুষ্ক বাল্ব হাইগ্রোমিটারে আর্দ্র বাল্ব থার্মোমিটার কত পাঠ দেখাবে ?

(খ) যদি ঘরের একটি জানালা খুলে দেওয়া হয় তাহলে জলীয় বাষ্প কোন দিকে চলাচল করবে গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মন্তব্য কর। [সি. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি,

$\theta_1 - \theta = G(\theta_1 - \theta_2)$

বা, $32° - 14° = 1.63\,(32° - \theta_2)$

বা, $32° - \theta_2 = \frac{18°}{1.63} = 11.04°$

$\therefore \theta_2 = 32° - 11.04° = 20.96°C$

এখানে,

ঘরের তাপমাত্রা, $\theta_1 = 32°C$

শিশিরাঙ্ক, $\theta = 14°C$

32°C এ গ্লেইসারের ধ্রুবক = 1.63

আর্দ্র বাল্বের পাঠ, $\theta_2 = ?$

(খ) $32°C$ তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ, $F_1 = 33.6$ mmHg

আপেক্ষিক আর্দ্রতা, $R_1 = 48\% = \frac{48}{100} = 0.48$

শিশিরাঙ্কে সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ f_1 হলে আপেক্ষিক আর্দ্রতা, $R_1 = \frac{f_1}{F_1}$

$\therefore \quad f_1 = R_1F_1 \quad = 0.48 \times 33.6$ mmHg

$= 16.128$ mmHg

ঘরের বাইরে, $11°C$ তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ, $F_2 = 9.8$ mmHg

আপেক্ষিক আর্দ্রতা, $R_2 = 70\% = \frac{70}{100} = 0.70$

শিশিরাঙ্কে সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ f_2 হলে আপেক্ষিক আর্দ্রতা,

$R_2 = \frac{f_2}{F_2}$

$\therefore \quad f_2 = R_2F_1 \quad = 0.70 \times 9.8$ mmHg

$= 6.86$ mmHg

যেহেতু $f_1 > f_2$ সুতরাং জলীয় বাষ্প ঘরের ভেতর থেকে বাইরে বের হবে।

সার-সংক্ষেপ

তাপ : তাপ এক প্রকার শক্তি যা গরম বা উচ্চ তাপমাত্রার বস্তু হতে নিম্ন তাপমাত্রার বস্তুতে তাপমাত্রার পার্থক্যের কারণে সঞ্চালিত হয়।

গ্যাসীয় সূত্রাবলি :

(১) বয়েলের সূত্র : তাপমাত্রা স্থির থাকলে কোনো নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের আয়তন তার চাপের ব্যস্তানুপাতিক।

(২) চার্লস-এর সূত্র : স্থির চাপে কোনো নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের আয়তন $0°C$ থেকে প্রতি ডিগ্রি সেলসিয়াস তাপমাত্রা পরিবর্তনের জন্য এর $0°C$ তাপমাত্রার আয়তনের নির্দিষ্ট ভগ্নাংশ $\frac{1}{273}$ অংশ পরিবর্তিত হয়।

(৩) চাপীয় সূত্র : স্থির আয়তনে কোনো নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের চাপ $0°C$ থেকে প্রতি ডিগ্রি সেলসিয়াস তাপমাত্রা পরিবর্তনের জন্য এর $0°C$ তাপমাত্রার চাপের নির্দিষ্ট ভগ্নাংশ $\frac{1}{273}$ অংশ পরিবর্তিত হয়।

আদর্শ গ্যাস : যে সব গ্যাস বয়েল এবং চার্লস-এর সূত্র মেনে চলে তাদেরকে আদর্শ গ্যাস বলে।

পরম শূন্য তাপমাত্রা : স্থির চাপে একটি নির্দিষ্ট ভরের কোনো গ্যাসের তাপমাত্রা ক্রমশ কমাতে থাকলে চার্লসের সূত্রানুযায়ী যে তাপমাত্রায় পৌঁছে তার আয়তন শূন্য হয় ও গ্যাসের গতিশক্তি সম্পূর্ণরূপে লোপ পায় তাকে পরম শূন্য তাপমাত্রা বলে।

সর্বজনীন গ্যাস ধ্রুবক, R : এক মোল আদর্শ গ্যাসের তাপমাত্রা এক ডিগ্রি বাড়ালে তা যে পরিমাণ কাজ সম্পন্ন করে তাকে সর্বজনীন গ্যাস ধ্রুবক বলে।

গড় বর্গ বেগ : দুই বা ততোধিক বেগের বর্গের গড় মানকে গড় বর্গ বেগ বলে।

গড় বর্গ বেগের বর্গমূল বা মূল গড় বর্গবেগ : দুই বা ততোধিক বেগের বর্গের গড় মানের বর্গমূলকে গড় বর্গবেগের বর্গমূল বা মূল গড় বর্গবেগ বলে।

শিশিরাঙ্ক : যে তাপমাত্রায় কোনো নির্দিষ্ট আয়তনের বায়ু এর মধ্যে অবস্থিত জলীয় বাষ্প দ্বারা সম্পৃক্ত হয়, সেই তাপমাত্রাকে শিশিরাঙ্ক বলে।

পরম আর্দ্রতা : বায়ুর প্রতি একক আয়তনে জলীয় বাষ্পের ভরকে ওই স্থানের পরম আর্দ্রতা বলে।

শক্তির সমবিভাজন নীতি : কোনো গতীয় সংস্থার মোট শক্তি তাপীয় সাম্যাবস্থায় প্রতিটি স্বাধীনতার মাত্রার মধ্যে সমভাবে বণ্টিত হয় এবং প্রতিটি স্বাধীনতার মাত্রার শক্তির পরিমাণ $= \frac{1}{2}$ KT।

স্বাধীনতার মাত্রা	:	একটি বস্তুর গতিশীল অবস্থা বা অবস্থান সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করার জন্য যত সংখ্যক স্বাধীন চলরাশির প্রয়োজন হয় তাকে স্বাধীনতার মাত্রা বলে।
প্রমাণ চাপ	:	সমুদ্রপৃষ্ঠে 45° অক্ষাংশে 273 K তাপমাত্রায় উল্লম্বভাবে অবস্থিত 760 mm উচ্চতাবিশিষ্ট শুষ্ক ও বিশুদ্ধ পারদস্তম্ভ যে চাপ দেয় তাকে প্রমাণ চাপ বলে।
প্রমাণ তাপমাত্রা	:	যে তাপমাত্রায় প্রমাণ চাপে অর্থাৎ 760 mm পারদ চাপে বরফ গলে পানিতে পরিণত হয় বা পানি জমে বরফে পরিণত হয় সেই তাপমাত্রাকে প্রমাণ তাপমাত্রা বলে।
বাষ্পচাপ	:	তরল থেকে নির্গত বাষ্প আধারের গায়ে যে চাপ প্রয়োগ করে তাকে বাষ্পচাপ বলে।
বায়ুচাপ	:	বায়ুতে অণুসমূহ অবিরত ইতস্তত ছুটাছুটি করার ফলে পাত্রের একক ক্ষেত্রফলের উপর যে বল প্রয়োগ করে তাকে বায়ুচাপ বলে।
এক বায়ুমণ্ডলীয় চাপ	:	0°C তাপমাত্রায় 45° অক্ষাংশে সমুদ্র সমতলে যে পরিমাণ বায়ুচাপ 760 mm পারদস্তম্ভের চাপের সমান হয়, তাকে এক বায়ুমণ্ডলীয় চাপ বা এক বায়ুচাপ (1 atm) বলে।
সম্পৃক্ত বাষ্প চাপ	:	কোনো নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় কোনো আবদ্ধ স্থানের বাষ্প যে সর্বাধিক চাপ প্রয়োগ করে তাকে সম্পৃক্ত বাষ্প চাপ বলে।
অসম্পৃক্ত বাষ্পচাপ	:	কোনো নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় কোনো আবদ্ধ স্থানের বাষ্প যদি সর্বাধিক বাষ্পচাপ অপেক্ষা কম চাপ প্রয়োগ করে তবে তাকে অসম্পৃক্ত বাষ্প চাপ বলে।
আপেক্ষিক আর্দ্রতা	:	কোনো নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় একটি নির্দিষ্ট আয়তনের বায়ুতে যে পরিমাণ জলীয় বাষ্প থাকে ওই তাপমাত্রায় ওই আয়তনের বায়ুকে সম্পৃক্ত করতে যে পরিমাণ জলীয় বাষ্পের প্রয়োজন হয় তাদের অনুপাতকে আপেক্ষিক আর্দ্রতা বলে।

বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তরের জন্য প্রয়োজনীয় বিষয়াবলির সার-সংক্ষেপ

১। বয়েলের সূত্র সমোষ্ণ প্রক্রিয়া মেনে চলে। আদর্শ গ্যাসের সমীকরণ $PV = nRT$.

২। পরম শূন্য তাপমাত্রা হচ্ছে 0 K বা – 273°C। স্থির তাপমাত্রায় নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের জন্য $P \propto \rho$।

৩। কোনো গ্যাসের অণুগুলোর গড় গতিশক্তি, $\bar{E} = \frac{3}{2}KT$। সম্পৃক্ত বাষ্প বয়েল ও চার্লসের সূত্র মানে না।

৪। সর্বজনীন গ্যাস ধ্রুবকের মান হলো 8.31 JK^{-1} $mole^{-1}$। অসম্পৃক্ত বাষ্প বয়েল ও চার্লসের সূত্র মানে।

৫। প্রমাণ চাপের ক্ষেত্রে সমুদ্রপৃষ্ঠের 45° অক্ষাংশকে বিবেচনা করা হয়।

৬। নাইট্রোজেন গ্যাসের ক্ষেত্রে $\gamma = 1.4$, যা সকল দ্বিপরমাণু গ্যাসের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

৭। T তাপমাত্রায় আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে অণুর গড় গতিশক্তি $\frac{3}{2}KT$।

৮। কোনো গ্যাসের মূল গড় বর্গবেগ এবং পরম তাপমাত্রার বর্গমূলের সমানুপাতিক।

৯। 27°C তাপমাত্রায় 4 g অক্সিজেনের মোট গতিশক্তি 467.78 J.

১০। একটি আদর্শ গ্যাসের তাপমাত্রা T হতে বৃদ্ধি করে 2 T করা হলে অণুগুলোর গড়বেগ দ্বিগুণ হবে।

১১। স্বাভাবিক তাপমাত্রা ও চাপে নাইট্রোজেনের ঘনত্ব 1.25 kgm^{-3} হলে মূল গড় বর্গবেগ 493.07 ms^{-1}।

১২। গ্যাসের চলরাশি হলো তাপমাত্রা, আয়তন ও চাপ। আর্দ্রতা গুণাঙ্কের একক Nsm^{-2}।

১৩। অসম্পৃক্ত বাষ্পচাপ f এবং সম্পৃক্ত বাষ্পচাপ F হলে $f < F$ হয়। গড় বেগ মূল গড় বর্গবেগ অপেক্ষা কিছু কম।

১৪। দ্বিপরমাণু গ্যাস অণুর স্বাধীনতার মাত্রা 5, বায়ুমণ্ডলের জলীয় বাষ্প ঘনীভবনের জন্য ঝড় হয়। বায়ুর আপেক্ষিক আর্দ্রতা কম হলে বাষ্পায়ন হবে দ্রুতগতিতে। বায়ুমণ্ডলে উপস্থিত জলীয় বাষ্পের চেয়ে সম্পৃক্ত বাষ্প কতখানি তাই আপেক্ষিক আর্দ্রতা। হাল্কা অণুগুলোর মূল গড় বর্গবেগ ভারী অণুর মূল গড় বর্গবেগ অপেক্ষা বেশি।

১৫। বাস্তব গ্যাস নিম্ন চাপে ও উচ্চ তাপমাত্রায় আদর্শ গ্যাসের ন্যায় আচরণ করে।

১৬। সিক্ত ও শুষ্ক বাল্ব আর্দ্রতামাপক যন্ত্রের দুই থার্মোমিটারের তাপমাত্রার পার্থক্য হঠাৎ বেড়ে গেলে বুঝা যায় ওই স্থানে আপেক্ষিক আর্দ্রতা হ্রাস পেয়েছে। তখন ভেজা কাপড় তাড়াতাড়ি শুকায়।

১৭। কোনো গ্যাসের একক আয়তনে অণুগুলোর গতিশক্তি 1.52×10^5 J হলে গ্যাসের চাপ হবে 1 atm। জলীয় বাষ্পের সংকট তাপমাত্রা 361°C। একই তাপমাত্রায় বিভিন্ন গ্যাসের অণুগুলোর গতিশক্তি সমান।

১৮। আপেক্ষিক আর্দ্রতা 100% হলে শিশিরাঙ্ক বায়ুর তাপমাত্রার সমান হবে?

১৯। 30°C তাপমাত্রায় একটি গ্যাসকে স্থির চাপে উত্তপ্ত করে আয়তন তিনগুণ করা হলে গ্যাসটির চূড়ান্ত তাপমাত্রা 636°C এবং ইহা চার্লসের সূত্র মেনে চলে। অণুর বেগ বণ্টন ভর ও তাপমাত্রার ওপর নির্ভর করে।

২০। গড় মুক্তপথ—

(ক) একক আয়তনে গ্যাসের অণুর সংখ্যার সমানুপাতিক (খ) প্রতিটি অণুর ব্যাসের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক (গ) গ্যাসের ঘনত্বের ব্যস্তানুপাতিক (ঘ) তাপমাত্রার ব্যস্তানুপাতিক।

২১। অসম্পৃক্ত বাষ্প চাপের ক্ষেত্রে (ক) বয়েলের ও চার্লসের সূত্র মেনে চলে (খ) ঠান্ডা করতে থাকলে ধীরে ধীরে চাপ কমে। গড় মুক্তপথ ঘনত্বের ব্যস্তানুপাতিক এবং অণুর ব্যাসের ব্যস্তানুপাতিক।

২২। পর্বতের চূড়ায় বায়ুর চাপ কম, পানির স্ফুটনাঙ্ক কম তাই রান্না করা কঠিন। $c_{rms} \propto \sqrt{T}$।

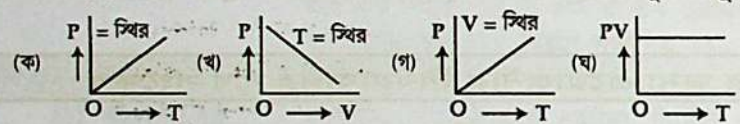
২৩। আদর্শ গ্যাসের বৈশিষ্ট্য হলো—

(ক) গ্যাসের গতিতত্ত্বের মৌলিক স্বীকার্য মেনে চলে;

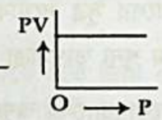
(খ) অণুসমূহের মধ্যে কোনো আকর্ষণ ও বিকর্ষণ নেই;

(গ) যেকোনো তাপমাত্রা ও চাপে $PV = nRT$ সমীকরণ মেনে চলে।

২৪। নিচের (ক) লেখচিত্রটি আদর্শ গ্যাসের আচরণকে সমর্থন করে কিন্তু অন্যগুলো সমর্থন করে না।



২৫। স্থির তাপমাত্রায় নির্দিষ্ট ভরের কোনো আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে PV – P লেখচিত্র হলো—



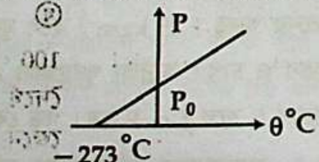
২৬। T তাপমাত্রায় আদর্শ গ্যাসের একটি অণুর গড় গতিশক্তি $\frac{3}{2}$KT। আবার 1 মোল বা 1 গ্রাম গ্যাসের গতিশক্তি $\frac{3}{2}$RT।

২৭। আদর্শ গ্যাসের চাপ, $P = \frac{1}{3}\rho c^2$। নিম্নচাপ ও উচ্চ তাপমাত্রায় বাস্তব গ্যাস আদর্শ গ্যাসের ন্যায় আচরণ করে।

২৮। $\frac{PV}{T}$ = ধ্রুবক, এই সূত্রটি সত্য যখন প্রক্রিয়াটি সমোষ্ণ নয় বা রুদ্ধতাপীয় প্রক্রিয়া নয়।

২৯। $\frac{PV}{2} = RT$, গ্যাস সমীকরণে V নির্দেশ করে 2 mole গ্যাসের আয়তন। গড় মুক্তপথ λ পরম তাপমাত্রার সমানুপাতিক ($\lambda \propto T$)। জলীয় বাষ্প যত বেশি হবে ঘনত্ব তত কমবে, বাষ্পায়ন তত কম হবে।

৩০। গ্যাসের পরিবর্তনশীল চলকগুলোর জন্য নিচের লেখচিত্রটি প্রযোজ্য।



৩১। আণবিক গতিশক্তি তাপমাত্রার উপর নির্ভরশীল। স্থির চাপে নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের ক্ষেত্রে $\rho \propto \frac{1}{T}$.

৩২। প্রত্যেক অণুর স্বাধীনতার মাত্রার গড় শক্তির পরিমাণ $\frac{1}{2}$KT। তাপমাত্রা বৃদ্ধি করে সম্পৃক্ত বাষ্পকে অসম্পৃক্ত করা যায়। নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় অণুর ভর যত কম হবে অধিক বেগসম্পন্ন অণুর সংখ্যা তত বেশি হবে।

৩৩। জলীয় বাষ্পের ঘনত্বের সাথে বায়ুর চাপের সম্পর্ক হলো $\rho \propto P$। তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে আবার জলীয় বাষ্পের চাপ বেড়ে যায়।

৩৪। আদর্শ গ্যাসের তাপমাত্রা T হতে বৃদ্ধি পেয়ে 2 T হলে অণুগুলোর গতিশক্তিও দ্বিগুণ হয়।

৩৫। আর্দ্রতামাপক যন্ত্রে দুই থার্মোমিটারের পাঠের পার্থক্য—

(ক) হঠাৎ হ্রাস পেলে ঝড় হতে পারে।

(খ) ধীরে ধীরে কমলে বৃষ্টি হতে পারে।

(গ) খুব কম হলে আবহাওয়া আর্দ্র হয়।

(ঘ) খুব বেশি হলে আবহাওয়া শুষ্ক হয়।

অনুশীলনী

(ক) বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ সম্পর্কটি কোন সূত্রকে সমর্থন করে ?

ⓚ বয়েলের সূত্র
ⓛ চার্লসের সূত্র
ⓜ চাপের সূত্র
ⓝ অ্যাভোগ্যাড্রোর সূত্র

২। স্থির চাপে নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের আয়তন এর পরম তাপমাত্রার—

(i) ব্যস্তানুপাতিক
(ii) সমানুপাতিক
(iii) বর্গের ব্যস্তানুপাতিক

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i
ⓛ i ও ii
ⓜ ii ও iii
ⓝ ii

৩। পিস্টন-সিলিন্ডারের ভেতর আবদ্ধ গ্যাসকে স্বাভাবিক তাপমাত্রা ও চাপে সঙ্কুচিত করে এর আয়তন অর্ধেক করা হলো। যদি তাপমাত্রা অপরিবর্তিত থাকে তবে চূড়ান্ত চাপ কত হবে ? [RUET Admission Test, 2014-15]

ⓚ $4.12 \times 10^5 N/m^2$
ⓛ $8.16 \times 10^5 N/m^2$
ⓜ $10.26 \times 10^5 N/m^2$
ⓝ $2.06 \times 10^5 N/m^2$

৪। আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে চাপ, আয়তন ও তাপমাত্রার মধ্যে সম্পর্ক হচ্ছে— [দি. বো. ২০১৬]

(i) $PV = RT$
(ii) $PV = nRT$
(iii) $PV = KT$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ ii ও iii
ⓛ i ও ii
ⓜ i ও iii
ⓝ i, ii ও iii

৫। পরম স্কেলে চাপের সূত্র হলো—

ⓚ $P \propto T^2$
ⓛ $P \propto \frac{1}{T}$
ⓜ $P \propto T$
ⓝ $P \propto \sqrt{T}$

৬। নিম্নলিখিত কোন ক্ষেত্রে একটি গ্যাস আদর্শ গ্যাসের ন্যায় আচরণ করে ? [কু. বো. ২০১৬; ব. বো. ২০১৫]

ⓚ নিম্নচাপ ও উচ্চ তাপমাত্রায়
ⓛ নিম্নচাপ ও নিম্ন তাপমাত্রায়
ⓜ উচ্চ চাপ ও নিম্ন তাপমাত্রায়
ⓝ উচ্চ চাপ ও উচ্চ তাপমাত্রায়

৭। আদর্শ গ্যাসের বৈশিষ্ট্য হলো—

(i) সকল তাপমাত্রা ও চাপে $PV = nRT$ সমীকরণ মেনে চলে
(ii) স্থির তাপমাত্রায় এর অভ্যন্তরীণ শক্তি এর আয়তনের উপর নির্ভরশীল
(iii) আদর্শ গ্যাসের অণুসমূহের মধ্যে কোনো আকর্ষণ ও বিকর্ষণ নেই

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii
ⓛ i ও iii
ⓜ ii ও iii
ⓝ i, ii ও iii

৮। 100°C তাপমাত্রায় 20g অক্সিজেন একটি 20 cm দৈর্ঘ্যের ঘনককে পূর্ণ করে। এক মোল অক্সিজেনের ভর 32 g; ঘনকের অভ্যন্তরে অক্সিজেনের চাপ কত ? [ঢা. বো. ২০১৫]

ⓚ 7800 kPa
ⓛ 242 kPa
ⓜ 65 kPa
ⓝ 12 kPa